
Г. И. КОЛЬНИЧЕНКО, Я. В. ТАРЛАКОВ,
А. В. СИРОТОВ, И. Н. КРАВЧЕНКО



ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Учебник

Издание второе, стереотипное



• САНКТ-ПЕТЕРБУРГ • МОСКВА • КРАСНОДАР •
2021

УДК 621.3
ББК 31.2я723

О 75 Основы электротехники : учебник для СПО / Г. И. Кольниченко, Я. В. Тарлаков, А. В. Сиротов, И. Н. Кравченко. — 2-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 204 с. : ил. — Текст : непосредственный.

ISBN 978-5-8114-8050-0

В учебнике изложены основные теоретические положения, включающие принципы и методы расчетов электрических цепей постоянного, однофазного и трехфазного токов. В книге приведены примеры и задачи с развернутыми численными решениями с целью выработки навыков практических расчетов электрических цепей, необходимых для понимания и изучения проблем эффективного генерирования, распределения и использования электрической энергии.

Учебник предназначен для студентов, обучающихся по специальностям среднего профессионального образования, при изучении электротехники.

УДК 621.3
ББК 31.2я723

Рецензенты:

А. Е. ПОЛЯКОВ — доктор технических наук, профессор кафедры автоматики и промышленной электроники Российского государственного университета им. А. Н. Косыгина;

Н. А. СТУШКИНА — кандидат технических наук, доцент, зав. кафедрой электроснабжения и электротехники им. академика И. А. Будзко Российского государственного аграрного университета — МСХА им. К. А. Тимирязева.



Обложка
П. И. ПОЛЯКОВА

© Издательство «Лань», 2021
© Коллектив авторов, 2021
© Издательство «Лань»,
художественное оформление, 2021

Авторский коллектив

Кольниченко Георгий Иванович – доктор технических наук, профессор кафедры автоматизации технологических процессов, оборудования и безопасности производств Мытищинского филиала Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана.

Тарлаков Яков Викторович – кандидат технических наук, доцент кафедры автоматизации технологических процессов, оборудования и безопасности производств Мытищинского филиала Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана.

Сиротов Александр Владиславович – доктор технических наук, старший научный сотрудник, заведующий кафедрой автоматизации технологических процессов, оборудования и безопасности производств Мытищинского филиала Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана.

Кравченко Игорь Николаевич – доктор технических наук, профессор кафедры технического сервиса машин и оборудования Российского государственного аграрного университета – Московской сельскохозяйственной академии им. К. А. Тимирязева.



Предисловие

Настоящий учебник предназначен для студентов средних профессиональных учебных заведений неэлектротехнических специальностей, изучающих курс «Электротехника».

Дисциплина «Электротехника» является важнейшей общепрофессиональной дисциплиной. Изучение электротехники – это основа подготовки специалистов, способных решать проблемы эффективного генерирования, распределения и использования электрической энергии.

Учебник «Основы электротехники» состоит из двух частей.

Часть 1. «Основы электротехники».

Часть 2. «Основы электроснабжения и энергосбережения».

В части 1 рассматриваются вопросы, связанные с методами расчета электрических цепей постоянного и синусоидального тока при установившихся режимах их работы. В учебнике особое внимание уделено выработке навыков практических расчетов электрических цепей. Приведенные примеры и задания развернутыми численными решениями необходимы для понимания и освоения других важных разделов электротехники и электроэнергетики, излагаемых во второй части книги.

Часть 2 включает в себя разделы, связанные с электрическими машинами и начальными сведениями об электроприводе, где дается представление об электрических станциях, электрических сетях и распределительных устройствах, энергосбережении и энергоэффективности.

На современном этапе развития цивилизации приоритетом в обеспечении энергетической и экологической безопасности является энергосбережение и повышение эффективности использования энергоресурсов и энергии, которые позволяют ослабить зависимость экономики и социальной сферы любой страны от объемов добычи или закупки энергетического сырья.

В России энергосбережение и повышение энергоэффективности объявлены важнейшими компонентами государственной политики. Проводниками такой политики в производстве и быту должны стать специалисты, обладающие соответствующими компетенциями и навыками, которые позволяли бы им не только решать сложные технологические и организационные проблемы, но и быть проводниками энергосберегающей идеологии, носителями высокой культуры потребления энергетических ресурсов и энергии.



Введение

Электротехника – это наука, изучающая вопросы технического применения электрических и магнитных явлений во всех областях современной жизни.

В настоящее время нет ни одной области современного производства и отрасли народного хозяйства, культуры и быта, где бы ни использовалась электрическая энергия. Научно-технический прогресс немислим без электрификации.

Широкое и разнообразное применение электрической энергии объясняется ее ценными свойствами. Главное из них состоит в том, что электрическая энергия наиболее универсальна, так как сравнительно легко преобразовывается в другие виды энергии, а также относительно легко может быть получена из других видов энергии; кроме того, её можно производить в огромных количествах на мощных электростанциях; её можно делить на любые части в электрических цепях (мощность приемников электроэнергии может быть от долей ватта до мегаватт); процессы, в которых используется электроэнергия, лежат в основе автоматизации, управления и регулирования; электроэнергию можно передавать на огромные расстояния, что дает возможность строить электростанции в местах, где имеются большие запасы природных ресурсов, и передавать ее в места, где располагаются энергоемкие потребители.

Начало электротехники заложили ученые XVIII и XIX столетий, когда был сделан ряд важных открытий в области изучения электромагнетизма и изобретений, связанных с его применением.

Во второй половине XVIII в. были проведены значительные работы в области изучения электротехнических явлений академиками Петербургской академии наук М. В. Ломоносовым, Г. В. Рихманом и Т. У. Эпинусом, который был одним из пионеров идеи о существовании связей между электрическими и магнитными явлениями.

Количественные соотношения, характеризующие механические взаимодействия электрически заряженных тел и механические взаимодействия магнитных масс полюсов магнита, первым опубликовал в 1785 г. Кулон.

Серия важнейших изобретений и работ началась с 1820 г. после открытия датским ученым Х. К. Эрстедом влияния электрического тока на магнитную стрелку, чем подтверждался факт существования магнитного поля вокруг проводника с током.

Французский ученый Д. Ф. Араго с помощью создаваемого электрическим током магнитного поля намагнитил кусок стали, создав первый электромагнит со стальным сердечником (1824). Его соотечественник А. М. Ампер открыл явление механического взаимодействия токов и установил закон этого взаимодействия, положив таким образом начало электродинамике (1826).

В 1821 г. английский ученый М. Фарадей показал, что проводник с током вращается вокруг магнитного полюса. В том же году было открыто явление термоэлектричества, позволившее непосредственно превращать тепловую энергию в электрическую.

В 1827 г. немецким ученым Г. С. Омом было найдено соотношение между силой тока, электродвижущей силой и сопротивлением проводника, по которому проходит ток, то есть был открыт закон Ома.

Отметим, что после создания первого химического генератора электрического тока (А. Вольта, В. В. Петров) к концу первой трети XIX в. были обнаружены и в значительной мере изучены химические, тепловые, световые и магнитные действия тока, установлены важнейшие законы электрических цепей.

Теоретическим фундаментом для развития электротехники послужило открытие Фарадеем закона электромагнитной индукции (1831), а также работы Дж. К. Максвелла и Э. Х. Ленца. На основании теоретических и экспериментальных исследований этих ученых уже в XIX в. появились первые образцы электрических машин, трансформаторов, электрических ламп. Особенно большие заслуги в этой области принадлежат русским ученым и изобретателям.

В 1833 г. академиком Петербургской академии наук Э. Х. Ленцем было установлено правило, названное его именем; затем экспериментально обоснован закон Джоуля — Ленца (1842). Им же совместно с академиком Б. С. Якоби были разработаны методы расчетов электромагнитов и открыта обратимость электрических машин. Б. С. Якоби построил первый в мире электродвигатель (1834–1838), он же является создателем гальванопластики (1838), изобретателем первого буквопечатающего телеграфного аппарата (1850). В 1802 г. русским ученым В. В. Петровым была открыта электрическая дуга. Первое ее практическое применение для освещения было осуществлено П. Н. Яблочковым с помощью изобретенной им электрической «свечи» (1875). Затем электрическую дугу использовали для сварки и резания металлов, что было сделано также русскими изобретателями Н. Н. Бенардосом и Н. Г. Славяновым. П. Н. Яблочков предложил оригинальные конструкции машин постоянного и переменного тока. Первую в мире лампу накаливания изобрел П. А. Лодыгин.

Советский ученый С. Н. Вавилов разработал теорию, связанную с явлением люминесценции, и под его руководством была разработана технология производства ламп «дневного» света.

По мере расширения практического применения электроэнергии возникала необходимость в изыскании способов экономичной передачи электрической энергии на значительные расстояния. Следует отметить первые опыты по передаче электрической энергии (Ф. А. Пироцкий, 1874) и теоретические исследования (Д. А. Логинов, 1880; М. Дюпре, 1881), в которых обоснована возможность экономичной передачи энергии на большие расстояния за счет повышения напряжения, а также открытия вращающегося магнитного поля (Г. Феррарис, Н. Тесла, 1888).

Последнее десятилетие XIX в. ознаменовалось новым периодом в технике использования электрической энергии в промышленном производстве. Возникла новая область техники — электроэнергетика, родоначальником которой являлся выдающийся русский электротехник М. О. Доливо-Добровольский, работавший в 1888–1890 гг. трехфазную систему токов и построивший первый в мире трехфазный генератор переменного тока. Созданный им асинхронный короткозамкнутый электродвигатель переменного тока является и поныне ос-

новным типом электродвигателя. В тот же период времени М. О. Доливо-Добровольский создал трехфазный трансформатор, а также трехфазную систему передачи и распространения электрической энергии, которая до сих пор действует во всем мире.

К наступившему XXI в. Россия являет собой мощную энергетическую державу. Без электроэнергии невозможна нормальная жизнь современного человека. Кроме того, непрерывное расширение области применения электрической энергии влечет за собой глубокое внедрение электротехники во все сферы жизнедеятельности человека.

Эти обстоятельства требуют обеспечения соответствующей профессиональной подготовки специалистов, которые должны обладать необходимой системой научных знаний, практических умений и производственных навыков в актуальных для них областях электротехники.



Глава 1. Основы электростатики

1.1. Электрический заряд и электромагнитное поле элементарных частиц

В структуру атомов и молекул вещества входят элементарные частицы. Некоторые из них обладают электрическим зарядом. Для изучения электротехники необходимо ознакомиться с основными свойствами электронов и протонов.

Протоны – частицы, обладающие положительным электрическим зарядом. Они входят в состав атомного ядра, электрический заряд которого в целом положительный. Занимая незначительную долю объема, ядро содержит практически массу атома.

Вокруг ядра находятся **электроны** – частицы с отрицательным электрическим зарядом. Электроны вращаются вокруг собственной оси и вокруг ядра по замкнутым орбитам.

Элементарные частицы, обладающие электрическим зарядом, окружены электромагнитным полем, причем электрический заряд имеет лишь частица материи, сосредоточенная в весьма малой области пространства. Вне этой области материя существует в виде электромагнитного поля.

Элементарные заряженные частицы и их электромагнитное поле, как и другие виды материи, обладают массой, энергией, количеством движения, но они и их электромагнитное поле являются особым видом материи, так как, кроме перечисленных выше свойств, обладают еще и электромагнитными свойствами, которые в классической механике не учитываются. Важнейшим из этих свойств является электрический заряд и силовое воздействие электромагнитного поля на заряженные частицы.

Электрический заряд элементарной частицы является ее физическим свойством, которое характеризует связь частицы с собственным электромагнитным полем. Электромагнитное поле проявляется различно в зависимости от того, движется или неподвижна заряженная частица, с которой это поле связано и взаимодействует.

С этой точки зрения различают электрическое и магнитное поля.

Электрическое поле есть материя, которая окружает неподвижные заряженные частицы и неразрывно связана с ними. Характерным свойством электрического поля является силовое воздействие на неподвижные заряженные частицы, внесенные в область пространства, заполненную этим видом материи.

Магнитное поле есть материя, которая окружает движущиеся заряженные частицы и связана с ними. Характерным свойством магнитного поля является силовое воздействие на движущиеся заряженные частицы, внесенные в область пространства, заполненную этим видом материи. На неподвижные заряженные частицы магнитное поле не действует.

Следует отметить, что элементарную частицу, обладающую зарядом, нельзя мыслить без электромагнитного поля, а электромагнитное поле может суще-

ствовать в свободном состоянии, будучи отделенным от заряженной частицы. Таковым является фотон, а также электромагнитное поле, излученное антенной. Распространение электромагнитного поля сопровождается непрерывным взаимным превращением магнитного и электрического полей. Эти два процесса неотделимы друг от друга. Скорость распространения электромагнитного поля в пустоте составляет около 300 000 километров в секунду (т. е. $3 \cdot 10^8$ м/с), т. е. равна наивысшей допустимой в природе скорости – скорости света.

Пустотой называется область пространства, в которой отсутствуют частицы вещества, но существует электромагнитное поле или другие поля (например, поле тяготения).

Итак, для выявления электрического поля необходимо взять *неподвижное* заряженное тело, так как на движущееся заряженное тело действует не только электрическое, но и магнитное поле.

Простейшим случаем электрического поля является поле неподвижных электрически заряженных тел. Такое поле называется электростатическим. Раздел науки, в котором изучают электростатические поля и их проявления, называется электростатикой.

1.2. Проводники, диэлектрики, полупроводники

При исследовании электрического поля в веществе необходимо учитывать электрические свойства вещества. Наименьшая частица вещества, которая сохраняет его свойства, называется молекулой, которая является комбинацией двух или более атомов.

Атом – это наименьшая частица элемента, которая сохраняет его химические характеристики.

Атом состоит из протонов, нейтронов и электронов. Протоны и нейтроны сгруппированы в центре атома и образуют ядро. Протоны заряжены положительно, а нейтроны не имеют электрического заряда. Электроны расположены на оболочках на различных расстояниях от ядра.

Количество электронов различных химических элементов не одинаково. Например, атом самого легкого элемента – водорода – имеет один электрон, а атом натрия – 11 электронов, а в атоме тяжелого элемента – урана – 92 электрона.

Общий отрицательный заряд электронов в атоме любого химического элемента равен положительному заряду ядра, поэтому атомы в обычном состоянии электрически нейтральны.

После удаления из атома или введения в него одного или нескольких элементов атом становится электрически заряженным, причем заряд его всегда оказывается кратным заряду электрона. Это объясняется тем, что электрон обладает элементарным (наименьшим известным) электрическим зарядом, равным $1,6 \cdot 10^{-19}$ кулона (К).

Недостаток электронов делает атом положительно заряженным, избыток электронов обуславливает общий его отрицательный заряд. То же самое можно

сказать о группе взаимосвязанных атомов, образующих молекулу. Атомы и молекулы, обладающие электрическим зарядом, называются и о н а м и .

Количество протонов в ядре атома называется атомным номером элемента, то есть номером элемента в периодической таблице Д. И. Менделеева. Атомные номера позволяют отличить один элемент от другого.

Каждый элемент имеет также атомную массу. Атомная масса определяется общим числом протонов и нейтронов в ядре. Электроны почти не дают вклада в общую массу атома; масса электрона составляет лишь $1/1836$ часть от массы протона, и этого недостаточно, чтобы ее учитывать.

Электроны вращаются вокруг ядра не произвольно, а по определенным (разрешенным) орбитам.

Находясь на одной из них, электрон обладает определенной энергией или, иначе говоря, занимает определенный энергетический уровень.

Возможен переход электрона с одной разрешенной орбиты на другую, в этом случае его энергия изменяется скачкообразно.

При переходе на более удаленную от ядра орбиту потенциальная энергия электрона повышается, так как такой переход совершается с преодолением сил притяжения электрона к ядру за счет энергии, поступившей извне (под действием тепла, света и т. п.).

Положение электрона в атоме на более удаленной орбите менее устойчиво. Атом, получивший порцию энергии, за счет которой электрон перешел с более устойчивой орбиты на менее устойчивую, называется в о з б у ж д е н н ы м .

Возбужденное состояние атома продолжается кратковременно (примерно 10^{-8} с), затем электрон перескакивает на одну из свободных орбит, более близких к ядру. При этом уровень энергии электрона понижается, а избыток энергии выделяется в виде электромагнитного излучения. Таким образом, поглощение и испускание энергии электроном осуществляется только порциями (квантами).

Электроны, характеризующиеся более высоким энергетическим уровнем (более удаленные от ядра), менее прочно связаны с ядром.

Электроны наружного слоя участвуют в образовании химических связей, т. е. атом может отдать электроны из своего наружного слоя, становясь положительным ионом, или, наоборот, присоединить электроны к наружному слою, становясь отрицательным ионом. Такие электроны называются валентными.

Валентные электроны в основной зоне занимают более высокие уровни энергии, они слабо связаны с ядрами и поэтому, как было сказано раньше, могут выходить из состава атомов.

При увеличении энергии валентный электрон приобретает такое энергетическое состояние, когда он не связан с ядром какого-либо одного атома, а переходит от одного атома к другому. Такие электроны принято называть свободными. Из энергетических уровней свободных электронов образуется энергетическая зона свободных электронов.

Свободные электроны при определенных условиях участвуют в образовании электрического тока, в связи с чем энергетическая зона свободных электронов называется зоной проводимости.

Валентным или свободным может стать любой электрон, если его энергия достигла значения, соответствующего одному из энергетических уровней той или другой зоны.

Вещества по их электрическим свойствам могут быть разделены на три основных класса:

- проводники (проводящие вещества);
- диэлектрики (изолирующие вещества);
- полупроводники (полупроводящие вещества).

Проводящими веществами являются такие, в которых в значительном количестве существуют обладающие электрическим зарядом свободные элементарные частицы (электроны или положительные и отрицательные ионы), приходящие в упорядоченное движение под действием электрического поля и тем самым образующие в веществе упорядоченный электрический ток. К проводящим веществам, прежде всего, относятся все металлы, обладающие электропроводностью, т. е. свойством проводить электрический ток под действием электрического поля. Она обусловлена наличием свободных электронов, т. е. электронов, слабо связанных с атомами, легко переходящими от атома к атому и образующими при упорядоченном движении электрический ток в металле. Самой высокой проводимостью среди металлов обладает серебро, далее в порядке убывания проводимости идут медь, золото и алюминий. И серебро, и медь, и золото имеют валентность, равную единице. Однако серебро является лучшим проводником, поскольку его свободные электроны более слабо связаны.

Значительной электропроводностью обладают также электролиты – растворы солей, оснований и кислот.

Способность проводить ток проявляют также газы в ионизированном состоянии.

Диэлектриками являются вещества, в которых обладающие зарядом свободные частицы имеются в практически ничтожном количестве вследствие того, что валентные электроны одних атомов присоединяются к другим атомам, заполняя их валентные оболочки и препятствуя таким образом образованию свободных электронов. Диэлектрики препятствуют проникновению электричества и потому служат изолирующей средой. К диэлектрикам относятся различные пластмассы, слюда, фарфор, стекло, мрамор, резина, различные смолы, лаки и другие материалы.

Полупроводящими веществами являются вещества, занимающие по значению своей электропроводности промежуточное положение между проводниками и диэлектриками. Им присущ ряд характерных свойств, связанных с существованием в них не только электропроводности, обусловленной свободными электронами (электронами проводимости), но также электропроводности, обусловленной перемещением под действием электрического поля так называемых дырок, т. е. незанятых валентными электронами мест в атомах. Перемещение в веществе от атома к атому этих незанятых электронами мест по существу является результатом перемещения одного за другим валентных электронов. Такое перемещение дырок эквивалентно по своему результату

движению положительно заряженных частиц с зарядом, равным по абсолютной величине заряду электрона. Именно наличие полупроводников с различными типами электропроводности – электронной или n-типа (negativ) и дырочной или p-типа (positiv) – открывает возможности создания большой группы полупроводниковых приборов, обладающих весьма важными характеристиками.

К полупроводниковым веществам относится ряд элементов, таких как германий (Ge), кремний (Si), селен (Se), а также ряд сплавов и окислов. В них возникает электронно-дырочная проводимость, т. е. движение под действием внешнего электрического поля электронов в зоне проводимости в одном направлении и дырок в валентной зоне в другом направлении. Но особенно ценной является возможность путем внедрения примесей придать полупроводнику преимущественно электронную или преимущественно дырочную проводимость.

1.3. Закон Кулона. Напряженность электрического поля

Обычным состоянием окружающих нас тел является состояние электрически нейтральное, хотя они и состоят из частиц, обладающих электрическим зарядом. Это объясняется равенством общего положительного заряда ядер атомов общему отрицательному заряду электронов.

Тело может получить электрический заряд в результате какого-либо процесса, который приведет к неравенству в объеме тела (или части его) положительного и отрицательного заряда. В том и другом случае заряженные частицы не пропадают, а передаются от одного тела другому или перемещаются в данном теле, т. е. происходит разделение положительно и отрицательно заряженных частиц.

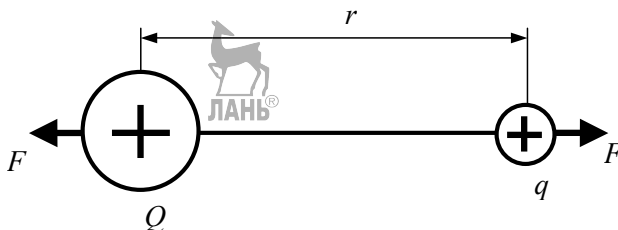


Рис. 1.1. Взаимодействие двух точечных заряженных тел

Электризация тел может быть осуществлена трением, электростатической индукцией или в результате других физических и химических процессов. Некоторые из них будут рассмотрены далее.

Неподвижное тело, обладающее электрическим зарядом, так же как и неподвижная элементарная заряженная частица, окружено электрическим полем. Электрическое поле неподвижного заряженного тела (частицы) называется электростатическим.

Отмеченное ранее свойство электрического поля – силовое действие на неподвижные заряженные частицы и тела – используется с целью его обнаружения и изучения. Для этого нужно поместить в пространство, окружающее те-

ло с зарядом Q , другое тело с зарядом q (рис. 1.1). Будем называть первое тело вместе с его полем исследуемым, а второе тело – пробным.

Опыт показывает, что на каждое из двух заряженных тел действуют одинаковые силы F , направленные так, что тела с зарядами одного знака отталкиваются, а тела с зарядами разных знаков притягиваются.

Закон Кулона гласит: сила взаимодействия двух точечных зарядов прямо пропорциональна произведению этих зарядов, обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними и направлена по линии, соединяющей эти заряды. Для вакуума этот закон имеет вид

$$F = \frac{Q \cdot q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (1.1)$$

где Q и q – величины зарядов точечных тел;

r – расстояние между их центрами;

$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ – коэффициент пропорциональности, значение которого определяется выбором системы единиц.

Величина ϵ_0 в знаменателе этого коэффициента называется электрической постоянной, которая в системе (СИ) имеет значение:

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{фарада}}{\text{метр}} \left[\frac{\phi}{\text{м}} \right]. \quad (1.2)$$

Другие величины, входящие в формулу (1.1), имеют следующие единицы измерения: F – ньютон [н]; количество электричества q – кулон [к].

В диэлектрике силы взаимодействия двух точечных зарядов равны:

$$F' = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 \epsilon r^2}, \quad (1.3)$$

где ϵ – диэлектрическая проницаемость диэлектрика. Она показывает, во сколько раз сила кулоновского взаимодействия зарядов в диэлектрике меньше, чем в вакууме.

Предположим, что размеры пробного тела и его заряд q столь малы, что заряд Q исследуемого тела и его электрическое поле не изменяются, т. е. остаются такими же, как и в случае уединения. Пробное тело при этом может рассматриваться лишь как «инструмент» для регистрации механической силы.

Помещая пробное заряженное тело в различные точки, получаем возможность исследовать интенсивность электрического поля.

Согласно закону Кулона, сила пропорциональна величине пробного заряда. В связи с этим интенсивность электрического поля в данной точке удобно оценить величиной силы, приходящейся на единицу положительного заряда пробного тела, которая называется **напряженностью** электрического поля.

Напряженность электрического поля – векторная величина. Направление вектора $\vec{E}$ совпадает с направлением вектора силы $\vec{F}_1$, действующей на положительный пробный заряд, помещенный в данную точку поля. Напряженность не зависит от наличия или отсутствия в данном поле пробных зарядов. Она зависит от свойств самого поля, которые определяются зарядом – источником,

расстоянием от него до точки поля, в которой измеряется, напряженностью и средой, в которой создано поле. В системе СИ напряженность электрического поля измеряется в *вольтах на метр* [В/м].

Имея в виду формулу (1.1), вычислим напряженность поля, создаваемого зарядом Q :

$$E = \frac{F}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}. \quad (1.4)$$

Если заряд Q окружает среда с диэлектрической проницаемостью ϵ , то напряженность создаваемого поля:

$$E' = \frac{F'}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \epsilon} \frac{Q}{r^2}. \quad (1.5)$$

Графически электрическое поле изображается *силовыми линиями*. Силовые линии начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных или уходят в бесконечность. На рис. 1.2 изображены линии напряженности полей положительного заряда (рис. 1.2а) и отрицательного (рис. 1.2б). На рис. 1.3а изображены силовые линии поля для системы положительного и отрицательного заряда, на рис. 1.3б – системы из двух положительных зарядов.

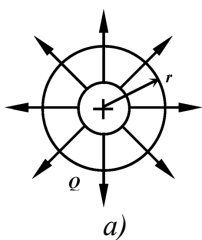


Рис. 1.2. Линии напряженности электрического поля точечного заряженного тела

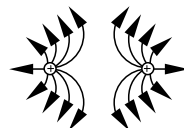
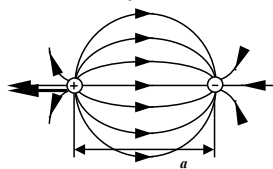
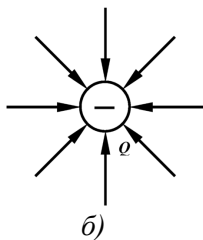


Рис. 1.3. Линии напряженности электрического поля группы из двух точечных заряженных тел

Вектор напряженности направлен по касательной к линиям напряженности. Электрическое поле, напряженность которого в каждой точке одинакова по величине и направлению, называется *однородным*. Силовыми линиями однородного поля являются параллельные прямые, расположенные на одинаковом расстоянии друг от друга. Из рис. 1.2 и 1.3 видно, что электрическое поле заряда Q является неоднородным.

Опыт показывает, что если на электрический заряд q одновременно действуют электрические поля нескольких зарядов, то результирующая сила оказывается равной геометрической сумме сил, действующих со стороны каждого поля в отдельности. Это означает, что электрические поля подчиняются принципу суперпозиций: если в данной точке пространства различные заряды создают электрические поля с напряженностью $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$ и т. д., то вектор напряженности электрического поля в этой точке равен сумме векторов напряженности всех электрических полей.

1.4. Электрический потенциал, напряжение и электродвижущая сила (ЭДС)

Рассмотрим свободную частицу с положительным зарядом Q в равномерном электрическом поле. Эта частица будет перемещаться в направлении действующей на нее со стороны поля силы F . При перемещении частицы на пути l между точками 1 и 2 совершается работа:

$$A_{12} = Fl = Eql,$$

где E – напряженность поля.

Работа считается положительной, если заряженная частица перемещается по направлению сил поля. Если перемещение вызывается действием посторонних сил против направления сил электрического поля, работа считается отрицательной.

Аналогичные выводы можно сделать и для неравномерного поля, определяя работу при перемещении заряженной частицы между точками 1 и 2 как сумму элементарных значений работы dA , совершаемой на каждом бесконечно малом отрезке пути dl , в пределах которого напряженность поля можно считать постоянной:

$$A_{12} = Q \int_1^2 E_n dl,$$

где E_n – проекция вектора напряженности поля на направление движения заряда.

Величина работы, которая совершается силами поля при перемещении заряженной частицы с произвольным зарядом, не может служить характеристикой поля, так как она зависит не только от напряженности поля, но и от заряда частицы.

С энергетической точки зрения электрическое поле характеризуется отношением работы к величине заряда перемещаемой частицы:

$$\frac{A_{12}}{Q} = U_{12}.$$

Это отношение для данного поля является постоянным и называется электрическим напряжением.

Электрическое напряжение есть энергетическая характеристика поля вдоль рассматриваемого пути из одной точки в другую, которой оценивается возможность совершения работы при перемещении заряженных частиц между этими точками.

Нетрудно найти связь напряженности равномерного поля с напряжением между двумя любыми точками:

$$U = \frac{A}{Q} = \frac{Eql}{Q}; \quad U = El. \quad (1.6)$$

Учитывая, что работа, совершаемая при перемещении заряженной частицы в электрическом поле, зависит от положения начальной и конечной точек пути, для расчетов можно ввести энергетическую характеристику поля в каждой точке, численное значение которой является функцией положения точки. Такой

характеристикой является электрический потенциал φ . Потенциал не зависит от величины заряда, внесенного в данную точку поля, и определяется свойствами самого поля. Величина напряженности электрического поля, создаваемого зарядом или группой зарядов, убывает по мере удаления от этих зарядов и на бесконечности стремится к нулю. Поэтому при решении задач о потенциалах обычно за нулевой принимают потенциал точки, бесконечно удаленной от зарядов, или же потенциал Земли. Отсюда следует определение для потенциала поля, убывающего в бесконечности: потенциал – величина, численно равная работе поля по перемещению единичного заряда из данной точки в бесконечность. Физический смысл имеет не сам потенциал, а разность потенциалов. Связано это с тем, что потенциал любой точки поля может быть принят за нулевой.

В рассматриваемом нами примере частица, обладающая зарядом Q , испытывает воздействие силы F со стороны электрического поля, то есть эта частица обладает потенциальной энергией. В точке 1 эта энергия равна A_1 . При перемещении ее из точки 1 в точку 2 совершается работа A_{12} , связанная с действием той же силы F .

Работу A_{12} нужно рассчитывать как убыль потенциальной энергии заряженной частицы при перемещении ее между указанными точками.

Следовательно, потенциальная энергия в точке 2:

$$A_2 = A_1 - A_{12}.$$

Отношение потенциальной энергии заряженной частицы, помещенной в данную точку электрического поля, к величине ее заряда называется электрическим потенциалом поля в этой точке:

$$\varphi_1 = \frac{A_1}{Q}; \quad \varphi_2 = \frac{A_2}{Q}.$$

Напряжение между двумя точками электрического поля равно разности потенциалов поля в этих точках:

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2. \quad (1.7)$$

Таким образом, напряжение – это разность потенциалов двух точек, численно равная работе, которая производится при перемещении единицы положительного заряда (одного кулона) между двумя точками электрического поля (например: между двумя точками электрической цепи).

Единицей измерения потенциала и напряжения служит вольт [В]. 1 вольт – это напряжение между двумя точками цепи, когда при перемещении заряда в 1 кулон совершается работа в 1 джоуль:

$$U = \frac{A}{Q} [В], \quad (1.8)$$

$$\text{т. е. Вольт} = \frac{\text{Джоуль}}{\text{Кулон}}.$$

Для измерения малых напряжений используют милливольты [мВ]: $1 \text{ мВ} = 10^{-3} \text{ В}$ и микровольты [мкВ]: $1 \text{ мкВ} = 10^{-6} \text{ В}$, а для больших напряжений – киловольты [кВ], $1 \text{ кВ} = 10^3 \text{ В}$.

В источниках электроэнергии (рис. 1.4) один зажим источника имеет высший в данной цепи потенциал, а второй – низший потенциал. Первый зажим положительный, второй отрицательный. Во внешней цепи (т. е. за пределами источника) положительные заряды движутся от точек с более высоким потенциалом к точкам с более низким потенциа-

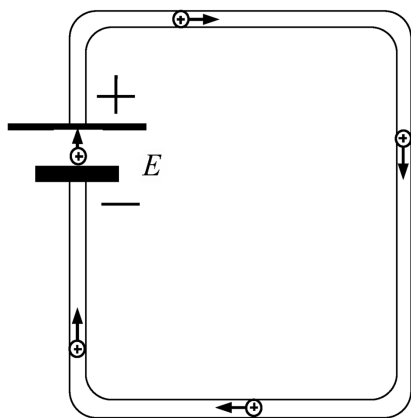


Рис. 1.4. Схема замкнутой цепи

лом. Но внутри источника электроэнергии положительные заряды должны перемещаться от точки с низким потенциалом к точке с высоким потенциалом (т. е. от «–» к «+»).

Такое перемещение зарядов (к точке высшего потенциала) совершается за счет сил неэлектрического происхождения, называемых *сторонними силами*, т. е. силами стороннего электрического поля. Под сторонним электрическим полем понимается поле, обусловленное тепловыми процессами, химическими реакциями, контактными явлениями, механическими силами и другими неэлектро-

магнитными процессами, характеризующееся, как и всякое электрическое поле, силовым воздействием на заряженные частицы и тела, находящиеся в этом поле. Причина, заставляющая положительные заряды перемещаться от точек низшего потенциала к точкам высшего потенциала, называется *электродвижущей силой* (сокращенно ЭДС). Она обозначается E или e .

В понятие электродвижущей силы входит ЭДС, индуцируемая в проводнике при изменении во времени магнитного потока.

Если в замкнутой электрической цепи под действием ЭДС возникает электрический ток, то эта ЭДС совершит работу на поддержание тока в цепи. Эта работа совершается внутри источника ЭДС за счет энергии какого-либо вида: в электрическом генераторе – за счет механической работы первичного двигателя, приводящего во вращение электрический генератор; в гальванических элементах и аккумуляторах – за счет электрохимической энергии, в термоэлементах – за счет тепловой энергии и т. д.

Наличие ЭДС во всех случаях является признаком преобразования какой-либо формы энергии в электрическую в источниках электрической энергии.

Работа сторонних сил A , отнесенная к единице положительного заряда Q , равна ЭДС источника электроэнергии:

$$E = \frac{A}{Q} \text{ или } A = EQ. \quad (1.9)$$

Единица измерения ЭДС такая же, как у напряжения, – вольт.

1.5. Электрическая емкость

Заряд проводящего тела пропорционален потенциалу тела, если диэлектрическая проницаемость в каждой точке среды является величиной постоянной. В этом случае потенциал проводника φ пропорционален заряду проводника Q . Следовательно, можно написать, что

$$Q = C\varphi.$$

Величину C называют электрической емкостью тела.

Таким образом, электрическая емкость проводника равна отношению заряда проводника к его потенциалу:

$$C = \frac{Q}{\varphi} \quad (1.10)$$

при этом предполагают, что потенциал равен нулю в точках, бесконечно удаленных от проводника.

Емкость – это скалярная величина, численно равная заряду, который нужно сообщить проводнику, чтобы его потенциал изменился на единицу. Емкость определяется геометрическими размерами проводника, его формой и свойствами окружающей среды (ее диэлектрической проницаемостью ε) и не зависит от материала проводника. За единицу емкости в системе СИ принимают емкость такого проводника, потенциал которого изменяется на 1 В при сообщении ему заряда в 1 кулон. Эта единица емкости называется 1 фарада [Ф].

$$1 \text{ Ф} = \frac{\text{Кулон}}{\text{Вольт}} = \text{Фарада} [\text{Ф}].$$

1 Ф – это очень большая емкость. На практике используют микрофарады ($1 \text{ мкФ} = 10^{-6} \text{ Ф}$), нанофарады ($1 \text{ нФ} = 10^{-9} \text{ Ф}$) и пикофарады ($1 \text{ пФ} = 10^{-12} \text{ Ф}$).

Наличие вблизи проводника других тел изменяет его емкость, так как потенциал проводника зависит и от электрических полей, создаваемых зарядами, наведенными в окружающих телах вследствие электростатической индукции. Можно создать систему проводников, которая будет обладать емкостью значительно большей, чем уединенный проводник, и притом не зависящей от окружающих тел. Такую систему называют *конденсатором*. Простейший конденсатор состоит из двух проводников (обкладок), расположенных на малом расстоянии друг от друга. Электрическое поле заряженного конденсатора практически полностью сосредоточено между обкладками (внутри) конденсатора. Линии вектора напряженности поля начинаются на одной обкладке и заканчиваются на другой. Заряды на обкладках одинаковы по величине и противоположны по знаку. Основной характеристикой конденсатора является его емкость, под которой понимают величину, пропорциональную заряду одной из обкладок и обратно пропорциональную разности потенциалов между обкладками:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{q}{U}, \quad (1.11)$$

$$\text{откуда заряд } q = CU. \quad (1.12)$$

Емкость конденсатора зависит от его размеров, формы и диэлектрической проницаемости ϵ диэлектрика, находящегося между обкладками. В случае плоского конденсатора его емкость:

$$C = \frac{\epsilon \epsilon_0 S}{d}, \quad (1.13)$$

где S – площадь одной пластины конденсатора;
 d – расстояние между пластинами (обкладками).

1.6. Примеры к главе 1

Пример 1.1. Определить емкость плоского воздушного конденсатора, у которого площадь обкладки $S = 100 \text{ см}^2 = 100 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$, расстояние между обкладками конденсатора $d = 5 \text{ см} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$, напряжение между обкладками $U = 100 \text{ В}$.

Решение.

Величину емкости рассчитываем по формуле (1.13), полагая, что $\epsilon = 1$, $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$:

$$C = \frac{\epsilon \epsilon_0 S}{d} = \frac{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 100 \cdot 10^{-4}}{5 \cdot 10^{-2}} \approx 17,7 \cdot 10^{-12} \text{ Ф} = 17,7 \text{ пФ}.$$

Пример 1.2. Между обкладками плоского воздушного конденсатора, имеющего площадь $S = 1800 \text{ см}^2 = 1800 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ и напряжение $U_0 = 1,2 \text{ кВ}$, расстояние $d = 0,5 \text{ см} = 0,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$. Определить напряженность электрического поля и заряд конденсатора. Как изменятся эти величины, если конденсатор отключить от источника напряжения, а пространство между обкладками конденсатора заполнить парафином, у которого относительная диэлектрическая проницаемость $\epsilon = 2$?

Решение.

Напряженность электрического поля конденсатора определяем по формуле (1.6):

$$E_0 = \frac{U_0}{d} = \frac{1200}{0,5 \cdot 10^{-2}} = 240000 \frac{\text{В}}{\text{м}} = 2,4 \text{ кВ/см}.$$

Для определения заряда рассчитываем емкость конденсатора по формуле (1.13):

$$C = \frac{\epsilon \epsilon_0 S}{d} = \frac{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 1800 \cdot 10^{-4}}{0,5 \cdot 10^{-2}} \approx 0,318 \cdot 10^{-9} \text{ Ф} = 318 \text{ пФ}.$$

Заряд определим по формуле (1.12):

$$Q = C_0 U_0 = 0,318 \cdot 10^{-9} \cdot 1200 = 3,82 \cdot 10^{-7} \text{ К}.$$

После отключения конденсаторов от источника напряжения заряд Q сохраняется неизменным и в том случае, если воздух, как диэлектрик между пластинами, заменить парафином. При этом предполагается, что утечки заряда нет.

Емкость конденсатора с парафином будет уже другой, так как в формуле (1.13) вместо $\epsilon = 1$ надо поставить $\epsilon = 2$, т. е. C_n будет в 2 раза больше C_0 :

$$C_n = 2C_0 = 2 \cdot 318 = 636 \text{ пФ}.$$

При этом же заряде Q и увеличении емкости напряжение между обкладками уменьшится (см. формулу (1.12)):

$$U_n = \frac{Q}{C_n} = \frac{3,82 \cdot 10^{-7}}{0,636 \cdot 10^{-9}} = 600 \text{ В}.$$

Напряженность поля также уменьшится:

$$E_n = \frac{U_n}{d} = \frac{600}{0,5 \cdot 10^{-2}} = 1,2 \text{ кВ/см}.$$

Вывод: При замене диэлектрика заряд конденсатора, отключенного от источника напряжения, сохраняется неизменным; напряжение между обкладками и напряженность поля изменяются обратно пропорционально относительной диэлектрической проницаемости.

Пример 1.3. Решить задачу 1.2 при условии, что конденсатор остается подключенным к источнику напряжения.

Решение.

Если конденсатор после замены диэлектрика остается подключенным к источнику питания, то напряженность поля при любом диэлектрике остается неизменной (геометрические размеры конденсатора также не изменились):

$$E_0 = E_n = \frac{U_0}{d} = \frac{1200}{0,5 \cdot 10^{-2}} = 240000 \frac{\text{В}}{\text{м}} = 2,4 \text{ кВ/см}.$$

Изменение емкости конденсатора (в данном случае увеличение в 2 раза) приведет к увеличению заряда в 2 раза:

$$Q_n = C_n U_0 = 0,636 \cdot 10^{-9} \cdot 1200 = 7,64 \cdot 10^{-7} \text{ К}.$$

Контрольные вопросы к главе 1

1. Что такое электромагнитное поле?
2. Что такое электрический заряд?
3. Что такое свободные электроны?
4. В чем принципиальное отличие проводников, диэлектриков, полупроводников?
5. Сформулируйте закон Кулона, напишите его математическое выражение, назовите все величины, входящие в эту формулу. В каких единицах они измеряются?
6. Что такое напряженность электрического поля, в каких единицах она измеряется? Как графически изображается электрическое поле?
7. Что такое диэлектрическая проницаемость?
8. Что такое потенциал, разность потенциалов, электродвижущая сила? В каких единицах они измеряются?
9. Что называется электрической емкостью?
10. Как устроен конденсатор? Напишите формулу емкости плоского конденсатора.

Глава 2. Электрические цепи постоянного тока

2.1. Основные электрические параметры

Как известно из курса физики, электрическим током I называют упорядоченное (направленное) движение электрических зарядов (электронов или ионов). Он равен скорости изменения величины заряда Q через поперечное сечение проводника:

$$I = \frac{dQ}{dt}. \quad (2.1)$$

Плотность электрического тока (δ) определяется его величиной, приходящейся на единицу площади S поперечного сечения проводника:

$$\delta = \frac{I}{S}. \quad (2.2)$$

Единица измерения тока (силы тока) I – ампер [А].

Плотность тока δ в системе СИ измеряется в А/м².

Если ток в проводнике не изменяется с течением времени, то такой ток называется постоянным. За положительное направление тока принимается направление движения положительных зарядов. Положительное направление тока на схемах указывается стрелкой.

В п. 1.4 объяснен физический смысл потенциала, электрического напряжения и электродвижущей силы.

Потенциал φ_A произвольной точки А электрического поля соответствует работе, совершаемой силами поля по переносу единичного положительного заряда из одной точки в точку, потенциал которой равен нулю.

Электрическое напряжение U_{AB} – это скалярная величина, характеризующая электрическое поле на рассматриваемом участке АВ и равная разности потенциалов:

$$U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B.$$

Электродвижущая сила (ЭДС) E – скалярная величина, характеризующая способность сторонних сил вызывать электрический ток.

Напомним, что ЭДС, напряжение и потенциал измеряются в вольтах [В].

Важным параметром электрической цепи является сопротивление (R) [единица измерения сопротивления – Ом]:

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (2.3)$$

где ρ – удельное сопротивление материала проводника, Ом·м;

l – длина проводника, м;

S – сечение проводника, м².

Из формулы следует, что чем длиннее проводник, тем больше его сопротивление, но чем больше сечение, тем сопротивление меньше.

Сопротивление 1 Ом имеет проводник, через который при напряжении в 1 В течет ток 1 А.

Удельное сопротивление ρ – это сопротивление проводника длиной 1 м и сечением 1 мм².

Сопротивление проводника зависит от температуры:

$$R_T = R_0 [1 + \alpha(T - T_0)], \quad (2.4)$$

где R_T – сопротивление при температуре T ;

R_0 – сопротивление при начальной температуре T_0 ;

α – относительное приращение сопротивления при изменении температуры на 1°C.

Величина G , обратная электрическому сопротивлению, называется электрической проводимостью:

$$G = \frac{1}{R}. \quad (2.5)$$

Единица измерения проводимости – Сименс [См].

2.2. Электрическая цепь: основные элементы, понятия и законы

Электрической цепью называют систему, состоящую из источников электрической энергии (источников питания), приёмников (потребителей) и соединяющих их электрических проводов, вдоль которых энергия от источника передаётся потребителю. Источники питания, провода и потребители являются основными элементами электрической цепи. Кроме основных, электрические цепи содержат дополнительные элементы в виде приборов, оборудования и аппаратуры, обеспечивающих контроль и управление режимами работы цепи в целом и её элементов.

Источники питания образуют *внутреннюю часть* электрической цепи, а потребитель совместно с соединительными проводами, приборами, выключателями и т. д. – *внешнюю часть*.

Если электрическая цепь замкнута, то по ней проходит электрический ток. Его прохождение по цепи связано с процессами непрерывного преобразования энергии в каждом из её элементов:

– в источниках питания имеет место преобразование в электрическую энергию других видов энергии: механической энергии в электрическую в генераторах, химической в электрическую в гальванических элементах и аккумуляторах, тепловой в электрическую в термоэлементах, лучистой в электрическую в фотоэлементах и т. д.;

– в приёмниках происходит обратное преобразование электрической энергии в другие виды энергии: в механическую в двигателях, в тепловую в нагревательных устройствах, в световую в источниках света и химическую в аккумуляторах и установках различных отраслей промышленности.

В источниках питания в процессе преобразования каких-либо видов энергии в электрическую возбуждается электродвижущая сила (ЭДС), которая вызывает в замкнутой цепи электрический ток. Участки цепи, содержащие ЭДС, называют *активными*, а без ЭДС – *пассивными*. Для удобства изображения, анализа и расчёта электрические цепи при графическом изображении представляются в виде схем замещения, которые называются электрическими

схемами. Эти схемы состоят из отдельных условно изображённых реальных элементов, соединённых тем или иным образом. Схема замещения является расчётной моделью реальной цепи.

Электрические цепи в зависимости от ряда характерных для них признаков подразделяются на группы и имеют свои наименования. Так, цепи, по которым проходят постоянные токи, называются электрическими цепями постоянного тока. Если электрическое сопротивление цепи не зависит от проходящего по нему тока, то такие цепи называются линейными электрическими цепями. В этих цепях каждый элемент имеет вольт-амперную характеристику (т. е. зависимость $U = f(I)$) в виде прямой линии. Если вольт-амперная характеристика элемента цепи непрямолинейна, то такой элемент называется нелинейным. Электрические цепи, в которые входит хотя бы один нелинейный элемент, называют нелинейными.

В зависимости от числа приёмников электрической энергии, числа источников питания и способа их соединений различают электрические цепи *простые* (или неразветвленные) и *сложные* (или разветвлённые), цепи с *одним источником питания* и цепи с *несколькими источниками питания*.

На рис. 2.1 приведена схема простой (т. е. неразветвленной) электрической цепи постоянного тока с одним источником питания.

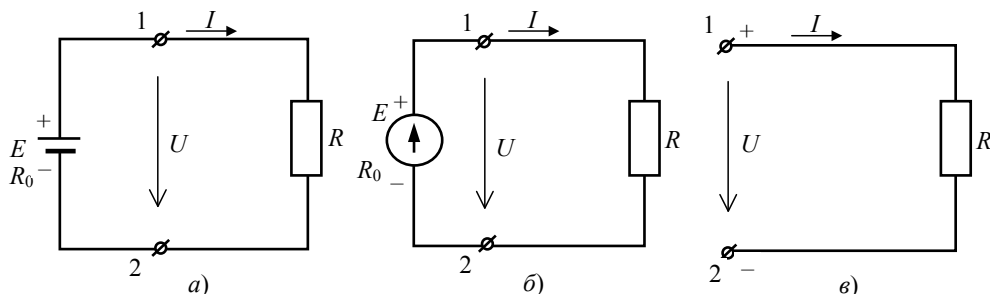


Рис. 2.1. Схема неразветвленной электрической цепи с одним источником питания

Элементами схемы рис. 2.1а являются аккумулятор (или гальванический элемент) с ЭДС E и внутренним сопротивлением R_0 и приёмник с сопротивлением R . Сопротивление соединительных проводов пренебрежимо мало и поэтому не учитывается в данном случае. На рис. 2.1б изображена такая же простейшая цепь, в которой источник питания – генератор постоянного тока с ЭДС E и внутренним сопротивлением R_0 .

На схемах указаны положительные направления ЭДС E , напряжения U и тока I . На схеме рис. 2.1а знаками «+» и «-» обозначена полярность внешних зажимов источника. Напомним, что электрический ток – это направленное движение электрических зарядов. На внешнем пассивном участке ток направлен от положительного полюса источника к отрицательному, а внутри источника – от точек низшего потенциала (т. е. от «-») к точкам высшего потенциала (т. е. к «+»). Перенос зарядов во внешней цепи происходит под действием электрического поля в проводнике, а перемещение их в источнике возможно только за счёт сил неэлектрического происхождения, называемых сторонними силами. Интенсивность сторонних сил характеризуется значением ЭДС.

Таким образом, стрелка, обозначающая положительное направление ЭДС, направлена от минуса к плюсу, а стрелка, обозначающая положительное направление напряжения, – от плюса к минусу. За положительное направление тока также выбрано направление от точки высшего потенциала к точке низшего потенциала (т. е. от плюса к минусу).

В реальных электрических цепях потребители не присоединяются непосредственно к зажимам источника. Они подключаются к проводам электрических сетей, питание которых осуществляется от электрических станций или подстанций. В подобных случаях можно говорить, что потребитель подключается к зажимам 1 и 2 с напряжением U , как показано на схеме рис. 2.1в.

Работа реальных электрических элементов цепи характеризуется определёнными величинами, связанными с их токами, напряжениями, ЭДС и мощностями. Поэтому задачей анализа и расчёта электрической цепи является установление связи между ЭДС, напряжениями, токами и параметрами цепи. При этом параметрами цепей постоянного тока в установившемся режиме являются их сопротивления R и проводимости G .

Важными понятиями, характеризующими топологические свойства электрических цепей и необходимыми для их анализа, являются понятия узла, ветви и контура.

Узлом (точкой разветвления) называют точку электрической цепи, в которой соединяется 3 или более проводников (ветвей). Под узлом понимают также провод с нулевым сопротивлением, к которому подключено три и более ветвей.

Ветвь – это участок цепи без разветвлений между двумя соседними узлами, по которому проходит один и тот же ток.

Контур – замкнутый путь по ветвям схемы. Существуют важные понятия независимого и зависимого контура (см. п. 2.3).

Элементы электрических цепей могут соединяться *последовательно или параллельно*. При *последовательном* соединении элементов по ним проходит один и тот же ток, поэтому в пределах ветви ток один и тот же. Таким образом, в любой электрической цепи токов столько, сколько ветвей.

Параллельным называют такое соединение, при котором две или более ветвей присоединены к двум узлам, отличающимся друг от друга потенциалами.

Смешанным соединением элементов цепи называют сочетание их последовательных и параллельных соединений. Например, на рис. 2.2 приведена схема разветвлённой цепи постоянного тока со смешанным соединением её элементов.

Схема рис. 2.2 содержит 4 ветви. В первой ветви, по которой протекает ток I_1 , соединяются последовательно: сопротивление R_1 , источник питания с напряжением U на его зажимах a и b и сопротивление R_2 . Между точками 1 и 2 с напряжением U_{12} включены параллельные ветви, каждая со своим сопротивлением (R_3 , R_4 и R_5) и соответственно с токами I_2 , I_3 , I_4 . Элементы первой ветви соединены последовательно с участком 1–2, образуя таким образом схему смешанного соединения.

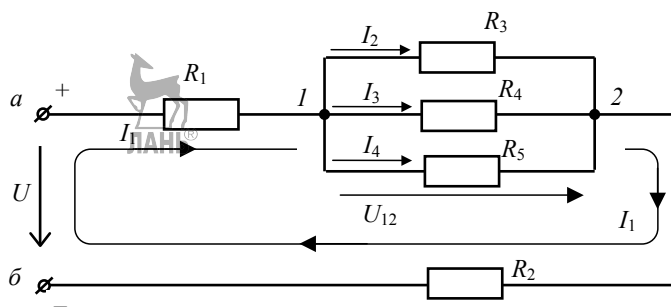


Рис. 2.2. Электрическая схема разветвлённой цепи постоянного тока

Основные законы.

Основными законами, устанавливающими соотношения между ЭДС, напряжениями, токами и сопротивлениями, являются закон Ома и I и II законы (правила) Кирхгофа. С помощью этих законов можно провести анализ и расчёт любых электрических цепей. Так, в неразветвленной схеме рис. 2.1а, б под действием ЭДС E будет возникать ток I , значение которого определяется законом Ома:

$$I = \frac{E}{R_0 + R}, \quad (2.6)$$

где E – ЭДС источника;

R_0 – внутреннее сопротивление источника.

Для участка электрической цепи, сопротивление которого R и напряжение на котором U , закон Ома записывается в виде

$$I = \frac{U}{R} \quad \text{или} \quad U = I \cdot R. \quad (2.7)$$

Произведение $I \cdot R$ называют падением напряжения. Таким образом, *напряжение на любом пассивном участке электрической цепи (т. е. не содержащем ЭДС) равно произведению тока участка на сопротивление этого участка.*

Сложные (т. е. разветвлённые) схемы можно рассчитывать с помощью законов Кирхгофа, которые являются следствием закона сохранения энергии.

По I закону Кирхгофа алгебраическая сумма токов в узле (точке разветвления) электрической цепи равна нулю.

$$\sum I = 0. \quad (2.8)$$

При этом токи, направленные к узлу, следует брать с одним (произвольно выбранным) знаком, а токи, направленные от узла, – с противоположным знаком.

Для узла «1» (рис. 2.2) уравнение I закона Кирхгофа можно записать в виде

$$I_1 - I_2 - I_3 - I_4 = 0$$

или

$$I_1 = I_2 + I_3 + I_4,$$

что позволяет I закон сформулировать так: сумма токов, направленных к узлу, равна сумме токов, направленных от узла.

Уравнения II закона Кирхгофа записываются для контуров электрической цепи. Согласно II закону Кирхгофа, в замкнутом контуре алгебраическая сумма падений напряжений на элементах этого контура равна алгебраической сумме ЭДС:

$$\sum I \cdot R = \sum E. \quad (2.9)$$

При составлении уравнений по II закону Кирхгофа *произвольно* намечаются направления обхода контуров, при этом положительными считаются те ЭДС, направления которых совпадают с направлением обхода контура, а падения напряжения считаются положительными на тех участках, на которых совпадают направление тока (напряжения) и направление обхода контура.

Напишем уравнения II закона Кирхгофа для контуров схемы рис. 2.2, обходя их по часовой стрелке

для контура	2, R ₂ , б, а, R ₁ , R ₃ , 2:
	$I_1 \cdot R_2 - U + I_1 \cdot R_1 + I_2 \cdot R_3 = 0;$
для контура	1, R ₃ , 2, R ₄ , 1:
	$I_2 \cdot R_3 - I_3 \cdot R_4 = 0;$
для контура	1, R ₄ , 2, R ₅ , 1:
	$I_3 \cdot R_4 - I_4 \cdot R_5 = 0.$

Работа и мощность в цепи постоянного тока.

Рассмотрим простейшую электрическую цепь, состоящую из источника энергии с ЭДС E и внутренним сопротивлением R_0 и приемника энергии в виде сопротивления $R_{аб}$ (рис. 2.3).

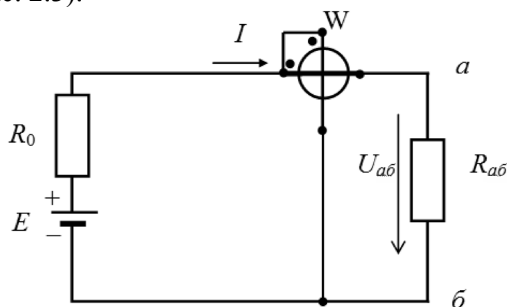


Рис. 2.3. Электрическая цепь с ваттметром W

Под действием электрического поля, создаваемого ЭДС E , в электрической цепи возникает ток I и энергия электрического поля затрачивается на перемещение электрических зарядов по цепи. Можно подсчитать работу и мощность как во всей цепи, так и на её отдельных участках.

Измерение мощности в цепях постоянного тока производится при помощи электроизмерительных приборов – ваттметров (рис. 2.3, прибор W). В ваттметре имеются две катушки: неподвижная и подвижная. Неподвижная катушка ваттметра (последовательная цепь прибора) включается последовательно с тем сопротивлением, мощность в котором измеряется, подвижная катушка (параллельная цепь ваттметра) включается параллельно тому сопротивлению, в котором прибор измеряет мощность. В схеме рис. 2.3 ваттметр измеряет мощность в сопротивлении $R_{аб}$: неподвижная катушка прибора (изображённая утолщённой

линией на схеме) включена последовательно с $R_{a\delta}$, а подвижная катушка (изображенная вертикальной тонкой линией) включена параллельно $R_{a\delta}$. Поэтому показание прибора равно

$$P_W = U_{a\delta} \cdot I = I^2 \cdot R_{a\delta}.$$

Работа для всей цепи

$$A = E \cdot q = E \cdot I \cdot t \text{ или } A = I^2 \cdot (R_{a\delta} + R_0) \cdot t = Pt.$$

Единицей работы служит джоуль:

$$1 \text{ Дж} = \text{В} \cdot \text{А} \cdot \text{с}.$$

Мощность P характеризует интенсивность преобразования энергии из одного вида в другой в единицу времени. Мощность, развиваемая источником электрической цепи (рис. 2.3), равна

$$P = \frac{A}{t} = E \cdot I = I^2 \cdot R_{a\delta} + I^2 \cdot R_0 = I^2 \cdot (R_{a\delta} + R_0),$$

а на участке $a\delta$:

$$P_{a\delta} = \frac{A_{a\delta}}{t} = U_{a\delta} \cdot I = I^2 \cdot R_{a\delta} = \frac{U_{a\delta}^2}{R_{a\delta}},$$

где вместо тока I введено его выражение $I = \frac{U_{a\delta}}{R_{a\delta}}$.

Единицей мощности является ватт [Вт]:

$$1 \text{ Вт} = \text{Дж/с},$$

т. е. 1 Вт – это мощность, при которой за одну секунду (1 с) совершается работа в 1 Дж. В системе СИ ватт используется как единица для измерения самых различных видов мощности. В частности, для электрических цепей ватт есть мощность тока в 1 ампер при напряжении на концах проводника в 1 вольт.

Основная единица энергии (работы) – джоуль – очень мала. Поэтому практической единицей электрической энергии служит 1 киловатт·час (кВт·ч). Имея в виду, что $1 \text{ кВт} = 10^3 \text{ Вт}$, а $1 \text{ ч} = 3600 \text{ с}$, получим

$$1 \text{ кВт} \cdot \text{ч} = 1000 \cdot 3600 = 3\,600\,000 \text{ Дж} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ Дж}.$$

Баланс мощности электрической цепи. На основании закона сохранения энергии мощность, развиваемая источником электрической энергии, должна быть равна мощности преобразования в цепи электрической энергии в другие виды энергии:

$$\sum E \cdot I = \sum I^2 \cdot R, \quad (2.10)$$

где $\sum E \cdot I$ – сумма мощностей, развиваемых источниками;

$\sum I^2 \cdot R$ – сумма мощностей всех приёмников и необратимых преобразований энергии внутри источников (потери из-за внутренних сопротивлений).

Тепловое действие электрического тока.

Тепловым действием тока называют явление нагрева проводника проходящим по нему током. По закону Джоуля – Ленца количество тепловой энергии Q [Дж], которое выделяется за время t [с] в проводнике с сопротивлением R [Ом] проходящим по нему постоянным током I [А], равно

$$Q = I^2 R t \text{ джоулей или } Q = 0,24 I^2 R t \text{ калорий.} \quad (2.11)$$

Тепловое действие электрического тока используется в бытовых и промышленных нагревательных приборах, электросварке. На тепловом действии основана работа защитных устройств электрической цепи.

Источники электрической энергии.

В источниках электрической энергии происходит преобразование тепловой, механической и других видов энергии в электрическую.

Зависимость напряжения U на зажимах источника от тока I , проходящего по источнику, называют внешней характеристикой, т. е. $U = f(I)$.

Идеальный источник ЭДС E (рис. 2.4а) – это источник, от которого напряжение на зажимах источника U не зависит от тока I . Внутреннее сопротивление источника $R_b = 0$.

Внешняя характеристика идеального источника ЭДС приведена на рис. 2.4б.

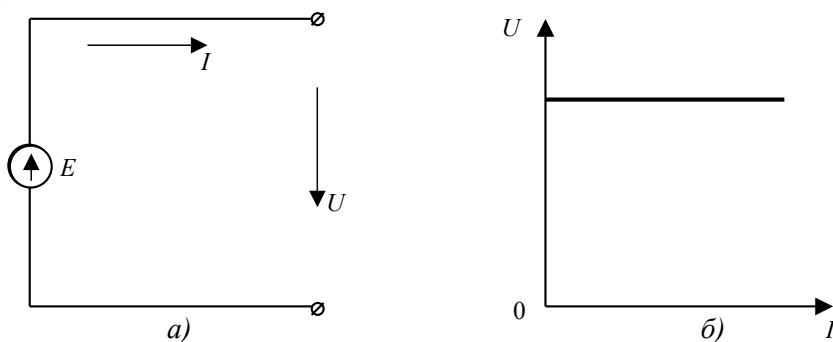


Рис. 2.4

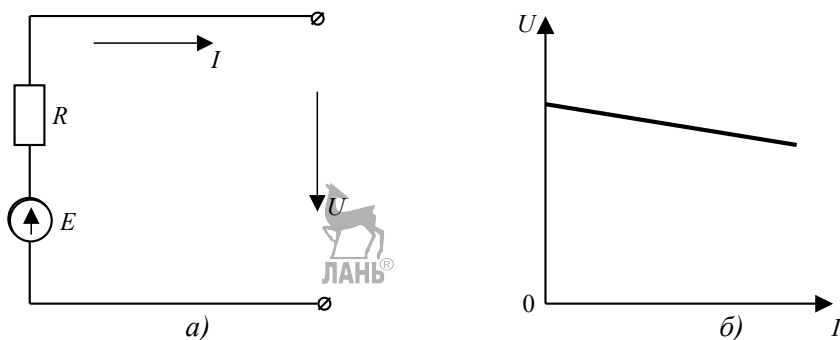


Рис. 2.5

Реальный источник ЭДС E приведен на рис. 2.5а. Внутреннее сопротивление источника (R) не равно 0.

$$U = E - IR. \quad (2.12)$$

Внешняя характеристика реального источника приведена на рис. 2.5б.

Идеальный источник тока (на рис. 2.6а) – это источник, у которого ток I не зависит от напряжения U . Внутреннее сопротивление такого источника (R) равно бесконечности, внутренняя проводимость равна 0 ($g = 1/R = 0$).

Внешняя характеристика идеального источника тока приведена на рис. 2.6б.

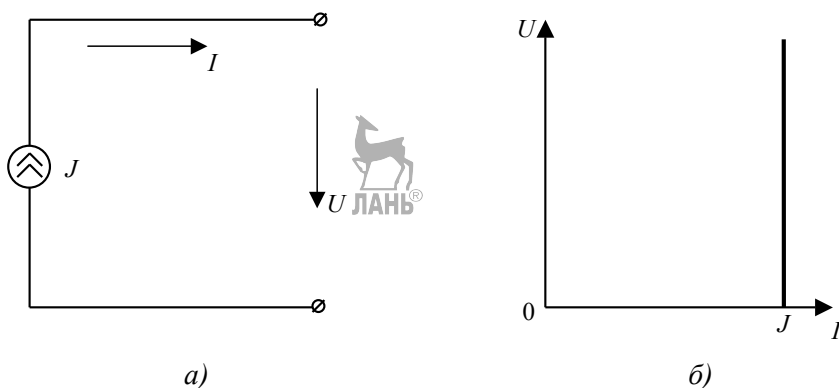


Рис. 2.6

Реальный источник тока (рис. 2.7) – это источник с внутренней проводимостью (g), отличной от нуля ($g = 1/R$). Обычно реальный источник тока изображается в виде идеального источника тока J и включенного параллельно ему внутреннего сопротивления R .

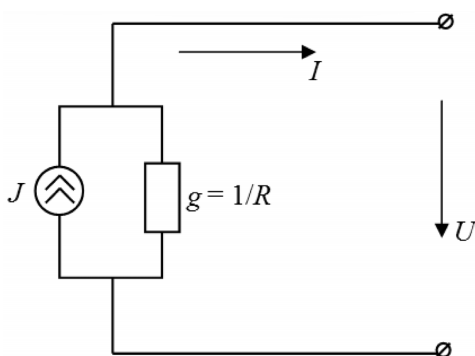


Рис. 2.7

Иногда для упрощения расчета цепей с несколькими источниками тока и ЭДС удобно перейти от источников тока к источникам ЭДС или наоборот. Переход от схемы источника тока (рис. 2.7) к эквивалентной схеме реального источника ЭДС (рис. 2.5) осуществляется по формулам:

$$E = \frac{J}{g}; \quad R = \frac{1}{g}. \quad (2.13)$$

Переход от схемы реального источника ЭДС (рис. 2.5) к схеме реального источника тока (рис. 2.7) осуществляется по формулам:

$$J = \frac{E}{R}; \quad g = \frac{1}{R}. \quad (2.14)$$

Источники напряжения и тока являются активными элементами цепи.

Последовательное и параллельное включение источников ЭДС.

Последовательное включение источников ЭДС применяют для увеличения подводимого к приемнику напряжения (рис. 2.8).

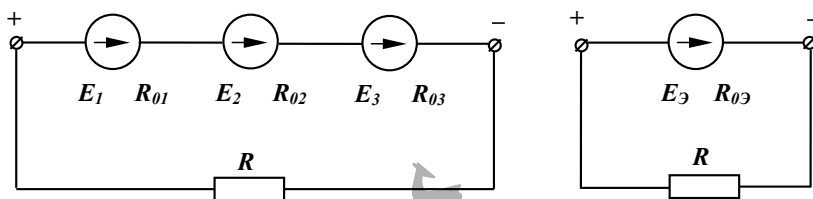


Рис. 2.8. Последовательное включение источников ЭДС

Эквивалентная ЭДС последовательно соединенных источников равна алгебраической сумме ЭДС отдельных элементов:

$$E_{\Sigma} = E_1 + E_2 + E_3, \quad E_{\Sigma} = \sum_{k=1}^{k=n} E_k. \quad (2.15)$$

Внутреннее сопротивление эквивалентного источника равно арифметической сумме внутренних сопротивлений заменяемых элементов:

$$R_{0\Sigma} = R_{01} + R_{02} + R_{03}, \quad R_{0\Sigma} = \sum_{k=1}^{k=n} R_k. \quad (2.16)$$

Параллельное включение источников применяется для увеличения тока и мощности (рис. 2.9).

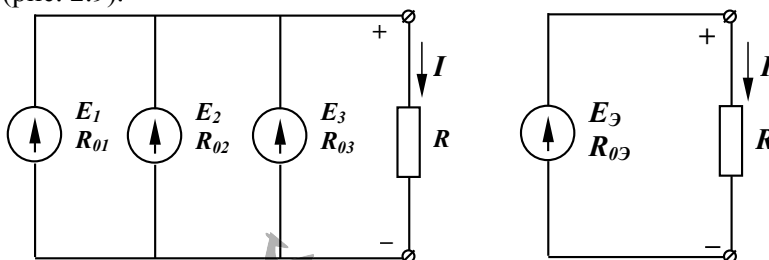


Рис. 2.9. Параллельное включение источников ЭДС

В частном случае, когда $E_1 = E_2 = \dots = E_{\Pi}$ и $R_{01} = R_{02} = \dots = R_{0\Pi}$, эквивалентная ЭДС будет равна

$$E_{\Sigma} = E, \quad (2.17)$$

эквивалентная проводимость источников:

$$G_{0\Sigma} = n G_0, \quad (2.18)$$

где $G_0 = \frac{1}{R_0}$.

При параллельном соединении источников с разными ЭДС, т. е. когда $E_1 \neq E_2 \neq \dots \neq E_{\Pi}$ и $R_{01} \neq R_{02} \neq \dots \neq R_{0\Pi}$, эквивалентная ЭДС и эквивалентное внутреннее сопротивление источника определяются по формулам:

$$E_{\Sigma} = \frac{\sum_{k=1}^{k=n} E_k G_{ok}}{\sum_{k=1}^{k=n} G_{ok}}, \quad (2.19)$$

$$\frac{1}{R_{0\Sigma}} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{R_{ok}}, \quad \text{т. е. } G_{0\Sigma} = \sum_{k=1}^{k=n} G_{ok}. \quad (2.20)$$

Режимы работы электрической цепи.

Из всех возможных режимов работы электрической цепи наиболее характерными являются четыре: номинальный режим, режим холостого хода (хх), режим короткого замыкания (кз) и согласованный режим.

Номинальный режим источников и приемников электрической цепи характеризуется тем, что напряжения, токи и мощности их соответствуют тем значениям, на которые они рассчитаны заводами-изготовителями. При этом гарантируются наилучшие условия работы (экономичность, долговечность и т. д.). Номинальные данные указываются в паспортах на все электротехнические устройства. Так, по номинальному значению напряжения рассчитывается изоляция токоведущих частей, а по номинальному току – условие их предельно допустимого нагрева.

Режим электрической цепи или отдельных источников и потребителей, при котором ток равен нулю, называется *режимом холостого хода*.

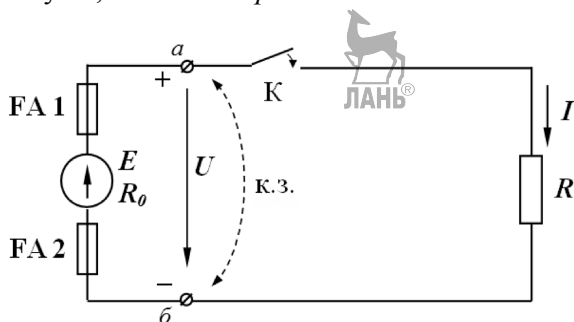


Рис. 2.10. Электрическая цепь

При холостом ходе выключатель К отключен, а ток и напряжение в режиме ХХ:

$$I_{XX} = 0, U_{XX} = E. \quad (2.21)$$

Если сопротивление между двумя точками, к которым подключен участок цепи, практически равно нулю, то на этом участке имеет место *короткое замыкание*. В схеме рис. 2.10 режим КЗ будет получен, если между точками а и б будет включен проводник с нулевым сопротивлением.

Ток короткого замыкания:

$$I_{кз} = \frac{E}{R_0}. \quad (2.22)$$

Так как обычно $R \gg R_0$, ток короткого замыкания значительно превышает номинальный. Это может вывести из строя источник и электроустановку. Для защиты от коротких замыканий устанавливаются плавкие предохранители или автоматы максимального тока. На рис. 2.10 предохранители имеют обозначения **FA 1, FA 2**.

Согласованный режим. Если внешнее сопротивление цепи равно внутреннему сопротивлению источника, то такой режим называется согласован-

ным. $R = R_0$ – условие согласованности. При этом на внешнем участке цепи развивается наибольшая мощность:

$$P_2 = P_{MAX}.$$

Согласованный режим используется во многих схемах, например для соединения датчиков с контрольно-измерительными приборами.

2.3. Расчет линейных цепей постоянного тока

Довольно часто задача расчета электрических цепей формулируется следующим образом: известна схема соединения элементов цепи, известны сопротивления всех резисторов и ЭДС всех источников, требуется найти токи во всех или части элементов цепи. При этом чаще всего приходится иметь дело со сложными, т. е. разветвленными, цепями. Анализ таких цепей существенно упрощается, если в схемах провести определенные преобразования.

Метод эквивалентного преобразования схем заключается в том, что сложные участки цепи заменяются более простыми, или эквивалентными. Эквивалентной называется такая замена элементов сети, при которой режим работы части схемы, не затронутой преобразованием, остается таким же, как и до преобразования, т. е. напряжения и токи незатронутой части схемы остаются прежними.

Примером такого преобразования служит замена последовательного, или параллельного, или смешанного соединения одним эквивалентным сопротивлением.

При последовательном соединении сопротивлений эквивалентное сопротивление равно сумме сопротивлений отдельных элементов:

$$R_{\text{экв}} = \sum_{i=1}^n R_i, \quad (2.23)$$

где R_i – сопротивление i -го элемента в последовательном соединении; n – количество последовательно соединённых сопротивлений.

В цепи с параллельно соединёнными элементами эквивалентная проводимость $G_{\text{экв}}$ равна сумме проводимостей n отдельных ветвей:

$$G_{\text{экв}} = \sum_{i=1}^n G_i, \quad (2.24)$$

где G_i – проводимость i -й параллельной ветви, равная величине, обратной сопротивлению этой (т. е. i -й) ветви.

По величине $G_{\text{экв}}$ определяется эквивалентное сопротивление разветвлённого участка:

$$R_{\text{экв}} = \frac{1}{G_{\text{экв}}}.$$

Для примера вычислим эквивалентное сопротивление участка 1–2 схемы (рис. 2.2):

$$G_{\text{экв12}} = G' + G'' + G''' = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5},$$

где G', G'', G''' – соответственно проводимости первой, второй и третьей параллельной ветви участка 1–2:

$$R_{\text{экв12}} = \frac{1}{G_{\text{экв12}}}.$$

В частном, но весьма распространенном случае, когда параллельно соединены два сопротивления R_1 и R_2 , формула для расчёта эквивалентного сопротивления будет иметь вид

$$\frac{1}{R_{\text{экв}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2}, \text{ откуда } R_{\text{экв}} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}. \quad (2.25)$$

2.3.1. Расчет цепей с одним источником электрической энергии

Очень часто к одному источнику электрической энергии подключается несколько различных электрических устройств, схемы замещения которых могут представлять смешанные соединения резисторов. Существует большое разнообразие схем со смешанным соединением элементов. Однако сущность метода легко может быть понята на примере расчета цепи с пятью ветвями и одним источником электроэнергии (рис. 2.11).

Постепенным преобразованием исходная схема упрощается и приводится к простейшей схеме цепи, состоящей из последовательно соединенных источника электроэнергии и одного эквивалентного сопротивления.

Пример 2.1

Дано:

- 1) схема электрической цепи (рис. 2.11);
- 2) входное напряжение цепи $U = 100 \text{ В}$;
- 3) численные значения сопротивлений (на схеме рис. 2.11).

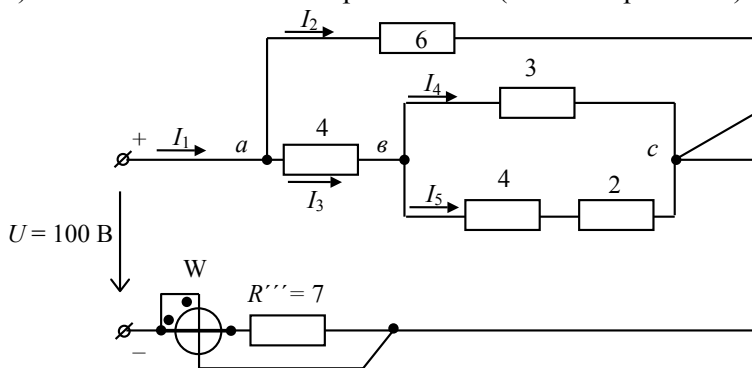


Рис. 2.11. Схема цепи со смешанным соединением сопротивлений

Цель расчёта:

Рассчитать численные значения токов, текущих по ветвям схемы.

Решение.

Схема (рис. 2.11) содержит 3 узла (a, b, c). Количество ветвей, включённых между узлами, равно 5. По каждой из них протекает свой ток (I_1, I_2, I_3, I_4, I_5), т. е. количество неизвестных токов равно 5. Для их нахождения применим ме-

тод эквивалентирования с целью упрощения схемы и приведения её к схеме с единственным эквивалентным сопротивлением. Каждый этап преобразования схемы связан с расчётом эквивалентных сопротивлений преобразуемых участков. Каждому этапу преобразования отвечает, новая всё более простая схема (рис. 2.12–2.14).

1-й этап: расчёт эквивалентного сопротивления участка bc :

$$\frac{1}{R_{bc}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4+2} = \frac{1}{2} \text{ См},$$

$$R_{bc} = 2 \text{ Ом}.$$

Результатом первого этапа преобразования явилось то, что вместо разветвлённого участка между точками b и c на рис. 2.12 появилось сопротивление R_{bc} , которое вошло в состав нижней ветви между узлами a и c и соединяется последовательно с сопротивлением 4 Ома, ток которого I_3 . Следовательно и по R_{bc} протекает тот же ток I_3 .

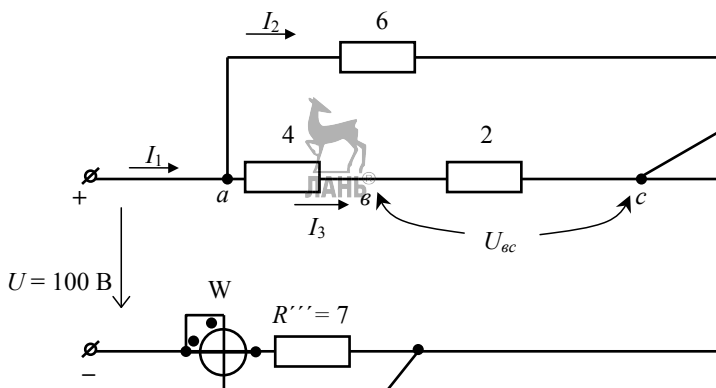


Рис. 2.12. Схема – результат 1-го этапа преобразования

2-й этап: расчёт эквивалентного сопротивления участка ac (рис. 2.12).

$$\frac{1}{R_{ac}} = \frac{1}{6} + \frac{1}{4+2} = \frac{1}{3} \text{ См},$$

$$R_{ac} = 3 \text{ Ом}.$$

В результате получим схему рис. 2.13.

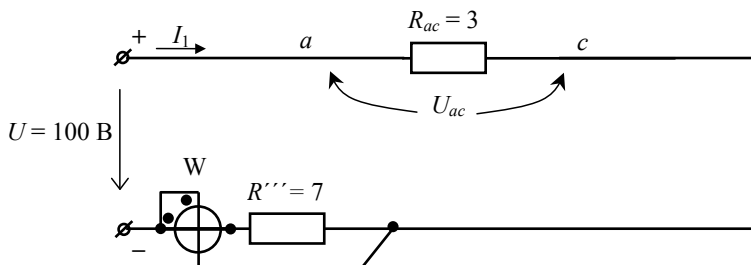


Рис. 2.13. Схема – результат 2-го этапа преобразования

Заменой разветвлённого участка ac эквивалентным сопротивлением $R_{ac} = 3 \text{ Ома}$ получим схему последовательного соединения двух сопротивлений (3 и 7 Ом), в которой точки a и c перестали быть узловыми, но их обозначения мы сохраняем в схеме рис. 2.13, что необходимо для последующего расчёта U_{ac} и токов I_2 и I_3 .

3-й этап: расчёт эквивалентного сопротивления всей схемы:

$$R_{\text{экв}} = 3 + 7 = 10 \text{ Ом},$$

что соответственно приводит исходную схему к простейшему виду (рис. 2.14).

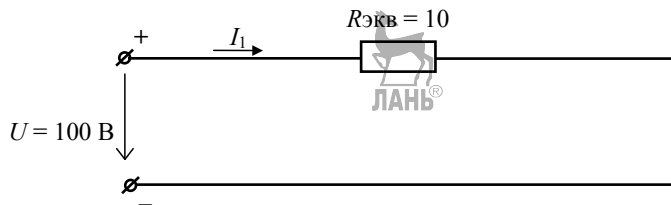


Рис. 2.14. Схема – результат 3-го этапа преобразования

Далее воспользуемся законом Ома для нахождения напряжений и токов. Из схемы рис. 2.14 определим ток I_1 :

$$I_1 = \frac{U}{R_{\text{экв}}} = \frac{100}{10} = 10 \text{ А}.$$

Из схемы рис. 2.13 видно, что напряжение U_{ac} равно

$$U_{ac} = I_1 \cdot R_{ac} = 10 \cdot 3 = 30 \text{ В},$$

а из схемы рис. 2.12 рассчитаем токи I_2 и I_3 :

$$I_2 = \frac{U_{ac}}{R^*} = \frac{30}{6} = 5 \text{ А};$$

$$I_3 = \frac{U_{ac}}{R^{**}} = \frac{30}{4+2} = 5 \text{ А}.$$

Из схемы рис. 2.12:

$$U_{ec} = I_3 \cdot R_{ec} = 5 \cdot 2 = 10 \text{ В},$$

а из схемы рис. 2.11:

$$I_4 = \frac{U_{ec}}{R'} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3} \text{ А};$$

$$I_5 = \frac{U_{ec}}{R''} = \frac{10}{6} = 1\frac{2}{3} \text{ А}.$$

Из схемы рис. 2.13 определим показание ваттметра:

$$P_w = I_1^2 R''' = 10^2 \cdot 7 = 700 \text{ Вт}.$$

В табл. 2.1 приведены схемы эквивалентных преобразований различных соединений и формулы, реализующие эти преобразования.

Представленные в табл. 2.1 формулы позволяют привести электрические схемы любой конфигурации к схемам смешанного соединения (в том числе такие распространенные, как мостовые, для расчета которых используется преобразование треугольника сопротивлений в звезду и обратно). Дальнейший расчет полученной в результате преобразования схемы смешанного соединения известен (см. пример 2.1).

Таблица 2.1

Эквивалентные преобразования различных соединений и их расчет

Вид преобразования	Исходная схема	Преобразованная схема	Соотношение между параметрами
Последовательное соединение			$R_{\text{эк}} = \sum_{i=1}^n R_i ;$ $E_{\text{эк}} = \sum_{i=1}^m E_i = E_1 - E_2 + \dots + E_n$
Параллельное соединение с источниками тока			$G_{\text{эк}} = \sum_{i=1}^n G_i, \text{ где } G_i = 1/R_i ;$ $J_{\text{эк}} = \sum_{i=1}^m J_i = J_1 - J_2 + \dots + J_n$
Параллельное соединение с источниками ЭДС			$\frac{1}{R_{\text{эк}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} ;$ $E_{\text{эк}} = R_{\text{эк}} \left(\frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2} + \dots + \frac{E_n}{R_n} \right)$
Перенос источника ЭДС через узел			
Преобразование последовательно-последовательного соединения источника и резистора в параллельное			$J = \frac{E}{R}$
Звезда в треугольник			$R_{ab} = R_a + R_b + \frac{R_a R_b}{R_c} ;$ $R_{bc} = R_b + R_c + \frac{R_b R_c}{R_a} ;$ $R_{ca} = R_c + R_a + \frac{R_c R_a}{R_b}$
Треугольник – звезда			$R_a = \frac{R_{ab} R_{ca}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}} ;$ $R_b = \frac{R_{bc} R_{ab}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}} ;$ $R_c = \frac{R_{ca} R_{bc}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}$

2.3.2. Расчет сложных электрических цепей с помощью законов Кирхгофа

Рассмотрим общие методы расчета сложных электрических цепей, которые не связаны с приведением исходных схем к схемам смешанного соединения.

Классическим примером расчета сложных электрических цепей любой конфигурации с многими источниками ЭДС является непосредственное применение законов Кирхгофа. Все остальные методы расчета электрических цепей исходят из этих фундаментальных законов электротехники.

При составлении уравнений учитывают направления токов в ветвях, а так как токи в начале расчёта неизвестны, то предварительно *произвольно выбирают эти направления*.

Число независимых уравнений, которые можно составить по I закону Кирхгофа, равно числу узлов схемы без одного, т. е. $(m - 1)$, где m – число узлов. Составляя уравнения по I закону Кирхгофа, следует токи, приходящие к узлу и уходящие от него, брать с разными знаками.

Так как общее количество независимых уравнений равно n (где n – количество ветвей), то число уравнений, записываемых по II закону Кирхгофа, будет равно $[n - (m - 1)]$, что в точности равно числу *независимых контуров* электрической цепи. Уравнения II закона Кирхгофа должны быть записаны для независимых контуров. *Независимым контуром* называется такой, в котором есть хотя бы одна (а может быть и больше) новая ветвь, т. е. не вошедшая в ранее избранные контуры.

При составлении уравнений по II закону Кирхгофа ЭДС и токи, направления которых совпадают с *произвольно выбранным направлением обхода контура*, берут с положительным знаком, остальные – с отрицательным. Следует помнить, что все $U_i = I_i \cdot R_i$ расписываются в одной части уравнения, а ЭДС – в другой.

Пример 2.2

Запишем уравнения I и II законов Кирхгофа для схемы рис. 2.15.

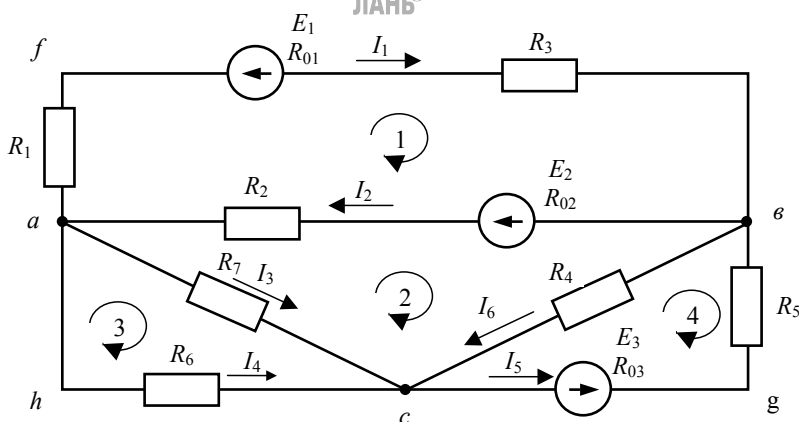


Рис. 2.15. Схема сложной электрической цепи с тремя источниками ЭДС

На рис. 2.15 представлены обозначения всех ЭДС (E_1, E_2, E_3), внутренних сопротивлений источников (R_{01}, R_{02}, R_{03}) и внешних сопротивлений цепи ($R_1, R_2, \dots, R_7$).

Методика написания уравнений I и II законов Кирхгофа включает ниже следующие пункты.

1. Подсчёт числа узлов (m). В схеме рис. 2.15 узлами являются точки $a, в, с$, т. е. $\underline{m} = 3$.
2. Подсчёт числа ветвей (включённых между узлами схемы), т. е. определение числа токов в ветвях, а значит, и общего числа уравнений, записываемых по законам Кирхгофа (n). В схеме рис. 2.15 $n = 6$.
3. Выбор (произвольно) токов в ветвях с их обозначением на схеме рис. 2.15 в виде стрелок.
4. Подсчёт числа независимых уравнений, которые записываются по I закону Кирхгофа: $(m - 1) = (3 - 1) = 2$ уравнения.
5. Подсчёт числа независимых уравнений, которые предстоит записать по II закону Кирхгофа; $n - (m - 1) = 6 - (3 - 1) = 4$ уравнения.
6. Выбор четырёх независимых контуров схемы рис. 2.15 (контуры 1, 2, 3, 4).
7. Выбор (произвольно) направления обхода каждого из контуров. В нашем случае все контуры будем обходить по часовой стрелке.
8. Запись двух уравнений I закона Кирхгофа для узлов $в$ и $с$. Условимся втекающие в узел токи считать положительными, а вытекающие – отрицательными (см. ниже уравнения (1) и (2)).
9. Запись четырёх уравнений II закона Кирхгофа для выбранных четырёх независимых контуров (уравнения (3)–(6)).

$$\left. \begin{array}{l} \text{1) для узла } в: \\ \text{2) для узла } с: \\ \text{3) для 1-го контура } (a, f, в, a): \\ \text{4) для 2-го контура } (a, в, с, a): \\ \text{5) для 3-го контура } (a, с, h, a): \\ \text{6) для 4-го контура } (в, g, с, в): \end{array} \right\} \begin{array}{l} I_1 - I_2 + I_5 - I_6 = 0 \\ I_3 + I_4 - I_5 + I_6 = 0 \\ I_1 \cdot R_1 + I_1 \cdot R_{01} + I_1 \cdot R_3 + I_2 \cdot R_{02} + I_2 \cdot R_2 = -E_1 + E_2 \\ -I_2 \cdot R_2 - I_2 \cdot R_{02} + I_6 \cdot R_4 - I_3 \cdot R_7 = -E_2 \\ I_3 \cdot R_7 - I_4 \cdot R_6 = 0 \\ -I_6 \cdot R_4 - I_5 \cdot R_5 - I_5 \cdot R_{03} = -E_3 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{1) для узла } в: \\ \text{2) для узла } с: \\ \text{3) для 1-го контура } (a, f, в, a): \\ \text{4) для 2-го контура } (a, в, с, a): \\ \text{5) для 3-го контура } (a, с, h, a): \\ \text{6) для 4-го контура } (в, g, с, в): \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \\ [n - (m - 1)] \end{array}$$

Заметим, что точки f, g, h не являются узловыми и введены в схему рис. 2.15 лишь с целью более чёткого обозначения независимых контуров, что облегчает процедуру написания уравнений II закона Кирхгофа.

Для определения величин токов ($I_1 - I_6$) в полученную систему уравнений следует подставить численные значения ЭДС, внутренних и внешних сопротивлений. В результате решения этой системы уравнений относительно искоемых токов будут получены их численные значения.

II закон Кирхгофа позволяет рассчитать напряжение между двумя произвольными точками схемы. Пусть, например, надо найти напряжение $U_{fв}$ между точками f и $в$ схемы рис. 2.16, которая является частью схемы рис. 2.15.

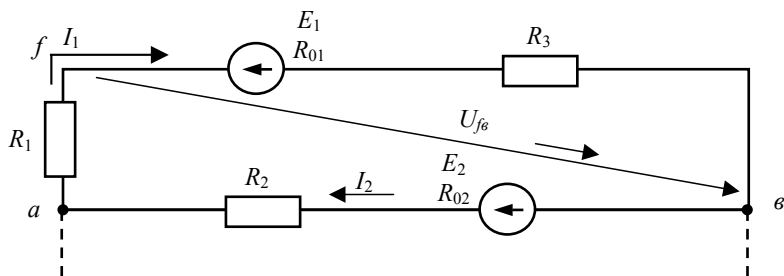


Рис. 2.16. Схема для определения U_{f6}

Чтобы применить II закон Кирхгофа, необходимо предположить наличие включенной между точками f и 6 ветви с сопротивлением $R_{f6} = \infty$. Ток этой ветви равен 0, поэтому включение сопротивления R_{f6} не изменяет режима работы цепи. Учитывая, что на этом сопротивлении (т. е. в точках f и 6) действует напряжение U_{f6} , напишем уравнение II закона Кирхгофа для контура $f, 6, f$ (в схеме рис. 2.15 вверху справа), обходя его против часовой стрелки:

$$U_{f6} - I_1 \cdot R_3 - I_1 \cdot R_{01} = E_1,$$

откуда

$$U_{f6} = E_1 + I_1 \cdot (R_3 + R_{01}).$$

Уравнения Кирхгофа позволяют рассчитать режим работы любой электрической цепи, но при этом число совместно решаемых уравнений может быть велико. Для сокращения числа решаемых уравнений рационализируют составление и решение уравнений I и II законов Кирхгофа, применяя для расчета методы контурных токов, узловых потенциалов, пропорциональных величин (см. [1]).

2.3.3. Принципы суперпозиции, компенсации, взаимности

В основе анализа сложных электрических цепей лежит несколько общих принципов, отражающих основные свойства линейных электрических цепей. Важнейшие из них используются в методах расчета и анализа электрических цепей. Принципы суперпозиции, компенсации и взаимности формулируются следующим образом.

Принцип суперпозиции (наложения) является одним из важнейших физических принципов, отражающих основное свойство линейных систем – независимость действия нескольких сил. Этот принцип применяют при рассмотрении явлений, возникающих под воздействием нескольких причин. Сложные явления в соответствии с принципом суперпозиции подразделяют на более простые, в которых действует каждая причина в отдельности независимо от других, а результаты этих воздействий, накладываясь один на другой, образуют суммарный эффект. При анализе сложных электрических цепей этот принцип используется для того, чтобы воздействие нескольких источников электрической энергии можно было рассматривать как суммарный результат воздействия каждого из источников в отдельности: *ток в любой ветви, вызываемый действием нескольких источников, равен алгебраической сумме токов*

в этой ветви под действием каждого источника в отдельности (при равенстве нулю остальных ЭДС или токов источников):

$$I_i = I_i^{(1)} + I_i^{(2)} + \dots + I_i^{(k)} + \dots + I_i^{(n)}, \quad (2.26)$$

где $I_i^{(k)}$ – ток i -й ветви, возникающий под действием k -го источника; n – число источников.

Принцип суперпозиции, как уже было сказано, может применяться только к линейным электрическим цепям. Этот принцип часто используют для того, чтобы результат воздействия ЭДС сложной формы можно было заменить воздействием составляющих ЭДС более простых форм.

Принцип компенсации заключается в том, что любой пассивный участок электрической цепи (ветвь или часть ветви) с известным напряжением на нем может быть заменен источником ЭДС с тем же напряжением, а любая ветвь электрической цепи с известным током – источником тока того же значения. Такие замены являются эквивалентными с точки зрения режима (значений токов и напряжений) остальной части электрической цепи. Принцип компенсации в ряде случаев облегчает расчет и анализ сложных электрических цепей.

Принцип взаимности заключается в том, что если ЭДС E ветви m вызывает ток I_k в ветви k , то та же ЭДС E , действуя в ветви k , вызывает в ветви m ток I_m , равный току I_k .

2.3.4. Двухполюсники и четырехполюсники

Если при анализе сложной электрической цепи интересуются режимом лишь одной ветви, то эту ветвь выделяют относительно остальной части электрической цепи, заменяя последнюю двухполюсником. Таким образом двухполюсником называется часть электрической цепи с двумя выделенными зажимами – полюсами (полюсы I и I' на рис. 2.17). На этом рисунке показаны выбранные положительные направления тока и напряжения активного (А) и пассивного (П) двухполюсника.

Режимы работы активного двухполюсника:

- 1) *режим холостого хода* (ток через выводы двухполюсника равен нулю, так как выводы разомкнуты: $I = I_{\text{ХХ}} = 0$ и $U = U_{\text{ХХ}}$);

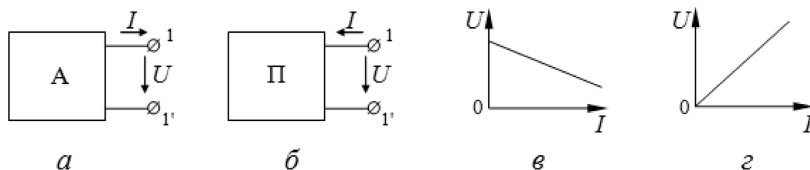


Рис. 2.17

- 2) *режим короткого замыкания* (выводы двухполюсника замыкаются накоротко и напряжение между ними равно нулю: $U = U_{\text{К}} = 0$, $I = I_{\text{К}}$);

Двухполюсник является активным (рис. 2.17а), если он содержит источники электрической энергии, а напряжение холостого хода на его выводах и ток короткого замыкания не равны нулю: $U = U_{\text{ХХ}} \neq 0$, $I = I_{\text{К}} \neq 0$.

Внешняя характеристика активного двухполюсника (рис. 2.17а) приведена на рис. 2.17б.

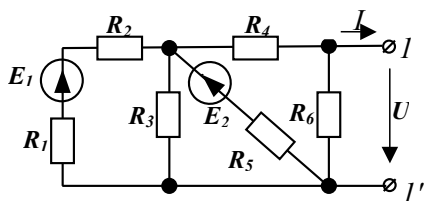


Рис. 2.18

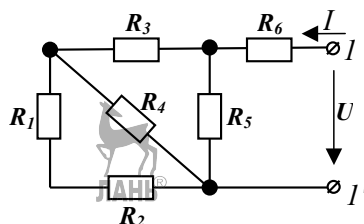


Рис. 2.19

Пример схемы активного двухполюсника приведен на рис. 2.18.

Двухполюсник является пассивным (рис. 2.17б), если $U = U_X = 0$ и $I_K = 0$.

Внешняя характеристика пассивного двухполюсника (рис. 2.17б) приведена на рис. 2.17г.

Пассивный двухполюсник (рис. 2.19) характеризуется входным сопротивлением $R_{вх}$, которое рассчитывают путем «свертывания» схемы относительно выводов $I-I'$.

Активный двухполюсник становится пассивным при равенстве нулю ЭДС всех источников напряжения и разрыве с источниками тока. Входное сопротивление $R_{вх}$ пассивного двухполюсника для схемы рис. 2.19.

$$R_{вх} = R_6 + \frac{1}{\frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_3 + \frac{1}{\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_1 + R_2}}}}$$

Когда необходимо определить электрическое состояние двух ветвей сложной цепи, их выделяют относительно остальных частей цепи, имеющих две пары зажимов (I, I' и $2, 2'$ на рис. 2.20) и именуемой четырёхполюсником.

Таким образом, часть электрической цепи, имеющая две пары выводов, которые могут быть входными или выходными, называется четырёхполюсником.

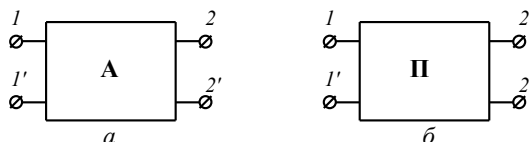


Рис. 2.20

Если в ветвях четырёхполюсника содержатся источники энергии, такой четырёхполюсник – активный (рис. 2.20а); четырёхполюсник, не содержащий в своих ветвях источников энергии, – пассивный (рис. 2.20б).

Примеры активного и пассивного четырёхполюсников приведены на рис. 2.21а, б.

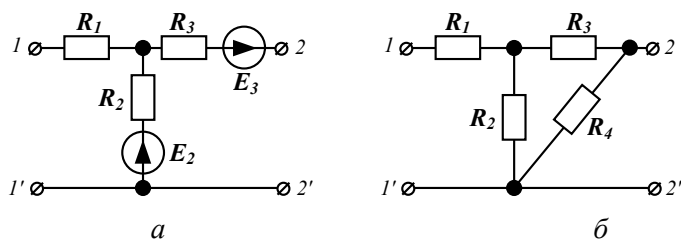


Рис. 2.21

Если к одной паре выводов пассивного четырёхполюсника ($1-1'$) подсоединяют источник, а ко второй ($2-2'$) – приемник (рис. 2.22), то четырёхполюсник называют проходным. В этом случае выводы $1-1'$ называют входными, а $2-2'$ – выходными.

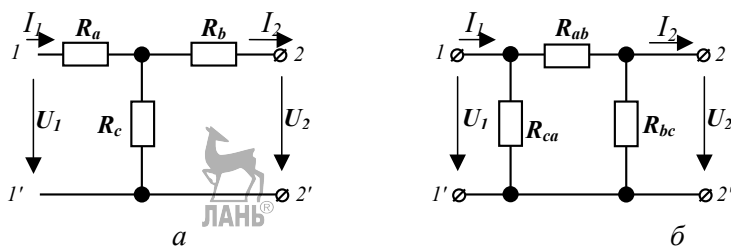


Рис. 2.22

Четырёхполюсник характеризуется входными и выходными токами (I_1, I_2) и соответствующими напряжениями (U_1, U_2).

Математическое описание пассивного четырёхполюсника, осуществленное различными способами, позволяет установить связь между напряжениями и токами [1].

Рассмотрим запись уравнений через A, B, C, D – параметры. При этом пассивный четырёхполюсник может быть представлен как пассивной, так и активной схемой замещения, параметры элементов которой определяются коэффициентами уравнений.

***ABCD* – форма записи уравнения**

Такая форма записи предпочтительнее при рассмотрении каскадного соединения четырёхполюсников при питании со стороны первичных режимов. При этом

$$U_1 = AU_2 + BI_2; \quad (2.27)$$

$$I_1 = CU_2 + DI_2. \quad (2.28)$$

Параметры $ABCD$ определяются по результатам расчетов режимов холостого хода и короткого замыкания. При холостом ходе $A = U_1 / U_{2x}$; $C = I_1 / U_{2x}$. При коротком замыкании $D = I_1 / I_{2к}$; $B = U_1 / I_{2к}$. При выполнении принципа взаимности в четырёхполюснике $ABCD$ параметры должны удовлетворять уравнению

$$AD - BC = 1, \quad (2.29)$$

и следовательно, схема замещения характеризуется тремя независимыми параметрами. Она может быть представлена тремя резистивными элементами, со-

единенными по схеме звезды, что соответствует Т-образной схеме замещения (рис. 2.22а), или по схеме треугольника, что соответствует П-образной схеме замещения (рис. 2.22б).

Эти схемы могут быть преобразованы одна в другую по соотношениям табл. 2.1. Значения сопротивлений резисторов в схемах замещения рассчитываются по известным параметрам ABCD:

в Т-образной схеме

$$R_a = \frac{A-1}{C}, R_b = \frac{D-1}{C}, R_c = \frac{1}{C}, \quad (2.30)$$

в П-образной схеме

$$R_{ab} = B, R_{bc} = \frac{B}{A-1}, R_{ca} = \frac{B}{D-1}. \quad (2.31)$$

2.3.5. Потеря напряжения в линии электропередачи

Простейшую схему линии электропередачи можно представить так, как показано на рис. 2.23. Напряжение источника ЭДС (генератора) обозначим через U_r , напряжение на нагрузке – через U_n , сопротивление линии передачи – через R_l , сопротивление нагрузки – через R_n . Величина $U_r - U_n = \Delta U$ называется потерей напряжения в линии. Если нам заданы потеря напряжения ΔU и ток I в линии, то нетрудно найти ее сопротивление:

$$R_l = \frac{\Delta U}{I} = 2\rho \frac{l}{S}.$$

Из последней формулы легко получить площадь поперечного сечения проводов линии:

$$S = 2\rho l \frac{I}{\Delta U}, \quad (2.32)$$

где l – длина линии;

ρ – удельное сопротивление проводов линии.

Сечение проводов линии, полученное по формуле (2.32), проверяется по допустимой плотности тока по формуле

$$S = \frac{I}{\delta_{\text{дон}}}. \quad (2.33)$$

Причем окончательно принимается большее из сечений, полученное по этим формулам. Рассмотрим влияние напряжения в линии на сечение ее проводов. Пусть по некоторой линии нам нужно передать в нагрузку мощность P . Эту мощность мы можем получить при некотором напряжении U' и силе тока I' , причем $U' \cdot I' = P$. Сечение проводов линии в этом случае будет равно S' .

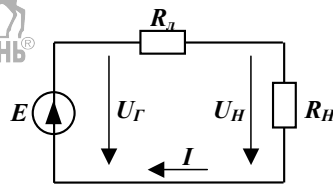


Рис. 2.23

$$S' = 2\rho l \frac{I'}{\Delta U'}. \quad (2.34)$$

Эту же мощность мы можем получить при напряжении U'' в k раз больше U' , т. е. $U'' = k U'$. Сечение проводов линии в этом случае будет равно S'' :

$$S'' = 2\rho l \frac{I''}{\Delta U''}, \quad (2.35)$$

а так как передаваемая мощность в обоих случаях одинакова, то мы можем написать

$$P = U' \cdot I' = U'' \cdot I'',$$

откуда

$$I'' = \frac{I'}{k}.$$

Подставляя в выражение (2.40) найденные ранее значения U'' и I'' , получим

$$S'' = 2\rho l \frac{I'}{kk\Delta U'} = \frac{S'}{k^2}. \quad (2.36)$$

То есть во втором случае сечение проводов линии будет в k^2 раз меньше, чем в первом. Таким образом, мы видим, что в принципе чем выше напряжение линии электропередачи, тем меньше сечение ее провода при прочих равных условиях. На практике нецелесообразно беспредельно увеличивать напряжение в линии, так как при этом будет уменьшаться механическая прочность проводов и резко увеличиваться стоимость изоляции между проводами. Поэтому выбор напряжения линии электропередачи производится на основе экономических расчетов.

Коэффициент полезного действия линии электропередачи можно определить следующим образом:

$$\eta = \frac{P_H}{P_r} = \frac{R_H I^2}{(R_H + R_L) I^2} = \frac{R_H}{R_H + R_L}, \quad (2.37)$$

где P_H и P_r – мощности соответственно генератора и нагрузки.

2.3.6. Задания 1 и 2 для самостоятельной работы

Задание 1

Дано:

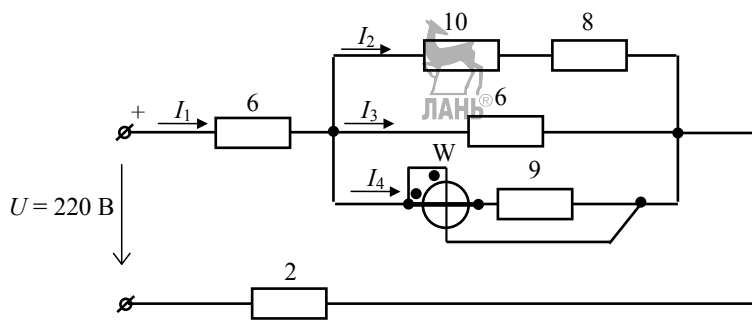
- схема электрической цепи в соответствии с номером варианта;
- входное напряжение и численные значения сопротивлений, нанесенные

на схему.

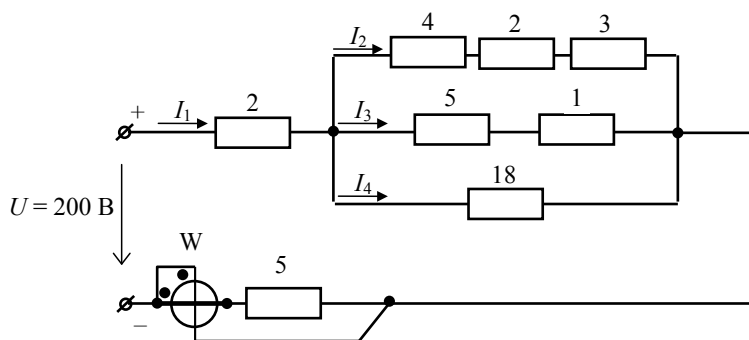
Определить расчётом:

- численные значения токов, текущих по ветвям схемы;
- показание ваттметра (W).

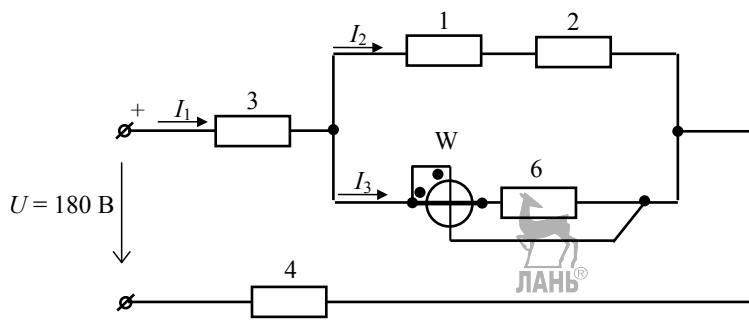
Вариант 1

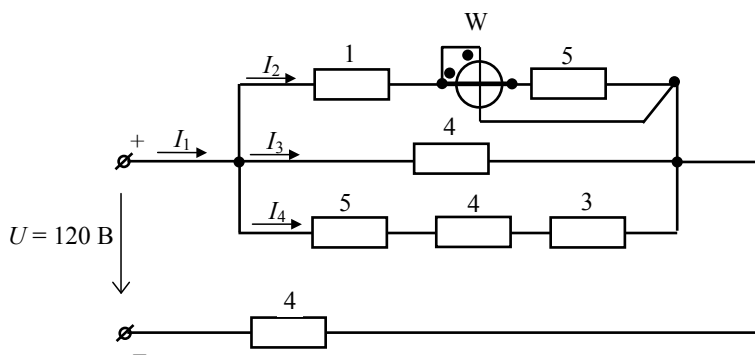


Вариант 2

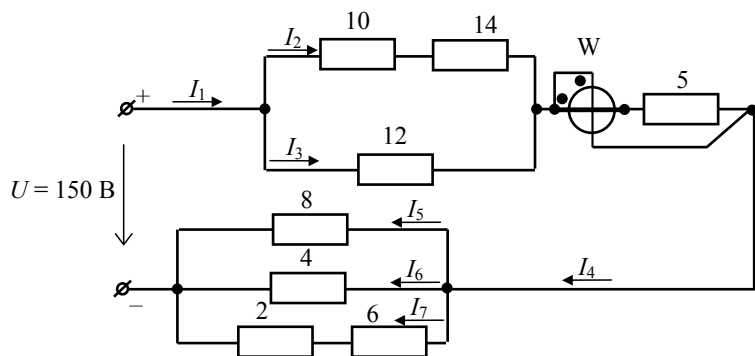


Вариант 3

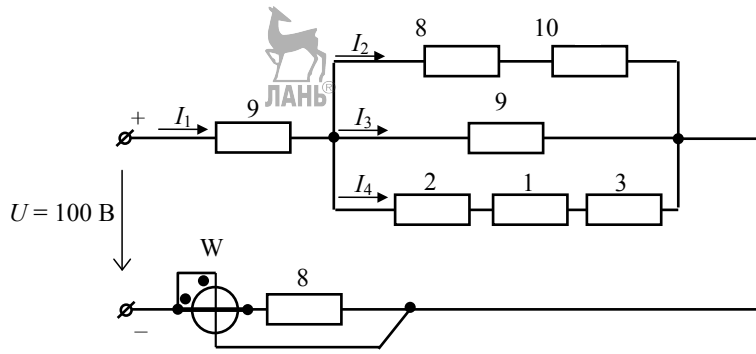




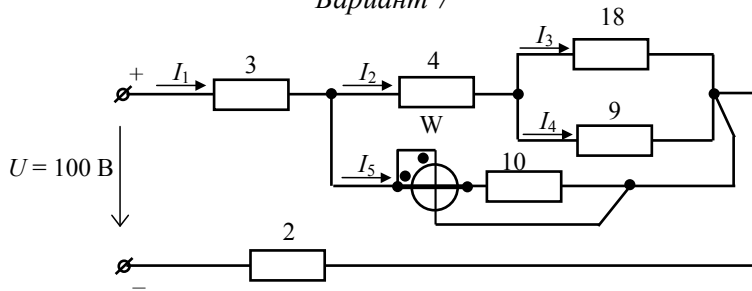
Вариант 5



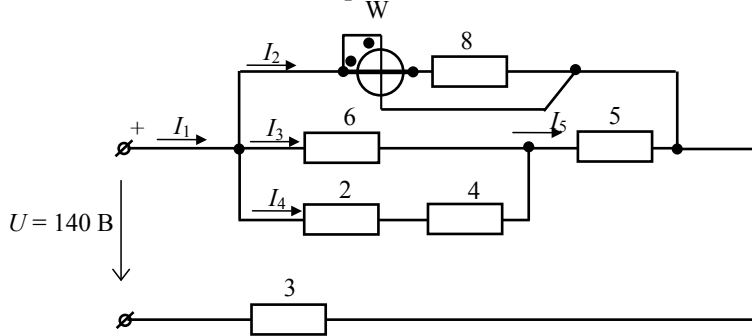
Вариант 6



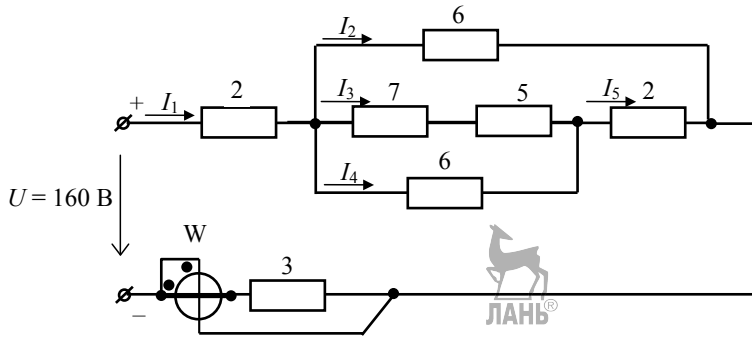
Вариант 7



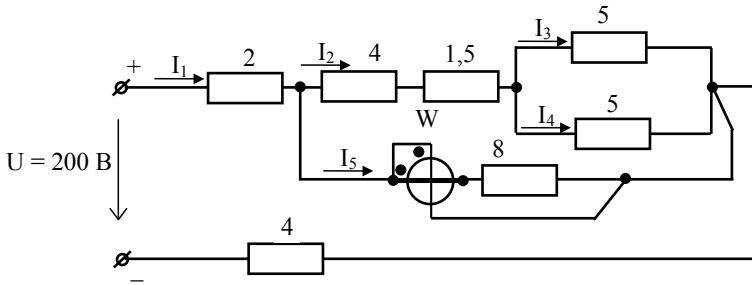
Вариант 8



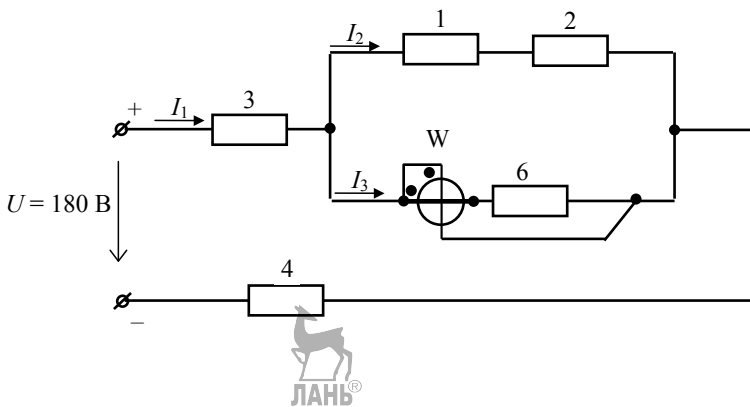
Вариант 9



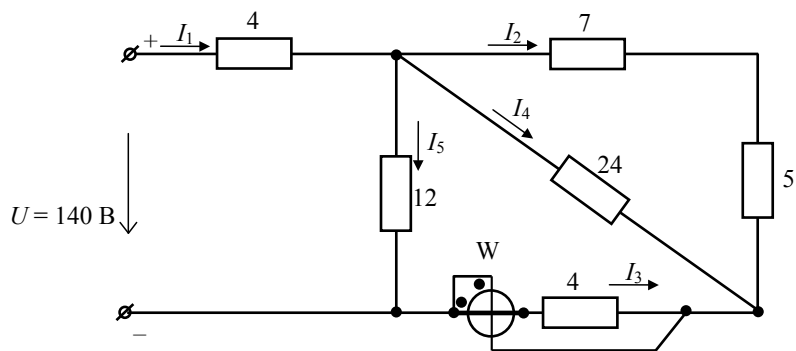
Вариант 10



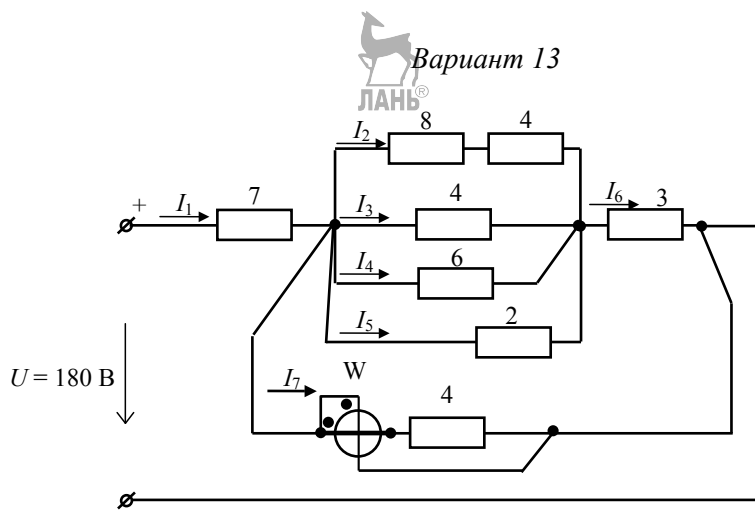
Вариант 11



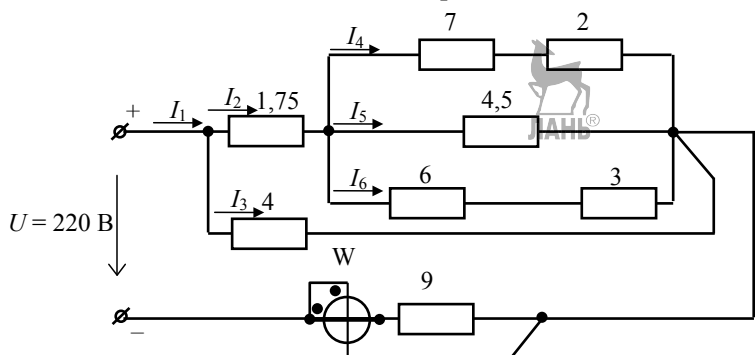
Вариант 12



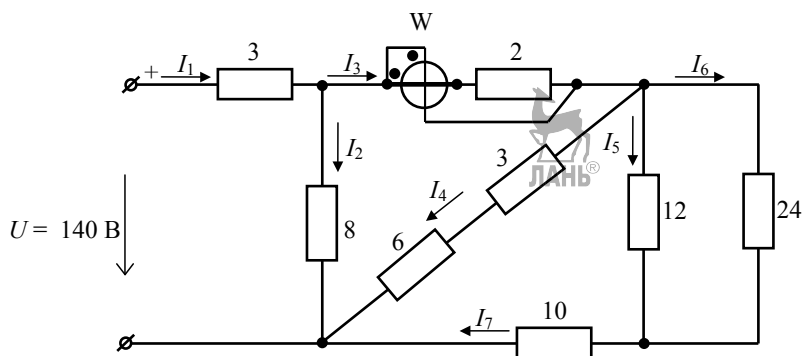
Вариант 13



Вариант 14



Вариант 15



Пример решения аналогичных задач приведен в п. 2.3.1.

Задание 2

Дано:

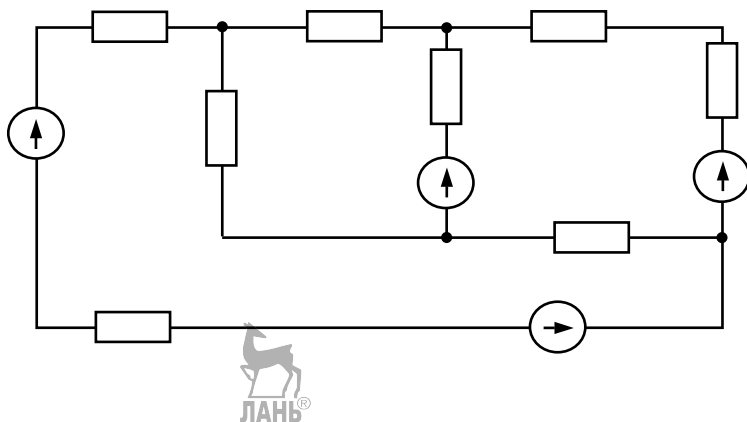
- схема электрической цепи в соответствии с номером варианта;
- считаются заданными (в буквенном обозначении) ЭДС, внутренние сопротивления источников и внешние сопротивления цепи.

Буквенные обозначения ЭДС и сопротивлений должен нанести на схему студент, выполняющий задание (пример обозначения см. на рис. 2.15 в п. 2.3.2).

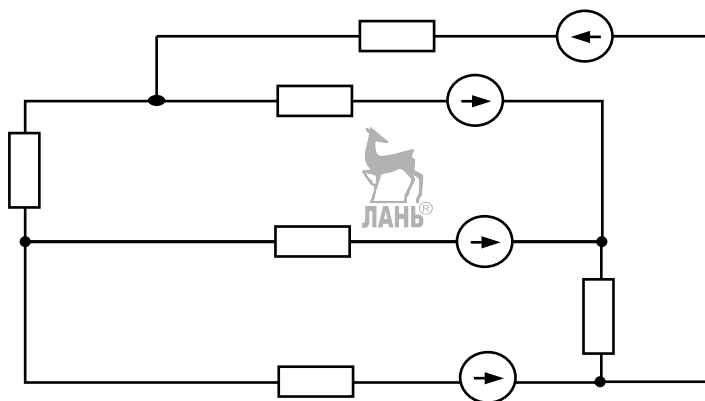
Требуется:

Написать систему уравнений I и II законов Кирхгофа, необходимых для расчета токов во всех ветвях схемы. Методика написания уравнений приведена в п. 2.3.2.

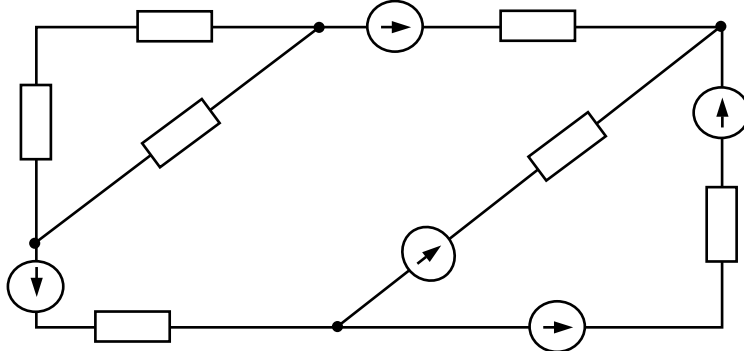
Вариант 1



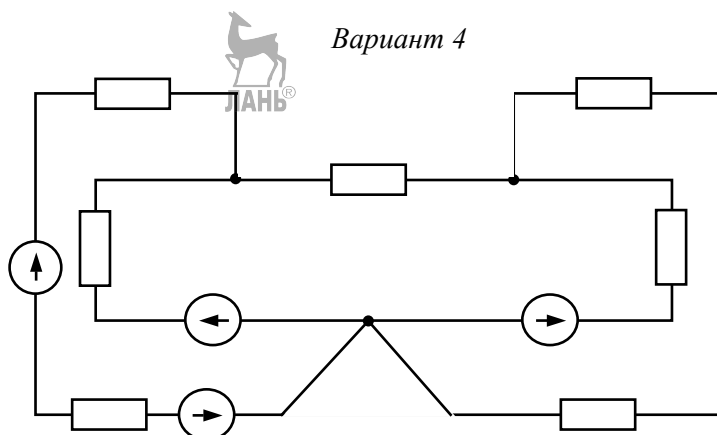
Вариант 2



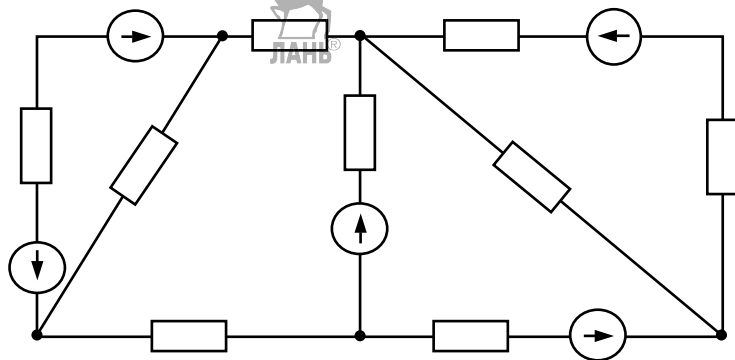
Вариант 3



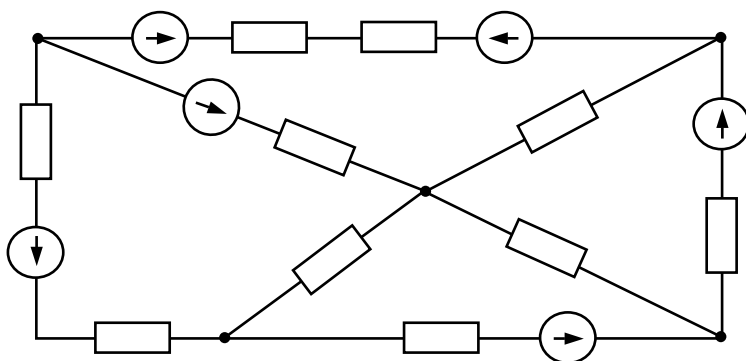
Вариант 4



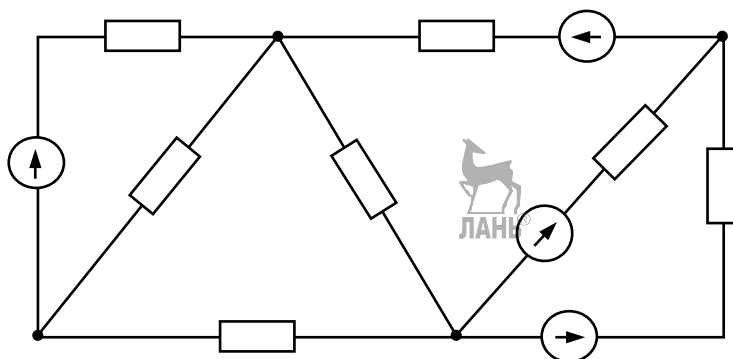
Вариант 5



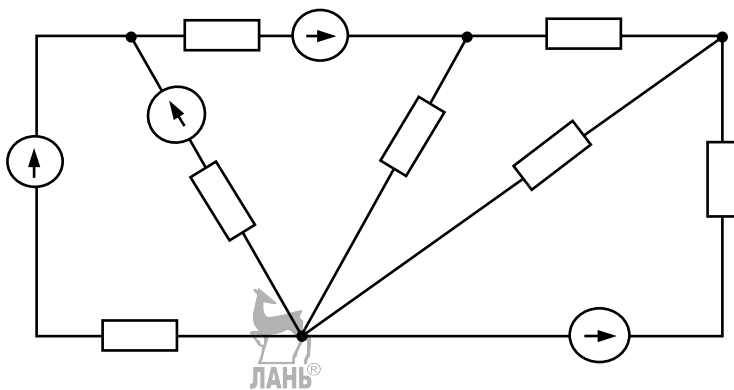
Вариант 6



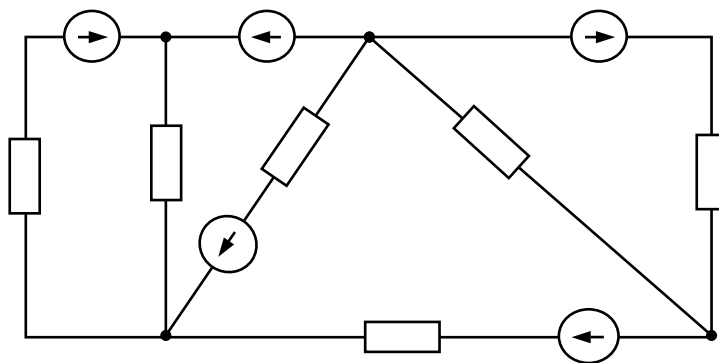
Вариант 7



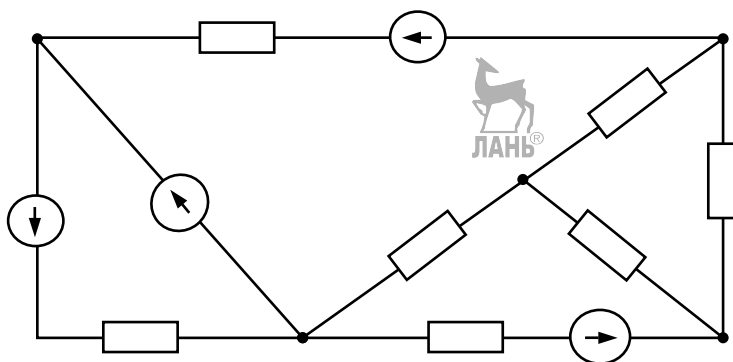
Вариант 8



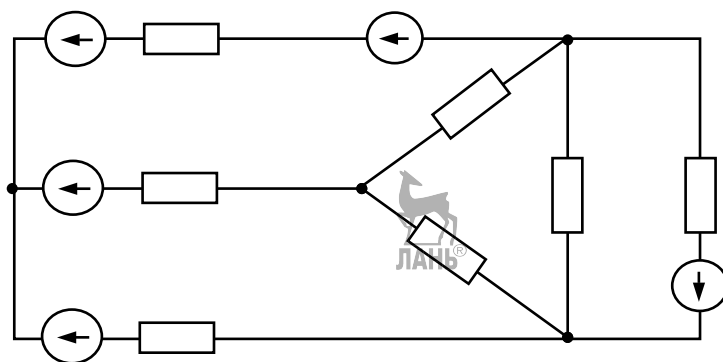
Вариант 9



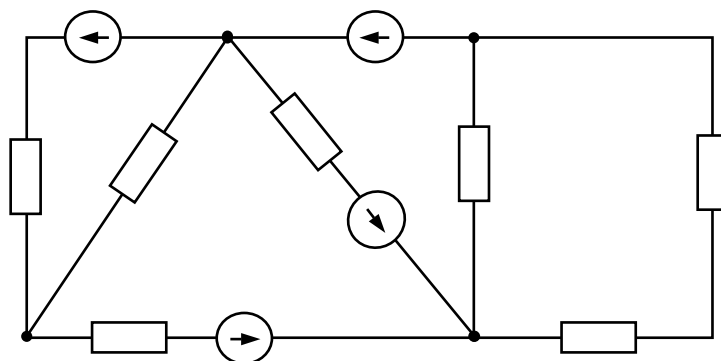
Вариант 10



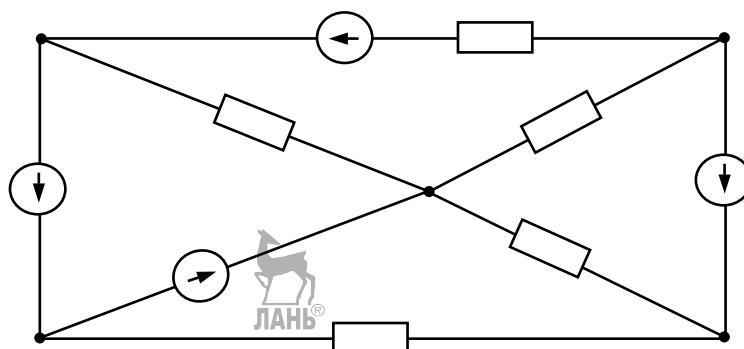
Вариант 11



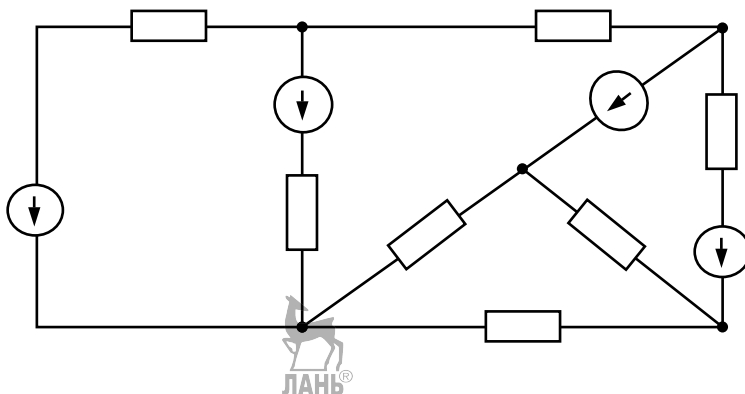
Вариант 12



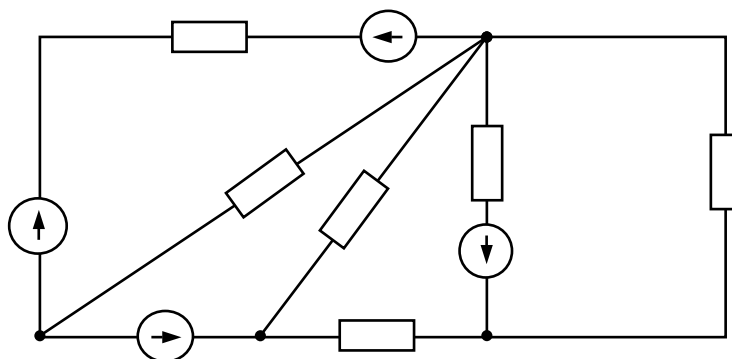
Вариант 13



Вариант 14



Вариант 15



2.4. Нелинейные цепи постоянного тока

Нелинейной цепью называется электрическая цепь, у которой хотя бы один из ее элементов имеет сопротивление, зависящее от значений или от направлений тока и напряжения этого элемента. Такие элементы называются нелинейными.

Строго говоря, все электрические цепи являются нелинейными уже потому, что с изменением тока изменяется температура проводников, а следовательно, и их сопротивление. Однако расчет нелинейных цепей отличается значительными сложностями, поэтому во многих практических случаях, когда в рабочем диапазоне изменения напряжений и токов вольт-амперные характеристики (в.а.х.) элементов близки к линейным, непостоянством параметров пренебрегают, т. е. делают допущение о линейности элементов цепи.

Это позволяет получать результаты с точностью, достаточной для инженерных решений с применением всех методов анализа и расчета линейных цепей, рассмотренных ранее. Вместе с тем принцип действия многих электротехнических устройств основывается именно на использовании свойств нелинейных элементов. Так, например, резкая зависимость сопротивления полупроводниковых диодов от полярности приложенного напряжения позволяет осуществ-

вить преобразование переменного напряжения в постоянное. В стабилизаторах напряжения используют свойства стабилитронов, напряжение на которых в некотором диапазоне изменения тока остается неизменным.

Большое применение в технике получили управляемые нелинейные элементы, обладающие свойством вольт-амперных характеристик, каждая из которых соответствует некоторому определенному значению параметра управляющего сигнала.

Управляемые нелинейные элементы получили особенно широкое распространение в технической электронике.

Характеристики нелинейных элементов определяются экспериментально и дают исчерпывающую информацию о свойствах элементов. При анализе и расчете нелинейных цепей пользуются понятиями статического и динамического сопротивления. Статическим сопротивлением нелинейного элемента R_{cm} в заданной точке a его характеристики называют отношение напряжения на элементе к току в нем. Статическое сопротивление можно определить графически как тангенс угла между прямой, проведенной из начала координат через рассматриваемую точку a вольт-амперной характеристики (рис. 2.24), и осью абсцисс:

$$R_{cm} = U / I = (m_U / m_I) \operatorname{tg} \alpha, \quad (2.38)$$

где m_U и m_I – соответственно масштабы напряжения и тока на рис. 2.24.

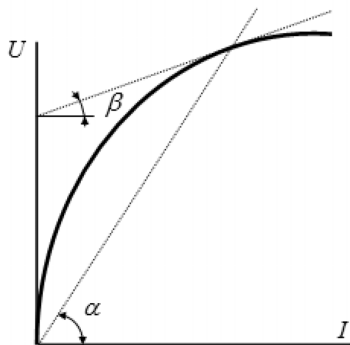


Рис. 2.24. Определение статического и динамического сопротивления нелинейного элемента

Динамическим сопротивлением нелинейного элемента $R_{дин}$ в заданной точке a его характеристики называют отношение бесконечно малого приращения напряжения к соответствующему приращению тока. Динамическое сопротивление можно определить графически как тангенс угла между касательной в рассматриваемой точке a вольт-амперной характеристики (рис. 2.24) и осью абсцисс:

$$R_{дин} = dU / dI = (m_U / m_I) \operatorname{tg} \beta. \quad (2.39)$$

Электрическое состояние нелинейной цепи постоянного тока, так же как и линейной цепи постоянного тока, описывается системой алгебраических уравнений, составленных по первому и второму законам Кирхгофа. Правила со-

ставления системы уравнений Кирхгофа одинаковы для линейной и нелинейной цепей. Однако электрическое состояние нелинейной цепи описывается системой нелинейных алгебраических уравнений, которая, как известно, не имеет аналитических методов решения, поэтому в общем случае расчет нелинейных цепей осуществляется численными методами математики с помощью ЭВМ. При анализе и расчете простейших нелинейных цепей постоянного тока применяют графоаналитические методы, один из которых рассмотрим ниже.

Метод эквивалентных преобразований.

Этот метод был рассмотрен в разделе линейных цепей (2.3.1) и основывался на замене нескольких элементов одним эквивалентным элементом. Аналогичные эквивалентные преобразования могут быть осуществлены и в нелинейной цепи.

Рассмотрим, например, схему цепи (рис. 2.25а), содержащей последовательно включенный нелинейный резистор R_1 и линейный резистор R_2 , в.а.х. которых $U_1(I)$ и $U_2(I)$ приведены на рис. 2.25б.

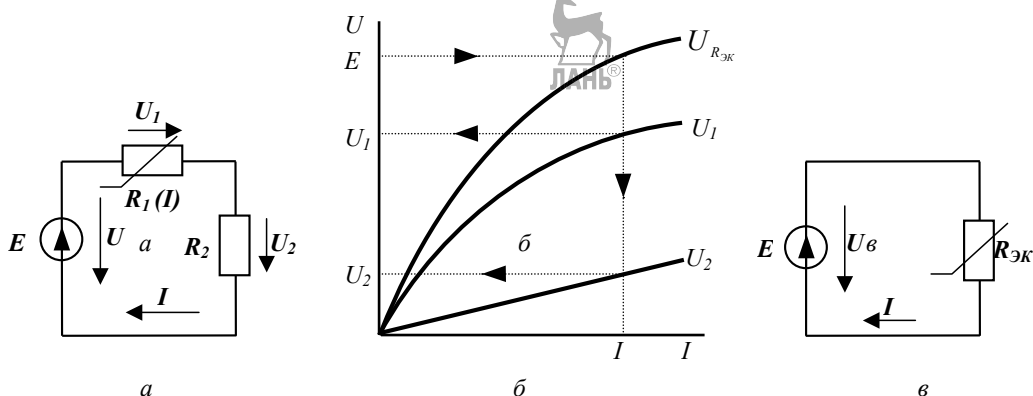


Рис. 2.25. Определение электрического состояния цепи с последовательным соединением линейного и нелинейного резисторов:
а – схема соединения элементов;
б – вольт-амперные характеристики;
в – эквивалентная схема.

Как определить значение тока в схеме рис. 2.25а при заданном значении ЭДС источника? Решить поставленную задачу, применив непосредственно закон Ома, не представляется возможным, так как сопротивление нелинейного резистора зависит от тока. Задача может быть решена, если два элемента схемы рис. 2.25а, заменить одним эквивалентным элементом, т. е. свернуть схему рис. 2.25а, преобразовав её к виду рис. 2.25в. В.а.х. эквивалентного нелинейного элемента $U_{R_{эк}}$ может быть получена графическим путем. Для любого значения тока I напряжения на эквивалентном элементе в схеме рис. 2.25в и на входных зажимах в исходной схеме должны быть одинаковыми, следовательно, в.а.х. эквивалентного элемента может быть построена путем суммирования ординат в.а.х. элементов R_1 и R_2 в соответствии со II законом Кирхгофа: $U_{R_{эк}}(I) = U_1(I) + U_2(I)$; графическая интерпретация этого уравнения приведена

на рис. 2.25б. В.а.х. эквивалентного элемента $U_{R_{\text{эк}}}(I)$ позволяет определить ток I цепи для любого заданного значения ЭДС E , после чего определяют соответствующие ему значения напряжений U_1 и U_2 (рис. 2.25б). Очевидно, рассмотренный метод можно распространить на цепь с любым числом последовательно включенных линейных и нелинейных элементов.

При параллельном соединении линейного и нелинейного резисторов (рис. 2.26а) характеристика эквивалентного элемента (рис. 2.26в) определяется суммированием в.а.х. элементов g_1 и g_2 в соответствии с I законом Кирхгофа: $I_{g_{\text{эк}}}(U) = I_1(U) + I_2(U)$; графическое решение задачи показано на рис. 2.26б.

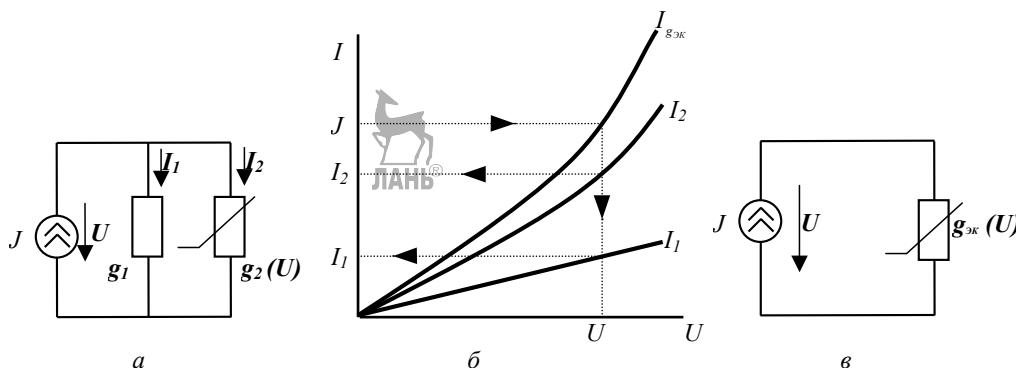


Рис. 2.26. Определение электрического состояния цепи с параллельным соединением линейного и нелинейного резисторов:
 а – схема соединения элементов;
 б – вольт-амперные характеристики;
 в – эквивалентная схема.

В случае смешанного соединения характеристику эквивалентного элемента получают путем поочередного выполнения рассмотренных построений.

Контрольные вопросы к главе 2

1. Что такое электрический ток, плотность электрического тока, сопротивление и проводимость проводника?
2. Что такое электрическая цепь, ветвь, узел и контур (зависимый и независимый) электрической цепи?
3. Как формулируется закон Ома, I и II законы Кирхгофа? Как определяются знаки членов уравнений, составленных по законам Кирхгофа?
4. Какое соединение элементов электрической цепи называется последовательным, параллельным и смешанным? Как определяются эквивалентные сопротивления в таких схемах?
5. В чем состоит цель расчета электрических цепей и как она достигается в случае с одним или несколькими источниками ЭДС?
6. Что такое энергия и мощность источника и приемника электрической энергии, в каких единицах они измеряются? Как пишется уравнение баланса мощности?
7. Какой режим электрической цепи называется:

-
- номинальным;
 - холостого хода (х.х.);
 - короткого замыкания (к.з.);
 - согласованным?

8. Объясните суть принципов суперпозиций, компенсации и взаимности.

9. Что называется двухполюсником и четырехполюсником (активным и пассивным)?

10. Как зависят ток и сечение провода линии постоянного тока от величины напряжения ЛЭП?

11. Какие цепи называются нелинейными? Как рассчитать простейшую цепь с нелинейным элементом?



Глава 3. Электромагнетизм

3.1. Магнитное поле электрического тока

Как отмечалось в предыдущих главах, магнитное поле окружает движущиеся элементарные частицы, обладающие электрическим зарядом, и связано с ним.

В проводнике с током и окружающем его пространстве магнитное поле обусловлено этим током, а внутри и вне намагниченного тела (постоянного магнита) оно обусловлено внутриатомным и внутримолекулярным движением элементарных заряженных частиц (например, вращением электронов вокруг собственной оси и вокруг ядра атома).

Характерное свойство магнитного поля – силовое воздействие его на движущиеся заряженные частицы – лежит в основе различных магнитных явлений, обнаруженных опытным путем.

В 1820 г. Эрстедом экспериментально было установлено, что проводник, по которому протекает электрический ток, взаимодействует с магнитной стрелкой, т. е. создает вокруг себя магнитное поле. Графически магнитное поле принято изображать в виде *магнитных силовых линий*. Для прямолинейного проводника с током это концентрические окружности (рис. 3.1). Интенсивность магнитного поля характеризуется *вектором магнитной индукции (вектор B на рис. 3.1)*, который в каждой точке поля направлен по касательной к магнитной силовой линии.

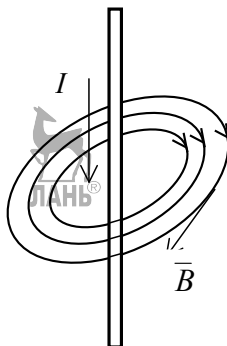


Рис. 3.1. Магнитное поле проводника с током

Направление силовых линий магнитного поля проводника с током определяется правилом правого винта. Вращение рукоятки винта показывает направление силовых линий, если его поступательное движение совпадает с направлением тока в проводнике. Если силовые линии параллельны друг другу, а магнитная индукция в каждой точке поля одинакова, то такое поле называется *однородным*. Если эти условия не выполняются, то поле называется *неоднородным*.

Работа электрических машин и многих других электрических устройств основана на физических законах электромеханического и индукционного действия магнитного поля.

3.2. Электромеханическое действие магнитного поля.

Магнитная индукция

Электромеханическое действие магнитного поля заключается в том, что на проводник с током, помещенный в магнитное поле (или ферромагнитное вещество), действует механическая сила (рис. 3.2).

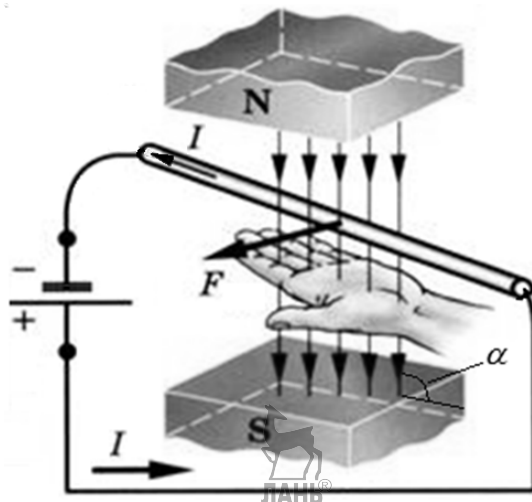


Рис. 3.2. Правило левой руки

Направление силы определяется по правилу левой руки: если левую руку расположить так, чтобы силовые линии входили в ладонь, а четыре пальца по направлению тока I , то отогнутый большой палец в плоскости ладони покажет направление действия силы F (рис. 3.2). Экспериментально установлено, что механическая сила F равна

$$F = B \cdot I \cdot l \cdot \sin \alpha, \quad (3.1)$$

где l – длина проводника в пределах магнитного поля;

B – коэффициент пропорциональности, характеризует интенсивность магнитного поля и называется *магнитной индукцией*;

α – угол между вектором B и проводником.

Магнитная индукция – величина векторная. Вектор магнитной индукции принимается направленным по касательной к магнитной силовой линии, проходящей через данную точку поля. Единица измерения магнитной индукции в системе СИ – тесла. Тесла – магнитная индукция такого однородного поля, которое действует с силой 1 Н (один ньютон) на каждый метр длины прямолинейного проводника, расположенного перпендикулярно направлению поля, когда по этому проводнику проходит ток в 1 А.

Магнитным потоком в однородном магнитном поле называется величина, измеряемая произведением магнитной индукции и величины площади S , перпендикулярной вектору магнитной индукции:

$$\Phi = B \cdot S. \quad (3.2)$$

Магнитный поток величина векторная. Вектор магнитного потока направлен по вектору магнитной индукции.

За единицу измерения магнитного потока в системе СИ принят 1 вебер [Вб] в честь немецкого физика Вебера: $1 \text{ Вб} = 1 \text{ Тл} \cdot 1 \text{ м}^2$.

Магнитный поток равен 1 веберу, если он пронизывает площадку в 1 м^2 , расположенную перпендикулярно однородному магнитному полю с индукцией в 1 тесла. Если площадка S не перпендикулярна вектору магнитной индукции (рис. 3.3), то:

$$\Phi = B \cdot S \cdot \sin \alpha \quad (3.3)$$

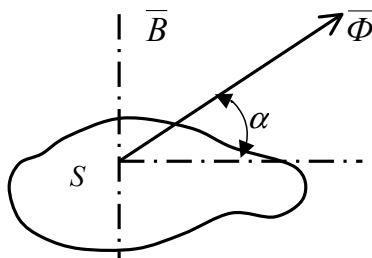


Рис. 3.3. Магнитный поток Φ , пронизывающий сечение S

3.3. Магнитная проницаемость, напряженность магнитного поля

Магнитная проницаемость характеризует интенсивность магнитного поля в зависимости от магнитных свойств среды. Величиной, определяющей магнитные свойства среды, служит *абсолютная магнитная проницаемость* μ_c . Магнитные свойства среды определяются по отношению к вакууму. Абсолютная магнитная проницаемость вакуума называется *магнитной постоянной* $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$.

Отношение абсолютной магнитной проницаемости какого-либо вещества к магнитной постоянной называется *относительной магнитной проницаемостью* вещества:

$$\mu = \frac{\mu_c}{\mu_0} \quad (3.4)$$

Величина μ показывает, во сколько раз магнитное поле среды получается сильнее (или слабее), чем магнитное поле в вакууме, т. е.:

$$\mu = \frac{B}{B_0}$$

В зависимости от величины μ вещества делят на:

- диамагнитные – при $\mu < 1$ (ослабляют магнитное поле);
- парамагнитные – при $\mu > 1$;
- ферромагнитные – при $\mu \gg 1$ (усиливают магнитное поле).

В практических расчетах вводят понятие вектора *напряженности магнитного поля* H . Между напряженностью и магнитной индукцией существует зависимость

$$B = \mu_0 \mu H \quad (3.5)$$

Единица измерения напряженности магнитного поля 1 А/м.

Напряженность характеризует магнитное поле в данной точке и не зависит от свойств среды.

3.4. Закон полного тока

Закон полного тока определяет зависимость напряженности магнитного поля от силы тока, возбуждающего это поле, т. е. связывает между собой электрические и магнитные величины. Введем понятия магнитного напряжения и магнитодвижущей силы.

Представим себе два проводника с токами I_1 и I_2 , сцепленных контуром обхода (рис. 3.4).

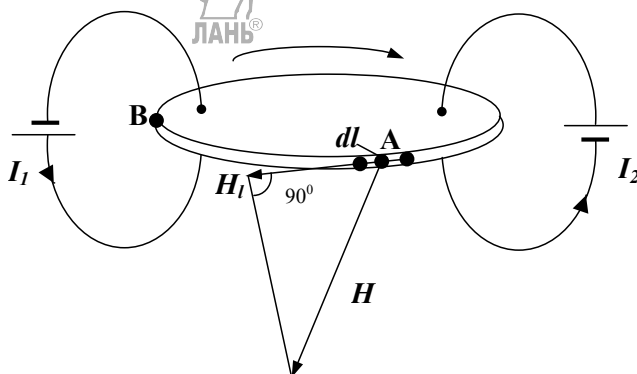


Рис. 3.4. Контур, сцепленный с токами I_1 и I_2

H_l – проекция вектора H на касательную к контуру обхода в точке А.

Магнитным напряжением между точками А и В будет называться величина

$$U_{MAB} = \int_A^B H_l dl.$$

Магнитное напряжение, взятое по замкнутому контуру, называется магнитодвижущей силой (м.д.с.):

$$F = \oint H_l dl. \quad (3.6)$$

В частном случае, когда контур обхода совпадает с магнитной силовой линией, имеющей форму окружности (рис. 3.5):

$$F = H \cdot l, \quad (3.7)$$

где $l = 2\pi r$ – длина магнитной силовой линии, т. е. напряженность магнитного поля равна м.д.с., приходящаяся на единицу длины силовой линии.

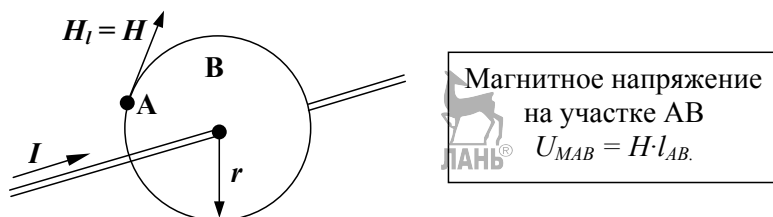


Рис. 3.5. Магнитное поле прямолинейного проводника

Полным током называется алгебраическая сумма токов, пронизывающих поверхность, ограниченную замкнутым контуром. Правило знаков: положительными считаются токи, направления которых совпадают с направлением вращения правого винта, движущегося вдоль линии обхода, а отрицательными – токи противоположного направления. Для рис. 3.4: $\sum I = I_2 - I_1$.

Закон полного тока: магнитодвижущая сила равна полному току, проходящему сквозь поверхность, ограниченную контуром обхода:

$$\oint H_l dl = \sum I. \quad (3.8)$$

На рис. 3.6 контур обхода сцеплен с витками одной катушки w , на рис. 3.7 – с двумя w_1 и w_2 .

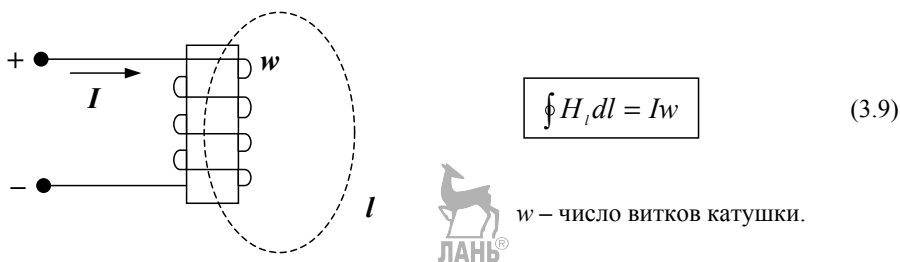


Рис. 3.6. Контур, сцепленный с витками одной катушки w

При практических расчетах выбранный контур разбивают на n участков длиной l_K , где напряженность H_K .

Тогда: $\sum H_K l_K = \sum I$.

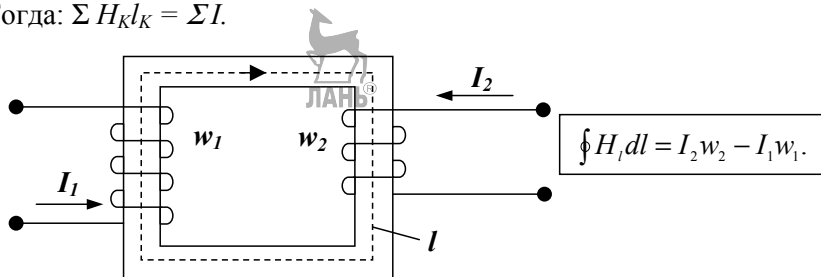


Рис. 3.7. Контур, сцепленный с двумя катушками (w_1 и w_2)

3.5. Намагничивание ферромагнитных материалов

Ферромагнитное тело (железо, сталь, кобальт, никель и их сплавы) можно представить себе физически как совокупность элементарных магнитов, магнитных диполей, каждый из которых имеет свое магнитное поле. В обычных условиях, т. е. при отсутствии внешнего поля, диполи ориентированы произвольно хаотично и тело не намагничено. Действие магнитных полей диполей взаимно компенсируется. При воздействии внешнего магнитного поля элементарные магниты ориентируются в направлении внешнего магнитного поля, тело намагничивается и усиливает действующее магнитное поле.

Ферромагнитные свойства различных материалов определяются зависимостью $B = f(H)$. Эта зависимость, как правило, не задается в виде уравнения,

а определяется для каждого материала экспериментально. Для её получения из материалов изготавливают тороидальный сердечник с мало отличающимся наружным и внутренним диаметрами $d_H/d_{BH} < 5$. По его периметру равномерно наносится обмотка, подключаемая к источнику постоянного напряжения (рис. 3.8).

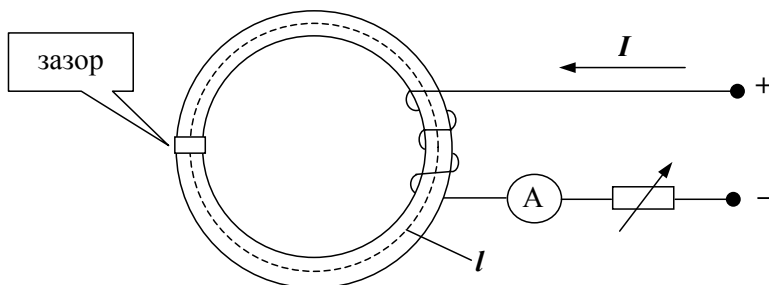


Рис. 3.8. Тороидальный сердечник с обмоткой

Электрический ток, протекающий по обмотке, создает возбуждающее магнитное поле, а ферромагнитный сердечник, намагничиваясь, усиливает возбуждающее поле. Степень намагниченности сердечника характеризуется вектором намагниченности J . Тогда индукция, измеряемая в щелевом зазоре тороида, будет иметь две составляющие:

$$B = B_I + B_J \text{ или } B = \mu_0 H + \mu_0 J = \mu_0 (H + J),$$

где $B_I = \mu_0 H$ – индукция, создаваемая электрическим током;

$B_J = \mu_0 J$ – индукция намагниченного сердечника.

Согласно закону полного тока:

$$Hl = Iw,$$

где l – длина средней силовой линии;

w – число витков обмотки;

I – ток, измеряемый амперметром.

Тогда

$$H = \frac{Iw}{l}. \quad (3.10)$$

Намагничивание производится постепенным увеличением величины тока. Измеряя при этом индукцию в воздушном зазоре тороида B , рассчитывают H и строят характеристику $B = f(H)$ (рис. 3.9).

Характер изменения $B(H)$ обусловлен зависимостью магнитной проницаемости ферромагнитных материалов от напряженности магнитного поля $\mu(H)$. Зависимость $\mu(H)$ была установлена профессором А. Г. Столетовым в 1871 г. Максимальная проницаемость μ_{MAX} характеризует материал с точки зрения возможного использования его для наибольшего усиления магнитного поля, μ_0 – начальная проницаемость. Ферромагнитные материалы позволяют усиливать магнитное поле в тысячи раз. Это широко используется в электрических машинах, трансформаторах, приборах и других электротехнических устройствах для получения мощных магнитных полей.

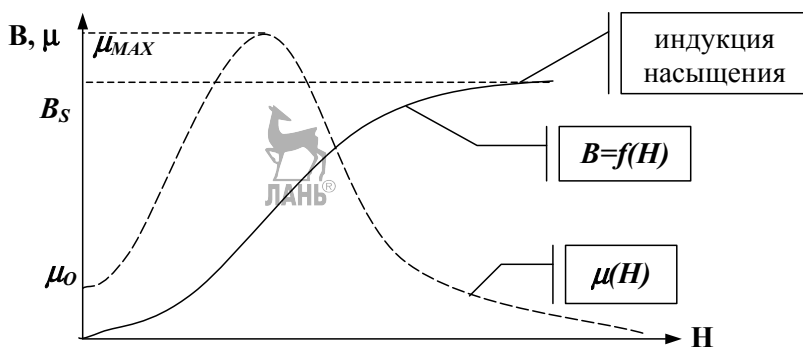


Рис. 3.9. Основная кривая намагничивания $B = f(H)$

3.6. Магнитный гистерезис

Явление, когда индукция зависит не только от напряженности магнитного поля, но и от предварительного состояния, в котором находилось ферромагнитное тело, называется *магнитным гистерезисом*.

Рассмотрим зависимость $B = f(H)$ при циклическом перемагничивании ферромагнитного сердечника (рис. 3.10).

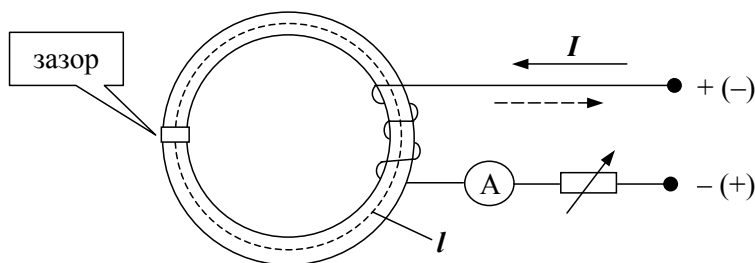


Рис. 3.10. Схема перемагничивания тороидального сердечника

На рис. 3.11 изображена петля гистерезиса.

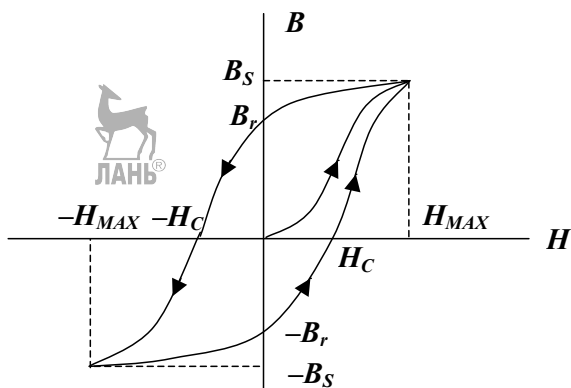


Рис. 3.11. Магнитный гистерезис

Замкнутая кривая, по которой меняется индукция в результате циклического перемагничивания, называется *петлей гистерезиса*. Точки пересечения петли с осью ординат B_r и $(-B_r)$ определяют *остаточную индукцию*, H_C и $(-H_C)$ – значения напряженности поля, необходимые для доведения индукции до нуля, называются *коэрцитивной силой*. При циклическом перемагничивании происходит переориентация диполей, в результате чего материал нагревается за счет энергии источника питания. Потери энергии на гистерезис пропорциональны площади петли гистерезиса. Ферромагнитные материалы по характеру петли делятся на *магнито жесткие* и *магнито мягкие*. Магнито жесткие материалы отличаются широкой петлей гистерезиса, большой остаточной индукцией, большой коэрцитивной силой. Это сплавы ални, алнико, магнико, которые применяются при изготовлении постоянных магнитов. Магнитомягкие материалы отличаются узкой петлей и малой коэрцитивной силой. Это электротехнические стали и железоалюминевые сплавы, применяющиеся для изготовления магнитопроводов электрических машин и трансформаторов.

3.7. Магнитные цепи

Магнитной цепью называется совокупность источников магнитодвижущей силы и магнитопровода, по которому замыкается основная часть магнитного потока.

Магнитные цепи бывают простыми (неразветвленными) и сложными (разветвленными), однородными и неоднородными. Однородной называют такую цепь, напряженность магнитного поля которой по всей длине магнитопровода остается одинаковой.

Рассмотрим простую однородную магнитную цепь (рис. 3.12).

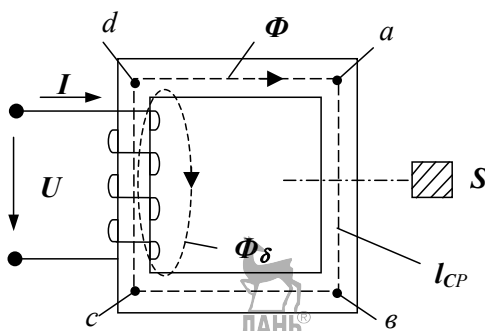


Рис. 3.12. Замкнутая однородная магнитная цепь

Магнитный поток, проходящий частично по магнитопроводу, а частично по окружающей среде, называется *потокom рассеяния* Φ_δ . Φ – основной магнитный поток. Коэффициент рассеяния равен

$$K_\delta = \frac{\Phi + \Phi_\delta}{\Phi} = 1 + \frac{\Phi_\delta}{\Phi}. \quad (3.11)$$

Для магнитной цепи (рис. 3.12):

$$F_M = Hl_{CP} = \frac{B}{\mu\mu_o} \cdot l_{CP} = \frac{\Phi}{S} \cdot \frac{l_{CP}}{\mu\mu_o}. \quad (3.12)$$

Обозначим: $R_M = \frac{l_{cp}}{S\mu\mu_o}$, тогда $F_M = \Phi \cdot R_M$ – закон Ома для замкнутой магнитной цепи (R_M – магнитное сопротивление). Закон Ома для участка цепи (рис. 3.12):

$$U_{av} = \Phi R_{Mav} = \Phi \cdot \frac{l_{av}}{S\mu\mu_o}. \quad (3.13)$$

На рис. 3.13 приведена неоднородная магнитная цепь.

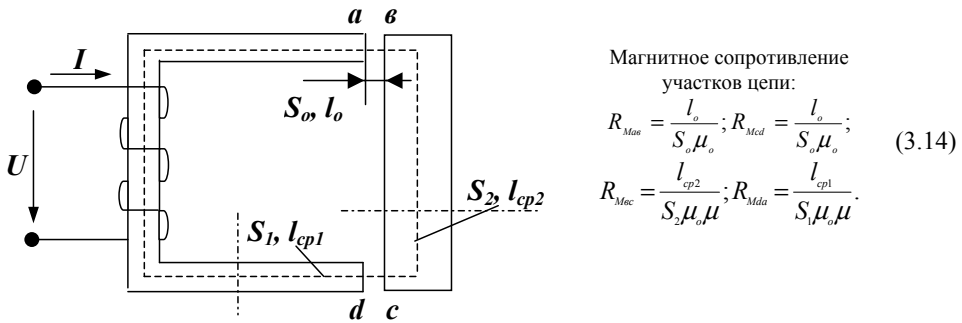


Рис. 3.13. Неоднородная магнитная цепь

I закон Кирхгофа для магнитной цепи: алгебраическая сумма магнитных потоков в узлах магнитной цепи равна нулю:

$$\sum_{\kappa=1}^{\kappa=n} \Phi_{\kappa} = 0.$$

Для магнитной цепи на рис. 3.14:

$$\Phi_A - \Phi_B - \Phi_C = 0.$$

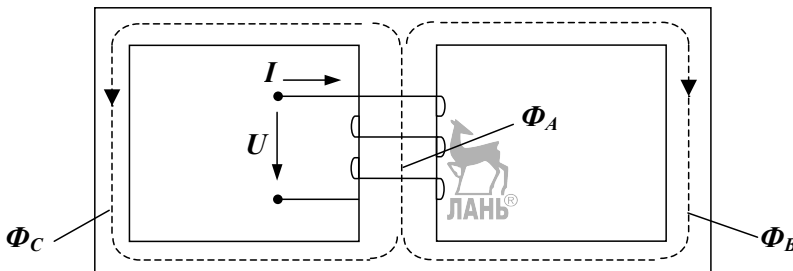


Рис. 3.14. Разветвленная магнитная цепь

II закон Кирхгофа для магнитной цепи: в замкнутом магнитном контуре алгебраическая сумма м.д.с. равна алгебраической сумме магнитных напряжений:

$$\sum F_{MK} = \sum U_{MK}.$$

Для рассмотренного выше примера неоднородной цепи (рис. 3.13):

$$F_M = U_{Mas} + U_{Mbc} + U_{Mcd} + U_{Mda}$$

или

$$F_M = \Phi \frac{l_o}{S_o \mu_o} + \Phi \frac{l_{cp2}}{S_2 \mu_o \mu} + \Phi \frac{l_o}{S_o \mu_o} + \Phi \frac{l_{cp1}}{S_1 \mu_o \mu}. \quad (3.15)$$

3.8. Индукционное действие магнитного поля.

Закон электромагнитной индукции

Индукционное действие магнитного поля заключается в том, что при изменении магнитного поля или при движении проводника в нем в проводнике наводится (индуцируется) ЭДС. На рис. 3.15 проводник перемещается в магнитном поле со скоростью v .

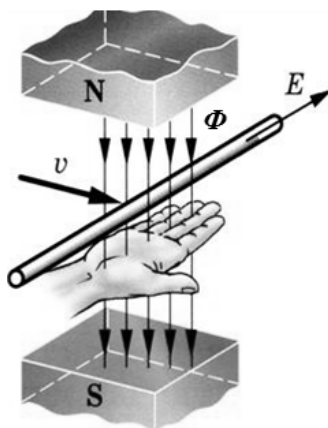


Рис. 3.15. Правило правой руки

Величина ЭДС, наводимая в проводнике, равна

$$e = B \cdot l \cdot v \cdot \sin \alpha, \quad (3.16)$$

где l – активная длина проводника;

B – индукция;

v – скорость движения проводника;

α – угол между векторами v и B .

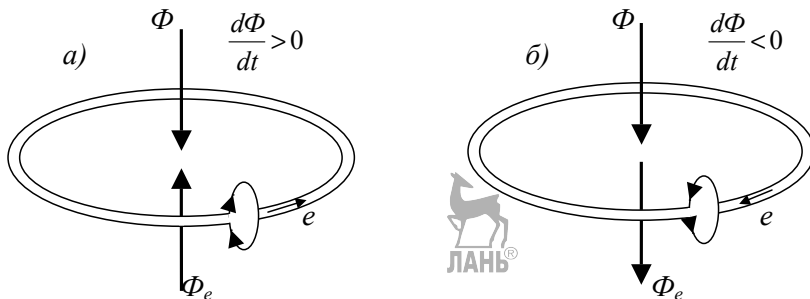


Рис. 3.16. Наведение ЭДС в электрическом контуре

Направление ЭДС определяется по правилу *правой руки*: если руку расположить так, чтобы силовые линии входили в ладонь и отогнутый в плоскости ладони большой палец показывал направление движения проводника, то четыре вытянутых пальца покажут направление ЭДС.

ЭДС возникает не только при движении проводника в магнитном поле, но и при изменении магнитного потока относительно неподвижного проводника или контура (рис. 3.16).

Закон электромагнитной индукции для замкнутого контура (закон Фарадея – Максвелла, 1831): ЭДС, наведенная в контуре, равна скорости изменения магнитного потока, пронизывающего контур, взятой с обратным знаком:

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (3.17)$$

Знак «минус» в этой формуле выражает принцип Ленца. Физик Ленц установил, что ЭДС индукции e создает в контуре индукционный ток такого направления, что созданный им магнитный поток Φ_e (рис. 3.16) препятствует возникновению ЭДС.

На рис. 3.16а поток контура Φ_e направлен навстречу потоку Φ , что препятствует росту Φ , а на рис. 3.16б поток Φ_e направлен согласно с Φ , что препятствует уменьшению потока Φ .

Таким образом, принцип (он же «принцип инерции магнитного поля») формулируется следующим образом: ЭДС электромагнитной индукции, наведенная в замкнутом электрическом контуре, создает в нем ток, называемый индукционным током, который всегда имеет такое направление, что своим магнитным полем препятствует изменению магнитного потока сквозь контур.

3.9. Потокосцепление

Рассмотрим катушку, состоящую из w витков (рис. 3.17).

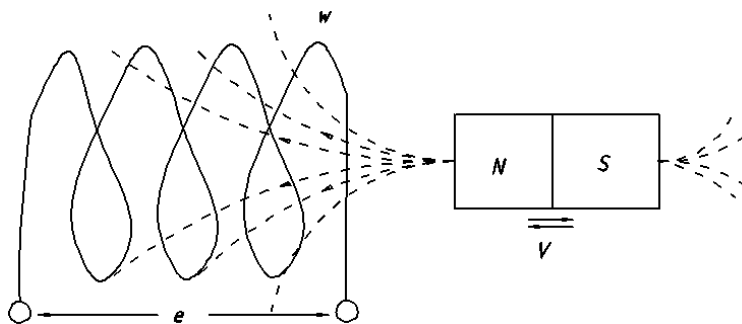


Рис. 3.17. Наведение ЭДС в катушке

При движении постоянного магнита магнитные силовые линии пересекают витки катушки и в соответствии с законом электромагнитной индукции в каждом витке наводится ЭДС. Результирующая ЭДС будет равна

$$e = e_1 + e_2 + e_3 + \dots + e_W = -\left(\frac{d\Phi_1}{dt} + \frac{d\Phi_2}{dt} + \frac{d\Phi_3}{dt} + \dots + \frac{d\Phi_W}{dt}\right),$$

где $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_W$ – потоки, сцепленные с отдельными витками.

Потокосцеплением называется алгебраическая сумма магнитных потоков, сцепленных с отдельными витками:

$$\psi = \Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_W, \quad (3.18)$$

$$\text{тогда } e = -\frac{d}{dt}(\Phi_1 + \Phi_1 + \dots + \Phi_W) = -\frac{d\psi}{dt}, \quad (3.19)$$

т. е. ЭДС электромагнитной индукции, наведенная в катушке, равна изменению потокосцепления, взятому с обратным знаком. Если $\Phi_1 = \Phi_2 = \dots = \Phi_W = \Phi$ (например, в трансформаторе), то $\Psi = w\Phi$ или $e = -w d\Phi/dt$.

3.10. Вихревые токи

Переменное магнитное поле индуцирует ЭДС не только в линейных проводниках и контурах, но и в сплошных токопроводящих средах. При этом в этих средах образуются замкнутые токи, которые называются *вихревыми токами* (рис. 3.18).

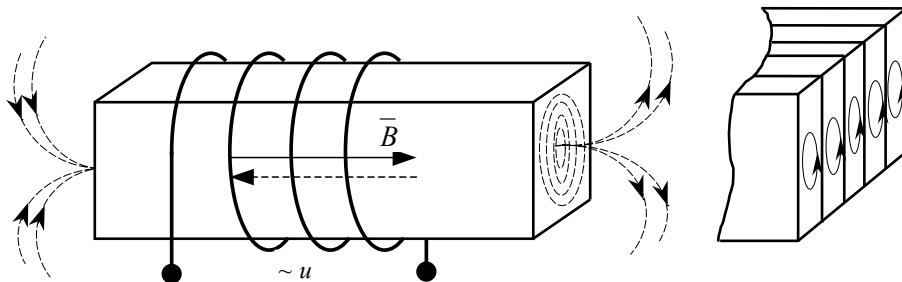


Рис. 3.18. Вихревые токи

На рис. 3.18 показан сердечник, на который установлена катушка, включенная в цепь переменного тока. Переменный ток возбуждает переменный магнитный поток, пронизывающий сердечник.

Поперечное сечение сердечника, можно представить в виде совокупности замкнутых проводников, в каждом из которых по закону электромагнитной индукции наводится ЭДС. Возникающие при этом вихревые токи нагревают сердечник, уменьшая КПД электрических машин и трансформаторов.

Для ограничения вихревых токов с целью уменьшения потерь энергии сердечники изготавливают из тонких изолированных друг от друга пластин, а также добиваются увеличения удельного электрического сопротивления материала сердечника, например путем введения в электротехнические стали присадок кремния.

Полезное применение вихревых токов – это высокочастотный нагрев заготовок, электрические тормоза и демпферы.

3.11. Самоиндукция и взаимная индукция

Наведение ЭДС в элементе цепи при изменении его собственного потокоосцепления называется явлением самоиндукции, а наведенная при этом ЭДС называется ЭДС *самоиндукции*.

На рис. 3.19 показана катушка, включенная в цепь переменного тока. При изменении тока будет изменяться магнитный поток, а следовательно, и потокоосцепление:

$$\Psi_L = w \Phi, \quad (3.20)$$

где w – число витков катушки;

Ψ_L – потокоосцепление самоиндукции.

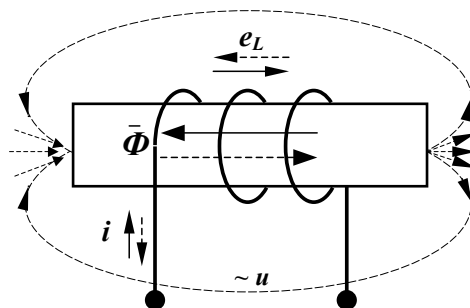


Рис. 3.19. Катушка, включенная в цепь переменного тока

По закону электромагнитной индукции изменение потокоосцепления наводит ЭДС:

$$e_L = -\frac{d\Psi_L}{dt} = -\frac{d\Psi_L}{di} \cdot \frac{di}{dt} = -L \frac{di}{dt}, \quad (3.21)$$

где e_L – ЭДС самоиндукции.

Коэффициент пропорциональности L называется *индуктивностью*.

$$L = \frac{B\phi}{I} = \frac{B \cdot c}{A} = \text{Ом} \cdot \text{с} = \text{Гн} [\text{Генри}].$$

За индуктивность 1 Гн принимается индуктивность такого контура, в котором при изменении тока в 1 А за 1 с возникает ЭДС 1 В. Пользуются и производными величинами 1 Гн = $1 \cdot 10^3$ мГн = $1 \cdot 10^6$ мкГн.

L зависит от формы и размеров проводника, а также от магнитных свойств среды, по которой проходит магнитный поток.

Явление, когда в результате изменения тока в одной катушке наводится ЭДС во второй катушке, называется *взаимной индукцией*. Если расположить рядом две катушки (рис. 3.20) так, чтобы магнитный поток, вызванный током I_1 первой катушки, сцеплялся с витками обеих катушек, то потокоосцепление первой катушки:

$$\Psi_1 = w_1 \Phi_1 = L_1 I_1, \quad (3.22)$$

где w_1 – число витков первой катушки.

Магнитный поток Φ_1 первой катушки частью Φ_{12} сцеплен с витками второй катушки, при этом образуется потокоосцепление:



$$\psi_{12} = w_2 \Phi_{12}, \quad (3.23)$$

пропорциональное силе тока I_1 , называемое взаимным потокоцеплением.

Магнитная связь катушек характеризуется взаимной индуктивностью:

$$M_{12} = \frac{\psi_{12}}{I_1}, \quad (3.24)$$

которая подобна собственной индуктивности.

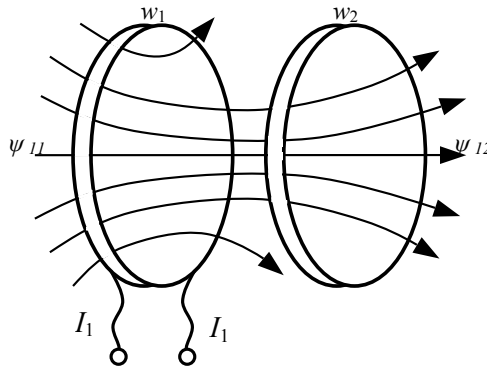


Рис. 3.20. Две катушки, сцепленные общим потоком Φ_{12}

По аналогии с первой катушкой собственное потокоцепление второй катушки $\psi_2 = w_2 \Phi_2 = L_2 I_2$, взаимное потокоцепление $\psi_{21} = w_1 \Phi_{21}$, а магнитная связь характеризуется взаимной индуктивностью $M_{21} = \psi_{21} / I_2$.

Из уравнений (3.17) и (3.18) следует, что:

$$\frac{L_1}{M_{12}} = \frac{w_1}{w_2},$$

аналогично:

$$\frac{L_2}{M_{21}} = \frac{w_2}{w_1}$$

Находим, что $M_{12} M_{21} = L_1 L_2$, а если $M_{12} = M_{21}$, то взаимоиндуктивность:

$$M = \sqrt{L_1 L_2}. \quad (3.25)$$

Взаимоиндуктивность M измеряется в генри.

Из-за потоков рассеяния магнитная связь катушек оказывается неполной, что учитывается коэффициентом связи K :

$$M = K \sqrt{L_1 L_2}. \quad (3.26)$$

Коэффициент $K = M / \sqrt{L_1 L_2}$ связи изменяется от 0 до 1.

Таким образом, коэффициент магнитной связи показывает, во сколько раз взаимная индуктивность катушек отличается от среднего геометрического значения собственных индуктивных катушек. В идеальном случае для двух соосных катушек, расположенных на ферромагнитном сердечнике, $K = 1$; если катушки магнитно изолированы, $K = 0$.

По аналогии с выражением для ЭДС самоиндукции запишем выражение для ЭДС взаимоиндукции:

$$e_{1m} = -M \frac{di_2}{dt}, \quad e_{2m} = -M \frac{di_1}{dt}, \quad (3.27)$$

где e_{1m} – ЭДС взаимной индукции, наведенная током i_2 (т. е. потокоцеплением Ψ_{21}) в первой катушке;

e_{2m} – ЭДС взаимной индукции, наведенная током i_1 (т. е. потокоцеплением Ψ_{12}) во второй катушке.

3.12. Энергия магнитного поля. Тяговое усилие электромагнита

В контуре при прохождении тока часть энергии источника расходуется на тепловые потоки, другая часть запасается в виде энергии магнитного поля. Если сила тока возрастает, то возрастает и магнитный поток, и запасенная энергия магнитного поля.

Создавая магнитное поле контура, ток совершает работу аналогично работе при перемещении проводника в магнитном поле:

$$A = I\Phi. \quad (3.28)$$

Для катушек эта работа

$$A = I\Phi_w = LI\Psi, \quad (3.29)$$

где w – число витков катушки; Ψ – собственное потокоцепление катушки.

Энергия измеряется работой. Если Ψ пропорциональна силе тока I , то энергия магнитного поля катушки может быть определена по формуле (как площадь треугольника, рис. 3.21):

$$W = \frac{I\Psi}{2} = \frac{BHSI}{2}, \quad (3.30)$$

где B – магнитная индукция;

H – напряженность магнитного поля;

SI – объем, который занимает магнитный поток.

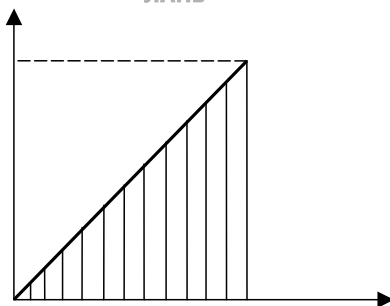


Рис. 3.21. Площадь треугольника, определяющего энергию магнитного поля

Так как потокоцепление $\Psi = LI$, то выражение для энергии магнитного поля:

$$W = \frac{LI^2}{2}. \quad (3.31)$$

Используя это выражение, определим тяговое усилие электромагнита. Электромагнит представляет собой катушку с сердечником (как правило, из ферромагнитного материала). При прохождении тока по катушке он создает сильное магнитное поле. Ферромагнитный предмет (из железа, стали, чугуна, кобальта, никеля и др.), попав в магнитное поле электромагнита, намагничивается и притягивается к сердечнику. При отключении тока предмет под действием силы тяжести отпадает от сердечника электромагнита.

Из формулы магнитной индукции катушки с сердечником:

$$B = \frac{\mu\mu_0 w I}{l}$$

определим ток:

$$I = \frac{B l}{\mu\mu_0 w}$$

и подставим в формулу энергии магнитного поля, в результате чего получим

$$W = \frac{B l \Psi}{2 \mu\mu_0 w}. \quad (3.32)$$

Так как потокосцепление $\Psi = w \Phi = w B S = w H \mu S$, то формула энергии примет вид

$$W = \frac{B H S l}{2 \mu_0}. \quad (3.33)$$

Поделив правую и левую части равенства на l , получим выражение для тягового усилия:

$$F = \frac{B H S}{2 \mu_0}. \quad (3.34)$$

Тяговое усилие электромагнита пропорционально напряженности поля (ампервиткам катушки), магнитной индукции сердечника и площади сечения сердечника. В практике находят широкое применение электромагниты с подвижным сердечником (например, электромагнитные измерительные приборы).

3.13. Примеры к главе 3

Пример 3.1

Определить напряженность магнитного поля на расстоянии l , 2, 5 см от провода, по которому протекает ток $I = 100$ А.

Воспользовавшись формулой

$$H l = I w,$$

с учетом, что для одного провода $W = 1$ и $l = 2\pi r$, напряженность магнитного поля на расстоянии l см:

$$H_1 = \frac{I}{2\pi r} = \frac{100}{2 \cdot 3,14 \cdot 0,01} = 1592 \text{ А / м.}$$

Напряженность магнитного поля на расстоянии 2 и 5 см:

$$H_2 = \frac{I}{2\pi r} = \frac{100}{2 \cdot 3,14 \cdot 0,02} = 796 \text{ А / м.}$$

$$H_5 = \frac{I}{2\pi r} = \frac{100}{2 \cdot 3,14 \cdot 0,05} = 318 \text{ А / м.}$$

Пример 3.2.

В сердечнике кольцевой формы из электротехнической стали нужно получить магнитный поток $\Phi = 2 \cdot 10^{-3} \text{ Вб}$.

Определить:

- ток в обмотке, имеющей 100 витков;
- магнитную проницаемость стали при заданном потоке в сердечнике;
- индуктивность катушки.

Размеры сердечника заданы в мм на рис. 3.22.

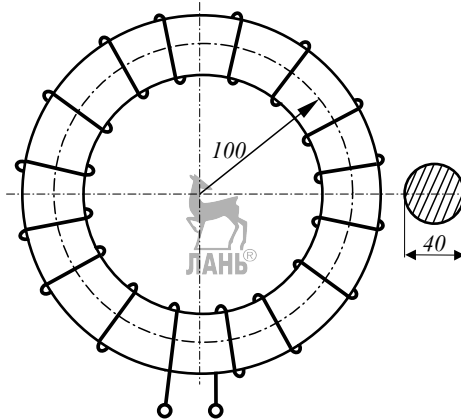


Рис. 3.22. К примеру 3.2

Решение.

Площадь сечения сердечника:

$$S = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 4^2}{4} = 12,56 \text{ см}^2 = 12,56 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Считая магнитную индукцию по сечению сердечника постоянной, найдем ее значение по заданному потоку:

$$B = \frac{\Phi}{S} = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{12,56 \cdot 10^{-4}} = 1,6 \text{ Вб / м}^2.$$

По кривой намагничивания определим напряженность магнитного поля:

$$H = 50 \text{ а / см} = 5000 \text{ а / м.}$$

Намагничивающая сила, необходимая для создания заданного потока:

$$I_w = Hl = 5000 \cdot 2\pi \cdot 100 \cdot 10^{-3} = 3140 \text{ А.}$$

Ток в обмотке:

$$I = \frac{I_w}{w} = \frac{3140}{100} = 31,4 \text{ А.}$$

Магнитная проницаемость стали при найденных значениях B и H :

$$\mu = \frac{B}{H} = 3,2 \cdot 10^{-4} \text{ Гн/м.}$$

Относительная магнитная проницаемость:

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} = \frac{3,2 \cdot 10^{-4}}{4\pi \cdot 10^{-7}} = 254.$$

Индуктивность катушки:

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{2 \cdot 10^{-3} \cdot 100}{31,4} = 6,36 \cdot 10^{-3} \text{ Гн.}$$

Пример 3.3

Определить магнитный поток и магнитное сопротивление сердечника (рис. 3.23), размеры которого заданы в мм, если в катушке с числом витков $w = 200$, ток $I = 6 \text{ А}$. Сердечник изготовлен из электротехнической стали Э41, причем 10% его сечения занимает изоляция между листами.

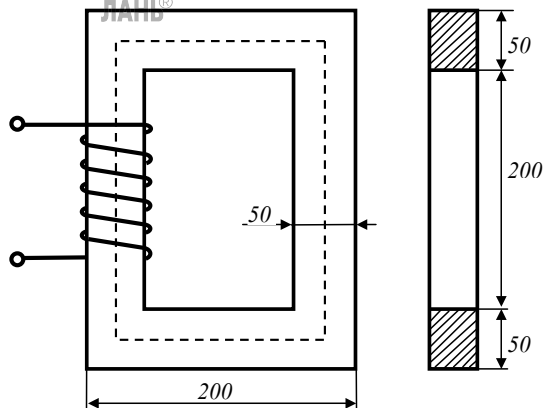


Рис. 3.23. К примеру 3.3

Решение. Намагничивающая сила:

$$Iw = 6 \cdot 200 = 1200 \text{ А.}$$

Напряженность магнитного поля:

$$H = \frac{Iw}{l} = \frac{1200}{80} = 15 \text{ А/см} = 1500 \text{ А/м},$$

где l – длина замкнутого сердечника по средней линии; согласно размерам, указанным на чертеже, $l = 80 \text{ см} = 0,8 \text{ м}$.

Магнитная индукция по кривой намагничивания электротехнической стали Э41:

$$B = 14200 \text{ Гс} = 1,42 \text{ Вб/м}^2.$$

Полная площадь сечения сердечника:

$$S' = 5 \cdot 5 = 25 \text{ см}^2.$$

Активная площадь:

$$S = 25 \cdot 0,9 = 22,5 \text{ см}^2 = 22,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Магнитный поток:

$$\Phi = BS = 1,42 \cdot 22,5 \cdot 10^{-4} = 32 \cdot 10^{-4} \text{ Вб}.$$

Магнитная проницаемость при заданном значении намагничивающей силы:

$$\mu = \frac{B}{H} = \frac{1,42}{1500} = 0,95 \cdot 10^{-3} \text{ Гн/м}.$$

Магнитное сопротивление:

$$R_M = \frac{l}{\mu S} = \frac{0,8}{0,95 \cdot 10^{-3} \cdot 22,5 \cdot 10^{-4}} = 3,74 \cdot 10^5 \frac{1}{\text{Гн}}.$$

Пример 3.4

Катушка, имеющая 500 витков, расположена на среднем стержне магнитопровода, изготовленного из стали Э41 (см. рис. 3.24). Определить ток в катушке, если в крайнем стержне поток $\Phi_2 = \Phi_3 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ Вб}$. Рассеяние потока не учитывается.

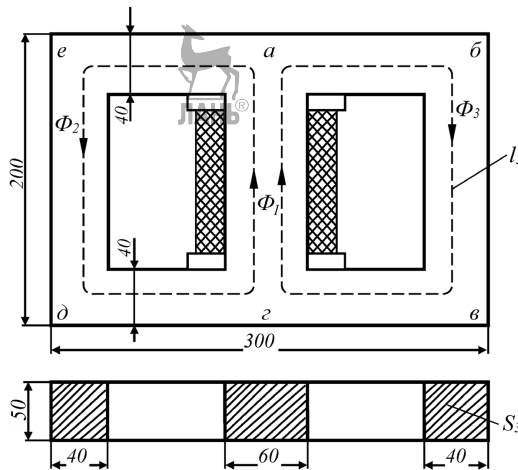


Рис. 3.24. К примеру 3.4

Решение.

В данной симметричной цепи можно наметить два одинаковых в магнитном отношении контура: $a - б - в - г - a$ и $a - e - д - г - a$. В каждом из них по два участка:

$$l_1 = 16 \text{ см}; S_1 = 6 \cdot 5 = 30 \text{ см}^2$$

$$l_1 = 16 \text{ см} = 0,16 \text{ м};$$

$$S_1 = 6 \cdot 5 = 30 \text{ см}^2 = 30 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

$$S_2 = S_3 = 4 \cdot 5 = 20 \text{ см}^2 = 20 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Рассматривая один из контуров, решим задачу в порядке, принятом для неразветвленной цепи:

$$B_2 = \frac{\Phi_2}{S_2} = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{20 \cdot 10^{-4}} = 1,00 \text{ Вб/м}^2.$$

Магнитный поток в среднем стержне в два раза больше, чем в крайних:

$$\Phi_1 = 2\Phi_2;$$

$$B_1 = \frac{\Phi_1}{S_1} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{30 \cdot 10^{-4}} = 1,33 \text{ Вб/м}^2.$$

По кривым намагничивания стали находим:

$$H_1 = 800 \text{ А/м}; H_2 = 300 \text{ А/м}.$$

По закону полного тока:

$$I_w = H_1 l_1 + H_2 l_2 = 800 \cdot 0,16 + 300 \cdot 0,42 = 254 \text{ А}.$$

Ток в катушке:

$$I = \frac{I_w}{w} = \frac{254}{500} = 0,51 \text{ А}.$$

Пример 3.5

Обмотки трансформатора имеют индуктивность $L_1 = 6,1 \text{ Гн}$; $L_2 = 0,08 \text{ Гн}$ и коэффициент магнитной связи $k = 0,9$. Определим ЭДС, наведенную в обеих обмотках, при увеличении тока в первой обмотке со скоростью 1000 А/с .

Решение. ЭДС самоиндукции в первой обмотке:

$$e_1 = -L_1 \frac{di}{dt} = 6,1 \cdot 1000 = 6100 \text{ В}.$$

Для определения ЭДС во второй обмотке найдем взаимную индуктивность обмоток:

$$M = K \sqrt{L_1 L_2} = 0,9 \sqrt{6,1 \cdot 0,08} = 0,63 \text{ Гн},$$

$$e_2 = -M \frac{di}{dt} = 0,63 \cdot 1000 = 630 \text{ В}.$$

Контрольные вопросы к главе 3

1. Чем характеризуется интенсивность магнитного поля?
2. Назовите единицу измерения магнитного потока и магнитной индукции.
3. Сформулируйте правило буравчика, для чего оно служит?
4. Что называется магнитодвижущей силой (м.д.с.)?
5. Что характеризует величина магнитной проницаемости вещества? Как подразделяются материалы в зависимости от величины магнитной проницаемости?
6. Объясните электромеханическое свойство магнитного поля. Сформулируйте правило левой руки.
7. Дайте определение явления магнитной индукции. Объясните явление самоиндукции и взаимной индукции. В чем измеряется индуктивность и взаимная индуктивность?

8. Напишите формулу закона электромагнитной индукции, сформулируйте принцип Ленца и правило правой руки.

9. Объясните петлю гистерезиса и понятие коэрцитивной силы. О чем свидетельствует ширина петли гистерезиса?

10. Напишите формулу магнитного потока простой магнитной цепи и объясните аналогию с законом Ома для электрической цепи.

11. Напишите формулу энергии магнитного поля и формулу тягового усилия электромагнита.



Глава 4. Цепи однофазного синусоидального тока

4.1. Основные определения

В современной технике наибольшее распространение получили переменные электрические токи, то есть токи, изменяющиеся во времени.

Формы переменных токов весьма разнообразны. Различают токи периодические и непериодические.

Периодическим называется ток, значения которого повторяются через равные промежутки времени.

Если кривая изменения периодического тока описывается синусоидой или косинусоидой, то такой ток называют синусоидальным током. Если кривая тока отличается от синусоиды или косинусоиды, то такой ток называют несинусоидальным. В качестве примера на рис. 4.1 приведены непериодический ток (рис. 4.1а), периодический несинусоидальный ток, изменяющийся по трапецевидной кривой (рис. 4.1б) и синусоидальный ток (рис. 4.1в).

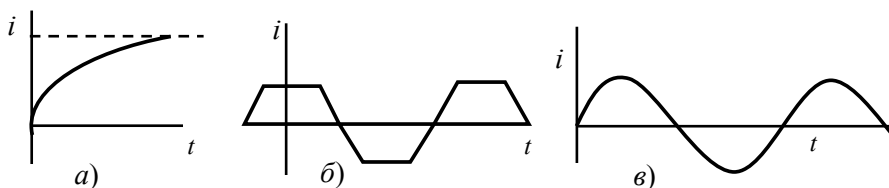


Рис. 4.1. Различные формы кривых переменных токов

Переменный ток имеет ряд преимуществ по сравнению с постоянным током, в частности:

- переменный ток может быть легко трансформирован, что широко используется в электроэнергетике для снижения потерь в линиях электропередачи (ЛЭП). С этой целью в начале ЛЭП ставят повышающий трансформатор и передают электроэнергию при высоком напряжении и, соответственно, уменьшенном значении тока ЛЭП в k раз, что уменьшает потери в ЛЭП, так как они пропорциональны квадрату тока (т. е. k^2). В конце ЛЭП устанавливаются понижающие трансформаторы, с помощью которых напряжение снижается до значения, удобного для питания приемников энергии (нагрузок);

- генераторы и двигатели переменного тока, как правило, более просты по конструкции, дешевле и более надежны в эксплуатации с характеристиками, не уступающими характеристикам машин постоянного тока;

- энергия переменного тока может передаваться на очень большие расстояния посредством переменного магнитного поля без проводов, что является основой радио, телевидения и т. п.

Наиболее широкое применение в технике получили синусоидальные токи, которые по сравнению с другими токами имеют то преимущество, что позволяют наиболее экономично осуществлять производство, передачу и распространение энергии. Особенностью синусоидальной функции является то, что производная и интеграл от нее тоже являются синусоидальными функциями,

которые сдвинуты во времени относительно основной функции: в цепи синусоидального тока падение напряжения на индуктивности пропорционально производной тока по времени, а на конденсаторе – интегралу от тока как функции времени. Вследствие этого в цепи синусоидального тока возникают синусоидально изменяющиеся напряжения, т. е. не возникают какие-либо резкие, скачкообразные изменения напряжений и токов.

Кроме того, любой несинусоидальный, но периодический переменный ток может быть представлен как сумма ряда синусоидальных токов различных частот. При расчете таких цепей несинусоидального тока могут быть применены основные законы и соотношения из области синусоидальных токов.

Синусоидальный ток впервые применил для питания своей «свечи» русский электротехник П. Н. Яблочков. Им был создан первый генератор синусоидального тока, а затем и трансформатор.

Синусоидальный ток получил всеобщее признание благодаря успешным работам инженера М. О. Доливо-Добровольского, изобретателя самого распространенного ныне трехфазного электрического двигателя – асинхронного. Именно ему принадлежит руководящая роль в организации электрической передачи энергии на основе трехфазного тока с помощью изобретенных им трехфазных трансформаторов.

4.2. Получение синусоидальной ЭДС

В линейных электрических цепях синусоидальный ток возникает под действием синусоидальных ЭДС. Синусоидальную зависимость ЭДС от времени можно получить, вращая с постоянной скоростью в равномерном магнитном поле проводник в виде прямоугольной рамки (рис. 4.2).

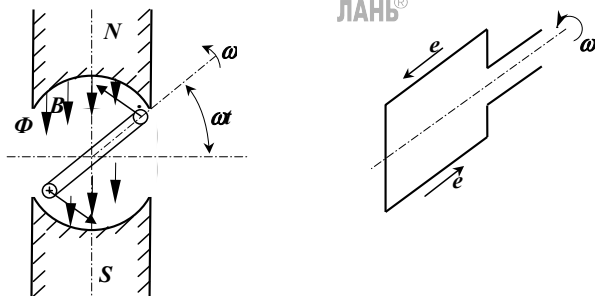


Рис. 4.2. Получение синусоидальной ЭДС

Магнитный поток, пронизывающий рамку, будет зависеть от угла поворота рамки ωt и равен

$$\Phi = B \cdot S \cdot \cos \omega t, \quad (4.1)$$

где B – индукция магнитного поля;

S – площадь рамки;

ω – угловая частота.

Величина ЭДС, наводимая в рамке:

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = B \cdot S \cdot \omega \sin \omega t. \quad (4.2)$$

Обозначим $E_M = B \cdot S \cdot \omega$, тогда

$$e = E_M \sin \omega t. \quad (4.3)$$

Таким образом, при вращении рамки в магнитном поле в ней наводится ЭДС, изменяющаяся по закону синуса. В рассмотренном случае синусоидальное изменение ЭДС достигается за счет непрерывного изменения угла, под которым проводники пересекают линии магнитной индукции ($\alpha = \omega t$). Наибольшего значения (равного E_M) ЭДС достигает при $\alpha = \omega t = 90^\circ$.

На рис. 4.3 изображена волновая диаграмма синусоидального тока, закон изменения которого описывается уравнением $i = I_M \sin \omega t$.

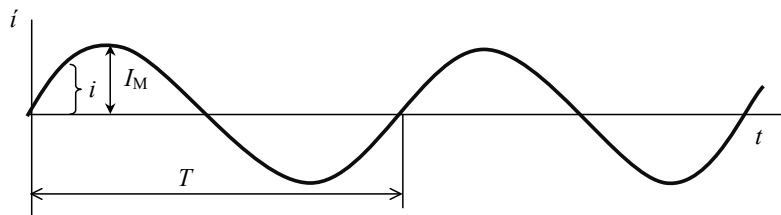


Рис. 4.3. Волновая диаграмма тока, изменяющегося по закону $i = I_M \sin \omega t$

Перечислим параметры, которыми характеризуется синусоидально изменяющаяся величина, используя рис. 4.3:

- мгновенное значение, т. е. ее значение в любой момент времени. Обозначается строчной буквой латинского алфавита (i – для тока, u – для напряжения, e – для ЭДС и т. д.);
- максимальное (амплитудное) значение. Для его обозначения служат прописные буквы латинского алфавита с индексом M (I_M – для тока, U_M – для напряжения, E_M – для ЭДС);
- период T , т. е. минимальный интервал времени, за который синусоидально изменяющаяся величина совершает одно полное изменение по величине и направлению. Период измеряется в секундах (с);
- частота $f = 1/T$, численно равная числу периодов периодического тока в одну секунду. Единицей измерения частоты служит герц (Гц);
- фаза – аргумент синуса в выражении для тока, т. е. угол синусоиды. В нашем примере фаза равна ωt ;
- круговая или угловая частота ω , характеризующая скорость изменения угла синусоиды. Угловая частота определяется на основе следующего рассуждения: за время одного периода угол синусоиды меняется на 360° , т. е. на 2π радиан. Отсюда

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \text{ [с}^{-1}\text{]}. \quad (4.4)$$

Из формулы видно, что угловая частота ω зависит от частоты тока f .

4.3. Волновые и векторные диаграммы. Сдвиг фаз

Синусоидальные величины можно графически изображать двумя способами: в виде синусоид или в виде вращающихся векторов.

При изображении их синусоидами (т. е. в виде волновых диаграмм) в определённом масштабе на оси ординат откладывают мгновенные значения величин (i , u , e), а на оси абсцисс (также в масштабе) откладывают время или фазовые углы, соответствующие этому времени.

Проследим взаимосвязь этих двух форм изображения синусоидального тока на рис. 4.4.

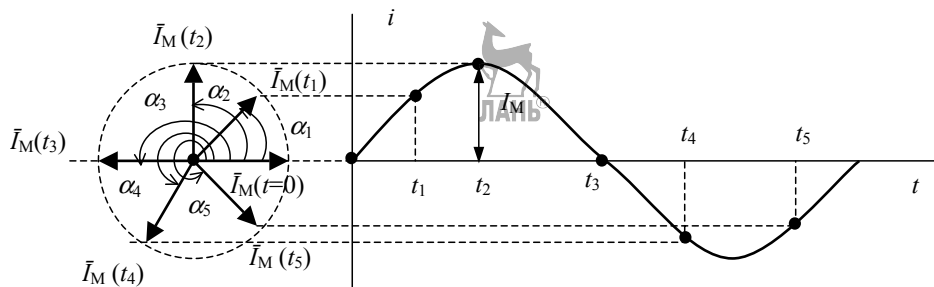


Рис. 4.4. Построение синусоидальной кривой, изменяющейся по закону $i = I_M \sin \omega t$

С этой целью возьмем вектор $\bar{I}_M$, длина которого в масштабе равна I_M , и направим его в прямоугольной системе координат по горизонтали вправо, что и будет его исходным положением в нулевой момент времени ($t = 0$).

Вектор пусть вращается с постоянной угловой частотой ω *против часовой стрелки*. Когда с момента начала отсчета пройдет время t_1 , тогда вектор $\bar{I}_M$ повернется на угол $\alpha_1 = \omega t_1$. Из конца вектора $\bar{I}_M$ опустим перпендикуляр на горизонтальную ось, длина которого будет равна $I_M \sin \omega t_1$. Спустя четверть периода с момента начала отсчета времени, т. е. в момент $t_2 = T/4$ вектор $\bar{I}_M$ расположится перпендикулярно горизонтальной оси, а длина перпендикуляра будет:

$$I_M \sin \omega t_2 = I_M \sin \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4} = I_M \sin \frac{2\pi}{4} = I_M.$$

В момент времени $t_3 = \frac{T}{2}$ синусоидальная величина проходит через нулевое значение $I_M \sin \omega t_3 = I_M \sin \omega \pi = 0$ – кривая пересекает ось абсцисс – вектор $\bar{I}_M$ примет горизонтальное значение.

Затем, вращаясь, вектор опустится ниже горизонтальной оси (моменты t_4 и t_5), а перпендикуляр $I_M \sin \omega t$ будет уже отрицательной величиной, и синусоидальная кривая окажется ниже оси абсцисс, т. е. в области отрицательных значений.

Таким образом, любая синусоидально изменяющаяся величина может быть изображена вектором, длина которого равна амплитудному значению, который вращается против часовой стрелки с угловой частотой $\omega = \text{const}$, а проекция

этого вектора на вертикальную ось (т. е. перпендикуляр, опущенный на горизонтальную ось) дает мгновенное значение синусоидальной величины в любой момент времени.

Приведенным на рис. 4.5 и 4.6 графикам двух синусоидальных токов соответствуют уравнения:

$$\begin{aligned} i_1 &= I_{M1} \sin(\omega t + \psi_1); \\ i_2 &= I_{M2} \sin(\omega t - \psi_2). \end{aligned}$$

Значения аргументов двух синусоидальных токов i_1 и i_2 называют, как было сказано выше, фазами синусоид:

$(\omega t + \psi_1)$ – фаза i_1 ;

$(\omega t - \psi_2)$ – фаза i_2 .

Значение фаз в начальный момент времени, т. е. при $t = 0$, называют *начальной фазой*:

ψ_1 – начальная фаза i_1 ;

$(-\psi_2)$ – начальная фаза i_2 .

Будем называть *началом синусоиды* ближайшую к началу координат точку ее перехода через ноль от отрицательных значений к положительным. Это точки a и b на рис. 4.5 и 4.6.

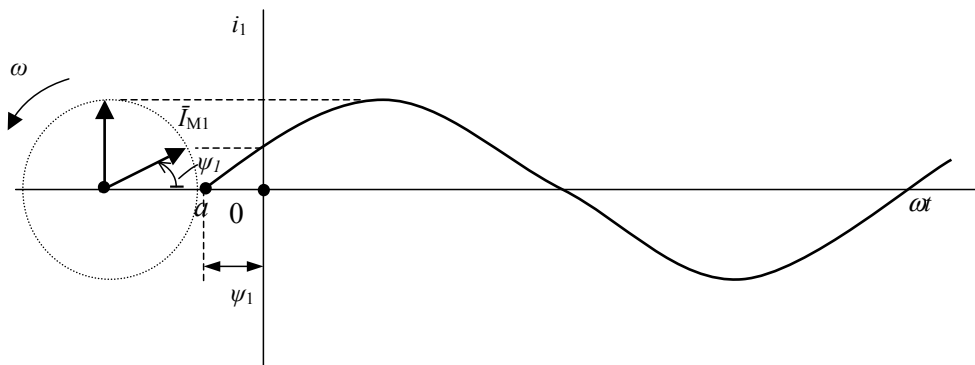


Рис. 4.5. Изображение тока i_1 в виде вектора и синусоидальной кривой

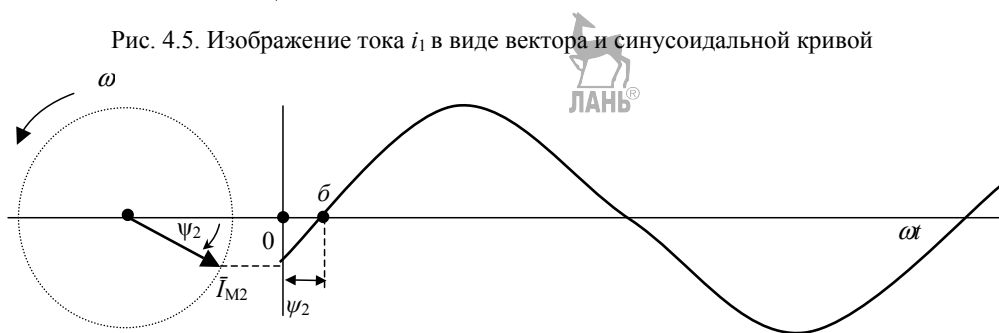


Рис. 4.6. Изображение тока i_2 в виде вектора и синусоидальной кривой

Если угол начальной фазы положителен, то синусоида оказывается сдвинутой влево относительно начала координат на этот угол ψ_1 (точка a на рис. 4.5

лежит левее), если же угол начальной фазы отрицателен, то – вправо (точка b на рис. 4.6 лежит правее на величину угла ψ_2).

При векторном изображении если угол начальной фазы положителен, то он отсчитывается от горизонтальной положительной полуоси против часовой стрелки (угол ψ_1 на рис. 4.5), определяя тем самым положение вектора $\bar{I}_{M1}$ в начальный момент времени ($t = 0$).

Если угол начальной фазы отрицателен ($-\psi_2$), то он отсчитывается по часовой стрелке, определяя начальное положение вектора $\bar{I}_{M2}$ на рис. 4.6.

Если угол начальной фазы равен нулю, то синусоида берет свое начало из начала координат, что подтверждает рис. 4.4: ток i начинается из начала координат, так как его начальная фаза равна 0 ($\omega t = 0$ при $t = 0$).

При совместном рассмотрении двух синусоидально изменяющихся величин одной частоты разности их фазовых углов, равные разности начальных фаз, называют *углом сдвига фаз*.

Например, даны две синусоиды (напряжения и тока):

$$u = U_M \sin(\omega t + \psi_u); i = I_M \sin(\omega t + \psi_i).$$

Угол сдвига фаз будет равен

$$\varphi = (\omega t + \psi_u) - (\omega t + \psi_i) = \omega t + \psi_u - \omega t - \psi_i = \psi_u - \psi_i.$$

На рис. 4.7 эти напряжение и ток изображены в виде синусоидальных кривых, а на рис. 4.8 – в виде вращающихся векторов.

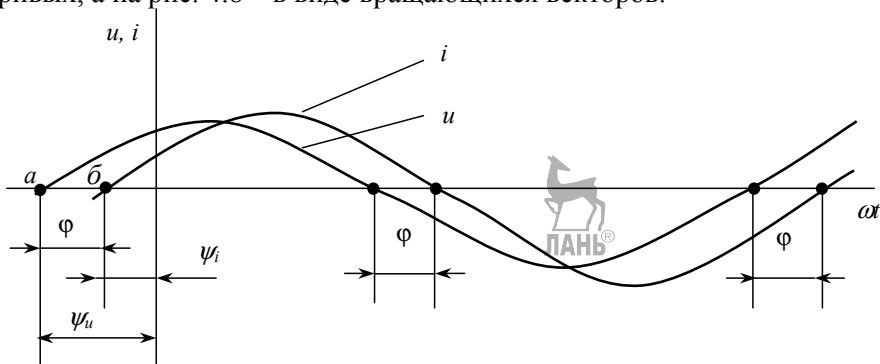


Рис. 4.7. Кривые напряжения и тока (u и i)

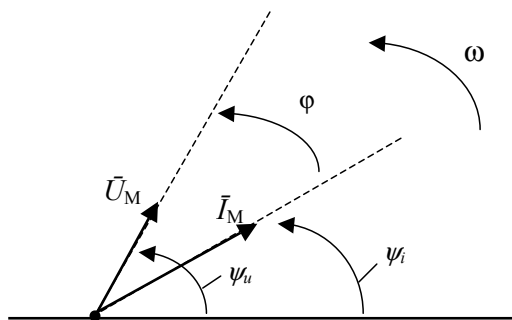


Рис. 4.8. Векторное изображение напряжения и тока (u и i)

Начало синусоиды напряжения (точка *а*) расположено левее начала синусоиды тока (точка *б*), т. е. напряжение раньше проходит через нулевое значение, чем ток. В этом случае говорят, что напряжение опережает ток по фазе на угол φ или, другими словами, ток отстает по фазе от напряжения на угол φ , равный разности начальных фаз рассматриваемых синусоид.

Совокупность векторов, изображающих синусоидальные величины (ЭДС, напряжения, токи) одной частоты в соответствии со значениями их амплитуд и фазовых углов, называют *векторными диаграммами*.

4.4. Сложение и вычитание векторных величин

Векторные диаграммы нашли широкое применение при анализе и расчете цепей переменного тока. Их применение делает расчет цепи более наглядным и простым.

Это упрощение основывается на том, что сложение и вычитание мгновенных значений синусоидальных величин можно заменить сложением и вычитанием соответствующих векторов.

На рис. 4.9 показано сложение и вычитание двух токов:

$$i_1 = I_{M1} \sin(\omega t + \psi_1) \text{ и } i_2 = I_{M2} \sin(\omega t - \psi_2).$$

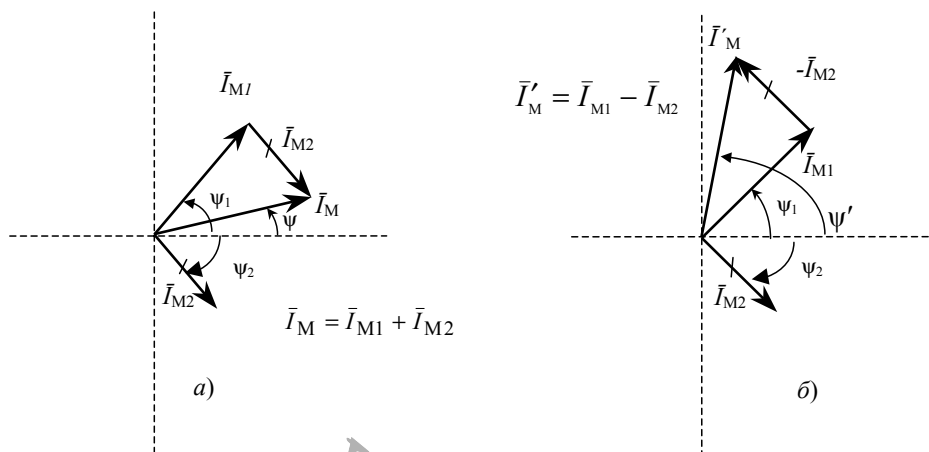


Рис. 4.9. Сложение и вычитание векторов двух токов

Напомним, что для сложения векторов требуется к концу одного вектора – слагаемого пристроить второй вектор – слагаемое, при этом вектором суммы является вектор, соединяющий начало координат с концом последнего вектора – слагаемого ($\vec{I}_M$ на рис. 4.9а).

Для получения вектора разности необходимо к концу вектора – уменьшаемого пристроить вектор – вычитаемое, направленный в сторону, противоположную положительному его направлению. Вектор, соединяющий начало координат с концом последнего вектора, есть вектор разности ($\vec{I}'_M$ на рис. 4.9б).

В итоге сложения (вычитания) мы получаем результирующий вектор суммы (разности), длина которого есть максимальное значение результирующего тока, а угол между ним и положительной полуосью – его начальная фаза.

Знание этих параметров позволяет записать законы изменения полученных синусоидальных величин. В нашем случае ток, полученный в результате сложения i_1 и i_2 , имеет закон:

$$i = I_M \sin(\omega t + \psi),$$

а полученный в результате вычитания:

$$i' = I'_M \sin(\omega t + \psi').$$

Напомним, что если бы угол начальной фазы результирующего вектора был бы отрицательным, (т. е. отсчитывался от положительной полуоси абсцисс по часовой стрелке), то начальная фаза вошла бы в закон изменения результирующего вектора со знаком «минус».

4.5. Среднее значение величин синусоидального тока

Среднее значение любой синусоидальной величины за период (например, тока) равно нулю:

$$I_{CP} = \frac{1}{T} \int_0^T i dt = \frac{1}{T} \int_0^T I_M \sin(\omega t + \psi_i) dt = 0.$$

Поэтому в электротехнике среднее значение синусоидального тока оценивается за полупериод ($T/2$):

$$I_{CP} = \frac{1}{T/2} \int_0^{T/2} i dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} I_M \sin(\omega t + \psi_i) dt = \frac{2I_M}{\pi} = 0,637 \cdot I_M. \quad (4.5)$$

Аналогично определяется среднее значение синусоидального напряжения и ЭДС:

$$U_{CP} = \frac{2U_M}{\pi} = 0,637 \cdot U_M; \quad (4.6)$$

$$E_{CP} = \frac{2E_M}{\pi} = 0,637 \cdot E_M. \quad (4.7)$$

4.6. Действующее значение синусоидального тока

Под действующим значением синусоидального переменного тока понимают такое значение постоянного тока, которое за одно и то же время (например, период T) производит тот же тепловой или электродинамический эффект, что и переменный ток:

$$RI^2T = R \int_0^T i^2 dt.$$

↑ Тепловое действие
постоянного тока
 ↑ Тепловое действие
переменного тока

Из этого следует:

$$I^2 R = \frac{1}{T} \int_0^T i^2 R dt;$$

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}.$$

Закон изменения синусоидального тока:

$$i = I_M \sin(\omega t + \psi).$$

В результате выражение для действующего значения синусоидального тока примет вид

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_M^2 \sin^2(\omega t + \psi) dt} = I_M \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t + \psi) dt} = \\ &= I_M \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} [1 - \cos(2\omega t + 2\psi)] dt} = I_M \sqrt{\frac{1}{2T} \int_0^T dt - \frac{1}{2T} \int_0^T \cos(2\omega t + 2\psi) dt}. \end{aligned}$$

Значение второго интеграла под знаком корня в правой части выражения равно нулю:

$$\int_0^T \cos(2\omega t + 2\psi) dt = 0,$$

так как среднее значение косинуса за период (а также и за два его периода) равно нулю.

Значение первого интеграла:

$$\int_0^T dt = T,$$

поэтому в случае синусоидального тока его действующее значение:

$$I = \frac{I_M}{\sqrt{2}} \cong 0,707 \cdot I_M. \quad (4.8)$$

Аналогично записываются действующие значения напряжений и ЭДС:

$$U = \frac{U_M}{\sqrt{2}} \cong 0,707 \cdot U_M; \quad (4.9)$$

$$E = \frac{E_M}{\sqrt{2}} \cong 0,707 \cdot E_M. \quad (4.10)$$

Действующие значения I , U , E являются основными расчетными величинами.

Заметим, что в большинстве электроизмерительных систем вращающий момент пропорционален действующему значению синусоидально изменяющейся величины, подлежащей измерению. Напомним также, что если действующее значение синусоидального напряжения равно 220 В , то его максимальное напряжение: $U_M = \sqrt{2} \cdot U = 1,41 \cdot 220 = 310,2 \text{ В}$.

4.7. Задания 3–5 для самостоятельной работы

4.7.1. Задания 3–5

Задание 3

Заданы аналитические выражения для напряжения и тока:

$$u = U_M \sin(\omega t + \psi_u);$$

$$i = I_M \sin(\omega t + \psi_i).$$

В табл. 4.1 даны численные значения U_m , I_m , ω , ψ_u и ψ_i для каждого из 15 вариантов.

Необходимо выполнить следующее:

- написать выражение для фазы напряжения и тока;
- рассчитать действующие и средние значения напряжения и тока, их частоту (f), период (T), угол сдвига фаз (φ) между ними;
- построить волновые и векторные диаграммы, изобразив напряжение на волновой и векторной диаграмме в едином масштабе напряжений, а ток на обеих диаграммах в едином масштабе токов.

Изобразить на общей диаграмме ток и напряжение, обозначив на ней угол сдвига фаз (φ) между ними.

Таблица 4.1

Параметр	№ варианта														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
U_m , [В]	100	200	150	110	220	300	250	310	160	140	180	210	400	450	380
I_m , [А]	15	10	12	20	25	40	30	35	18	24	32	38	50	42	45
ω , [с ⁻¹]	314	628	942	314	628	942	314	628	942	314	628	942	628	314	942
ψ_u , [град]	120	-60	-120	60	30	150	-150	-90	-60	45	-60	90	60	30	-60
ψ_i , [град]	30	90	-30	-90	90	-120	90	150	-30	-90	45	-60	-45	120	150

Задание 4

Заданы аналитические выражения трёх токов:

$$i_1 = 18 \sin(\omega t + \psi_{i1});$$

$$i_2 = 10 \sin(\omega t + \psi_{i2});$$

$$i_3 = 24 \sin(\omega t + \psi_{i3}).$$

Углы начальных фаз токов представлены в табл. 4.2.

Таблица 4.2

Угол начальной фазы (град)	№ варианта														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
ψ_{i1}	120	60	90	30	0	150	60	120	30	90	-60	90	-30	0	30
ψ_{i2}	-30	-90	-60	-120	-150	60	0	30	-60	30	-150	-30	-120	-90	-60
ψ_{i3}	-60	-120	-90	-30	-60	30	-150	-60	-120	-150	60	-120	90	-120	-90

На векторной диаграмме, построенной в масштабе, изобразить векторы токов и обозначить углы их начальных фаз.

Определить расчётным путём углы сдвига фаз: φ_{12} , φ_{23} , φ_{13} , и обозначить их на векторной диаграмме.

Отдельным построением получить на векторных диаграммах результирующие векторы от сложения и вычитания заданных векторов:

$$(\bar{I}_{M1} + \bar{I}_{M2} + \bar{I}_{M3});$$

$$(\bar{I}_{M1} - \bar{I}_{M2} - \bar{I}_{M3});$$

$$(\bar{I}_{M2} + \bar{I}_{M3} - \bar{I}_{M1});$$

$$(\bar{I}_{M1} - \bar{I}_{M2});$$

$$(\bar{I}_{M1} - \bar{I}_{M3}).$$

Примечание: все построения выполнить в масштабе.

Задание 5

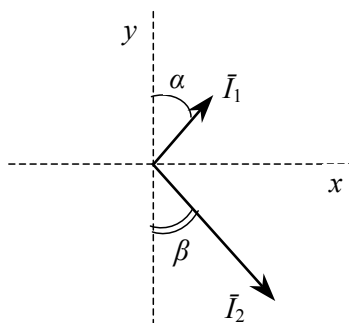


Рис. 4.10

На рис. 4.10 изображены два вектора тока. Их положение в системе координат определяется углами α и β , значения которых представлены в табл. 4.3 для каждого из 15 вариантов. В табл. 4.3 также заданы действующие значения токов и их частота.

Необходимо выполнить следующее:

- рассчитать максимальные значения заданных токов, их начальные фазы, угловую частоту, сдвиг фаз;
- написать аналитические выражения для заданных токов;
- определить геометрическим построением, выполненным в масштабе, амплитуду и начальную фазу тока, равного сумме заданных токов;
- написать аналитическое выражение суммарного тока;
- определить интервал времени, соответствующий найденному сдвигу фаз;
- повернуть систему координат таким образом, чтобы полуось ox совпала по направлению с вектором первого тока в новой системе координат.

Написать аналитические выражения для токов i_1 и i_2 в новой системе координат и определить угол сдвига фаз (φ) между ними.

Исходные данные к заданию 5 представлены в табл. 4.3.

Таблица 4.3

Параметр	№ варианта														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
α	30	45	0	135	45	60	90	45	180	90	90	0	135	90	180
β	60	90	45	180	45	30	30	0	135	0	90	60	90	45	90
I_1	20	10	60	2	8	15	30	20	12	4	40	30	15	15	15
I_2	15	30	40	4	12	20	15	15	8	2	60	10	20	30	30
f	10	20	30	40	50	40	30	20	100	150	150	200	400	100	100

4.7.2. Примеры выполнения заданий 3–5

Пример к заданию 3

Даны аналитические выражения для напряжения и тока:

$$u = 300 \sin(628t + 30^\circ);$$

$$i = 10 \sin(628t - 60^\circ).$$

Из этих выражений выписываем параметры синусоидальных величин:

$$U_M = 300 \text{ В}, I_M = 10 \text{ А};$$

$$\omega = 628 \text{ с}^{-1};$$

$$\psi_u = 30^\circ; \psi_i = -60^\circ.$$

Напишем выражения для:

- фазы напряжения $(628t + 30^\circ)$;
- фазы тока $(628t - 60^\circ)$.

Рассчитаем действующие значения:

$$\text{– напряжения } U = \frac{U_M}{\sqrt{2}} = \frac{300}{1,41} = 213 \text{ В};$$

$$\text{– тока } I = \frac{I_M}{\sqrt{2}} = \frac{10}{1,41} = 7,07 \text{ А}.$$

Рассчитаем средние значения:

$$\text{– напряжения } U_{cp} = \frac{2}{\pi} \cdot U_M = \frac{2}{3,14} \cdot 300 = 191 \text{ В};$$

$$\text{– тока } I_{cp} = \frac{2}{\pi} \cdot I_M = \frac{2}{3,14} \cdot 10 = 6,36 \text{ А}.$$

Определим:

- частоту напряжения и тока из выражения для $\omega = 2\pi f$, откуда

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{628}{2 \cdot 3,14} = 100 \text{ Гц};$$

- период напряжения и тока

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{100} = 0,01 \text{ с};$$

- угол сдвига фаз между напряжением и током

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = 30^\circ - (-60^\circ) = 90^\circ.$$

Изобразим напряжение и ток на векторной и волновой диаграммах, выбрав предварительно масштаб: для напряжения в $1 \text{ см} - 100 \text{ В}$; для тока – в $1 \text{ см} - 5 \text{ А}$.

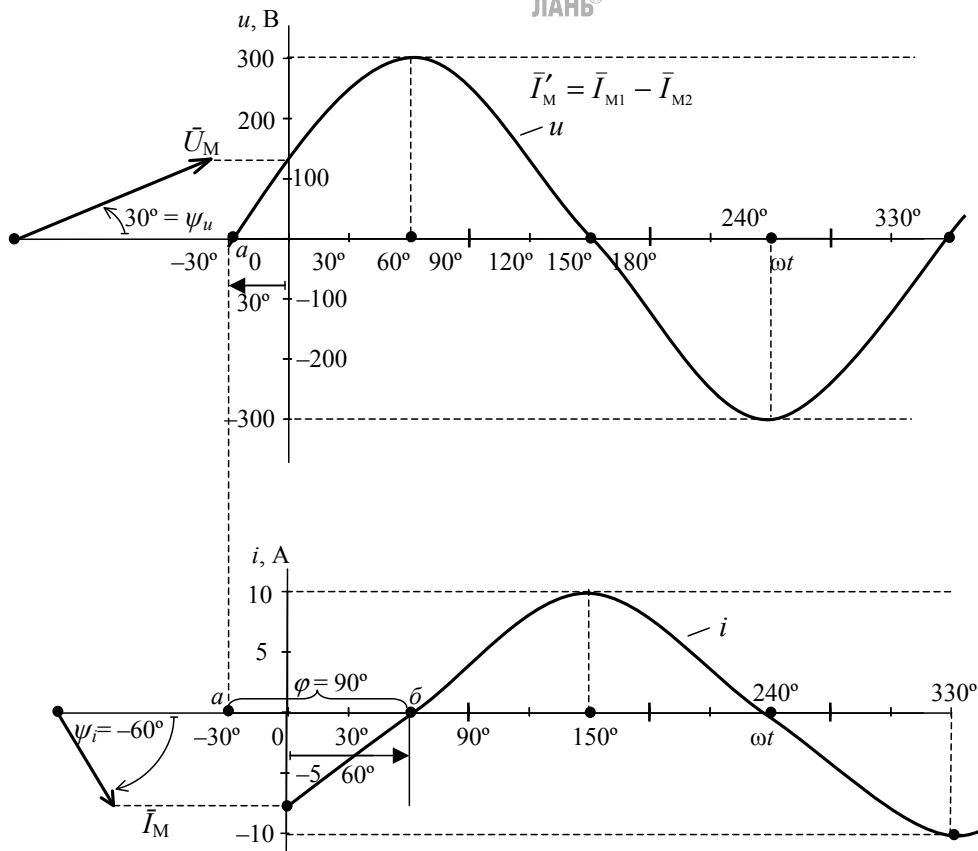


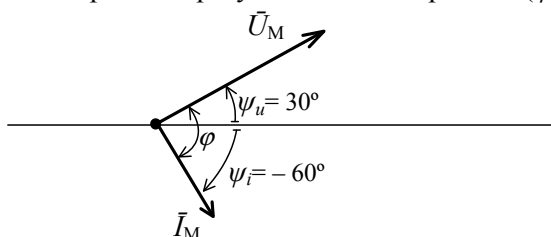
Рис. 4.11

Заметим, что масштаб при изображении угла синусоиды (по оси абсцисс) для кривых u и i должен быть один и тот же. В нашем случае принимаем, что в $1 \text{ см} - 30^\circ$, т. е.:

$$\frac{30^\circ}{1 \text{ см}}$$

(см. волновые диаграммы на рис. 4.11).

Угол сдвига фаз (φ) между векторами $\vec{U}_M$ и $\vec{I}_M$ находим на общей для $\vec{U}_M$ и $\vec{I}_M$ векторной диаграмме в результате её построения ($\varphi = 90^\circ$).



На волновой диаграмме угол φ есть расстояние на оси абсцисс между точками a и b , где:

a – точка начала синусоиды u ;

b – точка начала синусоиды i .

Пример к заданию 4

Даны аналитические выражения для трёх токов:

$$i_1 = 20 \sin(\omega t + 60^\circ);$$

$$i_2 = 10 \sin(\omega t - 90^\circ);$$

$$i_3 = 30 \sin(\omega t + 135^\circ).$$

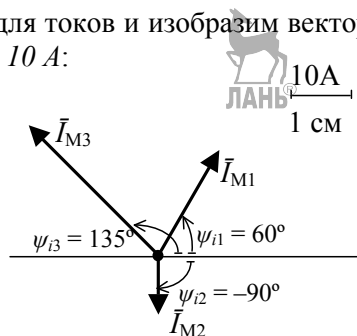
Из приведённых выражений следует, что амплитудные значения токов равны:

$$I_{M1} = 20 \text{ A}; I_{M2} = 10 \text{ A}; I_{M3} = 30 \text{ A},$$

а углы начальных фаз составляют:

$$\psi_{i1} = 60^\circ; \psi_{i2} = -90^\circ; \psi_{i3} = 135^\circ.$$

Выбираем масштаб для токов и изобразим векторы заданных токов на векторной диаграмме, в $1 \text{ см } 10 \text{ A}$:



Рассчитаем углы сдвига фаз:

– между первым и вторым током

$$\varphi_{12} = \psi_{i1} - \psi_{i2} = 60^\circ - (-90^\circ) = 150^\circ;$$

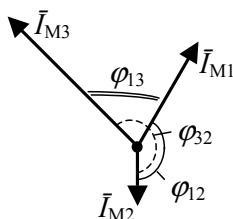
– между первым и третьим током

$$\varphi_{13} = \psi_{i1} - \psi_{i3} = 60^\circ - 135^\circ = -75^\circ,$$

заметим, что знак «-» свидетельствует о том, что первый ток отстаёт по фазе от третьего тока на 75° ;

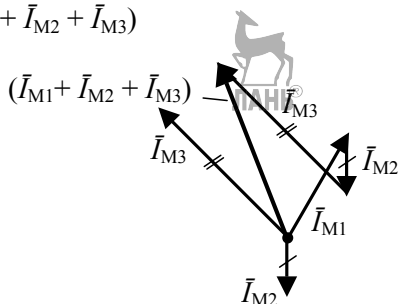
- между третьим и вторым током

$$\varphi_{32} = \psi_{i3} - \psi_{i2} = 135^\circ - (-90^\circ) = 225^\circ.$$

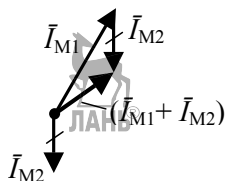


На векторных диаграммах найдём суммы и разности векторов токов:

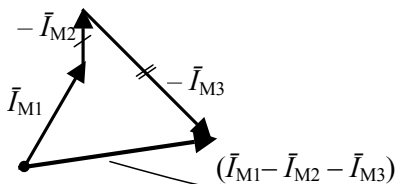
- для $(\bar{I}_{M1} + \bar{I}_{M2} + \bar{I}_{M3})$



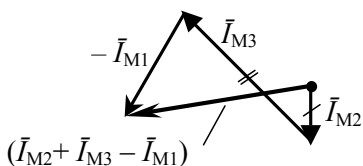
- для $(\bar{I}_{M1} + \bar{I}_{M2})$



- для $(\bar{I}_{M1} - \bar{I}_{M2} - \bar{I}_{M3})$



- для $(\bar{I}_{M2} + \bar{I}_{M3} - \bar{I}_{M1})$



Пример к заданию 5

Заданы два вектора тока с параметрами:

$$\alpha = 30^\circ; \beta = 120^\circ; I_1 = 12 \text{ A}; I_2 = 18 \text{ A}; f = 50 \text{ Гц}.$$

Рассчитаем:

- максимальные значения токов

$$I_{M1} = \sqrt{2} \cdot I_1 = \sqrt{2} \cdot 12 = 16,94 \text{ A};$$

$$I_{M2} = \sqrt{2} \cdot I_2 = \sqrt{2} \cdot 18 = 25,4 \text{ A};$$

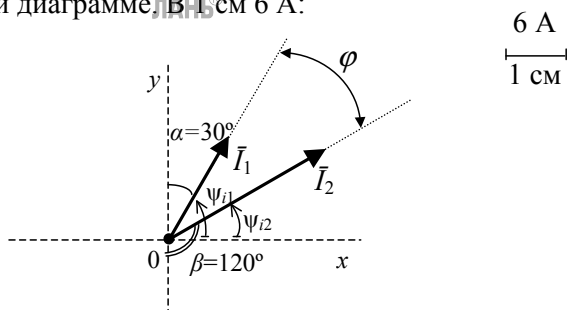
- период

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{50} = 0,02 \text{ с};$$

- угловую частоту токов

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 2 \cdot 3,14 \cdot 50 = 314 \text{ с}^{-1}.$$

Выбираем масштаб для изображения векторов токов. Изобразим векторы $\vec{I}_1$ и $\vec{I}_2$ на векторной диаграмме. В 1 см 6 А:



Из рассмотрения векторной диаграммы следует, что:

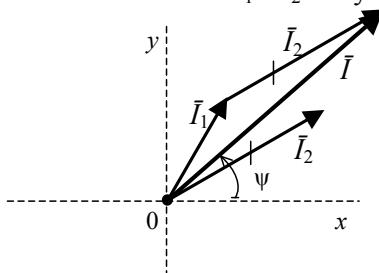
$$\psi_{i1} = 60^\circ; \psi_{i2} = 30^\circ; \varphi_{12} = \psi_{i1} - \psi_{i2} = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ.$$

Аналитические выражения для токов будут иметь вид:

$$i_1 = I_{M1} \sin(\omega t + \psi_{i1}) = 16,94 \sin(314t + 60^\circ);$$

$$i_2 = I_{M2} \sin(\omega t + \psi_{i2}) = 25,4 \sin(314t + 30^\circ).$$

Геометрическим сложением токов $\vec{I}_1$ и $\vec{I}_2$ получим суммарный вектор $\vec{I}$.



В результате построения имеем:

$$I = 6 \cdot 4,7 \text{ см} = 28,2 \text{ A};$$

$$\psi = 41^\circ;$$

$$I_M = \sqrt{2} \cdot I = \sqrt{2} \cdot 28,2 = 39,5 \text{ A}.$$

Аналитическое выражение для суммарного тока примет вид

$$i = I_M \sin(\omega t + \psi) = 39,5 \sin(314t + 41^\circ).$$

Интервал времени, соответствующий сдвигу фаз (φ), определим из соотношения:

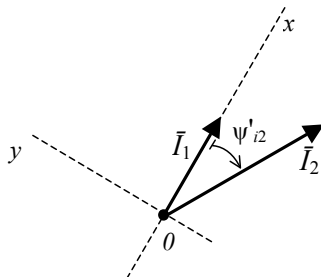
$$\frac{T}{x} = \frac{360^\circ}{41^\circ},$$

откуда

$$x = \frac{T}{360^\circ} \cdot \varphi = \frac{0,02 \cdot 41}{360} = 0,00228 \text{ с.}$$

Повернув оси координат таким образом, что ось ox совпадёт с $\bar{I}_1$, получим новые значения начальных фаз для токов:

$$\psi'_{i1} = 0^\circ; \psi'_{i2} = -30^\circ.$$



Соответственно с этим аналитические выражения для токов в новой системе координат примут вид:

$$i'_1 = I_{M1} \sin(\omega t + \psi'_{i1}) = 16,94 \sin 314t;$$

$$i'_2 = I_{M2} \sin(\omega t + \psi'_{i2}) = 25,4 \sin(314 \cdot t - 30^\circ).$$

При этом угол сдвига фаз φ остался неизменным

$$\varphi = \psi'_{i1} - \psi'_{i2} = 0^\circ - (-30^\circ) = 30^\circ.$$

4.8. Фазовые соотношения в резистивном, индуктивном и емкостном элементах цепей синусоидального тока

Элементами электрической цепи синусоидального тока являются:

- резистивный элемент (резистор), обладающий активным сопротивлением R ;
- индуктивный элемент (индуктивная катушка без потерь) с индуктивностью L ;
- емкостный элемент (конденсатор без потерь) с емкостью C .

Индуктивный элемент характеризуется величиной *реактивного индуктивного сопротивления*

$$X_L = \omega L = 2\pi fL. \quad (4.11)$$

Емкостный элемент характеризуется величиной *реактивного емкостного сопротивления*

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi fC}. \quad (4.12)$$

Сопротивления R , X_L , X_C имеют одинаковую размерность – Ом.

Проходящий по ним синусоидальный ток I создает на каждом из них падения напряжения, которые подсчитываются по закону Ома:

- для максимальных значений напряжений

$$\begin{aligned} U_{Ma} &= I_M R; \\ U_{ML} &= I_M X_L; \\ U_{MC} &= I_M X_C; \end{aligned} \quad (4.13)$$

- для действующих значений напряжений

$$\begin{aligned} U_a &= IR; \\ U_L &= IX_L; \\ U_C &= IX_C, \end{aligned} \quad (4.14)$$

где I_M и I – соответственно максимальное и действующее значение тока.

Из теории переменного тока известно, что:

- напряжение на активном сопротивлении U_a имеет одинаковую фазу с током I , проходящим через резистор R . В этом случае говорят, что напряжение и ток активного сопротивления совпадают по фазе (рис. 4.12а);
- напряжение на индуктивности U_L опережает ток I по фазе на 90° или, что то же самое, ток I отстает по фазе от напряжения U_L на 90° (рис. 4.12б);
- напряжение на емкости U_C отстает от тока I по фазе на 90° или, что то же самое, ток I опережает по фазе напряжение U_C на 90° (рис. 4.12в).

Заметим, что на рис. 4.12 изображены действующие значения токов и напряжений, которые меньше максимальных значений в $\sqrt{2}$.

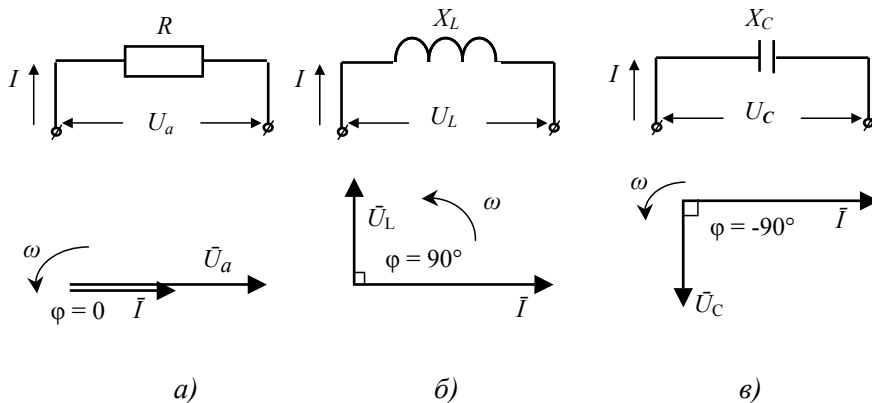


Рис. 4.12. Токи и напряжения на активном, индуктивном и емкостном сопротивлениях

Указанные фазовые соотношения позволяют строить векторные диаграммы, что необходимо при расчете и анализе цепей синусоидального тока.

4.9. Электрическая цепь синусоидального тока с R , X_L и X_C

Для электрической цепи на рис. 4.13 с последовательным соединением R , X_L и X_C напишем уравнение для действующих значений напряжений, используя II закон Кирхгофа:

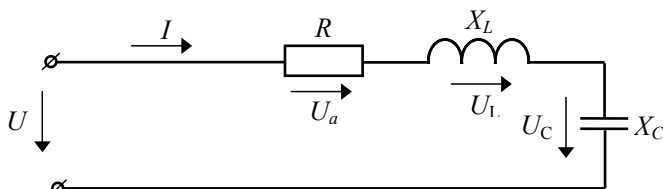


Рис. 4.13. Цепь с последовательным соединением R , X_L и X_C

$$-\bar{U} + \bar{U}_a + \bar{U}_L + \bar{U}_C = 0, \text{ откуда} \quad (4.15)$$

$$\bar{U} = \bar{U}_a + \bar{U}_L + \bar{U}_C,$$

где $\bar{U}$ – вектор действующего напряжения на входе цепи;

$\bar{U}_a$, $\bar{U}_L$ и $\bar{U}_C$ – векторы действующих напряжений на сопротивлениях R , X_L и X_C .

Построение векторной диаграммы в этом случае начинается с построения вектора тока $\bar{I}$. Направление его выбирается произвольно. Векторы напряжений $\bar{U}_a$, $\bar{U}_L$, $\bar{U}_C$ выстраиваем в соответствии с теорией переменного тока, помня, что все векторы на векторной диаграмме вращаются против часовой стрелки с частотой ω :

- вектор $\bar{U}_a$ совпадает по направлению с вектором тока $\bar{I}$;
- вектор $\bar{U}_L$ на 90° опережает вектор $\bar{I}$;
- вектор $\bar{U}_C$ отстает на 90° от вектора $\bar{I}$.

Согласно полученному для $\bar{U}$ выражению (4.15), вектор $\bar{U}$ находим как геометрическую сумму векторов $\bar{U}_a$, $\bar{U}_L$, $\bar{U}_C$, т. е. это вектор, соединяющий начало координат с концом последнего вектора $\bar{U}_C$ (рис. 4.14).

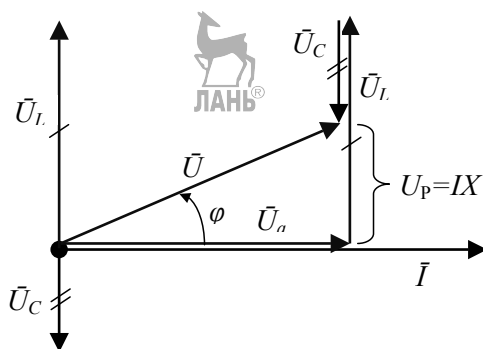


Рис. 4.14. Векторная диаграмма для схемы на рис. 4.13

Из рассмотрения полученного на векторной диаграмме прямоугольного треугольника напряжений по теореме Пифагора:

$$U = \sqrt{U_a^2 + U_p^2} = \sqrt{U_a^2 + (U_L - U_C)^2}. \quad (4.16)$$

Имея в виду то, что $U_a = IR$, $U_L = IX_L$, $U_C = IX_C$:

$$U = \sqrt{I^2 R^2 + (IX_L - IX_C)^2} = I \cdot \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = I \cdot Z, \quad (4.17)$$

где Z – полное сопротивление цепи:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}, \quad (4.18)$$

$$X_L - X_C = X \quad (4.19)$$

– реактивное сопротивление цепи.

Полное сопротивление цепи всегда положительно ($Z > 0$), реактивное сопротивление X может быть как положительным, так и отрицательным:

– если $X > 0$, то электрическая цепь носит индуктивный характер, так как $X_L > X_C$;

– если $X < 0$, то электрическая цепь носит емкостный характер, так как $X_C > X_L$.

Из треугольника напряжений (рис. 4.14) может быть получен треугольник сопротивлений (рис. 4.15) делением всех сторон треугольника напряжений на величину тока I .

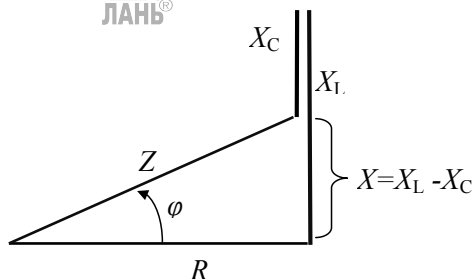


Рис. 4.15. Треугольник сопротивлений

4.10. Активная, реактивная, полная мощности цепи синусоидального тока. Компенсация реактивной мощности

Умножив все стороны треугольника напряжений (рис. 4.14) на величину тока I или все стороны треугольника сопротивлений (рис. 4.15) на I^2 , получим подобный треугольник мощностей (рис. 4.16).

Мощность в активном сопротивлении (обозначается буквой P) называется активной мощностью:

$$P = I^2 R = U_a I. \quad (4.20)$$

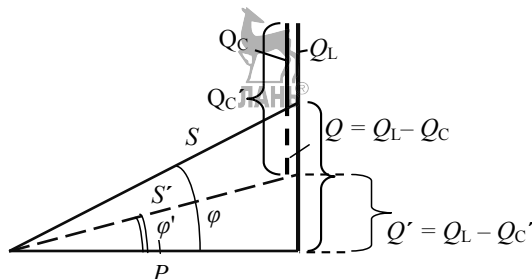


Рис. 4.16. Треугольник мощностей

Единица измерения активной мощности – ватт (Вт). Активная мощность поступает от источника электрической энергии в активный элемент и преобразуется в нем в другие виды мощности (энергии), а именно: в тепловую, световую, механическую и т. д., и назад к источнику не возвращается, рассеиваясь за пределами электрической цепи.

Активная мощность – это средняя мощность за период.

В индуктивном элементе (катушке с сопротивлением X_L) поступившая от источника электрическая мощность (энергия) запасается в магнитном поле катушки (в одну четверть периода изменения тока $T/4$), а в следующую четверть периода вся запасенная катушкой энергия отдается назад источнику. Далее все повторяется, т. е. имеют место колебания энергии между источником электро-энергии и магнитным полем катушки. Амплитуда этих колебаний выражается величиной *реактивной индуктивной мощности*. В нашем случае

$$Q_L = I^2 X_L = U_L I. \quad (4.21)$$

В емкостном элементе происходит аналогичный процесс обмена мощностями: мощность, переданная источником, сначала запасается в электрическом поле конденсатора за время $T/4$, а в следующий такой же интервал времени отдается обратно источнику. Амплитуда колебания мощности характеризуется значением *реактивной емкостной мощности*:

$$Q_C = I^2 X_C = U_C I. \quad (4.22)$$

Активная мощность всегда положительная.

Реактивные мощности Q_L и Q_C имеют разные знаки:

- реактивная индуктивная мощность Q_L – положительная;
- реактивная емкостная мощность Q_C – отрицательная.

Их алгебраическая сумма (т. е. с учетом знаков) называется суммарной реактивной мощностью:

$$Q = Q_L - Q_C = I^2 (X_L - X_C) = I^2 X. \quad (4.23)$$

Q , Q_L и Q_C имеют одинаковую размерность – вольт-ампер реактивный (*вар*).

На рис. 4.16 катеты треугольника – это активная мощность P (прилежащий катет) и реактивная мощность $Q = I^2 X = Q_L - Q_C = U_P I$ (противолежащий катет), а гипотенуза, обозначенная буквой S , его полная мощность:

$$S = I^2 Z = UI. \quad (4.24)$$

Единицей измерения *полной* мощности S является вольт-ампер (В·А).

Из прямоугольного треугольника мощностей, согласно теореме Пифагора, имеем:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{P^2 + (Q_L - Q_C)^2} \quad (4.25)$$

Полная мощность определяет величину тока:

$$I = \frac{S}{U}. \quad (4.26)$$

Ранее было отмечено, что все полезные виды энергии, полученные в результате преобразования электроэнергии в резистивном элементе (т. е. активном сопротивлении R), заключены в величине P . Из рис. 4.16 видно, что одно и то же значение P может быть получено при различных значениях угла φ , т. е. при различных значениях S (см. пунктирные значения Q' и S' на рис. 4.16).

Отношение $\frac{P}{S} = \cos \varphi$ называют коэффициентом мощности, а $\operatorname{tg} \varphi = \frac{Q}{P}$ – коэффициентом реактивной мощности.

На практике стремятся за счет изменения (регулирования) реактивной мощности Q увеличить значение $\cos \varphi$ до уровня $0,92 \div 0,95$, при этом коэффициент реактивной мощности близок к значению $\operatorname{tg} \varphi = 0,33$.

Уменьшение величины реактивной мощности Q введением дополнительных реактивных элементов соответствующего знака (емкостных или индуктивных) называется *компенсацией реактивной мощности*.

Если в электрической системе имеет место избыток индуктивной мощности, то компенсация предполагает искусственное включение дополнительных емкостных элементов. При этом уменьшается суммарная реактивная мощность

$Q' = Q_L - Q'_C$, уменьшается полная мощность $S' = \sqrt{P^2 + Q'^2}$, благодаря чему становится меньше ток $I' = \frac{S'}{U}$, что приводит к уменьшению потерь мощности

(которые пропорциональны квадрату тока) от величины $\Delta P = I^2 R$ до величины $\Delta P' = I'^2 R$, т. е. $\Delta P' < \Delta P$, так как $I' < I$.

Если же в системе преобладает емкостная мощность (что бывает значительно реже), то для компенсации вводятся дополнительные индуктивные элементы.

Компенсация реактивной мощности позволяет получить все те же полезности при меньшем значении токов и создаваемых ими потерь во всех элементах системы электроснабжения. Именно поэтому она является важнейшим мероприятием, обеспечивающим экономию электроэнергии, а значит, сбережение энергетических ресурсов, которые используются на электростанциях для производства электроэнергии.

4.11. Эквивалентные зависимости, связывающие сопротивления и проводимости в цепи переменного тока

При решении задач расчета электрических цепей переменного тока зачастую приходится преобразовывать сопротивления последовательной цепи в проводимости и наоборот.

Напомним формулы, позволяющие осуществить такие преобразования. На рис. 4.17а представлена схема последовательного соединения R , X_L и X_C , которая преобразуется в схему параллельного соединения трех ветвей (рис. 4.17б):

- первая ветвь с активной проводимостью g ;
- вторая ветвь с индуктивной проводимостью b_L ;
- третья ветвь с емкостной проводимостью b_C .

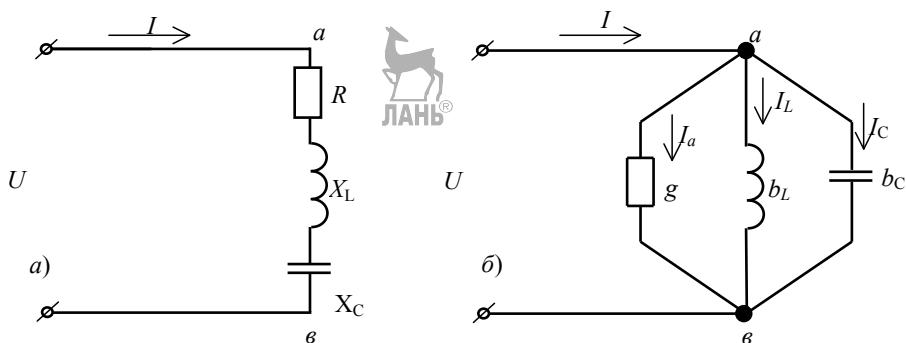


Рис. 4.17. Эквивалентные схемы:

a – последовательного соединения; *б* – параллельного соединения.

Условием эквивалентности этих схем является одинаковость токов I (за пределами участка ab) при приложении ко входным зажимам схем одного и того же напряжения U .

Формулы для преобразования схемы с последовательным соединением (рис. 4.17*а*) в схему с параллельным соединением (рис. 4.17*б*) выведены в п. 4.14.3 и имеют вид:

$$g = \frac{R}{Z^2} = \frac{R}{R^2 + (X_L - X_C)^2}; \quad (4.27)$$

$$b_L = \frac{X_L}{Z^2} = \frac{X_L}{R^2 + (X_L - X_C)^2}; \quad (4.28)$$

$$b_C = \frac{X_C}{Z^2} = \frac{X_C}{R^2 + (X_L - X_C)^2}, \quad (4.29)$$

где $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$ – полное сопротивление последовательной цепи.

С помощью проводимостей можно рассчитать токи в параллельных ветвях эквивалентной схемы:

$$I_a = U \cdot g; \quad I_L = U \cdot b_L; \quad I_C = U \cdot b_C. \quad (4.30)$$

Для преобразования схемы с параллельным соединением (рис. 4.17*б*) в схему с последовательным соединением (рис. 4.17*а*) служат формулы из п. 4.14.3:

$$R = \frac{g}{y^2} = \frac{g}{g^2 + (b_C - b_L)^2}; \quad (4.31)$$

$$X_L = \frac{b_L}{y^2} = \frac{b_L}{g^2 + (b_C - b_L)^2}; \quad (4.32)$$

$$X_C = \frac{b_C}{y^2} = \frac{b_C}{g^2 + (b_C - b_L)^2}, \quad (4.33)$$

где $y = \sqrt{g^2 + (b_C - b_L)^2}$ – полная проводимость параллельной цепи (участка ab рис. 4.17*б*).

Заметим, что в формулах (4.27)–(4.29) знак «+» имеют индуктивные сопротивления, а емкостные сопротивления – отрицательные. В формулах (4.31), (4.32) положительной проводимостью является емкостная проводимость b_C , а индуктивная b_L имеет знак «–».

Если в исходной ветви последовательно соединяется несколько активных и реактивных сопротивлений, то для расчета g , b_L и b_C используются те же самые формулы (4.27)–(4.29), в которых $R = \sum R_i$; $X_L = \sum X_{Li}$; $X_C = \sum X_{Ci}$, т. е. активное сопротивление равно арифметической сумме последовательно соединенных активных сопротивлений, X_L есть арифметическая сумма индуктивных, а X_C – сумма емкостных сопротивлений этой ветви.

4.12. Резонансные явления в цепи переменного тока

4.12.1. Последовательная цепь. Резонанс напряжений

На рис. 4.13 показана схема, в которой последовательно соединены R , X_L и X_C . Ток I , протекая по этим сопротивлениям, создает падения напряжения:

$$U_a = IR;$$

$$U_L = IX_L;$$

$$U_C = IX_C.$$

По второму закону Кирхгофа:

$$\bar{U} = \bar{U}_a + \bar{U}_L + \bar{U}_C.$$

В соответствии с этим уравнением строится векторная диаграмма (рис. 4.18):

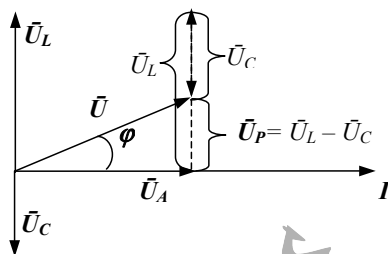


Рис. 4.18. Векторная диаграмма

Из треугольника напряжений (рис. 4.18) получаем:

$$U = \sqrt{U_a^2 + (U_L - U_C)^2} = \sqrt{U_a^2 + U_p^2},$$

$$\cos \varphi = \frac{U_a}{U}, \sin \varphi = \frac{U_p}{U},$$

где $U_p = U_L - U_C$ – называется реактивным напряжением цепи;

U_a – называется активным напряжением;

φ – угол сдвига фаз между током и напряжением.

Из треугольника сопротивлений следует:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2},$$

где Z – полное сопротивление цепи.

В общем случае полное сопротивление при последовательном соединении элементов равно

$$Z = \sqrt{\sum R^2 + (\sum X_L - \sum X_C)^2}, [\text{Ом}].$$

Когда напряжение на индуктивности и емкости, взаимно сдвинутые по фазе на 180° , равны по величине, то они полностью компенсируют друг друга, т. е.

$$U_L = U_C, \text{ и значит } X_L = X_C \text{ или } \omega L = \frac{1}{\omega C}. \quad (4.34)$$

При этом $U = U_a$, а ток в цепи совпадает по фазе с напряжением на выходных зажимах цепи ($\varphi = 0$), этот случай называется резонансом напряжений.

Итак, условием резонанса напряжений является равенство напряжений индуктивного и емкостного сопротивлений. Так как эти сопротивления зависят от частоты, резонанс наступает при некоторой резонансной частоте $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Общее сопротивление цепи в этом случае минимальное по величине и равно чисто активному $Z = R$, а ток соответственно имеет максимальное значение (по закону Ома).

При $\omega < \omega_0$ нагрузка имеет активно-емкостный характер, при $\omega > \omega_0$ – активно-индуктивный.

Следует отметить, что резкому увеличению тока в цепи при резонансе напряжений соответствует возрастание U_L и U_C . Эти напряжения могут стать значительно больше напряжения U (входного напряжения), что легко доказать:

$$\frac{U}{U_L} = \frac{IZ}{IX_L} = \frac{Z}{X_L} \text{ или } U_L = U \cdot \frac{X_L}{R},$$

т. е. напряжение на индуктивности (емкости) будет больше входного напряжения в $\left(\frac{X_L}{R} = \frac{X_C}{R}\right)$ раз.

Действительно, при резонансе на отдельных участках цепи могут возникать напряжения, превышающие номинальное напряжения в несколько раз, т. е. резонанс напряжений – явление, опасное для электроэнергетических установок.

Резонанс напряжений характеризуется обменом энергии между магнитным полем катушки и электрическим полем конденсатора. Увеличение магнитного поля катушки индуктивности происходит исключительно за счет уменьшения энергии электрического поля в конденсаторе и наоборот.

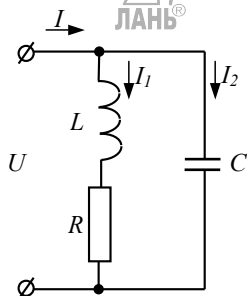
4.12.2. Цепь с параллельным соединением сопротивлений.

Резонанс токов

В отличие от последовательных цепей переменного тока, где ток, протекающий по всем элементам цепи, одинаков, в параллельных цепях одинаковым будет напряжение, приложенное к параллельно включенным ветвям цепи.

На рис. 4.19 ветвь, состоящая из индуктивности L и активного сопротивления R , соединяется параллельно с ветвью, содержащей конденсатор с емкостью C .




$$\overline{I} = \overline{I_1} + \overline{I_2}$$

$$I_1 = \frac{U}{Z_1} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X_L^2}};$$

$$\operatorname{tg} \phi_1 = \frac{X_L}{R}.$$

Вектор тока $\bar{I}_2$ на диаграмме опережает вектор $\bar{U}$ на 90° . Величина тока определяется по формуле $I_2 = I_c = \frac{U}{X_c} = \frac{U}{1/\omega C} = \omega CU$.

Ток $\bar{I}$ на векторной диаграмме построим как геометрическую сумму параллельных ветвей:

$$\overline{I}^{\text{IR}} = \overline{I}_1 + \overline{I}_2.$$

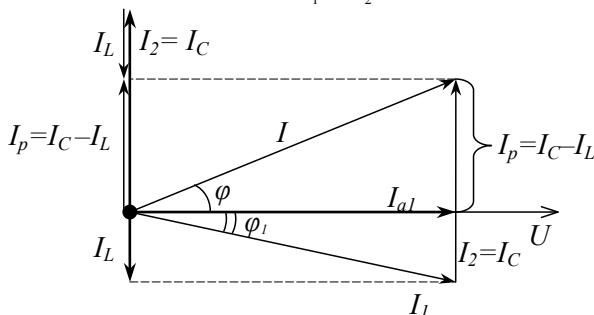


Рис. 4.20. Векторная диаграмма

Ток в неразветвленной части цепи (рис. 4.19) можно рассчитать аналитическим способом, используя формулы метода проводимостей. Из треугольников токов (рис. 4.20):

$$\bar{I} = \bar{I}_{a_1} + \bar{I}_p,$$

где $\overline{I_{a_1}}$ – активная составляющая тока первой ветви I_1 .

$$I_{a_1} = U g_1; \quad g_1 = \frac{R}{Z_1^2} = \frac{R}{R^2 + X_L^2}.$$

Реактивный ток:

$$I_p = I_c - I_L = U \cdot b_c - U \cdot b_L,$$

$$b_c = \frac{1}{X_c}; \quad b_L = \frac{X_L}{Z_1^2} = \frac{X_L}{R^2 + X_L^2}.$$

Численное значение тока I находим как гипотенузу прямоугольного треугольника токов (рис. 4.20):

$$I = \sqrt{I_{a_1}^2 + (I_c - I_L)^2},$$

имея в виду, что $I = U \cdot y$ (y – полная проводимость цепи), получим

$$U \cdot y = \sqrt{(U \cdot g_1)^2 + (U \cdot b_c - U \cdot b_L)^2},$$

откуда $y = \sqrt{g_1^2 + (b_c - b_L)^2}$.

Из векторной диаграммы (рис. 4.20) видно, что величина и фаза общего тока I зависят от соотношения между реактивными токами I_L и I_C .

В частности, при $I_L < I_C$ ток I отстает от напряжения U по фазе. Когда $I_L = I_C$, а значит при $b_L = b_C$, угол $\varphi = 0$, т. е. ток I и напряжение U совпадают по фазе. Этот режим называется режимом резонанса токов. Из приведенных выше формул видно, что при этом полная проводимость равна активной проводимости ($y = g_1$), т. е. происходящие в цепи процессы таковы, как будто в ней содержится только активное сопротивление (в этом случае $\varphi = 0$ и $\cos \varphi = 1$). При этом ток в неразветвленной части цепи принимает минимальное значение и становится чисто активным, тогда как реактивные токи в ветвях не равны нулю и противоположны по фазе.

Таким образом, резонанс токов возникает в цепях с параллельным соединением индуктивности и емкости при условии, что

$$b_L = b_C, \quad (4.35)$$

вследствие чего полная проводимость цепи равна активной проводимости.

Явления резонанса напряжений и токов нашли широкое применение в технике (в приемопередающей аппаратуре, радиоизмерительных приборах и др.).

4.13. Задания 6–8 для самостоятельной работы

4.13.1. Пример выполнения задания 6

В цепях переменного тока индуктивные элементы характеризуются величиной индуктивности (L), а конденсаторы – величиной емкости (C). Напомним, что реактивные сопротивления связаны с L и C следующими соотношениями:

– реактивное индуктивное сопротивление $X_L = \omega L = 2\pi f L$,

где $\omega = 2\pi f$ – угловая частота (c^{-1});

f – частота тока (Гц);

L – индуктивность в генри (Гн).

– реактивное емкостное сопротивление $X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C}$,

где C – емкость в фарадах (Ф).

Например, в цепь синусоидального тока частотой $f = 50$ Гц включены индуктивный элемент (катушка) с $L = 0,12$ Гн и конденсатор емкостью $C = 130$ мкФ $= 130 \cdot 10^{-6}$ Ф.

Рассчитаем реактивное сопротивление индуктивности (X_L) и реактивное сопротивление емкости (X_C):

$$X_L = 2\pi f L = 2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 0,12 = 37,68 \text{ Ом.}$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 130 \cdot 10^{-6}} = 24,5 \text{ Ом.}$$

Следует иметь в виду, что на неразветвленном участке электрической цепи могут быть соединены последовательно несколько активных, индуктивных и емкостных сопротивлений. Полное сопротивление участка находим по известной формуле:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2},$$

где $R = R_1 + R_2 + \dots + R_n = \sum_{i=1}^n R_i$;

$$X_L = X_{L1} + X_{L2} + \dots + X_{Ln} = \sum_{i=1}^n X_{Li};$$

$$X_C = X_{C1} + X_{C2} + \dots + X_{Cn} = \sum_{i=1}^n X_{Ci}.$$

Например, если последовательно соединяются сопротивления $R_1, R_2, X_{L1}, X_{L2}, X_{L3}, X_{C1}, X_{C2}$, то

$$Z = \sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (X_{L1} + X_{L2} + X_{L3} - X_{C1} - X_{C2})^2}.$$

Для схемы (рис. 4.21) даны входное действующее значение напряжения $U = 127$ В и последовательно соединенные сопротивления $R_1 = 20$ Ом, $R_2 = 30$ Ом, $X_L = 37,68$ Ом, $X_C = 24,5$ Ом.

Рассчитать:

- ток в цепи I ;
- падение напряжения на всех сопротивлениях (U_{a1}, U_{a2}, U_L, U_C);
- мощности P, Q_L, Q_C, Q и S ;
- угол сдвига фаз между $\vec{U}$ и $\vec{I}$;
- построить векторную диаграмму.

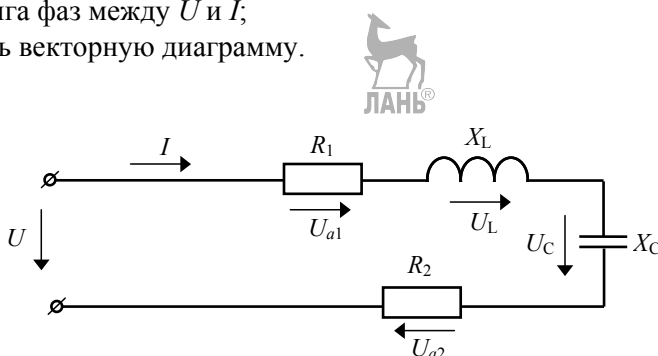


Рис. 4.21. Схема для цепи с последовательным соединением сопротивлений

Решение.

Полное сопротивление цепи:

$$Z = \sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{(20 + 30)^2 + (37,68 - 24,5)^2} = 51,63 \text{ Ом.}$$

Действующее значение тока:

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{127}{51,63} = 2,46 \text{ А.}$$

Действующие значения напряжений:

$$U_{a1} = I \cdot R_1 = 2,46 \cdot 20 = 49,2 \text{ В,}$$

$$U_{a2} = I \cdot R_2 = 2,46 \cdot 30 = 73,8 \text{ В,}$$

$$U_a = I \cdot (R_1 + R_2) = 2,46 \cdot (20 + 30) = 123 \text{ В,}$$

$$U_L = I \cdot X_L = 2,46 \cdot 37,68 = 92,7 \text{ В,}$$

$$U_C = I \cdot X_C = 2,46 \cdot 24,5 = 60,3 \text{ В.}$$

Мощности в цепи:

– активная – $P = I^2 \cdot (R_1 + R_2) = 2,46^2 \cdot (20 + 30) = 302,6 \text{ Вт;}$

– индуктивная – $Q_L = I^2 \cdot X_L = 2,46^2 \cdot 37,68 = 228 \text{ вар;}$

– емкостная – $Q_C = I^2 \cdot X_C = 2,46^2 \cdot 24,5 = 148 \text{ вар;}$

– суммарная реактивная – $Q = Q_L - Q_C = 228 - 148 = 80 \text{ вар;}$

– полная – $S = U \cdot I$ или $S = I^2 Z$ или $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$.

Все три формулы дают значение $S = 312,4 \text{ В} \cdot \text{А}$.

Построению векторной диаграммы предшествует выбор масштаба для тока и напряжений. В данном случае принимаем:

- для тока – в 1 см 0,5 А;
- для напряжений – в 1 см 30 В.

Длины векторов тока и напряжений (в мм) будут следующими:

Параметр	I	U_{a1}	U_{a2}	U_a	U_L	U_C
Длина вектора, мм	49,2	16,4	24,6	41,0	30,9	20,0

Построение векторной диаграммы начинается с построения вектора тока $\vec{I}$, направление которого выбирают произвольно, например по горизонтали вправо (рис. 4.22). $\vec{U}_{a1}$ и $\vec{U}_{a2}$ совпадают по направлению с током. Вектор $\vec{U}_L$ на 90° опережает вектор $\vec{I}$, а $\vec{U}_C$ отстает по фазе на 90° от $\vec{I}$.

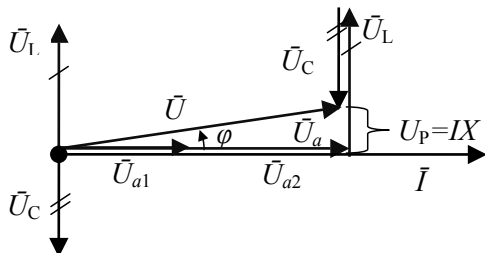


Рис. 4.22. Векторная диаграмма к схеме 4.21

Вектор входного напряжения $\vec{U}$ получен на диаграмме как результат геометрического сложения векторов $\vec{U} = \vec{U}_{a1} + \vec{U}_{a2} + \vec{U}_L + \vec{U}_C$ (согласно II закону Кирхгофа).

Из диаграммы виден способ расчета угла сдвига по фазе φ между током $\vec{I}$ и напряжением $\vec{U}$:

$$\varphi = \arctg \frac{U_L - U_C}{U_{a1} + U_{a2}} = \arctg \frac{92,7 - 60,3}{49,2 + 73,8} = \arctg(0,264) = 14,8^\circ.$$

4.13.2. Задание 6

Дано:

- схема электрической цепи на рис. 4.23;
- численные значения сопротивлений в табл. 4.4;
- входное действующее напряжение $U = 220$ В;

Рассчитать:

- ток в цепи I ;
- падения напряжения на всех сопротивлениях (U_{a1} , U_{a2} , U_{L1} , U_{L2} , U_{C1} , U_{C2});
- мощности (P , Q_L , Q_C , Q и S);
- рассчитать угол сдвига фаз между $\vec{U}$ и $\vec{I}$;
- построить векторную диаграмму для тока и всех напряжений (включая $\vec{U}$).

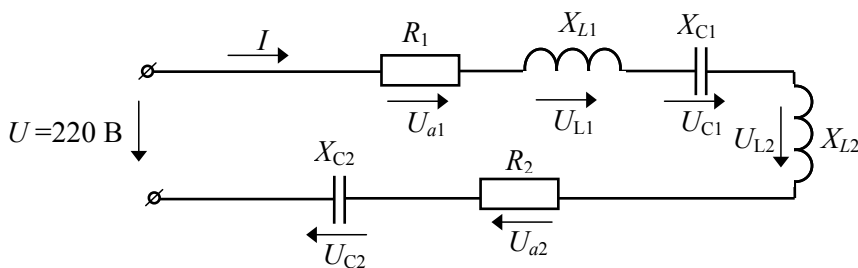


Рис. 4.23. Схема цепи к заданию 6

Таблица 4.4

Сопро- тив- ление № варианта	R_1	R_2	X_{L1}	X_{L2}	X_{C1}	X_{C2}
	Ом	Ом	Ом	Ом	Ом	Ом
1	4	0	4	10	8	0
2	0	3	3	12	0	4
3	3	4	3	0	12	0
4	0	5	0	4	12	3
5	6	0	3	4	10	0
6	0	6	8	4	0	5
7	4	0	6	0	4	8
8	5	0	0	10	3	2

№ варианта \ Сопротив- ление	R_1	R_2	X_{L1}	X_{L2}	X_{C1}	X_{C2}
	Ом	Ом	Ом	Ом	Ом	Ом
9	6	4	0	3	0	8
10	4	0	3	0	7	3
11	0	5	6	0	6	6
12	0	8	5	7	6	0
13	4	0	12	3	0	2
14	0	10	10	8	12	0
15	6	0	12	0	3	2



4.13.3. Пример выполнения задания 7

Определить действующие значения токов I , I_1 и I_2 , активную (P), реактивную (Q) и полную (S) мощности всей цепи, изображенной на рис. 4.24. Построить векторную диаграмму.

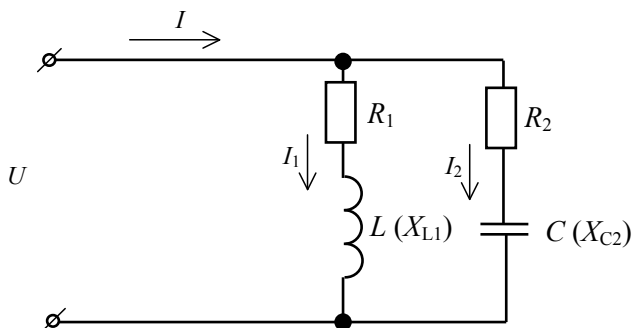


Рис. 4.24. Схема разветвленной цепи

Дано:

- 1) мгновенное значение входного напряжения – $u = 226\sin 314t$;
- 2) активные сопротивления – $R_1 = 9 \text{ Ом}$, $R_2 = 16 \text{ Ом}$;
- 3) индуктивность катушки – $L = 0,003 \text{ Гн}$;
- 4) емкость конденсатора – $C = 260 \text{ мкФ} = 260 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}$.

При заданном максимальном значении входного напряжения его действующее значение будет равно

$$U = \frac{U_M}{\sqrt{2}} = \frac{226}{1,41} = 159,8 \text{ В.}$$

Расчет приведенной на рис. 4.24 схемы цепи возможен двумя способами, изложенными ниже:

- 1) расчет цепи методом проводимостей;
- 2) расчет цепи с помощью векторной диаграммы.



1-й способ. Расчет цепи методом проводимостей.

Основное содержание этого способа состоит в аналитическом (с помощью приведенных выше формул) определении активной и реактивной составляющих проводимостей параллельных ветвей, которые используются для расчета токов и их составляющих (активной и реактивной) в указанных ветвях.

Решение:

Проводимости 1-й ветви (с сопротивлениями R_1 и X_{L1}):

- индуктивное сопротивление 1-й ветви:

$$X_{L1} = \omega \cdot L = 314 \cdot 0,003 = 10,68 \text{ Ом},$$

где $\omega = 314$ задана в законе изменения входного напряжения (u);

- полное сопротивление 1-й ветви:

$$Z_1 = \sqrt{R_1^2 + X_{L1}^2} = \sqrt{9^2 + 10,68^2} = 13,97 \text{ Ом};$$

- активная проводимость 1-й ветви:

$$g_1 = \frac{R_1}{Z_1^2} = \frac{9}{13,97^2} = 0,0461 \text{ См};$$

- индуктивная проводимость 1-й ветви:

$$b_{L1} = \frac{X_{L1}}{Z_1^2} = \frac{10,68}{13,97^2} = 0,0548 \text{ См};$$

- емкостная проводимость 1-й ветви $g_{C1} = 0$, так как емкость в 1-й ветви отсутствует.

Проводимости 2-й ветви (с сопротивлениями R_2 и X_{C2}):

- емкостное сопротивление 2-й ветви:

$$X_{C2} = \frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{1}{314 \cdot 260 \cdot 10^{-6}} = 12,25 \text{ Ом};$$

- полное сопротивление 2-й ветви:

$$Z_2 = \sqrt{R_2^2 + X_{C2}^2} = \sqrt{16^2 + 12,25^2} = 20,15 \text{ Ом};$$

- активная проводимость 2-й ветви:

$$g_2 = \frac{R_2}{Z_2^2} = \frac{16}{20,15^2} = 0,0394 \text{ См};$$

- индуктивная проводимость 2-й ветви $g_{L2} = 0$, так как индуктивность во 2-й ветви отсутствует;

- емкостная проводимость 2-й ветви:

$$b_{C2} = \frac{X_{C2}}{Z_2^2} = \frac{12,25}{20,15^2} = 0,0302 \text{ См}.$$

Расчет активных и реактивных проводимостей ветвей схемы (рис. 4.24) приводит её к схеме на рис. 4.25.

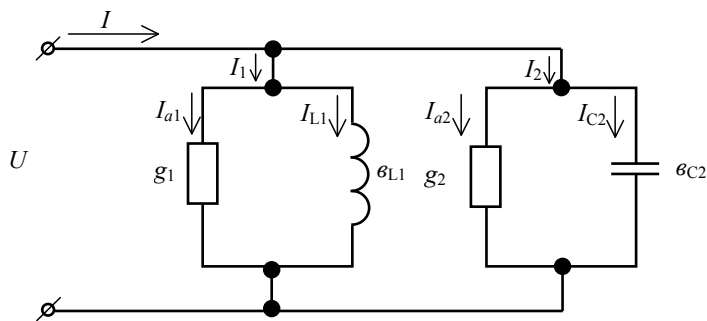


Рис. 4.25. Эквивалентная схема с проводимостями

Рассчитаем полные проводимости параллельных ветвей и всей цепи:

- полная проводимость 1-й ветви:

$$y_1 = \sqrt{g_1^2 + (-b_{L1})^2} = \sqrt{0,0461^2 + (-0,0548)^2} = 0,0716 \text{ См};$$

- полная проводимость 2-й ветви:

$$y_2 = \sqrt{g_2^2 + b_{C1}^2} = \sqrt{0,0394^2 + 0,0302^2} = 0,0496 \text{ См};$$

- полная проводимость всей цепи:

$$y = \sqrt{(g_1 + g_2)^2 + (b_{C2} - b_{L1})^2} = \\ = \sqrt{(0,0461 + 0,394)^2 + (0,0302 - 0,0548)^2} = 0,089 \text{ См}.$$

Действующие значения токов в параллельных ветвях схем на рис. 4.24 или 4.25:

$$I_1 = \frac{U}{Z_1} = U \cdot y_1 = 159,8 \cdot 0,0716 = 11,44 \text{ А};$$

$$I_{a1} = U \cdot g_1 = 159,8 \cdot 0,0461 = 7,37 \text{ А};$$

$$I_{L1} = U \cdot b_{L1} = 159,8 \cdot 0,0548 = 8,75 \text{ А};$$

$$I_2 = \frac{U}{Z_2} = U \cdot y_2 = 159,8 \cdot 0,0496 = 7,93 \text{ А};$$

$$I_{a2} = U \cdot g_2 = 159,8 \cdot 0,0394 = 6,29 \text{ А};$$

$$I_{C2} = U \cdot b_{C2} = 159,8 \cdot 0,0302 = 4,82 \text{ А}.$$

Действующее значение тока в неразветвленной части цепи и его активной и реактивной составляющих (рис. 4.26):

- активная составляющая:

$$I_a = I_{a1} + I_{a2} = 7,37 + 6,29 = 13,66 \text{ А};$$

- реактивная составляющая:

$$I_p = I_{L1} - I_{C2} = 8,75 - 4,82 = 3,93 \text{ А};$$

- ток в неразветвленной части цепи:

$$I = U \cdot y = \sqrt{I_a^2 + I_p^2} = 159,8 \cdot 0,089 = 14,21 \text{ А}.$$

Расчет мощности электрической цепи:

- активная – $P = I^2 R_1 + I^2 R_2 = 11,44^2 \cdot 9 + 7,93^2 \cdot 16 = 2184 \text{ Вт};$
- реактивная – $Q = I^2 X_{L1} - I^2 X_{C2} = 11,44^2 \cdot 10,68 - 7,93^2 \cdot 12,25 = 628 \text{ вар};$
- полная – $S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{2184^2 + 628^2} = 2270 \text{ В} \cdot \text{А}.$

Для схемы параллельного соединения построение векторной диаграммы обычно начинают с построения вектора напряжения $\vec{U}$, поскольку он является общим для параллельных ветвей (рис. 4.24).

Векторы токов $\vec{I}_{a1}$ и $\vec{I}_{a2}$ в соответствии с теорией переменного тока совпадают по фазе с напряжением $\vec{U}$. Вектор $\vec{I}_{L1}$ отстаёт от $\vec{U}$ по фазе на 90° , а вектор $\vec{I}_{C2}$ на 90° опережает по фазе вектор $\vec{U}$.

Согласно I закону Кирхгофа, из рис. 2.21 следует, что:

$$\begin{aligned}\vec{I}_1 &= \vec{I}_{a1} + \vec{I}_{L1}; \\ \vec{I}_2 &= \vec{I}_{a2} + \vec{I}_{C1}; \\ \vec{I} &= \vec{I}_1 + \vec{I}_2.\end{aligned}$$

Поэтому на векторной диаграмме векторы токов $\vec{I}_1, \vec{I}_2$ и $\vec{I}$ найдём в соответствии с этими уравнениями как геометрическую сумму соответствующих векторов.

При этом предварительно выбираем масштаб для напряжения и токов (см. рис. 4.26):

$$\text{для } U - \frac{20\text{В}}{1 \text{ см}}; \quad \text{для } I - \frac{2\text{А}}{1 \text{ см}}.$$

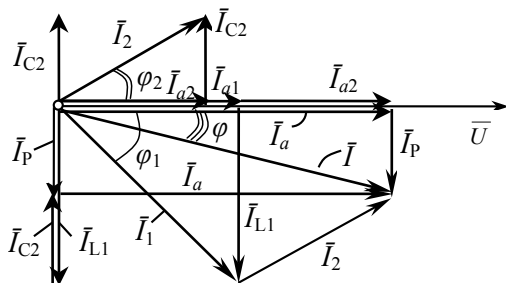


Рис. 4.26. Векторная диаграмма.

Векторная диаграмма подтверждает, что:

$$\begin{aligned}I_a &= I_{a1} + I_{a2}; \\ I_p &= I_{L1} - I_{C2}; \\ \vec{I} &= \vec{I}_a + \vec{I}_p, \text{ т. е. } I = \sqrt{I_a^2 + I_p^2}, \\ \varphi &= \arctg \frac{I_p}{I_a} = \arctg \frac{3,9}{13,66} = 16,1^\circ,\end{aligned}$$

что позволяет рассчитать мощности также по формулам:

- активная – $P = UI \cos \varphi = 159,8 \cdot 14,21 \cos 16,1^\circ = 2184 \text{ Вт}$;
- реактивная – $Q = UI \sin \varphi = 159,8 \cdot 14,21 \sin 16,1^\circ = 628 \text{ вар}$;
- полная – $S = UI = 2270 \text{ В} \cdot \text{А}$.

Те же значения мощностей можно получить, используя параметры схемы (рис. 4.25):

$$P = UI_{a1} + UI_{a2} = U^2 g_1 + U^2 g_2 = U^2 (g_1 + g_2) = U^2 g = 159,8^2 (0,0461 + 0,0394) = 2184 \text{ Вт};$$

$$Q = Q_L - Q_C = U^2 b_{L1} - U^2 b_{C2} = U^2 (b_{L1} - b_{C2}) = 159,8^2 (0,0548 - 0,032) = 628 \text{ вар};$$

$$S = U^2 y = 159,8^2 \cdot 0,089 = 2270 \text{ В} \cdot \text{А},$$

т. е. расчет разными способами даёт одинаковые результаты.

2-й способ. Расчет цепи с помощью векторной диаграммы.

Решение:

Полные сопротивления параллельных ветвей:

$$Z_1 = \sqrt{R_1^2 + X_{L1}^2} = \sqrt{9^2 + 10,68^2} = 13,97 \text{ Ом};$$

$$Z_2 = \sqrt{R_2^2 + X_{C2}^2} = \sqrt{16^2 + 12,25^2} = 20,15 \text{ Ом}.$$

Действующие значения токов ветвей:

$$I_1 = \frac{U}{Z_1} = \frac{159,8}{13,97} = 11,44 \text{ А};$$

$$I_2 = \frac{U}{Z_2} = \frac{159,8}{20,15} = 7,93 \text{ А}.$$

Углы сдвига фаз φ_1 и φ_2 между токами $\bar{I}_1$ и $\bar{I}_2$ и напряжением $\bar{U}$ определяются из треугольников сопротивлений, построенных для каждой из параллельных ветвей. Напомним, что сторонами прямоугольного треугольника сопротивлений в общем случае являются (см. п. 4.9):

- прилежащий катет – активное сопротивление R ;
- противолежащий катет – реактивное сопротивление $X = X_L - X_C$;
- гипотенуза – полное сопротивление Z .

Исходя из этого:

$$\varphi_1 = \arcsin \frac{R_1}{Z_1} = \arcsin \frac{X_{L1}}{Z_1};$$

$$\varphi_2 = \arcsin \frac{R_2}{Z_2} = \arcsin \frac{X_C}{Z_2}.$$

Можно в масштабе построить на векторной диаграмме векторы токов $\bar{I}_1$ и $\bar{I}_2$, а вектор $\bar{I}$ найти построением как геометрическую сумму ($\bar{I}_1 + \bar{I}_2$). Векторная диаграмма будет выглядеть аналогично тому, что мы имеем на рис. 4.26, а именно: вектор тока $\bar{I}_1$ будет отставать от вектора $\bar{U}$ по фазе на угол φ_1 , так как в первой ветви суммарное реактивное сопротивление является индуктивным ($X_{P1} = X_L$), а вектор $\bar{I}_2$ (во второй ветви) опережает напряжение $\bar{U}$ по фазе

на угол φ_2 , так как реактивная составляющая сопротивления Z_2 есть емкостное сопротивление ($X_{p2} = X_C$). При известной длине вектора $\bar{I}$ и выбранном масштабе действующее значение этого тока равно произведению его длины в сантиметрах на количество ампер в 1 см.

Действующее значение тока $\bar{I}$ можно определить так же, как и в первом способе, через активные и реактивные составляющие токов I_1 и I_2 , т. е. в нашем случае:

$$\cos \varphi_1 = \frac{R_1}{Z_1} = \frac{9}{13,97};$$

$$\cos \varphi_2 = \frac{R_2}{Z_2} = \frac{16}{20,15};$$

$$\sin \varphi_1 = \frac{X_L}{Z_1} = \frac{10,68}{13,97};$$

$$\sin \varphi_2 = \frac{X_C}{Z_2} = \frac{12,25}{20,15},$$

что позволяет рассчитать аналитически активные и реактивные составляющие токов I_1 , I_2 и I и действующее значение тока I .

Активные составляющие токов ветвей:

$$I_{a1} = I_1 \cos \varphi_1 = 11,44 \cdot \frac{9}{13,97} = 7,37 \text{ A};$$

$$I_{a2} = I_2 \cos \varphi_2 = 7,93 \cdot \frac{16}{20,15} = 6,29 \text{ A}.$$

Реактивные составляющие токов ветвей:

$$I_{p1} = I_{L1} = I_1 \sin \varphi_1 = 11,44 \cdot \frac{10,68}{13,97} = 8,75 \text{ A};$$

$$I_{p2} = I_{C2} = I_2 \sin \varphi_2 = 7,93 \cdot \frac{12,25}{20,15} = 4,82 \text{ A}.$$

Активная и реактивная составляющие тока I :

$$I_a = I_{a1} + I_{a2} = 7,37 + 6,29 = 13,66 \text{ A};$$

$$I_p = I_{p1} - I_{p2} = 8,75 - 4,82 = 3,93 \text{ A},$$

откуда

$$I = \sqrt{I_a^2 + I_p^2} = \sqrt{13,66^2 + 3,93^2} = 14,21 \text{ A}.$$

Мощности определяются аналогично тому, как это сделано в предыдущем способе решения.

4.13.4. Задание 7

Для схемы (рис. 4.27) рассчитать:

- численные значения токов I , I_1 , I_2 и их активные и реактивные составляющие;
- активную P , реактивную Q , полную S мощности.

Построить векторную диаграмму для U , I , I_1 , I_2 и их составляющих.

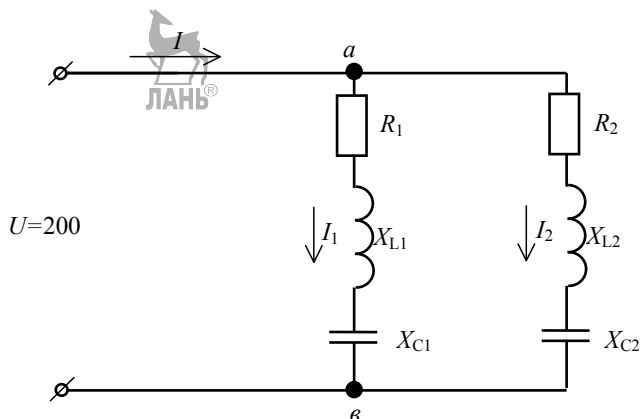


Рис. 4.27. Схема к заданию 7

Дано:

- входное напряжение $U = 200$ В;
- численные значения $R_1, X_{L1}, X_{C1}, X_{L2}, X_{C2}$ приведены в табл. 4.5.

Таблица 4.5

№ варианта	R_1	X_{L1}	X_{C1}	R_2	X_{L2}	X_{C2}
	Ом	Ом	Ом	Ом	Ом	Ом
1	3	6	0	4	0	8
2	5	0	4	3	8	0
3	4	2	0	3	0	6
4	0	4	0	5	8	6
5	8	8	2	0	10	0
6	0	0	4	5	2	3
7	6	0	0	5	4	8
8	4	5	10	3	0	0
9	4	7	2	0	0	5
10	60	8	0	0	10	6
11	0	0	5	5	4	10
12	0	6	0	3	6	10
13	4	0	3	6	8	0
14	5	10	3	4	0	0
15	6	8	4	0	0	8

4.13.5. Пример выполнения задания 8

Задание 8 связано с расчетом схемы смешанного соединения, т. е. когда есть неразветвлённый участок с последовательным соединением активных и реактивных сопротивлений и разветвлённый участок, состоящий из двух параллельных ветвей, в которые также включены активные, индуктивные и емкостные сопротивления (рис. 4.28). Разветвлённый участок 1–2 заменяется сначала проводимостями, которые используются для нахождения эквивалентных сопротивлений (активного и реактивного) разветвлённого участка 1–2. Это необходимо для замены схемы смешанного соединения схемой последовательного соединения, которая позволит рассчитать ток неразветвлённого участка, напряжение разветвлённого участка 1–2 и токи его параллельных ветвей.

Для схемы (рис. 4.28) определить действующие значения токов I_1, I_2, I_3 , если действующее значение напряжения на входе цепи $U = 100$ В.

Дано: $R_1 = 6$ Ом; $R_2 = 15$ Ом; $R_3 = 8$ Ом; $X_{L1} = 10$ Ом; $X_{L2} = 25$ Ом; $X_{C1} = 30$ Ом; $X_{C2} = 13$ Ом.

Расчет цепи будем вести методом проводимостей, которые необходимы для замены параллельных ветвей эквивалентной ветвью между точками 1–2 цепи.

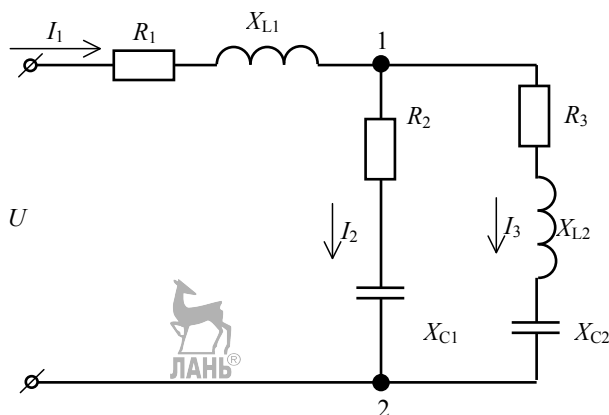


Рис. 4.28. Схема смешанного соединения

С этой целью определяются:

- полные сопротивления ветвей разветвлённого участка 1–2:

$$Z^* = \sqrt{R_2^2 + X_{C1}^2} = \sqrt{15^2 + 30^2} = 33,54 \text{ Ом},$$

$$Z^{**} = \sqrt{R_3^2 + (X_{L2} - X_{C2})^2} = \sqrt{8^2 + (25 - 13)^2} = 14,42 \text{ Ом};$$

- активная и реактивные проводимости первой ветви разветвлённого участка (с сопротивлением R_1 и X_{C1}):

$$g^* = \frac{R_2}{Z^{*2}} = \frac{15}{33,54^2} = 0,0133 \text{ См},$$

$b_L^* = 0$, так как индуктивное сопротивление в этой ветви отсутствует,

$$b_C^* = \frac{X_{C1}}{Z^{*2}} = \frac{30}{33,54^2} = 0,0267 \text{ См};$$

- активная и реактивные проводимости второй ветви разветвлённого участка 1–2 (с сопротивлением R_3 , X_{L2} и X_{C2}):

$$g^{**} = \frac{R_3}{Z^{**2}} = \frac{8}{14,42^2} = 0,0385 \text{ См},$$

$$b_L^{**} = \frac{X_{L2}}{Z^{**2}} = \frac{25}{14,42^2} = 0,12 \text{ См},$$

$$b_C^{**} = \frac{X_{C2}}{Z^{**2}} = \frac{13}{14,42^2} = 0,0625 \text{ См};$$

- полная активная проводимость участка 1–2:

$$g_{12} = g^* + g^{**} = 0,0133 + 0,0385 = 0,0518 \text{ См};$$
- индуктивная проводимость участка 1–2:

$$b_{L12} = b_L^* + b_L^{**} = 0,12 \text{ См};$$
- емкостная проводимость участка 1–2:

$$b_{C12} = b_C^* + b_C^{**} = 0,089 \text{ См};$$
- суммарная реактивная проводимость участка 1–2:

$$b_{12} = b_{C12} - b_{L12} = -0,031 \text{ См}.$$

Заметим, что реактивная проводимость b_{12} является чисто индуктивной проводимостью, так как $b_{L12} > b_{C12}$. В противном случае b_{12} была бы ёмкостной.

Таким образом, после подсчёта g_{12} и b_{12} схема (рис. 4.28) примет вид рис. 4.29а, а после замены разветвлённого участка между точками 1–2 появится последовательный участок из сопротивлений R_{12} и X_{12} , значения которых вычислим по формулам (см. п. 4.11):

- полная проводимость участка 1–2:

$$y_{12} = \sqrt{g_{12}^2 + b_{12}^2} = \sqrt{0,0518^2 + 0,031^2} = 0,0604 \text{ См};$$
- эквивалентные параметры последовательного участка между точками 1–2 (рис. 4.29б):

$$R_{12} = \frac{g_{12}}{y_{12}^2} = \frac{0,0518}{0,0604^2} = 14,2 \text{ Ом},$$

$$X_{12} = \frac{b_{12}}{y_{12}^2} = \frac{0,031}{0,0604^2} = 8,5 \text{ Ом};$$

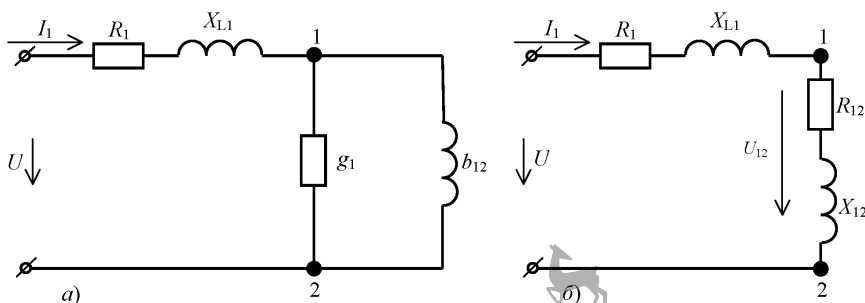


Рис. 4.29. Схемы, эквивалентные исходной схеме:
 а – с разветвлённым участком; б – без разветвления.

- полное сопротивление всей цепи (рис. 4.29б):

$$Z = \sqrt{(R_1 + R_{12})^2 + (X_{L1} + X_{12})^2} = \sqrt{(6 + 14,2)^2 + (10 + 8,5)^2} = 27,4 \text{ Ом};$$
- ток в неразветвленной части цепи (рис. 4.28):

$$I_1 = \frac{U}{Z} = \frac{100}{27,4} = 3,65 \text{ А};$$

- сопротивление участка 1–2 цепи (рис. 4.29б):

$$Z_{12} = \sqrt{R_{12}^2 + X_{12}^2} = \frac{1}{y_{12}} = \frac{1}{0,0604} = 16,6 \text{ Ом};$$

- напряжение U_{12} между точками 1–2:

$$U_{12} = I_1 Z_{12} = 3,65 \cdot 16,6 = 60,4 \text{ В};$$

- токи в параллельных ветвях исходной схемы (рис. 4.28):

$$I_2 = \frac{U_{12}}{Z^*} = \frac{60,4}{33,54} = 1,8 \text{ А};$$

$$I_3 = \frac{U_{12}}{Z^{**}} = \frac{60,4}{14,42} = 4,19 \text{ А}.$$

4.13.6. Задание 8

Для схемы (рис. 4.30) определить действующие значения токов I_1, I_2 и I_3 , если действующее значение напряжения на входе цепи $U = 200 \text{ В}$, численные значения сопротивлений приведены в табл. 4.6.

Таблица 4.6

№ варианта	R_1	X_{L1}	X_{C1}	R_2	X_{L2}	X_{C2}	R_3	X_{L3}	X_{C3}
	Ом	Ом	Ом	Ом	Ом	Ом	Ом	Ом	Ом
1	3	4	0	4	0	8	3	6	0
2	6	0	8	3	8	0	5	0	4
3	0	5	7	3	0	6	4	2	0
4	4	0	8	5	8	6	0	4	0
5	10	6	0	0	10	0	8	8	2
6	2	0	3	5	2	3	0	0	4
7	4	1	0	3	0	0	4	5	10
8	7	0	8	0	0	5	4	7	2
9	0	6	3	0	10	6	6	8	0
10	5	0	2	5	4	10	0	0	5
11	4	3	0	3	6	10	0	6	0
12	2	0	10	6	8	0	4	0	3
13	0	2	8	4	0	0	5	10	3
14	6	0	3	5	4	8	6	0	0
15	5	2	0	0	0	8	6	8	4

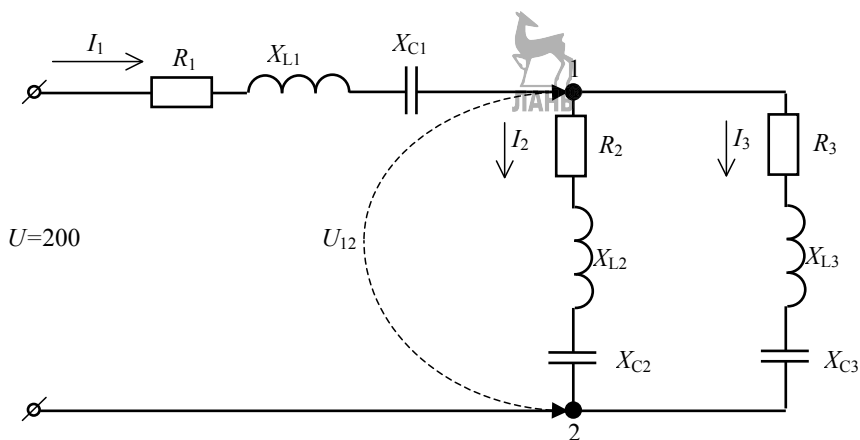


Рис. 4.30. Схема к заданию 8

4.14. Символический метод (метод комплексных величин) расчета цепей синусоидального тока

4.14.1. Предварительные сведения

Этот метод широко используется для расчёта цепей переменного тока, так как позволяет выразить в алгебраической форме геометрические операции с векторами синусоидальных токов и напряжений. С помощью символического метода оказывается возможным применить все методы расчета цепей постоянного тока (законы Кирхгофа, методы наложения, контурных токов, узловых напряжений и т. д.) для расчёта цепей переменного тока.

В основе символического изображения векторов переменного тока лежит следующее простое положение. Ток $\dot{I}$ можно разложить на составляющие (I' и I''), направленные по двум осям прямоугольной системы координат (см. рис. 4.31).

Ось абсцисс на рис. 4.31 называется осью действительных чисел (или вещественных величин), а ось ординат — осью мнимых величин, причём составляющая вектора $\dot{I}$ на мнимой оси выделена посредством особого множителя — символа j .

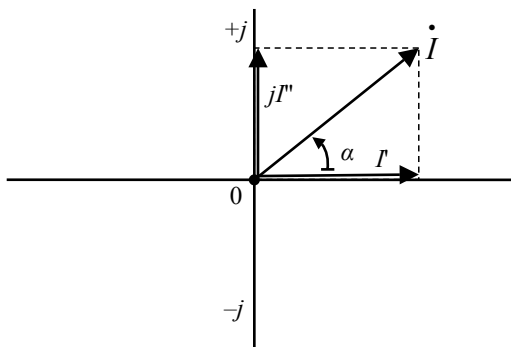


Рис. 4.31. Вектор $\dot{I}$ на комплексной плоскости

Таким образом, в символической форме вектор $\dot{I}$ будет равен

$$\dot{I} = I' + jI'' \quad (4.36)$$

Если некоторый вектор $\dot{U}$, направленный по действительной оси, умножить на j , то вектор $j\dot{U}$ будет повернут по отношению к $\dot{U}$ на угол 90° против часовой стрелки, т. е. в положительном направлении, имея в виду то, что все векторы векторной диаграммы вращаются против часовой стрелки. Умножение вектора $\dot{U}$ на j^2 поворачивает вектор $\dot{U}$ на 180° , а такой поворот эквивалентен отрицательному значению исходного вектора, т. е.

$$j^2 \dot{U} = -\dot{U},$$

откуда

$$j^2 = -1, \quad j = \sqrt{-1}, \quad (4.37)$$

т. е. множитель j равен мнимой единице, в соответствии с чем и было дано наименование оси ординат (ось мнимых), составляющие вектора по которой сопровождаются множителем j .

Таким образом, при символическом изображении вектор рассматривается как *комплексная величина*, а плоскость, на которой вектор изображается через действительную и мнимую составляющие, именуется *комплексной плоскостью*. В соответствии с этим символический метод называют также *методом комплексных величин*.

Применяются следующие формы записи комплексной величины (например, для вектора переменного тока).

1. Алгебраическая форма:

$$\dot{I} = I' + jI'' \quad (4.38)$$

2. Тригонометрическая форма (рис. 3.31):

$$\dot{I} = I \cos \alpha + jI \sin \alpha, \quad (4.39)$$

где I – модуль комплексного числа ($I = \sqrt{I'^2 + jI''^2}$);

α – аргумент комплексного числа ($\alpha = \arctg \frac{I''}{I'}$). (4.41)

3. Показательная форма, которая получена с помощью формулы Эйлера ($e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha$, в которой $e = 2,718$ – основание натурального логарифма):

$$\dot{I} = I e^{j\alpha} \quad (4.42)$$

4. Полярная форма:

$$\dot{I} = I \angle \alpha. \quad (4.43)$$

4.14.2. Действия над комплексными числами

Сложение и вычитание комплексных чисел

При сложении и вычитании комплексных чисел отдельно складываются (вычитаются) действительные части комплексных чисел и отдельно мнимые части,

$$\begin{aligned} \text{где } \dot{\vec{c}} &= \dot{\vec{c}}_1 \pm \dot{\vec{c}}_2 = (a_1 \pm a_2) + j(\vartheta_1 \pm \vartheta_2), \\ \dot{\vec{c}}_1 &= a_1 + j\vartheta_1; \\ \dot{\vec{c}}_2 &= a_2 + j\vartheta_2. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Сложение комплексных чисел соответствует геометрическому сложению векторов, поэтому при сложении или вычитании векторов удобнее пользоваться сложением или вычитанием комплексных чисел.

Умножение или деление комплексных чисел

В этих случаях, как правило, удобнее использовать показательную форму комплексных чисел:

– при умножении модули комплексных чисел перемножаются, а их аргументы складываются

$$\dot{\vec{c}} = \dot{\vec{c}}_1 \cdot \dot{\vec{c}}_2 = c_1 e^{j\alpha_1} \cdot c_2 e^{j\alpha_2} = c_1 \cdot c_2 e^{j(\alpha_1 + \alpha_2)}; \quad (4.45)$$

– при делении комплексных чисел модули их делятся, а аргументы вычитаются

$$\frac{\dot{\vec{c}}}{\dot{\vec{c}}_2} = \frac{c_1 e^{j\alpha_1}}{c_2 e^{j\alpha_2}} = \frac{c_1}{c_2} e^{j(\alpha_1 - \alpha_2)}; \quad (4.46)$$

– умножение комплексного числа на $e^{j\beta}$ не изменяет длину вектора, но поворачивает весь вектор против часовой стрелки, т. е. в положительном направлении на угол β , если $\beta > 0$

$$\dot{\vec{c}} \cdot e^{j\beta} = c e^{j\alpha} \cdot e^{j\beta} = c e^{j(\alpha + \beta)}. \quad (4.47)$$

В случае если угол отрицательный (т. е. равен $-\beta$), то исходный вектор повернётся по часовой стрелке

$$\dot{\vec{c}} \cdot e^{-j\beta} = c e^{j\alpha} \cdot e^{-j\beta} = c e^{j(\alpha - \beta)}. \quad (4.48)$$

– произведение сопряженных комплексных чисел равно квадрату модуля комплексного числа, т. е. действительному числу. Напомним, сопряженными комплексными числами называются два комплексных числа, отличающиеся друг от друга знаком перед мнимой частью.

– Например, если даны $\dot{\vec{c}} = a + j\vartheta$ и $\hat{\vec{c}} = a - j\vartheta$, то

$$\dot{\vec{c}} \cdot \hat{\vec{c}} = a^2 + \vartheta^2 = c^2; \quad (4.49)$$

– умножение вектора на $j = e^{j90^\circ}$ поворачивает этот вектор на 90° против часовой стрелки;

– умножение вектора на $-j = e^{-j90^\circ}$ поворачивает вектор на 90° по часовой стрелке;

– деление единицы (или любого вещественного числа) на комплексное число, заданное в алгебраической форме, равно

$$\frac{1}{\dot{\vec{c}}} = \frac{1}{\dot{\vec{c}}} \cdot \frac{\hat{\vec{c}}}{\hat{\vec{c}}} = \frac{1}{a + j\vartheta} \cdot \frac{a - j\vartheta}{a - j\vartheta} = \frac{a}{a^2 + \vartheta^2} - j \frac{\vartheta}{a^2 + \vartheta^2},$$

где $\dot{c} = a + j\vartheta$, $\hat{c} = a - j\vartheta$.

При таком делении применяется искусственный приём – числитель и знаменатель дроби умножаются на сопряжённый комплекс знаменателя.

Действия с оператором $j = \sqrt{-1}$:

$$j^2 = -1, -j^2 = 1; \frac{1}{j} = -j; \frac{1}{-j} = j. \quad (4.50)$$

4.14.3. Изображение электрических параметров в символической форме

Изображение в символической форме сопротивлений в цепи переменного тока определяется характером воздействия этих сопротивлений на сдвиг фаз между напряжением и током.

Как уже отмечалось, в цепи переменного тока различают три вида сопротивлений: R , X_L и X_C . Согласно теории переменного тока, на активном сопротивлении (R) напряжение и ток совпадают по фазе, т. е. сдвиг по фазе между напряжением и током равен нулю. Это возможно лишь при условии, что R – вещественное число. Умножение комплекса тока на вещественное число (по закону Ома $\dot{U}_R = \dot{I} \cdot R$) даст вектор $\dot{U}_R$, совпадающий по фазе с током.

На индуктивном сопротивлении X_L вектор напряжения $\dot{U}_L$ должен на 90° опережать вектор тока, что возможно только в случае, если индуктивное сопротивление является положительным мнимым числом, т. е. $\dot{U}_L = \dot{I} \cdot jX_L$.

Соответственно ёмкостное сопротивление X_C должно быть отрицательным мнимым числом, благодаря чему вектор напряжения $\dot{U}_C$ на ёмкости будет отставать по фазе от тока на 90° , $\dot{U}_C = \dot{I} \cdot (-jX_C)$.

Таким образом, в символической форме сопротивления в цепи переменного тока изображаются:

активное – вещественным числом R ;

индуктивное – положительным мнимым числом jX_C ;

ёмкостное – отрицательным мнимым числом $-jX_C$.

При последовательном соединении R , X_L и X_C полное сопротивление такого участка цепи в символическом изображении равно

$$\underline{Z} = R + j(X_L - X_C). \quad (4.51)$$

Комплексную полную проводимость $\underline{Y}$ можно подсчитать как величину, обратную полному комплексному сопротивлению:

$$\begin{aligned} \underline{Y} &= \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R + j(X_L - X_C)} = \frac{1[R - j(X_L - X_C)]}{[R + j(X_L - X_C)][R - j(X_L - X_C)]} = \\ &= \frac{R - jX_L + jX_C}{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \frac{R - jX_L + jX_C}{Z^2} = \frac{R}{Z^2} - j\frac{X_L}{Z^2} + j\frac{X_C}{Z^2} = \\ &= g - j\vartheta_L + j\vartheta_C = g + j(\vartheta_C - \vartheta_L), \end{aligned}$$

где

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad (4.52)$$

– модуль комплексного сопротивления (Z);

$$g = \frac{R}{Z^2} = \frac{R}{R^2 + (X_L - X_C)^2}; \quad (4.53)$$

$$b_L = \frac{X_L}{Z^2} = \frac{X_L}{R^2 + (X_L - X_C)^2}; \quad (4.54)$$

$$b_C = \frac{X_C}{Z^2} = \frac{X_C}{R^2 + (X_L - X_C)^2}. \quad (4.55)$$

Таким образом, в символической форме проводимости в цепи переменного тока изображаются:

- активная проводимость – вещественным числом (g);
- индуктивная – отрицательным мнимым числом ($-j b_L$);
- емкостная – положительным мнимым числом ($j b_C$);
- комплексная проводимость

$$\underline{Y} = g + j(b_C - b_L). \quad (4.56)$$

Модуль полной комплексной проводимости, согласно формуле (4.40), равен

$$y = \sqrt{g^2 + j(b_C - b_L)^2}. \quad (4.57)$$

Выразим комплексное сопротивление и его составляющие через комплексную проводимость и ее составляющие:

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{1}{g + j(b_C - b_L)} = \frac{[g - j(b_C - b_L)]}{[g + j(b_C - b_L)][g - j(b_C - b_L)]} = \\ &= \frac{g - j(b_C - b_L)}{y^2} = \frac{g}{y^2} + j\left(\frac{b_L}{y^2} - \frac{b_C}{y^2}\right) = R + j(X_L - X_C), \end{aligned}$$

где

$$R = \frac{g}{y^2} = \frac{g}{g^2 + (b_C - b_L)^2}; \quad (4.58)$$

$$X_L = \frac{b_L}{y^2} = \frac{b_L}{g^2 + (b_C - b_L)^2}; \quad (4.59)$$

$$X_C = \frac{b_C}{y^2} = \frac{b_C}{g^2 + (b_C - b_L)^2}. \quad (4.60)$$

Как уже указывалось выше, формулы (4.53)–(4.55) служат для преобразования схемы с последовательным соединением в схему с параллельным соединением, формулы (4.58)–(4.60) – для обратного преобразования (см. п. 4.11).

Для расчета электрических цепей синусоидального тока используют выражения основных законов электротехники в символической форме записи.

Закон Ома для участка цепи:

а) для максимальных значений напряжения и тока

$$\dot{I}_M = \frac{\dot{U}_M}{\underline{Z}}; \quad (4.61)$$

$$\dot{I}_M = \dot{U}_M \underline{Y}; \quad (4.62)$$

б) для действующих значений напряжения и тока

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}}; \quad (4.63)$$

$$\dot{I} = \dot{U} \underline{Y}, \quad (4.64)$$

где

$\underline{Z} = R + jX$ – комплекс полного сопротивления участка цепи;

$X = X_L - X_C$ – реактивное сопротивление участка цепи; (4.65)

$\underline{Y} = g + jb$ – комплекс полной проводимости участка цепи; (4.66)

$b = b_C - b_L$ – реактивная проводимость участка цепи. (4.67)

Законы Кирхгофа:

Первый закон: алгебраическая сумма комплексных токов ветвей, сходящихся в узле электрической цепи синусоидального тока, равна нулю:

$$\sum_{k=1}^n \dot{I}_k = 0. \quad (4.68)$$

Второй закон: алгебраическая сумма комплексных напряжений на всех пассивных элементах контура электрической цепи синусоидального тока равна алгебраической сумме комплексных ЭДС этого контура:

$$\sum_{k=1}^n \dot{I}_k \underline{Z}_k = \sum_{k=1}^m \dot{E}_k. \quad (4.69)$$

Мощность в символическом изображении может быть получена как произведение комплекса действующего значения напряжения $\dot{U}$ на сопряженный комплекс действующего значения тока. Если $\dot{I} = Ie^{j\Psi_i}$, то сопряженный вектор имеет мнимую часть с противоположным знаком, т. е. $\hat{I} = Ie^{-j\Psi_i}$. Таким образом

$$\begin{aligned} \dot{S} = \dot{U} \hat{I} &= Ue^{j\Psi_u} \cdot Ie^{-j\Psi_i} = UIe^{j(\Psi_u - \Psi_i)} = UIe^{j\varphi} = UI \cos \varphi + jUI \sin \varphi = \\ &= P + jQ = P + j(Q_L - Q_C), \end{aligned} \quad (4.70)$$

где Ψ_u, Ψ_i – соответственно начальные фазы напряжения и тока;

φ – сдвиг фаз между напряжением и током.

Действительная часть комплексной мощности равна активной мощности (P), а мнимая часть – реактивной мощности ($Q = Q_L - Q_C$),

где Q_L – реактивная индуктивная мощность,

Q_C – реактивная емкостная мощность.

4.14.4. Примеры решения простейших задач символическим методом

Изложенный выше теоретический материал проиллюстрируем следующими примерами.

Пример 1

Даны законы изменения напряжения и тока:

$$u = 100\sqrt{2} \sin(\omega t + 30^\circ);$$

$$i = 60\sqrt{2} \sin(\omega t - 45^\circ).$$

Записать комплексы действующих значений синусоидальных функций в показательной, алгебраической и полярной формах.

Решение:

1. Комплексы действующих значений напряжения и тока в показательной форме:

$$\dot{U} = \frac{U_M}{\sqrt{2}} e^{j\psi_u} = 100 e^{j30^\circ} \text{ В};$$

$$\dot{I} = \frac{I_M}{\sqrt{2}} e^{j\psi_i} = 60 e^{j(-45^\circ)} \text{ А}.$$

2. Комплексы действующих значений напряжения и тока в алгебраической форме:

$$\dot{U} = \frac{U_M}{\sqrt{2}} (\cos \psi_u + j \sin \psi_u) = 100 (\cos 30^\circ + j \sin 30^\circ) = 50\sqrt{3} + j50 \text{ В};$$

$$\dot{I} = \frac{I_M}{\sqrt{2}} (\cos \psi_i + j \sin \psi_i) = 60 [\cos(-45^\circ) + j \sin(-45^\circ)] = \frac{60}{\sqrt{2}} - j \frac{60}{\sqrt{2}} \text{ А}.$$

3. Комплексы действующих значений напряжения и тока в полярной форме:

$$\dot{U} = \frac{U_M}{\sqrt{2}} \angle \psi_u = 100 \angle 30^\circ \text{ В};$$

$$\dot{I} = \frac{I_M}{\sqrt{2}} \angle \psi_i = 60 \angle -45^\circ \text{ А}.$$

Пример 2

Заданы комплексы действующих значений напряжения в показательной форме: $\dot{U}_1 = 120 e^{j60^\circ}$, $\dot{U}_2 = 240 e^{-j20^\circ}$, $\dot{U}_3 = -360 e^{j35^\circ}$.

Записать выражения для мгновенных значений напряжений.

Решение:

$$U_{M1} = 120\sqrt{2} \text{ В}; \quad U_{M2} = 240\sqrt{2} \text{ В}; \quad U_{M3} = 360\sqrt{2} \text{ В};$$

$$\psi_{u1} = 60^\circ; \quad \psi_{u2} = -20^\circ; \quad \psi_{u3} = -145^\circ;$$

$$u_1 = 120\sqrt{2} \sin(\omega t + 60^\circ);$$

$$u_2 = 240\sqrt{2} \sin(\omega t - 20^\circ);$$

$$u_3 = 360\sqrt{2} \sin(\omega t - 145^\circ).$$

Здесь

$$\dot{U} = -360 e^{j35^\circ} = 360 e^{j35^\circ} \cdot (1 \cdot e^{-j180^\circ}) = 360 e^{j(35^\circ - 180^\circ)} = 360 e^{j(-145^\circ)},$$

так как $(-1) = 1 \cdot e^{-j180^\circ}$.

Пример 3

Заданы комплексы действующих значений токов в алгебраической форме:

$$\dot{I}_1 = 4 + j3 \text{ A}, \dot{I}_2 = 4 - j3 \text{ A}, \dot{I}_3 = -4 + j3 \text{ A}, \dot{I}_4 = -4 - j3 \text{ A}.$$

Записать выражения для мгновенных значений токов.

Решение:

$$1. \dot{I}_1 = 4 + j3 = \sqrt{4^2 + 3^2} \cdot e^{j \arctg \frac{3}{4}} = 5e^{j36,9^\circ} \text{ A}.$$

Мгновенное значение тока $i_1 = 5\sqrt{2} \sin(\omega t + 36,9^\circ) \text{ A}.$

$$2. \dot{I}_2 = 4 - j3 = \sqrt{4^2 + 3^2} \cdot e^{j \arctg \frac{-3}{4}} = 5e^{-j36,9^\circ} \text{ A}.$$

Мгновенное значение тока $i_2 = 5\sqrt{2} \sin(\omega t - 36,9^\circ) \text{ A}.$

$$3. \dot{I}_3 = -4 + j3 = -(4 - j3) = -(\sqrt{4^2 + 3^2} \cdot e^{j \arctg \frac{-3}{4}}) = -5e^{-j36,9^\circ} = 5e^{j143,1^\circ} \text{ A}.$$

Мгновенное значение тока $i_3 = 5\sqrt{2} \sin(\omega t + 143,1^\circ) \text{ A}.$

$$4. \dot{I}_4 = -4 - j3 = -(4 + j3) = -(\sqrt{4^2 + 3^2} \cdot e^{j \arctg \frac{3}{4}}) = -5e^{j36,9^\circ} = 5e^{-j143,1^\circ} \text{ A}.$$

Мгновенное значение тока $i_4 = 5\sqrt{2} \sin(\omega t - 143,1^\circ) \text{ A}.$

Векторы токов на комплексной плоскости изображены на рис. 4.32.

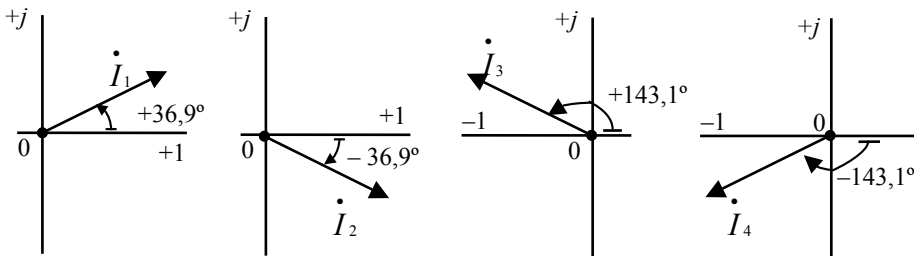


Рис. 4.32. Векторы токов $\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dot{I}_3, \dot{I}_4$

Пример 4

Напряжения представлены комплексами действующих значений

$$\dot{U}_1 = (5 + j12)4e^{j30^\circ} \text{ В}, \dot{U}_2 = (28 - j96) \text{ В}.$$

Записать выражения для мгновенных значений напряжений.

Решение:

$$1. \dot{U}_1 = (5 + j12)4e^{j30^\circ} = \sqrt{5^2 + 12^2} \cdot e^{j \arctg \frac{12}{5}} \cdot 4e^{j30^\circ} = 13e^{j67,4^\circ} \cdot 4e^{j30^\circ} = 52e^{j97,4^\circ} \text{ В},$$

тогда $u_1 = 52\sqrt{2} \sin(\omega t + 97,4^\circ).$

$$2. \dot{U}_2 = 28 + j96 = \sqrt{28^2 + 96^2} \cdot e^{j \arctg \frac{96}{28}} = 100e^{-j73,7^\circ} \text{ В},$$

тогда $u_2 = 100\sqrt{2} \sin(\omega t + 73,7^\circ).$

Пример 5

Комплексы действующих значений напряжения и тока равны $\dot{U} = 12,5 + j30$ В, $\dot{I} = 1,6 - j1,2$ А. Определить сдвиг фаз между напряжением и током.

Решение:

1. Комплексы действующих значений напряжения и тока в показательной форме:

$$\dot{U} = \sqrt{12,5^2 + 30^2} \cdot e^{j \arctg \frac{30}{12,5}} = 32,5 e^{j 67,4^\circ} \text{ В,}$$

$$\dot{I} = \sqrt{1,6^2 + 1,2^2} \cdot e^{j \arctg \frac{1,2}{1,6}} = 2 e^{j 36,9^\circ} \text{ А.}$$

2. Сдвиг фаз между напряжением и током:

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = 67,4^\circ - 36,9^\circ = 30,5^\circ.$$

Пример 6

Определить комплекс амплитудного значения и мгновенное значение падения напряжения на участке цепи с комплексным сопротивлением $\underline{Z} = 26 + j42$ Ом, если мгновенное значение тока через элементы цепи составляет $i = 1,25 \sin(\omega t + 25^\circ)$ А.

Записать комплексы действующих значений синусоидальных функций в показательной, алгебраической и полярной формах.

Решение:

Согласно закону Ома, напряжение на участке: $\dot{U}_M = \dot{I}_M \underline{Z}$.

Комплекс амплитудного значения тока:

$$\dot{I}_M = 1,25 e^{j 25^\circ} \text{ А.}$$

Комплекс амплитудного значения падения напряжения:

$$\begin{aligned} \dot{U}_M &= \dot{I}_M \underline{Z} = 1,25 e^{j 25^\circ} (26 + j42) = 1,25 e^{j 25^\circ} \cdot \sqrt{26^2 + 42^2} \cdot e^{j \arctg \frac{42}{26}} = \\ &= 1,25 e^{j 25^\circ} \cdot 49,4 e^{j 58,2^\circ} = 61,75 e^{j 83,2^\circ} \text{ В.} \end{aligned}$$

Мгновенное значение падения напряжения на участке:

$$u = U_M \sin(\omega t + \psi_u) = 61,75 \sin(\omega t + 83,2^\circ) \text{ В.}$$

Пример 7

Определить комплексное сопротивление и комплексную проводимость цепи, если напряжение и ток на входе цепи:

$$u = 220\sqrt{2} \sin(\omega t + 40^\circ) \text{ В, } i = 5\sqrt{2} \sin(\omega t + 10^\circ) \text{ А.}$$

Решение:

Согласно закону Ома, комплексное сопротивление цепи: $\underline{Z} = \frac{\dot{U}_M}{\dot{I}_M}$.

Комплекс амплитудных значений напряжения и тока:

$$\dot{U}_M = U_M e^{j \psi_u} = 220\sqrt{2} e^{j 40^\circ} \text{ В,}$$

$$\dot{I}_M = I_M e^{j \psi_i} = 5\sqrt{2} e^{j 10^\circ} \text{ А.}$$

Комплексное сопротивление:

$$\underline{Z} = \frac{\dot{U}_M}{\dot{I}_M} = \frac{220\sqrt{2}e^{j40^\circ}}{5\sqrt{2}e^{j10^\circ}} = 44e^{j30^\circ} = 38,1 + j22 \text{ Ом.}$$

Комплексная проводимость:

$$\underline{Y} = \frac{\dot{I}_M}{\dot{U}_M} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{44e^{j30^\circ}} = 0,023e^{-j30^\circ} = (19,68 - j11,36)10^{-3} \text{ См.}$$

Пример 8

В узле цепи (рис. 4.33а) соединены три ветви. Определить комплекс действующего значения тока $\dot{I}_3$, если $\dot{I}_1 = 1,4 \cdot e^{-j43^\circ} \text{ А}$, $\dot{I}_2 = 3,6e^{j60^\circ} \text{ А}$.

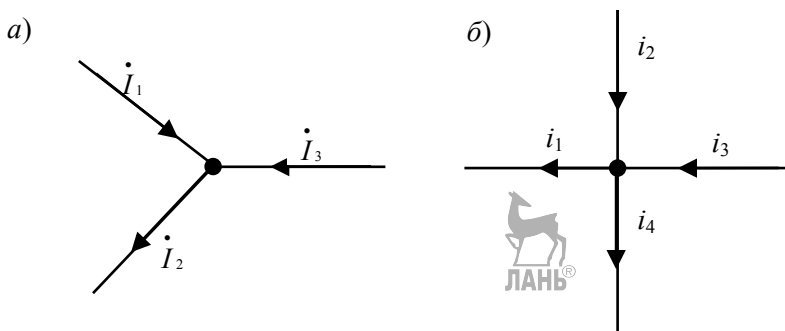


Рис. 4.33. Узлы цепи

Решение:

На основании первого закона Кирхгофа, согласно рис. 4.33а:

$$\begin{aligned} \dot{I}_3 &= \dot{I}_2 - \dot{I}_1 = 3,6e^{j60^\circ} - 1,4e^{-j43^\circ} = (1,8 + j3,12) - (1,02 - j0,95) = \\ &= 0,78 + j4,07 = 4,14e^{j79,2^\circ} \text{ А.} \end{aligned}$$

Пример 9

В узле цепи (рис. 4.33б) соединены четыре ветви. Определить мгновенное значение тока i_1 , если мгновенные значения остальных токов равны: $i_2 = 15 \sin(\omega t - 15^\circ) \text{ А}$, $i_3 = 25 \sin(\omega t + 35^\circ) \text{ А}$, $i_4 = 12 \sin(\omega t - 60^\circ) \text{ А}$.

Решение:

На основании первого закона Кирхгофа для комплексных амплитудных значений токов:

$$\dot{I}_{1M} = \dot{I}_{2M} + \dot{I}_{3M} - \dot{I}_{4M}$$

найдем:

$$\dot{I}_{2M} = 15e^{-j15^\circ} = 14,5 - j3,9 \text{ А,}$$

$$\dot{I}_{3M} = 25e^{j35^\circ} = 20,5 + j14,3 \text{ А,}$$

$$\dot{I}_{4M} = 12e^{-j60^\circ} = 6 - j10,4 \text{ А.}$$

Следовательно,

$$\dot{I}_{1M} = 14,5 - j3,9 + 20,5 + j14,3 - (6 - j10,4) = 29 + j20,8 = 35,7e^{j35,7^\circ} \text{ А.}$$

Мгновенное значение тока i_1 :

$$i_1 = 35,7 \sin(\omega t + 35,7^\circ) \text{ А.}$$

Пример 10

Найти комплексные сопротивления и комплексные проводимости участков цепи (рис. 4.34а–в), если $R = 25 \text{ Ом}$, $X_L = 60 \text{ Ом}$, $X_C = 30 \text{ Ом}$.

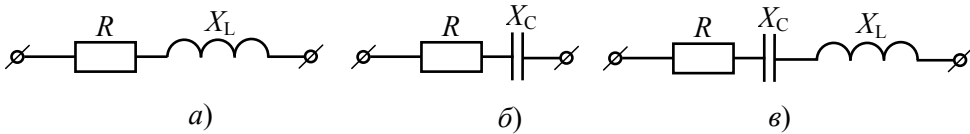


Рис. 4.34. Участки электрической цепи

Решение:

Комплексное сопротивление и комплексная проводимость для участка цепи (рис. 4.34а):

$$\underline{Z}_1 = R + jX_L = 25 + j60 = 65e^{j67,4^\circ} \text{ Ом},$$

$$\underline{Y}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_1} = \frac{1}{25 + j60} = \frac{1}{65e^{j67,4^\circ}} = 0,0154e^{-j67,4^\circ} = 0,0059 - j0,0142 \text{ См.}$$

Комплексное сопротивление и комплексная проводимость для участка цепи (рис. 4.34б):

$$\underline{Z}_2 = R - jX_C = 25 - j30 = 39,1e^{-j50,2^\circ} \text{ Ом},$$

$$\underline{Y}_2 = \frac{1}{\underline{Z}_2} = \frac{1}{25 - j30} = \frac{1}{39,1e^{-j50,2^\circ}} = 0,0256e^{j50,2^\circ} = 0,0164 + j0,0196 \text{ См.}$$

Комплексное сопротивление и комплексная проводимость для участка цепи (рис. 4.34в):

$$\underline{Z}_3 = R + jX_L - jX_C = 25 + j60 - j30 = 25 + j30 = 39,1e^{j50,2^\circ} \text{ Ом},$$

$$\underline{Y}_3 = \frac{1}{\underline{Z}_3} = \frac{1}{25 + j30} = \frac{1}{39,1e^{j50,2^\circ}} = 0,0256e^{-j50,2^\circ} = 0,0164 - j0,0196 \text{ См.}$$

Пример 11

Определить параметры элементов и характер цепи, состоящей из двух последовательно включённых сопротивлений R и X , если мгновенное значение напряжения на входе и ток соответственно равны:

$$u = 100\sqrt{2} \sin(100t + 15^\circ) \text{ В}, i = 3,8\sqrt{2} \sin(100t - 38^\circ) \text{ А, а частота } f = 50 \text{ Гц.}$$

Решение:

1. Комплексы амплитудных значений напряжения и тока:

$$\dot{U}_M = 100\sqrt{2}e^{j15^\circ} \text{ В}, \dot{I}_M = 3,8\sqrt{2}e^{-j38^\circ} \text{ А.}$$

2. Комплексное сопротивление цепи:

$$\underline{Z} = \frac{\dot{U}_M}{\dot{I}_M} = \frac{100\sqrt{2}e^{j15^\circ}}{3,8\sqrt{2}e^{-j38^\circ}} = 15,8 + j21 \text{ Ом.}$$

3. Активное сопротивление является действительной составляющей (вещественной частью) комплексного сопротивления:

$$R = \operatorname{Re}(\underline{Z}) = \operatorname{Re}(15,8 + j21) = 15,8 \text{ Ом.}$$

Реактивное сопротивление является мнимой составляющей комплексного сопротивления:

$$X = \operatorname{Im}(\underline{Z}) = \operatorname{Im}(15,8 + j21) = 21 \text{ Ом.}$$

Так как реактивное сопротивление имеет знак «+», следовательно, оно является индуктивным сопротивлением (см. рис. 4.35а), т. е. $X = X_L$.

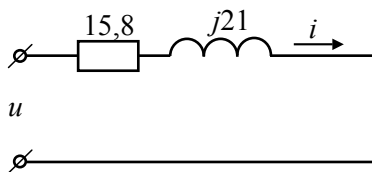


Рис. 4.35. Схема к примеру 11

Индуктивность определяется по известной формуле:

$$L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{X_L}{2\pi f} = \frac{21}{2 \cdot 3,14 \cdot 50} = 0,067 \text{ Гн.}$$

4.15. Задания 9–11 для самостоятельной работы

4.15.1. Задание 9

Вариант задания каждому студенту задаётся в виде двух чисел, из которых первое – это вариант задания входного напряжения (табл. 4.7), а второе – вариант последовательности элементов цепи и значения их параметров (табл. 4.8). В схеме, содержащей 4 последовательно соединённых элемента, студент располагает их соответственно порядку, указанному в табл. 8, и при построении векторной диаграммы придерживается такого же порядка расположения векторов напряжений.

На основе представленной в табл. 4.7 и 4.8 исходной информации необходимо:

- начертить схему замещения электрической цепи;
- рассчитать действующие значения тока и напряжений на всех элементах цепи;
- рассчитать активную, реактивную и полную мощности всей цепи;
- построить векторную диаграмму, изобразив на ней действующие значения тока и напряжений на всех элементах цепи и входное напряжение как сумму падений напряжений на всех участках цепи.

Таблица 4.7

№ варианта задания напряжения	1	2	3
Напряжение, В	$u = 141 \sin 314t$	$u = 141 \sin(314t - 53^\circ)$	$u = 141 \sin(314t - 37^\circ)$

Таблица 4.8

№ вар.	Последовательность элементов цепи	Значения параметров элементов цепи [Ом]			
		R_1 [Ом]	R_2 [Ом]	L [мГн]	C [мкФ]
1	$R_1 - L - R_2 - C$	4	3	9,55	353
2	$R_1 - L - R_2 - C$	5	2	38,22	796
3	$R_1 - L - R_2 - C$	4	6	12,74	265
4	$R_1 - C - R_2 - L$	3	3	28,66	1060
5	$R_1 - L - R_2 - C$	2	4	38,22	796
6	$R_1 - L - R_2 - C$	3	5	12,74	265
7	$L - R_1 - C - R_2$	4	4	9,55	353
8	$L - R_1 - C - R_2$	2	4	38,22	796
9	$L - R_1 - C - R_2$	5	1	12,74	265
10	$C - R_1 - L - R_2$	6	2	28,66	1060
11	$C - R_1 - L - R_2$	5	3	38,22	796
12	$C - R_1 - L - R_2$	2	4	12,74	265
13	$L - R_1 - R_2 - C$	5	1	9,55	353
14	$L - R_1 - R_2 - C$	6	2	38,22	796
15	$R_1 - L - C - R_2$	4	5	28,66	1060
16	$L - R_1 - R_2 - C$	3	3	12,74	265

4.15.2. Пример выполнения задания 9

Для расчета задан вариант 1; 16, что означает:

– входное напряжение берётся из табл. 4.7 по варианту 1, равным $u = 141 \sin 314t$;

– последовательность элементов и численные значения параметров берутся из табл. 4.8 по варианту 16: $R_1 = 3$ Ом, $R_2 = 3$ Ом, $L = 12,74$ мГн, $C = 265$ мкФ. В соответствии с этим расчётная схема будет иметь вид, представленный на рис. 4.36.

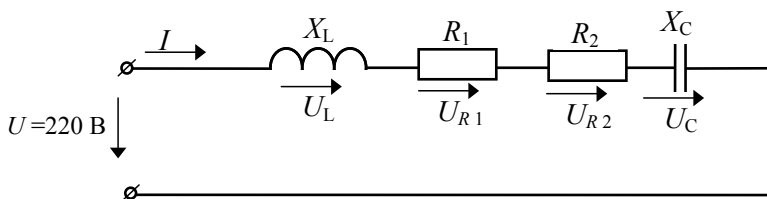


Рис. 4.36. Схема к примеру расчёта

Определить действующие значения тока цепи и напряжений на всех элементах цепи. Рассчитать активную, реактивную и полную мощности всей цепи. Построить векторную диаграмму.

Решение:

1. Реактивные сопротивления:

$$X_L = \omega L = 2\pi f L = 2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 12,74 \cdot 10^{-3} = 4 \text{ Ом};$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 265 \cdot 10^{-6}} = 12 \text{ Ом}.$$

2. Комплекс полного сопротивления цепи:

$$\underline{Z} = j4 + 3 + 3 - j12 = 6 - j8 = 10e^{-j53^\circ} = 10\angle -53^\circ.$$

3. Действующие значения входного напряжения:

исходя из выражения для мгновенного значения напряжения $u = 141\sin 314t$, имеем максимальное значение напряжения $U_M = 141$ В, при этом действующее

значение $U = \frac{U_M}{\sqrt{2}} = \frac{141}{\sqrt{2}} = 100$ В, а угол начальной фазы $\psi_u = 0$.

4. Комплекс тока цепи:

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}} = \frac{100}{10\angle -53^\circ} = 10\angle 53^\circ = (6 + j8) \text{ А}.$$

5. Комплексы напряжений на всех участках цепи:

$$\dot{U}_L = \dot{I} \cdot jX_L = 10\angle 53^\circ \cdot j4 = 10\angle 53^\circ \cdot 4\angle 90^\circ = 40\angle 143^\circ = (-32 + j24) \text{ В};$$

$$\dot{U}_{R1} = \dot{I} \cdot R_1 = 10\angle 53^\circ \cdot 3\angle 0^\circ = 30\angle 53^\circ = (18 + j24) \text{ В};$$

$$\dot{U}_{R2} = \dot{I} \cdot R_2 = 10\angle 53^\circ \cdot 3\angle 0^\circ = 30\angle 53^\circ = (18 + j24) \text{ В};$$

$$\dot{U}_C = \dot{I}(-jX_C) = 10\angle 53^\circ \cdot 12\angle -90^\circ = 120\angle -37^\circ = (96 - j72) \text{ В}.$$

6. Комплекс полной мощности:

$$\dot{S}_1 = \dot{U} \cdot \hat{I}_1^* = 100\angle 0^\circ \cdot 10\angle -53^\circ = 1000\angle -53^\circ = (600 - j800) \text{ В} \cdot \text{А},$$

откуда

– активная мощность первой ветви $P = 600$ Вт;

– реактивная мощность первой ветви $Q = -800$ вар,

т. е. реактивная мощность является ёмкостной, о чём свидетельствует её знак «-»;

– полная мощность $\dot{S} = \sqrt{P^2 + Q^2} = 1000 \text{ В} \cdot \text{А}.$

Напомним, что запись комплекса в виде, например, $10\angle 53^\circ$ равнозначна записи $10e^{j53^\circ}$, т. е. так записан комплекс, модуль которого 10, а аргумент 53° (причём положительный угол отсчитывается против часовой стрелки). Перевод такого комплекса в алгебраическую форму и действия с ним производятся по общим правилам.

7. Векторная диаграмма (см. рис. 4.37).

Предварительно выбираются масштабы для:

– тока;

– напряжений.

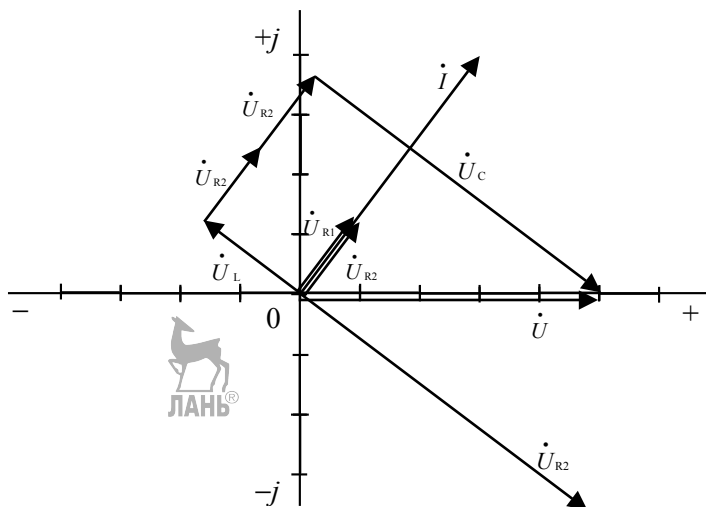


Рис. 4.37. Векторная диаграмма к примеру задания 9

Проверка:

Согласно II закону Кирхгофа

$$\dot{U} = \dot{U}_L + \dot{U}_{R1} + \dot{U}_{R2} + \dot{U}_C =$$

$$= (-32 + j24) + (18 + j24) + (18 + j24) + (96 - j72) = 100 \text{ В},$$

что подтверждается сложением векторов падений напряжений на векторной диаграмме (рис. 4.37). Их геометрическая сумма оказалась равной вектору входного напряжения $\dot{U}$, что свидетельствует о правильности расчётов.

4.15.3. Задание 10

Вариант задания каждому студенту даётся в виде двух чисел, из которых первое – это вариант задания входного напряжения (табл. 4.9), а второе – вариант совокупности параметров трёх параллельно соединённых ветвей цепи:

$$\underline{Z}_1 = R_1 + j(X_{L1} - X_{C1});$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 + j(X_{L2} - X_{C2});$$

$$\underline{Z}_3 = R_3 + j(X_{L3} - X_{C3}).$$

Численные значения активных, индуктивных и емкостных сопротивлений в омах представлены в табл. 4.10.

Таблица 4.9

№ варианта задания напряжения	Напряжение, В
1	$u = 70,5 \sin 314t$
2	$u = 70,5 \sin(314t + 53^\circ)$
3	$u = 70,5 \sin(314t - 37^\circ)$
4	$u = 70,5 \sin(314t + 37^\circ)$
5	$u = 70,5 \sin(314t - 53^\circ)$

Таблица 4.10

№ варианта задания сопротивлений ветвей	Номера ветвей								
	1			2			3		
	R_1	X_{L1}	X_{C1}	R_2	X_{L2}	X_{C2}	R_3	X_{L3}	X_{C3}
1	3	6	10	3	12	9	10	–	–
2	3	2	6	3	7	3	–	–	50/16
3	3	9	13	3	6	2	–	50/16	–
4	3	8	12	3	3	7	–	50/16	–
5	3	1	5	3	8	12	–	50/32	–
6	3	7	3	3	6	10	10	–	–
7	3	9	5	3	2	6	–	50/16	–
8	3	11	7	3	9	13	–	–	50/16
9	3	10	6	3	9	5	–	–	50/16
10	3	12	8	3	10	6	–	–	50/32
11	3	6	10	3	6	10	1,5	2	–
12	4	7	10	4	9	6	–	–	50/12
13	4	5	8	4	10	7	–	50/12	–
14	4	4	7	4	3	6	–	50/12	–
15	4	2	5	4	1	4	–	50/24	–
16	4	10	7	4	10	7	2	–	1,5

На основе представленных в табл. 4.9 и 4.10 исходных данных необходимо:

- начертить схему замещения электрической цепи;
- рассчитать действующие значения токов во всех ветвях цепи;
- рассчитать активную, реактивную и полную мощности ветвей (по указанию преподавателя) и всей цепи;
- построить векторную диаграмму, изобразив на ней токи во всех ветвях, включая разветвлённый участок цепи.

4.15.4. Пример выполнения задания 10

Для расчёта задан вариант 1; 16, что означает:

- входное напряжение берётся из табл. 4.9 по варианту 1 равным $u = 70,5 \sin 314t$;
- численные значения сопротивлений берутся из табл. 4.10 по варианту 16:

$$R_1 = 4 \text{ Ом}; X_{L1} = 10 \text{ Ом}; X_{C1} = 7 \text{ Ом};$$

$$R_2 = 4 \text{ Ом}; X_{L2} = 10 \text{ Ом}; X_{C2} = 7 \text{ Ом};$$

$$R_3 = 2 \text{ Ом}; X_{L3} = 0 \text{ Ом}; X_{C3} = 1,5 \text{ Ом}.$$

В соответствии с этим расчётная схема разветвлённой цепи будет иметь вид, изображённый на рис. 4.38.

Для схемы (рис. 4.38) определить действующие значения токов $\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dot{I}_3$ и $\dot{I}$. Рассчитать активную, реактивную и полную мощности для первой ветви и для всей цепи.

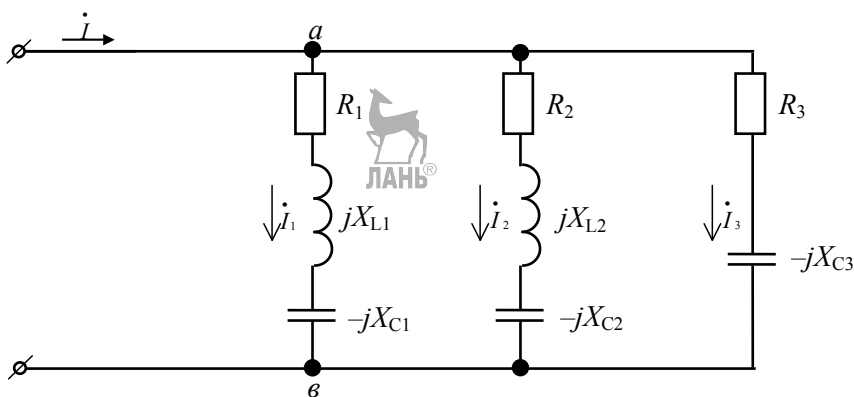


Рис. 4.38. Схема к примеру 10

Решение:

Из выражения для мгновенного значения входного напряжения определим его действующее значение:

$$U = \frac{U_M}{\sqrt{2}} = \frac{70,5}{\sqrt{2}} = 50 \text{ В.}$$

Так как угол начальной фазы входного напряжения $\psi_u = 0^\circ$, то комплекс действующего входного напряжения определится как

$$\dot{U} = Ue^{j\psi_u} = 50e^{j0^\circ} = 50 \text{ В.}$$

Комплексы полных сопротивлений ветвей (см. рис. 4.38) будут равны:

$$\underline{Z}_1 = 4 + j10 - j7 = (4 + j3) \text{ Ом;}$$

$$\underline{Z}_2 = 4 + j10 - j7 = (4 + j3) \text{ Ом;}$$

$$\underline{Z}_3 = (2 - j1,5) \text{ Ом.}$$

Комплексы полных проводимостей определяются как величины, обратные комплексам сопротивлений:

– для первой ветви

$$\underline{Y}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_1} = \frac{1}{4 + j3} = \frac{4 - j3}{(4 + j3) \cdot (4 - j3)} = (0,16 - j0,12) \text{ См;}$$

– для второй ветви

$$\underline{Y}_2 = \frac{1}{\underline{Z}_2} = \frac{1}{4 + j3} = (0,16 - j0,12) \text{ См;}$$

– для третьей ветви

$$\begin{aligned} \underline{Y}_3 &= \frac{1}{\underline{Z}_3} = \frac{1}{2 - j1,5} = \frac{2 + j1,5}{(2 - j1,5) \cdot (2 + j1,5)} = \\ &= \frac{2}{2^2 + 1,5^2} + j \frac{1,5}{2^2 + 1,5^2} = (0,32 + j0,24) \text{ См;} \end{aligned}$$

– для всей цепи

$$\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 = 0,16 - j0,12 + 0,16 - j0,12 + 0,32 + j0,24 = 0,64 \text{ См.}$$

Токи в ветвях и неразветвленной части цепи:

$$\dot{I}_1 = \dot{U} \underline{Y}_1 = 50 \cdot (0,16 - j0,12) = (8 - j6) \text{ A} = 10e^{-j37^\circ};$$

$$\dot{I}_2 = \dot{U} \underline{Y}_2 = 50 \cdot (0,16 - j0,12) = (8 - j6) \text{ A} = 10e^{-j37^\circ};$$

$$\dot{I}_3 = \dot{U} \underline{Y}_3 = 50 \cdot (0,32 - j0,24) = (16 + j12) \text{ A} = 20e^{j37^\circ};$$

$$\dot{I} = \dot{U} \underline{Y} = 50 \cdot 0,64 = 32 \text{ A.}$$

Комплекс полной мощности первой ветви:

$$\dot{S}_1 = \dot{U} \cdot \dot{I}_1 = 50 \cdot (8 - j6) = 400 + j300 = 50e^{j37^\circ} \text{ В} \cdot \text{А},$$

- активная мощность первой ветви – $P = 400$ Вт;
- реактивная мощность первой ветви – $Q = 300$ вар.

Эта мощность является индуктивной, о чём свидетельствует знак «+» мнимой части численного значения $\dot{S}_1$.

Комплекс полной мощности всей цепи:

$$\dot{S}_1 = \dot{U} \cdot \dot{I} = 50 \cdot 32 = 1600 \text{ В} \cdot \text{А}, \text{ откуда}$$

- активная мощность цепи (вещественная часть $\dot{S}$) – $P = 1600$ Вт;
- реактивная мощность цепи – $Q = 0$ вар,

так как мнимая составляющая комплекса полной мощности отсутствует.

Волновую диаграмму построим в масштабе, для чего выберем масштабы для:

- тока (в 1 см 5 А);
- напряжения (в 1 см 5 В).

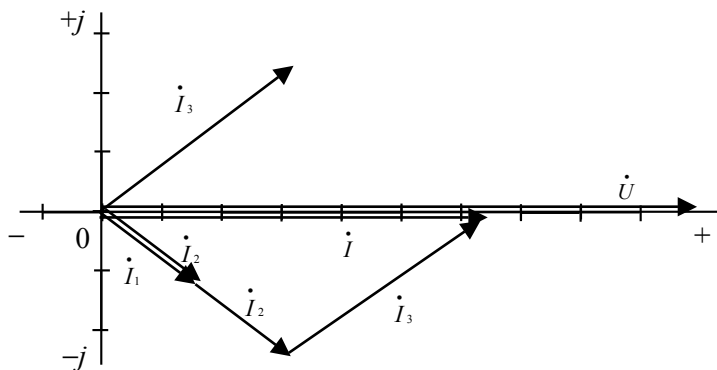


Рис. 4.39. Векторная диаграмма к примеру задания 10

4.15.5. Задание 11

Для электрической цепи, схема которой изображена на рис. 4.40, заданы входное напряжение цепи (табл. 4.11) и численные значения сопротивлений (табл. 4.12). Таким образом, каждому студенту вариант задания даётся в виде двух чисел, первое из которых – вариант входного напряжения, а второе число – вариант заданных в табл. 4.12 сопротивлений.

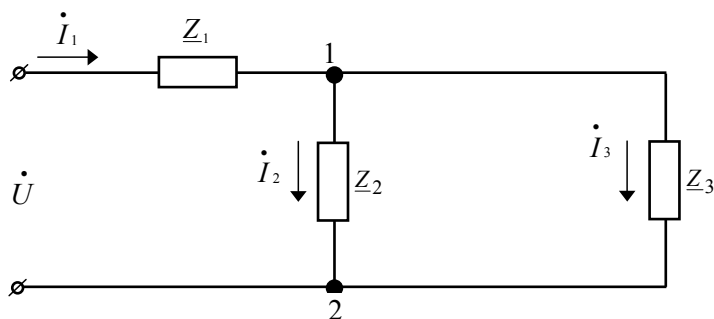


Рис. 4.40. Схема электрической цепи к заданию 11

Таблица 4.11

№ варианта задания	Напряжение, В
1	$u = 141 \sin 314t$
2	$u = 70,5 \sin 314t$
3	$u = 282 \sin 314t$
4	$u = 141 \sin(314t + 53^\circ)$
5	$u = 141 \sin(314t - 37^\circ)$
6	$u = 282 \sin(314t - 120^\circ)$

Таблица 4.12

№ варианта задания	Сопротивление, Ом		
	Z_1	Z_2	Z_3
1	$0,21 + j0,21$	$4 + j3$	$3 + j4$
2	$0,80 + j0,80$	$2 + j2$	$3 + j3$
3	$0,89 + j0,89$	$12 + j16$	$16 + j12$
4	$3,0 + j12,0$	$6 - j8$	$6 - j8$
5	$4,17 + j8,33$	$3 - j4$	$3 + j4$
6	$6,43 + j6,43$	$8 + j6$	$6 + j8$
7	$0,21 - j0,21$	$4 - j23$	$3 - j4$
8	$0,80 - j0,80$	$2 - j2$	$3 - j3$
9	$0,89 - j0,89$	$12 - j16$	$16 - j12$
10	$3,0 - j12,0$	$6 + j8$	$6 + j8$
11	$4,17 - j8,33$	$3 + j4$	$3 - j4$
12	$6,43 - j6,43$	$8 - j6$	$6 - j8$
13	$13,5 + j50$	20	$12 - j26,5$

На основе представленной в табл. 4.11 и 4.12 информации необходимо рассчитать действующие значения токов $\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dot{I}_3$, проверить правильность произведённых расчётов, построить векторную диаграмму.

4.15.6. Пример выполнения задания 11

Для расчёта задан вариант 6; 13, что означает:

– входное напряжение берётся из табл. 4.11 по варианту 6 равным $u = 282 \sin(314t - 120^\circ)$;

– численные значения сопротивлений берутся из табл. 4.12 по варианту 13:

$$\underline{Z}_1 = (13,5 + j50) \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_2 = 20 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_3 = (12 - j26,5) \text{ Ом}.$$

В соответствии с этим расчётная схема разветвлённой цепи будет иметь вид, изображённый на рис. 4.41.

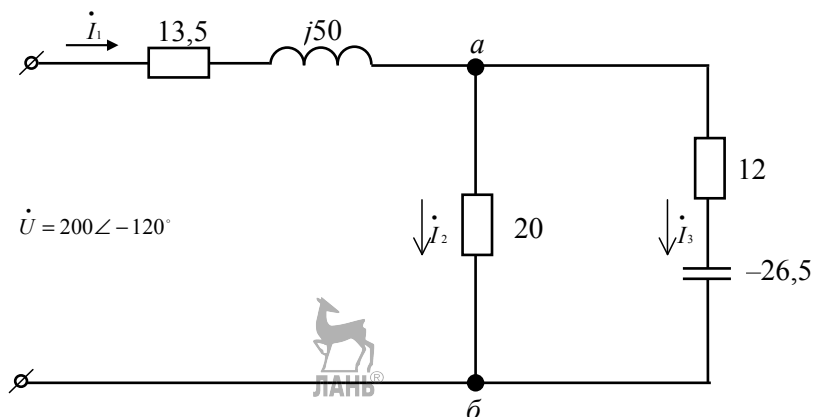


Рис. 4.41. Схема к примеру 11

Для схемы (рис. 4.41) определить действующие значения токов $\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dot{I}_3$ и проверить правильность произведённых расчётов.

Решение:

Из выражения для мгновенного значения входного напряжения определим его действующее значение:

$$U = \frac{U_M}{\sqrt{2}} = \frac{282}{\sqrt{2}} = 200 \text{ В}.$$

Так как угол начальной фазы входного напряжения $\psi_u = -120^\circ$, то комплекс действующего входного напряжения определится как

$$\dot{U} = Ue^{j\psi_u} = 50e^{-j120^\circ} = 200\angle -120^\circ \text{ В}.$$

Комплекс сопротивления разветвлённого участка ab (см. рис. 4.41):

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{ab} &= \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = \frac{20 \cdot (12 - j26,5)}{20 + (12 - j26,5)} = \frac{240 - j530}{32 - j26,5} = \\ &= \frac{(240 - j530) \cdot (32 + j26,5)}{(32 - j26,5) \cdot (32 + j26,5)} = (12,5 - j6,1) \text{ Ом}, \end{aligned}$$

что приводит рис. 4.41 к схеме на рис. 4.42.

Комплекс полного сопротивления всей ветви:

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{ab} = 13,5 + j50 + 12,5 - j6,1 = 26 + j43,9 = 51\angle 60^\circ,$$

что преобразует схему на рис. 4.42 к схеме на рис. 4.43.

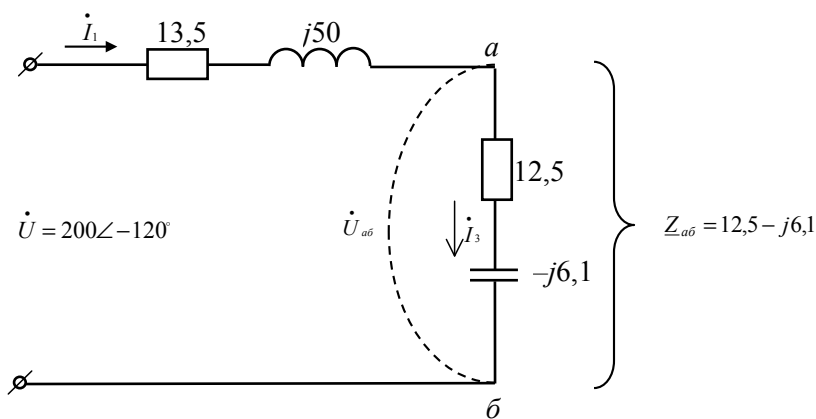


Рис. 4.42. Эквивалентная схема (без разветвления)

Из схемы (рис. 4.43) определим ток $\dot{I}_1$:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}} = \frac{200 \angle -120^\circ}{51.9 \angle 60^\circ} = 3.85 \angle -180^\circ = 3.85 e^{-j180^\circ} = -3.85 \text{ A.}$$

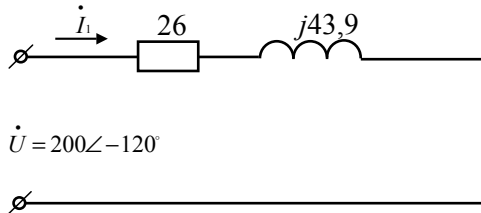


Рис. 4.43. Эквивалентная схема (конечная)

Из схемы на рис. 4.42 находим напряжение разветвлённого участка ab :

$$\dot{U}_{ab} = \dot{I}_1 \underline{Z}_{ab} = (-3.85) \cdot (12.5 - j6.1) = -48.1 + j23.5 = 53.5 \angle 154^\circ.$$

Из схемы на рис. 4.41 находим токи в параллельных ветвях $\dot{I}_2$ и $\dot{I}_3$:

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_{ab}}{\underline{Z}_2} = \frac{53.5 \angle 154^\circ}{20} = 2.67 \angle 154^\circ = (-2.42 + j1.17) \text{ A};$$

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_{ab}}{\underline{Z}_3} = \frac{53.5 \angle 154^\circ}{29.1 \angle -66^\circ} = 1.84 \angle 220^\circ = (-1.43 - j1.17) \text{ A.}$$

Проверка:

По I закону Кирхгофа для узла a схемы на рис. 4.41 имеем

$$\dot{I}_1 - \dot{I}_2 - \dot{I}_3 = 0,$$

откуда

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = -2.42 + j1.17 - 1.43 - j1.17 = -3.85 \text{ A,}$$

что свидетельствует о правильности расчётов.

Векторная диаграмма в задании 11 строится аналогично тому, как это рекомендовано в заданиях 9 и 10.

4.16. Расчет сложных цепей синусоидального тока символическим методом

Существует большое разнообразие схем электрических цепей, содержащих один источник электрической энергии, к которому подключено множество различных электрических устройств, схемы замещения которых представляют смешанные (т. е. последовательно-параллельные или параллельно-последовательные) соединения резистивных, индуктивных и емкостных элементов. Для определения токов и напряжений во всех случаях используют метод эквивалентных преобразований. Для схем смешанного соединения оказывается достаточным использование формул последовательного и параллельного соединения. Эти формулы позволяют постепенным преобразованием сложную схему смешанного соединения привести к простейшей схеме цепи, состоящей из последовательно соединённых источника электрической энергии и одного эквивалентного пассивного элемента. Такой расчёт подробно рассмотрен в п. 2.3.1. Необходимо при этом помнить, что при расчёте цепей синусоидального тока вместо резистивных сопротивлений цепи постоянного тока (R) используются комплексные сопротивления ($\underline{Z}$). Последовательность такого расчёта также рассмотрена в примере к заданию 11.

В ряде сложных электрических цепей встречаются соединения элементов, которые нельзя отнести ни к последовательному, ни к параллельному соединению. Типичным примером такой сложной цепи является мостовая цепь (рис. 4.44). В этом случае часть цепи образует треугольник, вершинами которого являются три узла (например, a , b и c), а сторонами – три ветви с сопротивлениями $\underline{Z}_{ab}$, $\underline{Z}_{bc}$, $\underline{Z}_{ca}$, включенные между этими узлами.

Расчёт цепи на рис. 4.44а становится возможным при эквивалентной замене трёх её ветвей, соединённых треугольником, тремя ветвями, соединёнными трёхлучевой звездой, т. е. сопротивлениями $\underline{Z}_a$, $\underline{Z}_b$, $\underline{Z}_c$ (рис. 4.44б).

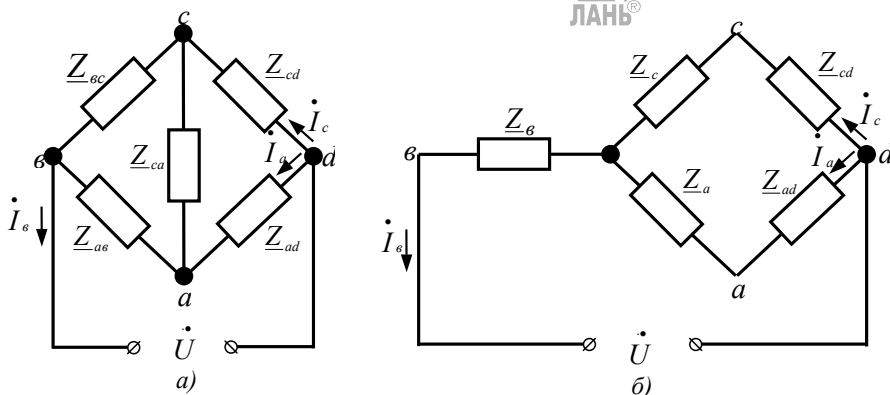


Рис. 4.44. Исходная (а) и преобразованная (б) схемы мостовой цепи

В результате такой замены мостовая цепь (рис. 4.44а) преобразуется в цепь со смешанным (т. е. последовательно-параллельным) соединением элементов, расчёт которой уже рассмотрен ранее (в частности, в п. 2.3.1).

Формулы для преобразования треугольника сопротивлений в эквивалентную звезду имеют вид, аналогичный формулам (табл. 2.1):

$$\underline{Z}_a = \frac{\underline{Z}_{ab} \cdot \underline{Z}_{ca}}{\underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{bc} + \underline{Z}_{ca}};$$

$$\underline{Z}_b = \frac{\underline{Z}_{bc} \cdot \underline{Z}_{ab}}{\underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{bc} + \underline{Z}_{ca}};$$

$$\underline{Z}_c = \frac{\underline{Z}_{ca} \cdot \underline{Z}_{bc}}{\underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{bc} + \underline{Z}_{ca}},$$

а для преобразования звезды в эквивалентный треугольник используются формулы:

$$\underline{Z}_{ab} = \underline{Z}_a + \underline{Z}_b + \frac{\underline{Z}_a \cdot \underline{Z}_b}{\underline{Z}_c};$$

$$\underline{Z}_{bc} = \underline{Z}_b + \underline{Z}_c + \frac{\underline{Z}_b \cdot \underline{Z}_c}{\underline{Z}_a};$$

$$\underline{Z}_{ca} = \underline{Z}_c + \underline{Z}_a + \frac{\underline{Z}_c \cdot \underline{Z}_a}{\underline{Z}_b}.$$

Рассмотрим пример, использующий преобразование звезды в эквивалентный треугольник (рис. 4.45).

Пример:

Для схемы (рис. 4.45а) дано:

$R_1 = 26 \text{ Ом}; R_2 = 32 \text{ Ом}; X_{L1} = 15 \text{ Ом}; X_{L2} = 15 \text{ Ом}; X_{C1} = 36 \text{ Ом}; X_{C2} = 12 \text{ Ом}$. Известен также закон изменения ЭДС $e = 169,2 \sin \omega t$.

Определим действующие значения токов в ветвях схемы и мощность, отдаваемую источником.

Решение:

1. Определим комплекс действующего значения ЭДС источника:

$$\dot{E} = \frac{169,2}{\sqrt{2}} e^{j0^\circ} = 120 \angle 0^\circ \text{ В.}$$

2. Преобразуем звезду сопротивлений R_1, X_{L1}, X_{C1} , подключённую к точкам 1, 2 и 3, в эквивалентный треугольник (рис. 4.45б).

Комплексные сопротивления эквивалентного треугольника:

$$\underline{Z}_1 = jX_{L1} - jX_{C1} + \frac{jX_{L1} \cdot (-jX_{C1})}{R_1} = j18 - j36 + \frac{j18 \cdot (-j36)}{26} = 25 - j18 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_2 = R_1 - jX_{C1} + \frac{R_1 \cdot (-jX_{C1})}{jX_{L1}} = 26 - j36 + \frac{26 \cdot (-j36)}{j18} = -26 - j36 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_3 = R_1 + jX_{L1} + \frac{R_1 \cdot jX_{L1}}{-jX_{C1}} = 26 + j18 + \frac{26 \cdot j18}{-j36} = 13 + j18 \text{ Ом}.$$

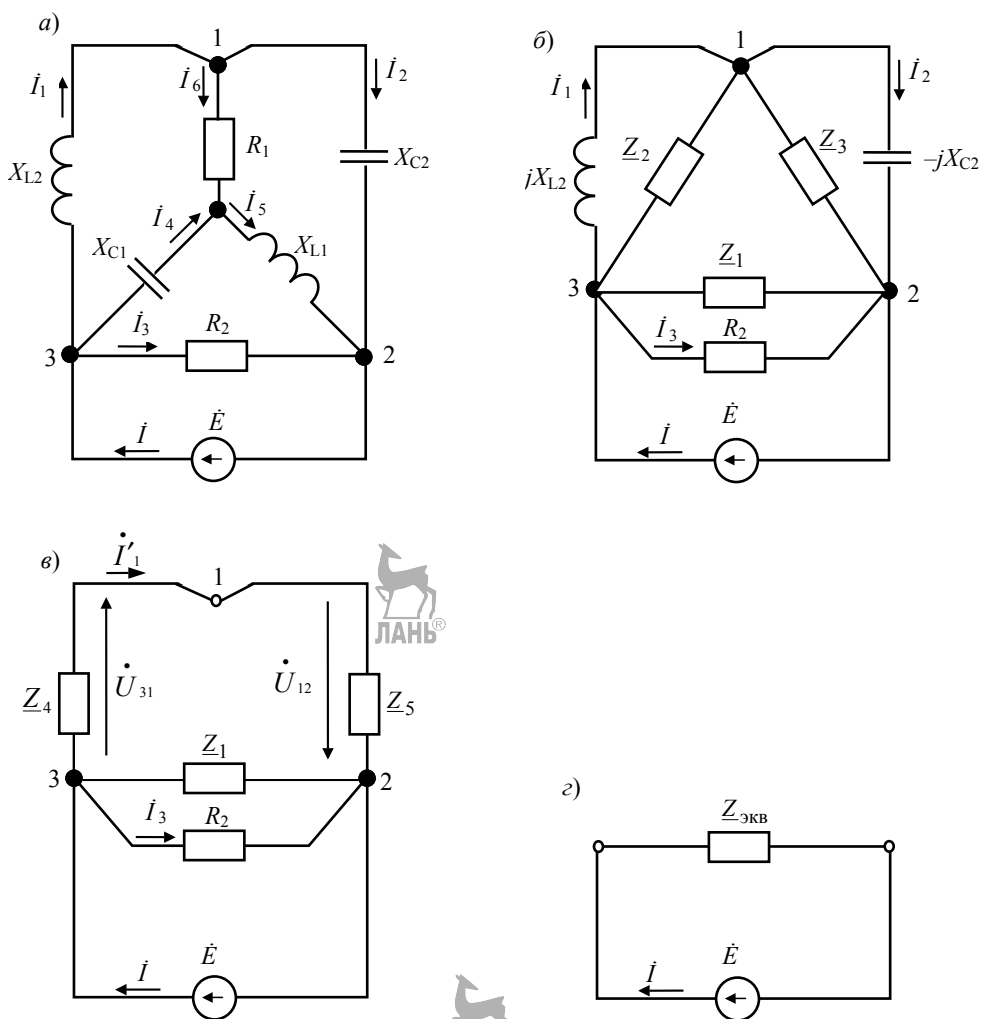


Рис. 4.45. Этапы преобразования схемы:

a – исходная схема; *б*, *в* – промежуточные варианты; *г* – окончательный вариант схемы.

3. Сопротивление X_{L2} соединено параллельно с Z_2 , а сопротивление X_{C2} параллельно с Z_3 (рис. 4.45б), их общие комплексные сопротивления равны (рис. 4.45в):

$$\underline{Z}_4 = \frac{jX_{L2} \cdot \underline{Z}_2}{jX_{L2} + \underline{Z}_2} = \frac{j15 \cdot (-26 - j36)}{j15 - 26 - j36} = -5,2 + j19,2 = 19,9 \angle 105,2^\circ \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_5 = \frac{-jX_{C2} \cdot \underline{Z}_3}{-jX_{C2} + \underline{Z}_3} = \frac{-j12 \cdot (13 + j18)}{-j12 + 13 + j18} = 9,1 - j16,2 = 18,5 \angle -60,7^\circ \text{ Ом}.$$

4. Комплекс тока $\dot{I}'_1$ (рис. 4.45в):

$$\dot{I}'_1 = \frac{\dot{E}}{\underline{Z}_4 + \underline{Z}_5} = \frac{120 \angle 0^\circ}{3,9 + j3} = \frac{120 \angle 0^\circ}{4,9 \angle 37,6^\circ} = 24,4 \angle -37,6^\circ \text{ А}.$$

Комплексы напряжений $\dot{U}_{31}$ и $\dot{U}_{12}$

$$\dot{U}_{31} = \dot{I}_1 \cdot \underline{Z}_4 = 24,4 \angle -37,6^\circ \cdot 19,9 \angle 105,2^\circ = 485,6 \angle 67,6^\circ \text{ В},$$

$$\dot{U}_{12} = \dot{I}_1 \cdot \underline{Z}_5 = 24,4 \angle -37,6^\circ \cdot 18,5 \angle 60,7^\circ = 451,4 \angle -98,3^\circ \text{ В}.$$

5. Комплексы действующих значений токов $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$ найдём через комплексы напряжений $\dot{U}_{31}$ и $\dot{U}_{12}$ (рис. 4.45б):

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_{31}}{jX_{L2}} = \frac{485,6 \angle 67,6^\circ}{j15} = 32,4 \angle -22,4^\circ \text{ А},$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_{12}}{-jX_{C2}} = \frac{451,4 \angle -98,3^\circ}{-j12} = 37,6 \angle -8,3^\circ \text{ А}.$$

6. Комплекс действующего значения тока $\dot{I}_3$:

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{E}}{R_2} = \frac{120 \angle 0^\circ}{32} = 3,8 \angle 0^\circ \text{ А}.$$

7. Комплекс полного сопротивления $\underline{Z}_{\text{экв}}$ всей цепи и комплекс действующего значения тока $\dot{I}$ (рис. 4.45с).
Согласно рис. 4.45в, $\underline{Z}_{\text{экв}}$ запишем

$$\frac{1}{\underline{Z}_{\text{экв}}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_4 + \underline{Z}_5} + \frac{1}{R_2},$$

откуда получим

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{\text{экв}} &= \frac{\underline{Z}_1(\underline{Z}_4 + \underline{Z}_5)R_2}{R_2\underline{Z}_1 + R_2(\underline{Z}_4 + \underline{Z}_5) + \underline{Z}_1(\underline{Z}_4 + \underline{Z}_5)} = \\ &= \frac{(25 - j18)(3,9 + j3)32}{32(25 - j18) + 32(3,9 + j3) + (25 - j18)(3,9 + j3)} = \\ &= \frac{4,9 \cdot 10^3 \angle 1,8^\circ}{1,2 \cdot 10^3 \angle -23,8^\circ} = 4,1 \angle 25,6^\circ \text{ Ом}. \end{aligned}$$

Комплекс действующего значения тока:

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{\underline{Z}_{\text{экв}}} = \frac{120 \angle 0^\circ}{4,1 \angle 25,6^\circ} = 29,3 \angle -25,6^\circ \text{ А}.$$

8. Комплексы действующих значений токов в ветвях звезды (рис. 4.45а) определим из уравнений, составленных по I закону Кирхгофа для узлов 1, 2 и 3:

$$\dot{I}_4 = \dot{I} - \dot{I}_1 - \dot{I}_3 = 29,3 \angle -25,6^\circ - 32,4 \angle -22,4^\circ - 3,8 \angle 0^\circ = 7,4 \angle -176,6^\circ \text{ А},$$

$$\dot{I}_5 = \dot{I} - \dot{I}_2 - \dot{I}_3 = 29,3 \angle -25,6^\circ - 37,6 \angle -8,3^\circ - 3,8 \angle 0^\circ = 16,3 \angle -153,6^\circ \text{ А},$$

$$\dot{I}_6 = \dot{I}_1 - \dot{I}_2 = 32,4 \angle -22,4^\circ - 37,6 \angle -8,3^\circ = 10 \angle -136,3^\circ \text{ А}.$$

9. Окончательно для действующих значений токов имеем:

$$\dot{I} = 29,3 \text{ A}, \dot{I}_1 = 32,4 \text{ A}, \dot{I}_2 = 37,6 \text{ A}, \dot{I}_3 = 3,8 \text{ A}, \\ \dot{I}_4 = 7,4 \text{ A}, \dot{I}_5 = 16,3 \text{ A}, \dot{I}_6 = 10 \text{ A}.$$

10. Мощность, отдаваемая источником.

Комплекс полной мощности источника:

$$\dot{S} = \dot{E} \cdot \hat{I} = 120 \angle 0^\circ \cdot 29,3 \angle 25,6^\circ = 3516 \angle 25,6^\circ = 3170,8 + j1519,2 \text{ ВА},$$

где $\hat{I} = 29,3 \angle -25,6^\circ \text{ A}$ – сопряженный комплекс тока.

Активная мощность источника:

$$P = \text{Re}(\dot{S}) = \text{Re}(3170,8 + j1519,2) = 3170,8 \text{ Вт}.$$

Реактивная мощность источника:

$$Q = \text{Im}(\dot{S}) = \text{Im}(3170,8 + j1519,2) = 1519,2 \text{ вар}.$$

Расчет сложных цепей синусоидального тока с несколькими источниками можно провести, используя все те методы, которые применяются для расчёта цепей постоянного тока с той лишь разницей (как уже указывалось выше), что приходится оперировать не вещественными, а комплексными числами, которыми изображаются параметры сети и режима в цепях переменного тока. С этой целью применяют: уравнения I и II законов Кирхгофа, метод контурных токов, метод узловых напряжений, эквивалентного генератора и т. д.

Например, анализ любой электрической системы можно провести путём непосредственного применения I и II законов Кирхгофа. Количество и правила записи этих уравнений рассмотрены в п. 1.4. Решение полученной системы уравнений после подстановки численных значений заданных параметров (комплексных сопротивлений, ЭДС или напряжений) проводится любым из математических методов, разработанных в высшей алгебре, в результате чего будут найдены численные значения искомых токов в комплексном виде.

4.17. Задачи для самостоятельного решения с ответами

Задача 1

Мгновенные значения напряжения и тока: $u = 220\sqrt{2} \sin(\omega t - 20^\circ) \text{ В}$, $i = 3\sqrt{2} \sin(\omega t + 15^\circ) \text{ А}$. Записать комплексы для действующих значений функций в показательной, алгебраической и полярной формах.

Ответ: 1. $\dot{U} = 220e^{-j20^\circ} \text{ В}$, $\dot{I} = 3e^{j15^\circ} \text{ А}$;

2. $\dot{U} = 206,7 - j75,2 \text{ В}$, $\dot{I} = 2,9 + j0,78 \text{ А}$;

3. $\dot{U} = 220 \angle -20^\circ \text{ В}$, $\dot{I} = 3 \angle 15^\circ \text{ А}$.

Задача 2

Написать выражения для мгновенных значений напряжений. Действующие значения напряжений заданы в алгебраической форме:

$$\dot{U}_1 = 25 + j60 \text{ В}, \dot{U}_2 = 60 - j25 \text{ В}, \dot{U}_3 = -25 + j60 \text{ В}, \dot{U}_4 = -60 - j25 \text{ В}.$$

Ответ:

$$u_1 = 65\sqrt{2} \sin(\omega t + 67,4^\circ) \text{ В}, \quad u_2 = 65\sqrt{2} \sin(\omega t - 22,6^\circ) \text{ В}, \\ u_3 = 65\sqrt{2} \sin(\omega t + 112,6^\circ) \text{ В}, \quad u_4 = 65\sqrt{2} \sin(\omega t - 157,4^\circ) \text{ В}.$$

Задача 3

Написать выражения для мгновенных значений токов. Токи представлены комплексными выражениями для действующих значений:

$$\dot{I}_1 = \frac{40 - j36}{50 + j60} \text{ А}, \quad \dot{I}_2 = \frac{230 \angle -64^\circ}{320 - j280} \text{ А}, \\ \dot{I}_4 = \frac{(24 - j30)(4 - j12)}{260 e^{-j60^\circ}} \text{ А}, \quad \dot{I}_4 = \frac{120 - j150}{(3 + j6)65 \angle 43^\circ} \text{ А}.$$

Ответ:

$$i_1 = 0,69\sqrt{2} \sin(\omega t - 92,2^\circ) \text{ А}, \quad i_2 = 0,54\sqrt{2} \sin(\omega t - 22,8^\circ) \text{ А}, \\ i_3 = 1,87\sqrt{2} \sin(\omega t - 62,9^\circ) \text{ А}, \quad i_4 = 0,44\sqrt{2} \sin(\omega t - 157,8^\circ) \text{ А}.$$

Задача 4

Определить комплексное сопротивление участка цепи в полярной и алгебраической форме, если падение напряжения на участке и ток соответственно равны: $u = 220\sqrt{2} \sin(\omega t - 120^\circ) \text{ В}$, $i = 2\sqrt{2} \sin(\omega t - 36^\circ) \text{ А}$.

Ответ: $\underline{Z}_1 = 110 \angle -84^\circ \text{ Ом}$, $\underline{Z}_1 = 11,5 - j109,4 \text{ Ом}$.

Задача 5

Мгновенное значение тока задано суммой $i_1 = i_2 - i_3 + i_4$. Записать выражение для действующего значения этого тока в показательной, полярной и алгебраической форме, если:

$$i_2 = 1,6 \sin(\omega t + 120^\circ) \text{ А}, \quad i_3 = 2,4 \sin(\omega t - 15^\circ) \text{ А}, \quad i_4 = 1,2 \sin(\omega t + 30^\circ) \text{ А}.$$

Ответ: $\dot{I}_{1m} = 3,3^{j128,6^\circ} \text{ А}$, $\dot{I}_{1m} = 3,3 \angle 128,6^\circ \text{ А}$, $\dot{I}_{1m} = -2,1 + j2,6 \text{ А}$.

Задача 6

Определить ток i , равный разности токов $i_2 - i_1$.

Дано:

$$i_1 = 3,2 \sin(\omega t + 60^\circ) \text{ А} \text{ и } i_2 = 4,6 \sin(\omega t + 45^\circ) \text{ А}.$$

Ответ: $i = 1,72 \sin(\omega t + 16,2^\circ) \text{ А}$.

Задача 7

Определить закон изменения тока через элемент цепи с комплексным сопротивлением $\underline{Z} = 112 - j58 \text{ Ом}$, если закон изменения напряжения на элементе $u = 124 \sin(\omega t - 90^\circ) \text{ В}$.

Ответ: $i = 0,98 \sin(\omega t - 62,6^\circ) \text{ А}$.

Задача 8

Вычислить параметры схемы из двух последовательно включённых сопротивлений, если напряжение и ток соответственно равны:

$$u = 300 \sin(628t + 45^\circ) \text{ В}, \quad i = 1,24 \sin(628t + 86^\circ) \text{ А}.$$

Ответ: $R = 182,6 \text{ Ом}$, $X = X_C = 158,7 \text{ Ом}$.

Задача 9

Записать закон изменения напряжения на входе цепи с последовательным соединением сопротивлений, если мгновенное значение тока равно $i = 4,6 \sin(314t + 64^\circ)$ А.

Дано: $R = 2,5$ Ом, $L = 4,5 \cdot 10^{-2}$ Гн, $C = 600$ мкФ.

Ответ: $u = 42,2 \sin(314t + 138,2^\circ)$ В.

Задача 10

Рассчитать комплексное сопротивление $\underline{Z}$ цепи (рис. 4.46), если

$R_1 = 24$ Ом, $R_2 = 32$ Ом, $R_3 = 15$ Ом, $L_2 = 7,91 \cdot 10^{-2}$ Гн,

$C_1 = 120$ мкФ, $C_3 = 50$ мкФ, $\omega = 628$ с⁻¹.

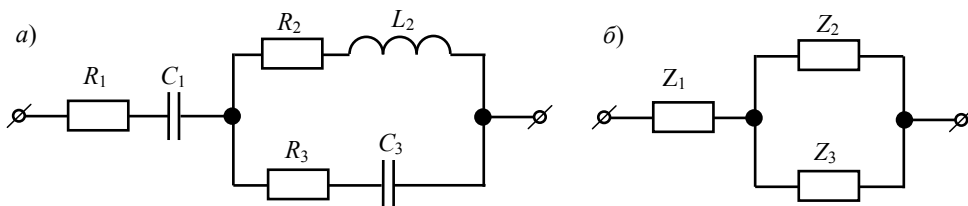


Рис. 4.46. Схема к задаче 10

a – с активными и реактивными составляющими сопротивлений участков цепи;
 b – с полными сопротивлениями тех же участков.

Напомним, что здесь $X_{C1} = \frac{1}{2\pi f C_1}$; $X_{C3} = \frac{1}{2\pi f C_3}$; $X_{L2} = 2\pi f L_2$;

$$\underline{Z}_1 = R_1 - jX_{C1}; \underline{Z}_2 = R_2 + jX_{L2}; \underline{Z}_3 = R_3 - jX_{C3}; \underline{Z} = \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}.$$

Ответ: $\underline{Z} = 60,43 - j32,92 = 68,81 \angle -28,6^\circ$ Ом.

Задача 11

Определить комплексное сопротивление всей цепи, схема которой приведена на рис. 4.47.

Дано:

$R_1 = 120$ Ом, $R_2 = 60$ Ом, $R_3 = 200$ Ом, $C_1 = 20$ мкФ, $L_1 = 0,14$ Гн, $L_2 = 0,1$ Гн,

$\omega = 1000$ с⁻¹.

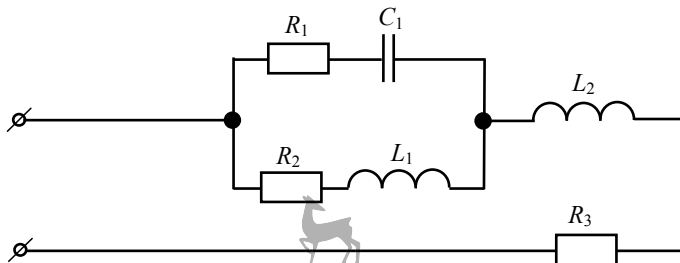


Рис. 4.47. Схема к задаче 11

Ответ: $\underline{Z}_{\text{вх}} = 321,2 \angle 23,8^\circ$ Ом.

Задача 12

Определить комплексное сопротивление всей цепи (рис. 4.48), если сопротивления элементов цепи при заданной частоте источника питания:

$$R_1 = 3 \text{ Ом}, R_2 = 6 \text{ Ом}, X_{L1} = 2 \text{ Ом}, X_{L2} = 4 \text{ Ом}, X_{L3} = 8 \text{ Ом}, X_{C1} = 5 \text{ Ом}.$$

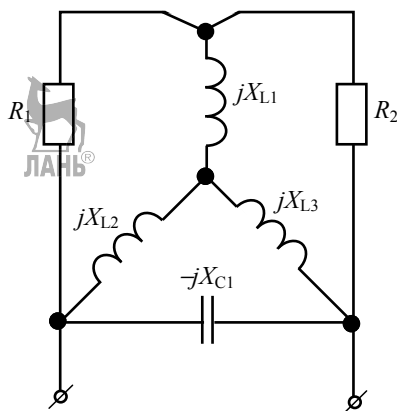


Рис. 4.48. Схема к задаче 12

Ответ: $Z_{BX} = 6,2 \angle -46,4^\circ \text{ Ом}.$

Задача 13

Определить комплексы действующих значений токов цепи (рис. 4.49), если мгновенное значение напряжения на входе схемы составляет

$$u = 60\sqrt{2} \sin(\omega t + 32^\circ) \text{ В}.$$

Дано: $R_1 = 28 \text{ Ом}, X_{L1} = 16 \text{ Ом}, X_{L2} = 36 \text{ Ом}, X_{C1} = 12 \text{ Ом}.$

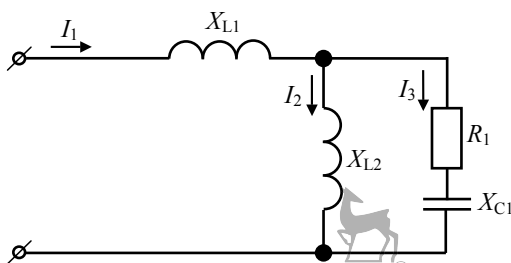


Рис. 4.49. Схема к задаче 13

Ответ: $\dot{I}_1 = 1,25 \angle -15,5^\circ \text{ А}, \dot{I}_2 = 1,26 \angle -73,3^\circ \text{ А}, \dot{I}_3 = 1,48 \angle 33,9^\circ \text{ А}.$

Задача 14

Определить показания приборов электромагнитной системы и активную мощность всей цепи, схема которой приведена на рис. 4.50, если: $U = 36 \text{ В}, R_1 = 21 \text{ Ом}, R_2 = 15 \text{ Ом}, X_{L1} = 10 \text{ Ом}, X_{C1} = 26 \text{ Ом}.$

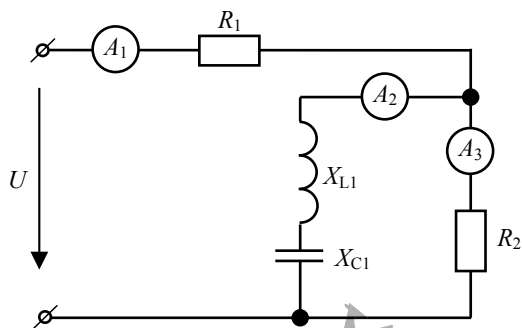


Рис. 4.50. Схема к задаче 14

Ответ: $I_{A1} = 1,2 \text{ A}$, $I_{A2} = 0,82 \text{ A}$, $I_{A3} = 0,87 \text{ A}$, $P = 41,8 \text{ Вт}$.

Задача 15

В схеме рис. 4.51 включены приборы электромагнитной системы. Определить показания приборов, если вольтметр V_2 показывает напряжение $U_{V2} = 24,5 \text{ В}$.

Дано: $R_1 = 120 \text{ Ом}$, $X_{L1} = 60 \text{ Ом}$, $X_{C1} = 90 \text{ Ом}$, $X_{C2} = 30 \text{ Ом}$.

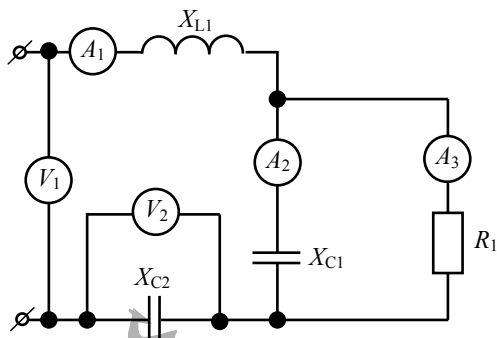


Рис. 4.51. Схема к задаче 15

Ответ: $I_{A1} = 0,82 \text{ A}$, $I_{A2} = 0,66 \text{ A}$, $I_{A3} = 0,49 \text{ A}$, $U_{V1} = 41,9 \text{ В}$.

Задача 16

Определить комплекс действующего значения ЭДС источника на входе цепи (рис. 4.52), если комплекс тока $\dot{I}_3 = 6 + j8 \text{ A}$.

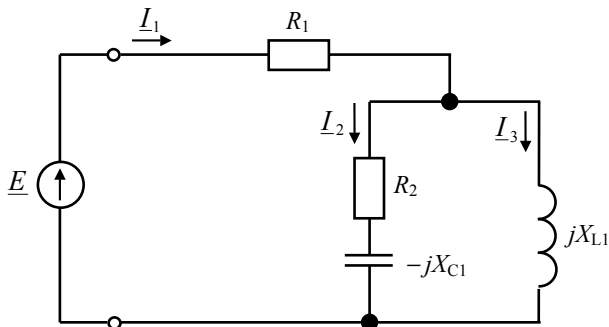


Рис. 4.52. Схема к задаче 16

Дано: $R_1 = 4 \text{ Ом}$, $R_2 = 3 \text{ Ом}$, $X_{L1} = 6 \text{ Ом}$, $X_{C1} = 12 \text{ Ом}$.

Ответ: $\dot{E} = 68,1 \angle 125^\circ \text{ В}$.

Задача 17

В цепи (рис. 4.53) последовательно включена катушка индуктивности с активным сопротивлением и конденсатор. Определить емкость конденсатора, при которой в цепи установится резонанс напряжений. Найти ток, активную мощность, выделяемую в цепи, напряжение на катушке и конденсаторе.

Дано: $U = 48 \text{ В}$, $L_K = 0,06 \text{ Гн}$, $R_K = 20 \text{ Ом}$, $f = 100 \text{ Гц}$.

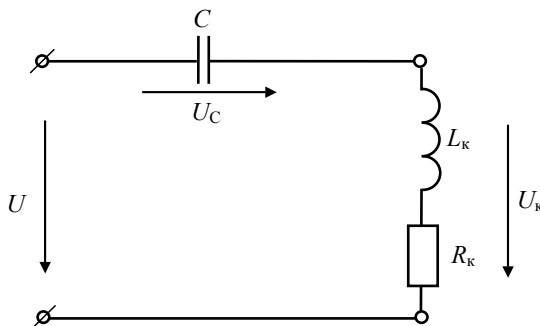


Рис. 4.53. Схема к задаче 17

Ответ: $C = 42,3 \text{ мкФ}$, $I = 2,4 \text{ А}$, $P = 115,2 \text{ Вт}$, $U_K = 102,4 \text{ В}$, $U_C = 90,4 \text{ В}$.

Задача 18

Цепь (рис. 4.54) настроена на резонанс. Показание ваттметра соответствует мощности $P = 200 \text{ Вт}$, а показание амперметра – току $I_A = 5 \text{ А}$. Определить параметры цепи и приложенное ко входу цепи напряжение, если напряжение на конденсаторе $U_C = 160 \text{ В}$, угловая частота $\omega_0 = 500 \text{ с}^{-1}$.

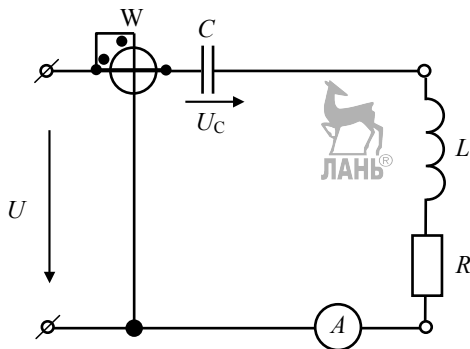


Рис. 4.54. Схема к задаче 18

Ответ: $R = 8 \text{ Ом}$, $L = 64 \cdot 10^{-3} \text{ Гн}$, $C = 62,5 \text{ мкФ}$, $U = 40 \text{ В}$.

Задача 19

При резонансе приборы электромагнитной системы, установленные в цепи (рис. 4.55), показали: $U_{V1} = 100$ В, $U_{V2} = 40$ В, $U_{V3} = 50$ В, $I_A = 0,5$ А. Определить параметры цепи, если угловая частота $\omega_0 = 500$ с⁻¹.

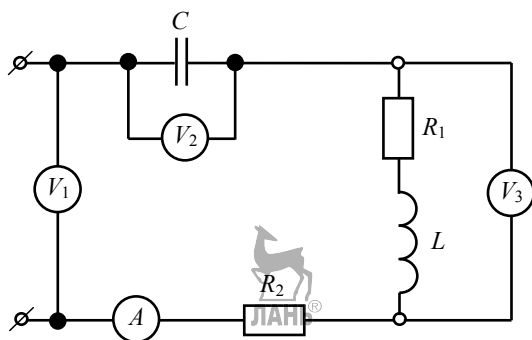


Рис. 4.55. Схема к задаче 19

Ответ: $R_1 = 60$ Ом, $R_2 = 140$ Ом, $L = 0,16$ Гн, $C = 25$ мкФ.

Задача 20

Определить значение сопротивления R_2 , при котором в цепи (рис. 4.56) установится резонанс напряжений на частоте $f = 100$ Гц. Рассчитать входное сопротивление цепи и ток в неразветвленной части схемы, соответствующие резонансному режиму.

Дано: $U = 96$ В, $R_1 = 6$ Ом, $L = 0,015$ Гн, $C = 120$ мкФ.

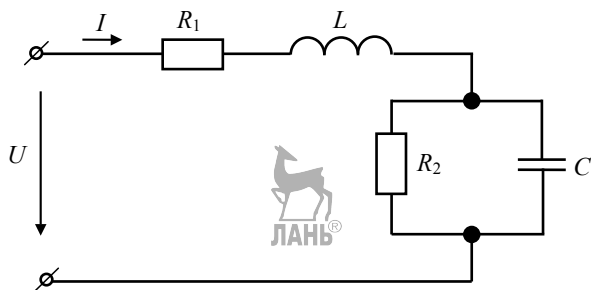


Рис. 4.56. Схема к задаче 20

Ответ: $R_2 = 20,8$ Ом, $R_{\text{вх}} = 12$ Ом, $I = 8$ А.

Задача 21

Для цепи (рис. 4.57) определить резонансную частоту и эквивалентное сопротивление при резонансе токов, если $R = 16$ Ом, $L = 0,04$ Гн, $C = 5$ мкФ.

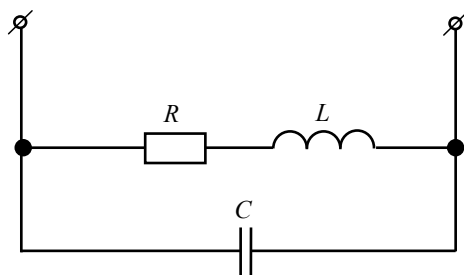


Рис. 4.57. Схема к задаче 21

Ответ: $\omega_0 = 2200 \text{ с}^{-1}$, $R_{\text{ЭКВ}} = 500 \text{ Ом}$.

Задача 22

Для схемы (рис. 4.58) рассчитать резонансные частоты и соответствующие частотам входные сопротивления, если

$R_1 = 200 \text{ Ом}$, $L_1 = 8 \cdot 10^{-3} \text{ Гн}$, $L_2 = 10 \cdot 10^{-3} \text{ Гн}$, $C_2 = 25 \text{ мкФ}$.

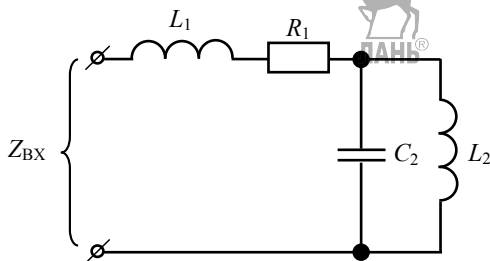


Рис. 4.58. Схема к задаче 22

Ответ:

- 1) резонанс токов: $\omega_0 = 2000 \text{ с}^{-1}$, $Z_{\text{BX}} = \infty \text{ Ом}$;
- 2) резонанс напряжений: $\omega_0 = 3000 \text{ с}^{-1}$, $Z_{\text{BX}} = 200 \text{ Ом}$.

Задача 23

В цепи (рис. 4.59) имеет место резонанс. Показание амперметра, установленного на входе цепи, соответствует току $I_A = 2 \text{ А}$. Определить напряжение на входе цепи, если $R = 10 \text{ Ом}$, $X_C = 20 \text{ Ом}$.

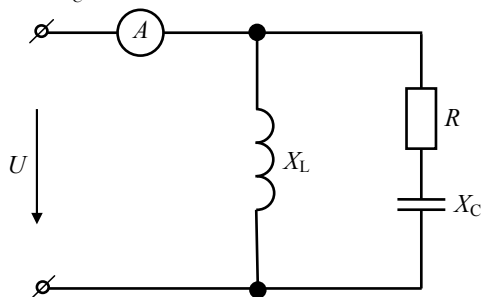


Рис. 4.59. Схема к задаче 23

Ответ: $U = 100 \text{ В}$.

Задача 24

В цепи (рис. 4.60) резонанс токов. Показания амперметров соответствуют токам $I_{A2} = 0,5 \text{ A}$, $I_{A3} = 0,4 \text{ A}$. Определить показание амперметра I_{A1} .

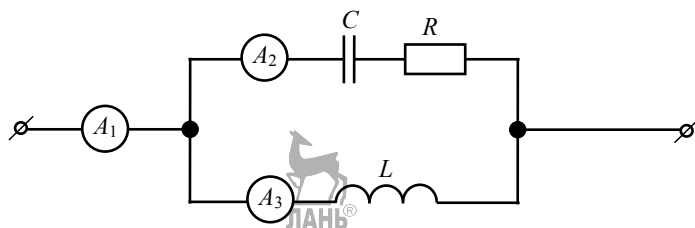


Рис. 4.60. Схема к задаче 24

Ответ: $I_{A1} = 0,3 \text{ A}$.

Контрольные вопросы к главе 4

1. Перечислите и объясните параметры, которыми характеризуются синусоидальные токи.
2. Объясните взаимосвязь волновых и векторных диаграмм синусоидального тока.
3. Назовите правила сложения и вычитания векторных величин (токов и напряжений).
4. Напишите формулы, отражающие зависимости среднего и действующего значения синусоидального тока от его максимального значения. Как получены эти математические выражения?
5. Как сдвинуты по фазе векторы токов и напряжений на резистивном, индуктивном и емкостном сопротивлениях?
6. Напишите выражения для полного сопротивления, полной проводимости и полной мощности через резисторную, индуктивную и емкостную составляющие.
7. Напишите эквивалентные зависимости, связывающие сопротивления и проводимости в цепи переменного тока.
8. В каких цепях переменного тока возникает резонанс напряжений? При каком соотношении реактивных сопротивлений в цепи имеет место резонанс напряжений? При каком условии и почему напряжение на индуктивности и емкости при резонансе больше напряжения, приложенного к цепи?
9. В каких цепях возникает резонанс токов? При каком соотношении реактивных проводимостей имеет место резонанс токов?
10. Что такое коэффициент мощности и коэффициент реактивной мощности?
11. В чем состоит экономическое значение коэффициента мощности? Каковы меры его повышения?
12. Перечислите формы изображения комплексных чисел. Как записываются комплексные числа в различных формах изображения?

-
13. Какая форма изображения комплексных чисел наиболее удобна для их сложения и вычитания?
14. Какие комплексные числа называются сопряженными?
15. Какая форма изображения комплексных чисел наиболее удобна для их умножения и деления?
16. Напишите в комплексной форме выражения для активного, индуктивного и емкостного сопротивлений и соответствующих им проводимостей и мощностей.



Глава 5. Трёхфазные цепи

5.1. Предварительные сведения

Трёхфазной электрической системой называют такую систему, в которой действуют три синусоидальных ЭДС одинаковой частоты и амплитуды, сдвинутые относительно друг друга на угол $2/3 \pi$ (120°) и создаваемые общим источником электроэнергии. Этим источником чаще всего является трёхфазный синхронный генератор, который вырабатывает симметричную систему ЭДС.

Примечание. Многофазная система ЭДС называется симметричной, если все ЭДС системы одинаковы по величине и угол сдвига фаз $\varphi = \frac{2\pi}{m}$, где m – число фаз. В трёхфазной системе $m = 3$.

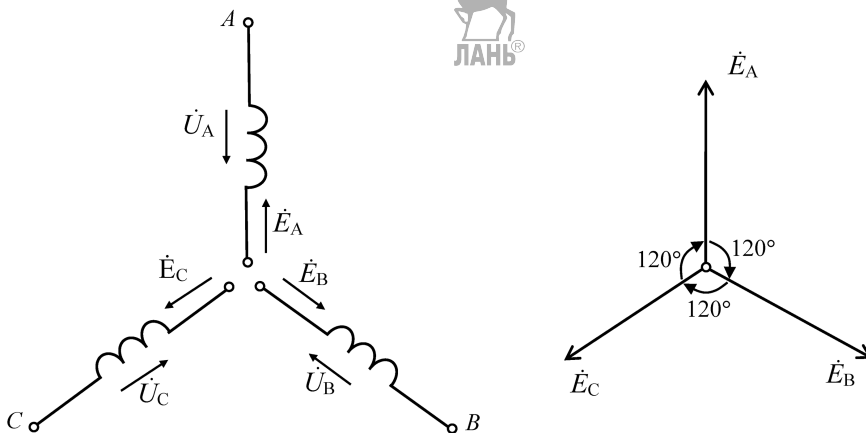


Рис. 5.1. Трёхфазная обмотка:
а – обозначение начал и концов фазных обмоток;
б – векторная диаграмма фазных ЭДС.

В трёхфазном генераторе на статоре уложены три обмотки с зажимами $A-x$, $B-y$, $C-z$, смещённые относительно друг друга вдоль окружности статора на угол 120° . Эти обмотки называют фазными обмотками или просто фазами (рис. 5.1а). Ротор трёхфазного генератора представляет собой электромагнит постоянного тока. При вращении ротора его магнитное поле наводит в каждой обмотке ЭДС, которые будут иметь одинаковые частоты, амплитуды и будут сдвинуты по фазе относительно друг друга на угол 120° (рис. 5.1б).

В трёхфазной цепи термин «фаза» имеет два значения:

- во-первых, как и ранее, этим термином обозначают угол синусоиды (тока, напряжения, ЭДС);
- во-вторых, фазой называют часть трёхфазной цепи, в которой действует одна из трёх ЭДС: E_A , E_B , E_C .

Математически эти ЭДС можно записать в виде:

$$e_A = E_{MA} \sin \omega t,$$

$$e_B = E_{MB} \sin(\omega t - 120^\circ),$$

$$e_C = E_{MC} \sin(\omega t - 240^\circ) = E_{MC} \sin(\omega t + 120^\circ).$$

Выражения для ЭДС симметричной трёхфазной системы удобно записывать, используя оператор поворота на 120° , который ещё называют фазным множителем трёхфазной системы:

$$\dot{a} = e^{j120^\circ} = \cos 120^\circ + j \sin 120^\circ = -\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} = -0,5 + j0,866.$$

Умножение любого вектора на этот оператор не изменяет длину вектора, но поворачивает его на угол 120° в положительную сторону (т. е. против часовой стрелки).

Если оператор $\dot{a}$ возвести во вторую степень, получим

$$\dot{a}^2 = (a^{j120^\circ})^2 = e^{j240^\circ} = e^{-j120^\circ} = -\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} = -0,5 - j0,866.$$

Умножение на $\dot{a}^2$ не изменяет величину вектора, но поворачивает его на угол 240° в положительную сторону или (что то же самое) на угол 120° в отрицательную сторону (т. е. по часовой стрелке).

Основные свойства операторов поворота заключаются в том, что

$$1 + \dot{a} + \dot{a}^2 = 1 + (-0,5 + j0,866) + (-0,5 - j0,866) = 0.$$

Выражения для ЭДС симметричной трёхфазной системы можно записать так:

$$\dot{E}_{MA} = E_M,$$

$$\dot{E}_{MB} = \dot{a}^2 \cdot \dot{E}_{MA} = \dot{a}^2 \cdot E_M,$$

$$\dot{E}_{MC} = \dot{a} \cdot \dot{E}_{MA} = \dot{a} \cdot E_M.$$

Симметричные ЭДС трёхфазной цепи обладают следующим свойством:

$$\dot{E}_{MA} + \dot{E}_{MB} + \dot{E}_{MC} = E_M (1 + \dot{a} + \dot{a}^2) = 0.$$

Разделив максимальное значение ЭДС на $\sqrt{2}$, получим выражение для действующих значений симметричной системы:

$$\dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C = 0.$$

Шесть концов трёхфазных обмоток могут соединяться одним из двух самых распространенных способов: звездой или треугольником.

При соединении фаз генератора и приёмника по схеме звезды (рис. 5.2) концы фазных обмоток генератора X , Y и Z включают в общий узел N , называемый нейтралью генератора, а концы фаз приёмника (с сопротивлениями Z_A , Z_B , Z_C), соединяясь в общую точку, образуют нейтраль приёмника n .

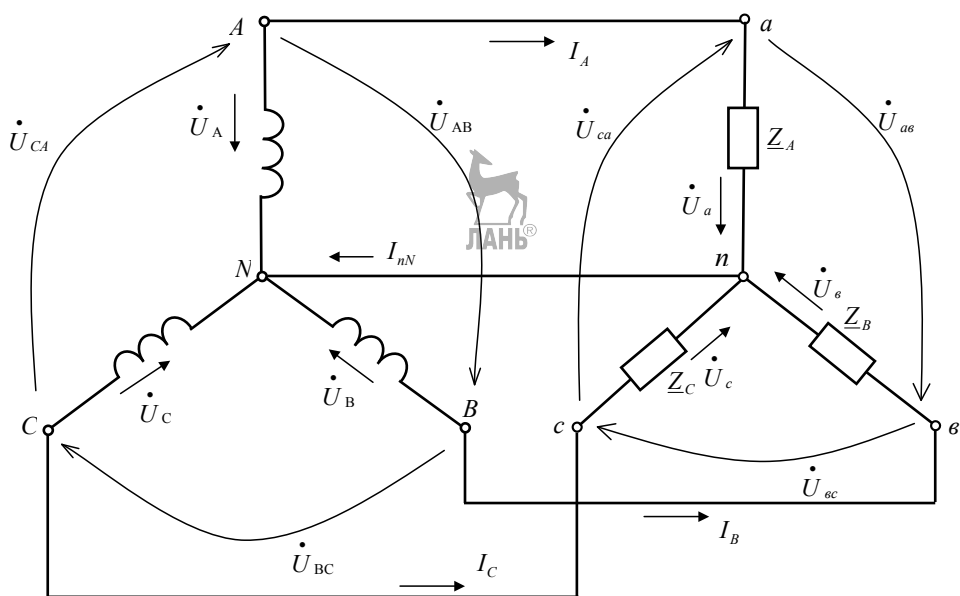


Рис. 5.2. Четырехпроводная трёхфазная цепь с соединением фаз источника и приёмника по схеме «звезда с нейтральным проводом»

Начала фаз генератора и приёмника соединены проводами Aa , Bb и Cc , которые называются линейными проводами. На схеме (рис. 5.2) нейтрали генератора и приёмника соединены проводом nN , который называется нейтральным (нулевым) проводом. При наличии нейтрального провода цепь называют четырёхпроводной, а при его отсутствии – трёхпроводной.

Напряжение между началом и концом фазы называется фазным: $\dot{U}_A, \dot{U}_B, \dot{U}_C$ – фазные напряжения источника (индексы обозначаются заглавными буквами);

$\dot{U}_a, \dot{U}_b, \dot{U}_c$ – фазные напряжения приёмника (индексы обозначаются малыми, строчными буквами).

Напряжения между точками A и B , B и C , C и A называются линейными напряжениями генератора. Напряжения между точками a и b , b и c , c и a называются линейными напряжениями потребителя.

Таким образом:

- U_{AB}, U_{BC}, U_{CA} – линейные напряжения генератора;
- U_{ab}, U_{bc}, U_{ca} – линейные напряжения электроприёмника.

В общем случае фазное напряжение (U_Φ) – это напряжение между линейным и нейтральным проводами, а линейное – это напряжение между двумя линейными проводами (U_L).

Токи, протекающие в фазах генератора или нагрузки, называются фазными токами (I_Φ), а токи в линейных проводах – линейными токами (I_L). Как видно из

схемы (рис. 5.2) при соединении звездой линейный и фазный токи (генератора и нагрузки) – это один и тот же ток, т. е. в схеме звезды фазный ток равен линейному ($I_\Phi = I_L$).

На основе II закона Кирхгофа легко доказывается, что в схеме звезды линейное напряжение равно геометрической разности соответствующих фазных напряжений:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_{AB} &= \dot{U}_A - \dot{U}_B \\ \dot{U}_{BC} &= \dot{U}_B - \dot{U}_C \\ \dot{U}_{CA} &= \dot{U}_C - \dot{U}_A \end{aligned} \right\} \text{ для генератора}$$

Аналогичные выражения можно написать и для нагрузки.

Если векторы фазных напряжений образуют симметричную звезду (т. е. векторы фазных напряжений равны по величине и сдвинуты по фазе относительно друг друга на 120°), легко доказать, что

$$U_L = \sqrt{3} \cdot U_\Phi.$$

На зажимах трёхфазных генераторов это соотношение выполняется всегда.

На нагрузочных сопротивлениях, соединённых звездой, $U_L = \sqrt{3} \cdot U_\Phi$ в следующих случаях:

- когда мы имеем четырёхпроводную звезду, т. е. схему с нейтральным (нулевым) проводом, обладающим пренебрежимо малым сопротивлением;
- либо в трёхпроводной схеме звезды с симметричной нагрузкой.

Нагрузка называется симметричной, если равны комплексы полных сопротивлений всех фаз:

$$\underline{Z}_A = \underline{Z}_B = \underline{Z}_C,$$

где

$$\underline{Z}_A = z_A e^{j\varphi_A};$$

$$\underline{Z}_B = z_B e^{j\varphi_B};$$

$$\underline{Z}_C = z_C e^{j\varphi_C};$$

а это возможно, когда соблюдаются:

- 1) условие равномерности нагрузки – $z_A = z_B = z_C$;
- 2) условие однородности нагрузки – $\varphi_A = \varphi_B = \varphi_C$,

т. е. токи в фазах нагрузки сдвинуты относительно соответствующих фазных напряжений на один и тот же угол.

Из уравнения I закона Кирхгофа, записанного для узла n схемы четырёхпроводной звезды (рис. 5.2), следует, что комплекс тока нейтрального провода будет равен сумме комплексов фазных токов:

$$\dot{I}_{nN} = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C.$$

Прохождение тока $\dot{I}_{nN}$ в нейтральном проводе создаёт падение напряжения, величиной которого зачастую практически можно пренебречь из-за того, что сопротивление нулевого провода пренебрежимо равно 0, т. е. $\underline{Z}_{nN} = 0$. По-

этому потенциалы нейтралей n и N будут одинаковы и, следовательно, звезда векторов фазных напряжений на нагрузке останется симметричной даже при несимметричной нагрузке (рис. 5.3а), что приводит к выполнению соотношения $U_{\text{л}} = \sqrt{3} \cdot U_{\text{ф}}$.

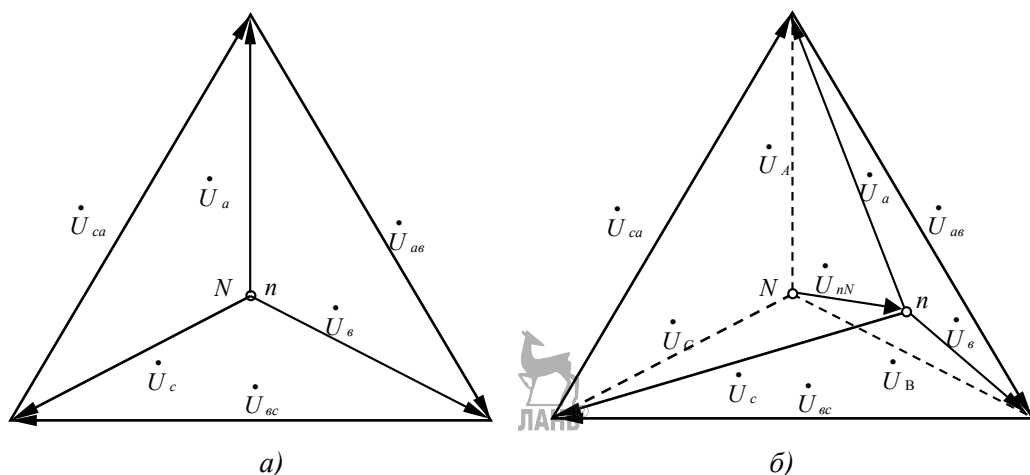


Рис. 5.3. Векторная диаграмма фазных и линейных напряжений:
а – для четырёхпроводной звезды;
б – для трёхпроводной звезды.

Это соотношение в трёхпроводной схеме с несимметричной нагрузкой теряет силу, так как между точками N и n появляется напряжение U_{nN} (рис. 5.3б), которое называется *напряжением смещения нейтрали*. От степени несимметрии нагрузки в трёхпроводной схеме звезды зависит напряжение смещения нейтрали U_{nN} , которое, в свою очередь, определяет отличие фазных напряжений нагрузки от фазных напряжений генератора (рис. 5.3б):

$$\dot{U}_a = \dot{U}_A - \dot{U}_{nN};$$

$$\dot{U}_b = \dot{U}_B - \dot{U}_{nN};$$

$$\dot{U}_c = \dot{U}_C - \dot{U}_{nN}.$$

Трёхпроводную схему звезды применяют при условии симметрии нагрузки, в этом случае симметрия фазных напряжений обеспечивается и без нейтрального провода.

Нейтральный провод необходим в случае несимметрии нагрузки, так как именно он обеспечивает симметрию фазных напряжений нагрузки в этом случае.

Полезно помнить, что при отключении нейтрального провода несимметрия нагрузки приводит к искажению фазных напряжений на нагрузке, что недопустимо при эксплуатации.

Напряжение смещения нейтрали в трёхпроводной цепи определяется по формуле

$$\dot{U}_{nN} = \frac{\dot{U}_A \underline{Y}_a + \dot{U}_B \underline{Y}_b + \dot{U}_C \underline{Y}_c}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C},$$

где $\dot{U}_A, \dot{U}_B, \dot{U}_C$ – комплексы фазных напряжений генератора;

$\underline{Y}_A, \underline{Y}_B, \underline{Y}_C$ – комплексы проводимостей фаз приёмника (включая сопротивление линейных проводов).

Важно помнить, что в четырёхпроводной схеме звезды, строго говоря, напряжение смещения нейтрали равно нулю только при условии равенства нулю сопротивления нейтрального провода $\underline{Z}_{nN}$, которым зачастую в расчётах пренебрегают. Наличие сопротивления $\underline{Z}_{nN}$ приводит к появлению U_{nN} в четырёхпроводной схеме звезды даже при симметричной нагрузке. Величину напряжения смещения в этом случае определяют по формуле:

$$\dot{U}_{nN} = \frac{\dot{U}_A \underline{Y}_a + \dot{U}_B \underline{Y}_b + \dot{U}_C \underline{Y}_c}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C + \underline{Y}_{nN}},$$

где $\underline{Y}_{nN} = \frac{1}{\underline{Z}_{nN}}$ – проводимость нейтрального провода.

В трёхфазной системе фазы генератора и приёмника энергии могут быть соединены по схеме треугольника.

При соединении приёмников треугольником конец одной фазы соединяется с началом следующей, т. е. x соединяется с b , y с c , а z с a (рис. 5.4а). К вершинам образовавшегося треугольника a, b и c присоединяются линейные провода, идущие от трёхфазного источника.

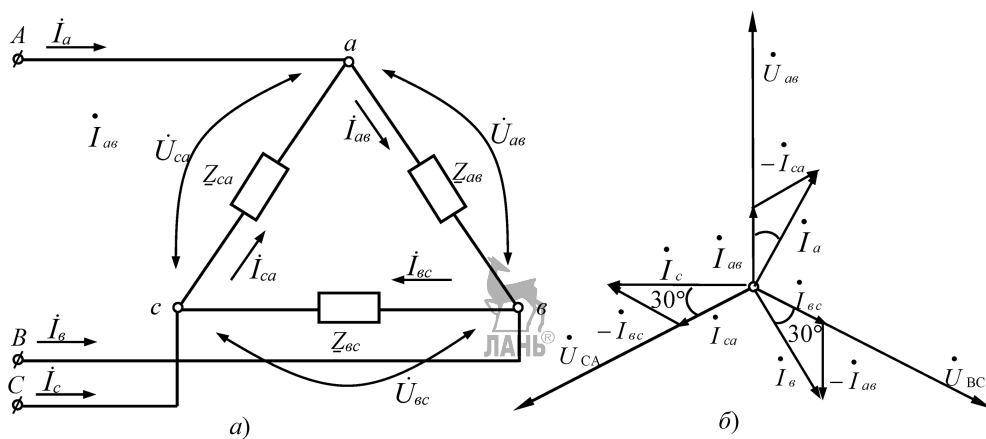


Рис. 5.4. Трёхфазная цепь с соединением фаз приёмника треугольником:
а – схема цепи;

б – векторная диаграмма токов и напряжений.

В трёхфазной цепи при соединении приёмников треугольником различают:

$\dot{U}_{ав}, \dot{U}_{вс}, \dot{U}_{са}$ – линейные и в то же время фазные напряжения нагрузки;

$\underline{Z}_{ав}, \underline{Z}_{вс}, \underline{Z}_{са}$ – сопротивления фаз нагрузки;

$\dot{I}_{ав}, \dot{I}_{вс}, \dot{I}_{са}$ – фазные токи нагрузки;

$\dot{I}_a, \dot{I}_b, \dot{I}_c$ – линейные токи нагрузки.

Фазные напряжения, как и при соединении звездой, сдвинуты относительно друг друга на 120° и образуют симметричную звезду (рис. 5.4б). Как уже было сказано выше,

$$\dot{U}_\Phi = \dot{U}_\text{Л}.$$

В то же время линейные токи согласно I закону Кирхгофа для точек a, b и c могут быть выражены через фазные токи следующим образом:

$$\dot{I}_a = \dot{I}_{ав} - \dot{I}_{са};$$

$$\dot{I}_b = \dot{I}_{вс} - \dot{I}_{ав};$$

$$\dot{I}_c = \dot{I}_{са} - \dot{I}_{вс}.$$

На рис. 5.4б приведена векторная диаграмма для симметричной нагрузки. Легко доказывается, что в случае симметричной нагрузки линейный ток больше фазного в $\sqrt{3}$ раз: $I_\text{Л} = \sqrt{3} \cdot I_\Phi$.

При несимметричной нагрузке это выражение теряет силу. Фазные токи при любой нагрузке определяются по закону Ома:

$$\dot{I}_{ав} = \frac{\dot{U}_{ав}}{\underline{Z}_{ав}}; \quad \dot{I}_{вс} = \frac{\dot{U}_{вс}}{\underline{Z}_{вс}}; \quad \dot{I}_{са} = \frac{\dot{U}_{са}}{\underline{Z}_{са}}.$$

5.2. Примеры расчета трехфазных цепей с симметричной нагрузкой

Задача 1

Для симметричной трёхфазной системы с действующим значением напряжения 220 В при соединении обмоток генератора звездой (рис. 5.5) записать выражения для комплексных мгновенных и действующих значений фазных и линейных напряжений. Построить векторную диаграмму напряжений.

Решение.

Если принять за начало отсчёта момент, когда ЭДС фазы A проходит через ноль (т. е. вектор ЭДС фазы A совпадает с направлением положительной полуоси вещественных чисел), при прямом чередовании фаз мгновенные значения напряжений фаз запишутся в виде:

$$u_A = U_M \sin \omega t = 220\sqrt{2} \sin \omega t;$$

$$u_B = U_M \sin(\omega t - 120^\circ) = 220\sqrt{2}(\sin \omega t - 120^\circ);$$

$$u_C = U_M \sin(\omega t + 120^\circ) = 220\sqrt{2}(\sin \omega t + 120^\circ).$$

Примечание.

1. Прямым чередованием фаз называют такую последовательность чередования фаз, когда вектор напряжения фазы *A* опережает вектор напряжения фазы *B* на угол 120° , а вектор напряжения фазы *B* опережает вектор напряжения фазы *C* на угол 120° .

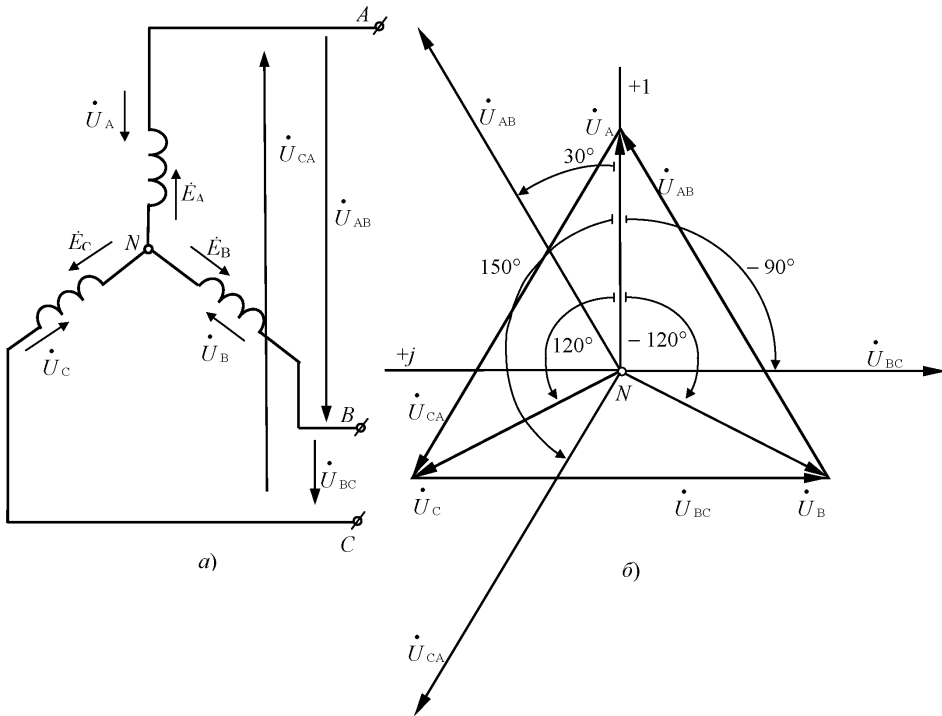


Рис. 5.5. Соединение звездой:

a – схема соединения;

б – векторная диаграмма.

2. Если пренебречь внутренним сопротивлением обмоток генератора, то в этом случае фазные напряжения u_A , u_B , u_C оказываются равными соответствующим ЭДС e_A , e_B , e_C , т. е.

$$u_A = e_A;$$

$$u_B = e_B;$$

$$u_C = e_C.$$

Выражения для действующих значений фазных напряжений в комплексном виде:

$$\dot{U}_A = Ue^{j0^\circ} = 220e^{j0^\circ} = 220\angle 0^\circ \text{ В};$$

$$\dot{U}_B = Ue^{-j120^\circ} = 220e^{-j120^\circ} = 220\angle -120^\circ \text{ В};$$

$$\dot{U}_C = Ue^{j120^\circ} = 220e^{j120^\circ} = 220\angle 120^\circ \text{ В}.$$

Комплексы действующих значений этих же напряжений в алгебраической форме:

$$\dot{U}_A = 220e^{j0^\circ} = 220(1 + j0) = 220 \text{ В};$$

$$\dot{U}_B = 220e^{-j120^\circ} = 220\left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -110 - j190,5 \text{ В};$$

$$\dot{U}_C = 220e^{j120^\circ} = 220\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -110 + j190,5 \text{ В}.$$

Примечание. Комплексы действующих значений фазных напряжений в показательной форме могут быть записаны с помощью фазного множителя трёхфазной системы:

$$\dot{U}_A = \dot{U}, \quad \dot{U}_B = a^2 \cdot \dot{U}, \quad \dot{U}_C = a \dot{U},$$

где $a = e^{j120^\circ} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$; $a^2 = (e^{j120^\circ})^2 = e^{j240^\circ} = e^{-j120^\circ} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Значение суммы: $1 + a + a^2 = 0$.

Комплексы действующих значений линейных напряжений будут иметь вид:

$$\dot{U}_{AB} = \dot{U}_A - \dot{U}_B = 220 - (-110 - j190) = 330 + j190 = 380 \angle 30^\circ \text{ В};$$

$$\dot{U}_{BC} = \dot{U}_B - \dot{U}_C = (-110 - j190) - (-110 + j190) = -j380 = 380 \angle -90^\circ \text{ В};$$

$$\dot{U}_{CA} = \dot{U}_C - \dot{U}_A = (-110 + j190) - 220 = -330 + j190 = 380 \angle 150^\circ \text{ В}.$$

Векторная диаграмма (рис. 5.5б), построенная в масштабе напряжений, иллюстрирует тот факт, что линейные напряжения $\dot{U}_{AB}$, $\dot{U}_{BC}$, $\dot{U}_{CA}$ по величине в $\sqrt{3}$ раз больше фазных напряжений $\dot{U}_A$, $\dot{U}_B$, $\dot{U}_C$ и сдвинуты относительно друг друга по фазе на угол 120° , при этом вектор $\dot{U}_{AB}$ располагается под углом 30° по отношению к положительной полуоси, $\dot{U}_{BC}$ – под углом -90° , вектор $\dot{U}_{CA}$ – под углом 150° . Напомним, что положительные углы отсчитываются от положительной оси вещественных чисел (в нашем случае вертикальная ось) против часовой стрелки, а отрицательный угол (для $\dot{U}_{BC}$) – по часовой стрелке.

Задача 2

Для симметричной трёхфазной системы с действующим фазным напряжением 220 В при соединении обмоток генератора треугольником написать выражение для комплексных мгновенных и действующих значений (рис. 5.6а).

Приняв, как и в предыдущей задаче, за начало отсчёта момент, когда ЭДС фазы А проходит через 0, получим при прямом чередовании фаз выражения для мгновенных значений фазных и линейных напряжений:

$$u_A = u_{AB} = U_M \sin \omega t = 220\sqrt{2} \sin \omega t \text{ В};$$

$$u_B = u_{BC} = U_M \sin(\omega t - 120^\circ) = 220\sqrt{2} \sin(\omega t - 120^\circ) \text{ В};$$

$$u_C = u_{CA} = U_M \sin(\omega t + 120^\circ) = 220\sqrt{2} \sin(\omega t + 120^\circ) \text{ В}.$$

Комплексы для действующих значений напряжений:

$$\dot{U}_A = \dot{U}_{AB} = 220 \angle 0^\circ \text{ В};$$

$$\dot{U}_B = \dot{U}_{BC} = 220 \angle -120^\circ \text{ В};$$

$$\dot{U}_C = \dot{U}_{CA} = 220 \angle 120^\circ \text{ В}.$$

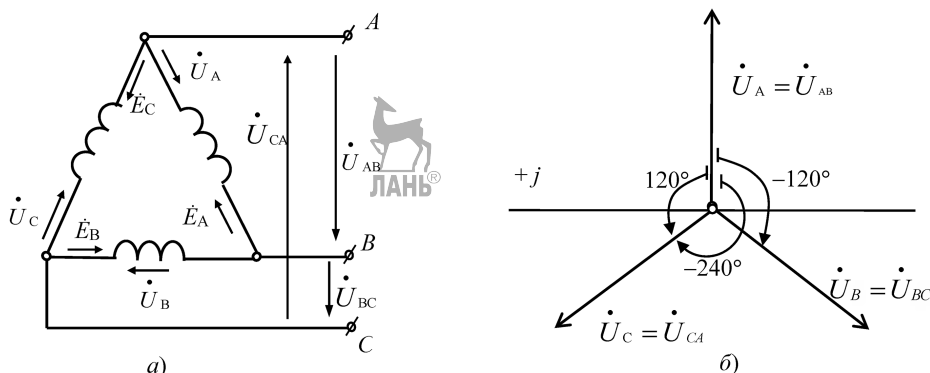


Рис. 5.6. Соединение треугольником:
а – схема соединения; б – векторная диаграмма.

Векторная диаграмма напряжений при соединении обмоток генератора треугольником изображена на рис. 5.6б.

Задача 3

К выводам симметричного трёхфазного генератора (рис. 5.7а) с фазной ЭДС $E_\Phi = 220 \text{ В}$ присоединена нагрузка, соединённая звездой без нейтрального провода. Сопротивление каждой фазы нагрузки составляет $R = 6 \text{ Ом}$, $X_C = 8 \text{ Ом}$.

Определить комплексы действующих значений токов. Построить векторную диаграмму токов и напряжений.

Решение.

1. ЭДС фазных обмоток генератора, соединённых звездой, образуют симметричную систему:

$$\dot{E}_A = E_\Phi e^{j0^\circ} = 220 \angle 0^\circ \text{ В};$$

$$\dot{E}_B = E_\Phi e^{-j120^\circ} = 220 \angle -120^\circ \text{ В};$$

$$\dot{E}_C = E_\Phi e^{j120^\circ} = 220 \angle 120^\circ \text{ В}.$$

2. Комплексы сопротивлений фаз нагрузки:

$$\underline{Z}_A = \underline{Z}_B = \underline{Z}_C = R - jX_C = 6 - j8 = 10 \angle -53,1^\circ \text{ Ом}.$$

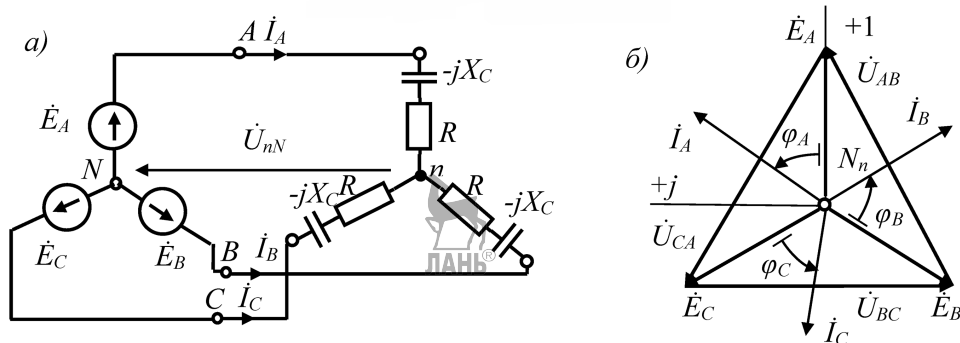


Рис. 5.7. Электрическая цепь с соединением обмоток генератора и нагрузочных сопротивлений звездой без нейтрального провода:
а – электрическая схема; б – векторная диаграмма.

3. Нагрузка симметричная, следовательно, напряжение смещения нейтрали $\dot{U}_{nN} = 0$. Токи в линиях (фазах нагрузки) равны между собой по величине и сдвинуты относительно друг друга по фазе на 120° .

Расчёт токов достаточно выполнить только по одной фазе А:

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{E}_A}{Z_A} = \frac{220 \angle 0^\circ}{10 \angle -53,1^\circ} = 22 \angle 53,1^\circ \text{ A.}$$

Соответствующие токи в фазах В и С получим с помощью фазного множителя:

$$\dot{I}_B = \dot{a}^2 \cdot \dot{I}_A = e^{-j120^\circ} \cdot 22 \angle 53,1^\circ = 22 \angle -66,9^\circ \text{ A,}$$

$$\dot{I}_C = \dot{a} \cdot \dot{I}_A = e^{j120^\circ} \cdot 22 \angle 53,1^\circ = 22 \angle 173,1^\circ \text{ A.}$$

Проверка решения по I закону Кирхгофа:

$$\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 22 \angle 53,1^\circ + 22 \angle -66,9^\circ + 22 \angle 173,1^\circ \approx 0 \text{ A.}$$

При построении векторной диаграммы предварительно выбираем масштаб напряжений и масштаб токов. В выбранном масштабе на комплексной плоскости строим симметричную систему $\dot{E}_A, \dot{E}_B, \dot{E}_C$ и линейные напряжения $\dot{U}_{AB}, \dot{U}_{BC}$ и $\dot{U}_{CA}$ как разности соответствующих фазных ЭДС.

Поскольку, как и в предыдущей задаче, принято, что сопротивления фазных обмоток равны 0, следовательно,

$$\dot{E}_A = \dot{U}_A, \dot{E}_B = \dot{U}_B, \dot{E}_C = \dot{U}_C$$

и поэтому

$$\dot{U}_{AB} = \dot{U}_A - \dot{U}_B = \dot{E}_A - \dot{E}_B;$$

$$\dot{U}_{BC} = \dot{U}_B - \dot{U}_C = \dot{E}_B - \dot{E}_C;$$

$$\dot{U}_{CA} = \dot{U}_C - \dot{U}_A = \dot{E}_C - \dot{E}_A.$$

Так как нагрузка симметричная, то напряжение смещения $\dot{U}_{nN} = 0$, следовательно, фазные напряжения генератора и нагрузки равны. Напомним также, что токи $\dot{I}_A, \dot{I}_B, \dot{I}_C$ являются фазными и линейными одновременно.

Задача 4

К трёхфазному генератору (рис. 5.8) с действующими значениями фазных ЭДС $E_\Phi = 127$ В подключена симметричная нагрузка. Определить комплексы действующих значений токов в фазах нагрузки, если сопротивления фаз нагрузки $R = 16$ Ом, сопротивления линейных проводов $X_L = 12$ Ом. Построить векторную диаграмму.

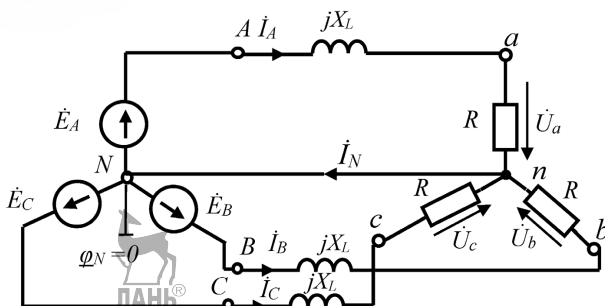


Рис. 5.8. Электрическая цепь с соединением обмоток генератора и нагрузочных сопротивлений по схеме четырехпроводной звезды

1. Фазные ЭДС генератора образуют симметричную систему. Комплексы действующих значений фазных ЭДС:

$$\dot{E}_A = \dot{E}_\Phi e^{j0^\circ} = 127 \angle 0^\circ \text{ В};$$

$$\dot{E}_B = a^2 \cdot \dot{E}_A = e^{-j120^\circ} \cdot 127 \angle 0^\circ = 127 \angle -120^\circ \text{ В};$$

$$\dot{E}_C = a \cdot \dot{E}_A = e^{j120^\circ} \cdot 127 \angle 0^\circ = 127 \angle 120^\circ \text{ В}.$$

2. Наличие симметрии фаз указывает на равенство нулю тока в нейтральном проводе ($I_{nN} = 0$). Напряжение между нейтральными точками генератора и нагрузки тоже не возникает ($U_{nN} = 0$). Линейные (фазные) токи равны между собой по величине и сдвинуты относительно друг друга по фазе на угол 120° .

Комплекс действующего значения тока в фазе A:

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{E}_A}{R + jX_L} = \frac{127 \angle 0^\circ}{16 + j12} = 6,35 \angle -36,9^\circ \text{ А}.$$

Соответствующие токи в фазах B и C получим с помощью фазного множителя:

$$\dot{I}_B = a^2 \cdot \dot{I}_A = e^{-j120^\circ} \cdot 6,35 \angle -36,9^\circ = 6,35 \angle -156,9^\circ \text{ А};$$

$$\dot{I}_C = a \cdot \dot{I}_A = e^{j120^\circ} \cdot 6,35 \angle -36,9^\circ = 6,35 \angle 83,1^\circ \text{ А}.$$

Проверка решения по I закону Кирхгофа:

$$\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 6,35 \angle -36,9^\circ + 6,35 \angle -156,9^\circ + 6,35 \angle 83,1^\circ \approx 0 \text{ A.}$$

3. Рассчитать фазные напряжения на нагрузке:

$$\dot{U}_A = \dot{I}_A R = 6,35 \angle -36,9^\circ \cdot 16 = 101,6 \angle -36,9^\circ \text{ В;}$$

$$\dot{U}_B = \dot{I}_B R = 6,35 \angle -156,9^\circ \cdot 16 = 101,6 \angle -156,9^\circ \text{ В;}$$

$$\dot{U}_C = \dot{I}_C R = 6,35 \angle 83,1^\circ \cdot 16 = 101,6 \angle 83,1^\circ \text{ В.}$$

4. В выбранном масштабе напряжений и токов на комплексной плоскости строим векторы напряжений генератора и нагрузки (рис. 5.9). С учётом углов сдвига фаз строим на диаграмме векторы линейных (фазных) токов $\dot{I}_A, \dot{I}_B, \dot{I}_C$.

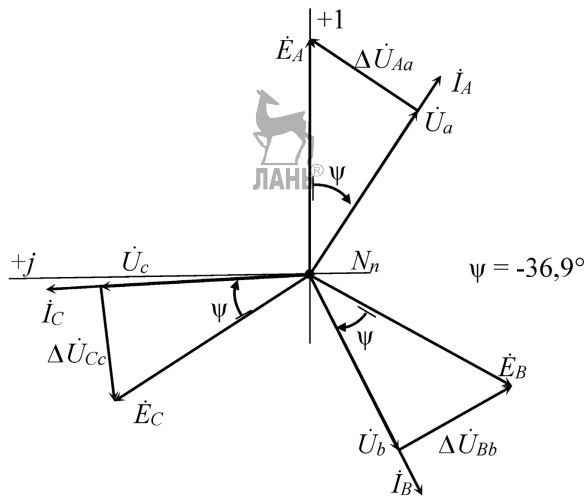


Рис. 5.9. Векторная диаграмма к задаче 4

Падение напряжения в линейных проводах можно определить двояким образом:

- из векторной диаграммы (см. на рис. $\Delta \dot{U}_{Aa}, \Delta \dot{U}_{Bb}$ и $\Delta \dot{U}_{Cc}$);
- аналитическим расчётом по формуле закона Ома:

$$\Delta \dot{U}_{Aa} = \dot{I}_A \cdot jX_L;$$

$$\Delta \dot{U}_{Bb} = \dot{I}_B \cdot jX_L;$$

$$\Delta \dot{U}_{Cc} = \dot{I}_C \cdot jX_L.$$

5.3. Задачи для самостоятельного расчета трехфазных цепей с симметричной нагрузкой с ответами

Задача 1

К выводам симметричного трёхфазного генератора подключены три одинаковые нагрузки, соединённые звездой (рис. 5.10). Определить комплексы действующих значений линейных токов, если $\dot{E}_A = 400e^{j0^\circ}$; $Z_\Phi = 24 + j32 \text{ Ом}$.

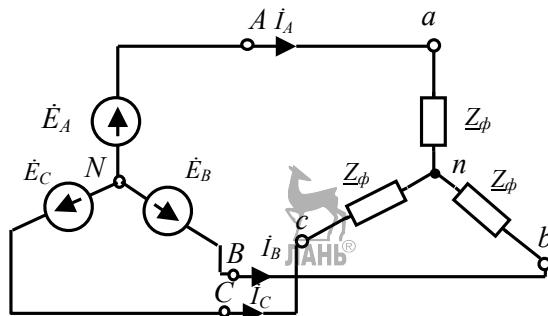


Рис. 5.10. Схема к задаче 1

Ответ: $\dot{I}_A = 10 \angle -53,1^\circ \text{ A}$; $\dot{I}_B = 10 \angle -173,1^\circ \text{ A}$; $\dot{I}_C = 10 \angle 66,9^\circ \text{ A}$.

Задача 2

К трёхпроводной линии (рис. 5.11) подключена симметричная нагрузка, соединённая звездой. Определить линейное напряжение источника, если показание амперметра электромагнитной системы, установленного в фазе B, равно 12,2 A, а сопротивление каждой фазы нагрузки $Z_\Phi = 10 + j24 \text{ Ом}$.

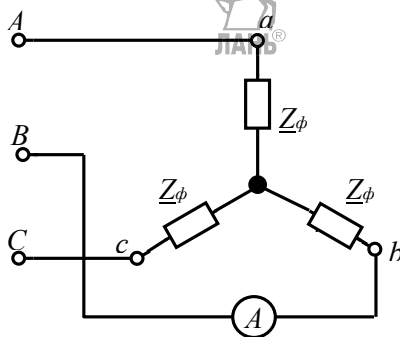


Рис. 5.11. Схема к задаче 2

Ответ: $U_{\text{л}} = 550 \text{ В}$.

Задача 3

Симметричный трёхфазный генератор питает трёхфазную нагрузку, соединённую звездой (рис. 5.12). Определить комплексы действующих значений линейных токов и напряжений на нагрузке, если $\dot{E}_A = 250e^{j0^\circ} \text{ В}$, $R = 6 \text{ Ом}$, $x_L = 4 \text{ Ом}$, $x_C = 12 \text{ Ом}$.

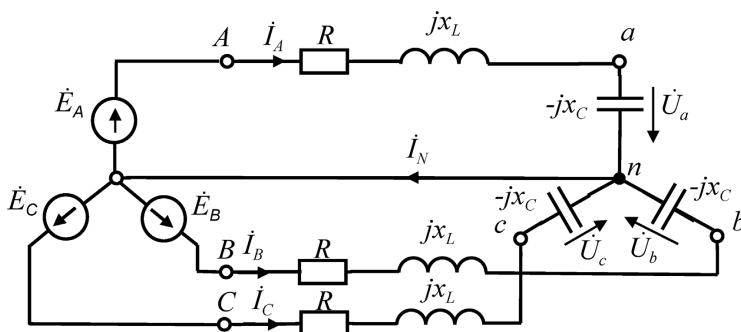


Рис. 5.12. Схема к задаче 3

Ответ: $\dot{I}_A = 25 \angle 53,1^\circ \text{ A}$; $\dot{I}_B = 25 \angle -66,9^\circ \text{ A}$; $\dot{I}_C = 25 \angle 173,1^\circ \text{ A}$;
 $\dot{U}_A = 300 \angle -36,9^\circ \text{ В}$; $\dot{U}_B = 300 \angle -156,9^\circ \text{ В}$; $\dot{U}_C = 300 \angle 83,1^\circ \text{ В}$.

Задача 4

На рис. 5.13 представлена симметричная трёхфазная система. Найти фазные и линейные токи, если линейное напряжение источника $\dot{U}_{AB} = 120 e^{j30^\circ} \text{ В}$, сопротивление нагрузки, соединённой треугольником, $\underline{Z}_H = 100 - j100 \text{ Ом}$.

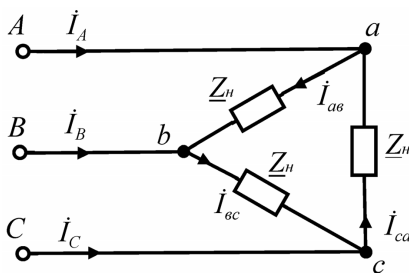


Рис. 5.13. Схема к задаче 4

Ответ: $\dot{I}_{av} = 0,85 \angle 75^\circ \text{ A}$; $\dot{I}_{bc} = 0,85 \angle -45^\circ \text{ A}$; $\dot{I}_{ca} = 0,85 \angle 195^\circ \text{ A}$;
 $\dot{I}_A = 1,47 \angle 45^\circ \text{ A}$; $\dot{I}_B = 1,47 \angle -75^\circ \text{ A}$; $\dot{I}_C = 1,47 \angle 165^\circ \text{ A}$.

Задача 5

Симметричная нагрузка, соединённая треугольником, подключена к трёхпроводной линии (рис. 5.14). Линейное напряжение в линии $\dot{U}_{AB} = 380 e^{j30^\circ} \text{ В}$, сопротивления элементов схемы $R = 15 \text{ Ом}$, $x_L = 5 \text{ Ом}$. Определить комплексы действующих значений линейных и фазных токов.

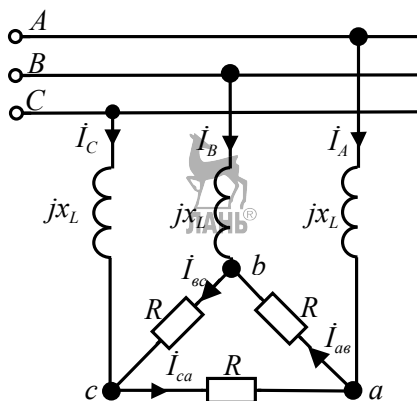


Рис. 5.14. Схема к задаче 5

Ответ: $\dot{I}_A = 31,11 \angle -45^\circ$ A; $\dot{I}_B = 31,11 \angle -165^\circ$ A; $\dot{I}_C = 31,11 \angle 75^\circ$ A;
 $\dot{I}_{av} = 17,96 \angle -15^\circ$ A; $\dot{I}_{bc} = 17,96 \angle -135^\circ$ A; $\dot{I}_{ca} = 17,96 \angle 105^\circ$ A.

Задача 6

К симметричной трёхфазной цепи с линейным напряжением $U_{\text{л}} = 650$ В подключены два трёхфазных приёмника, соединённых звездой и треугольником (рис. 5.15). Определить показания амперметров, установленных в схеме, если сопротивления фаз приёмников соответственно равны $R = 12,5$ Ом, $x_C = 90$ Ом.

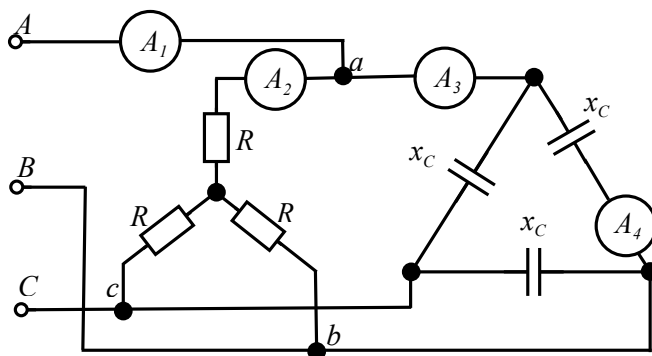


Рис. 5.15. Схема к задаче 6

Ответ: $I_{A1} = 32,5$ A; $I_{A2} = 30$ A; $I_{A3} = 12,5$ A; $I_{A4} = 7,2$ A.

5.4. Примеры расчета трехфазных цепей с несимметричной нагрузкой

Задача 1

К симметричному трёхфазному генератору, соединённому звездой с фазной ЭДС $E_{\Phi} = 220 \text{ В}$, присоединена несимметричная нагрузка, также соединённая звездой (рис. 5.16а). Определить комплексы действующих значений токов в фазах нагрузки, если $R = 25 \text{ Ом}$, $X_L = 30 \text{ Ом}$, $X_C = 10 \text{ Ом}$. Построить векторную диаграмму токов и напряжений.

Решение.

1. Комплексы действующих значений фазных ЭДС симметричного генератора. Примем $\dot{E}_A = \dot{E}_{\Phi} e^{j0^\circ} = 220 \angle 0^\circ \text{ В}$, тогда

$$\dot{E}_B = a^2 \cdot \dot{E}_A = e^{-j120^\circ} \cdot 220 \angle 0^\circ = 220 \angle -120^\circ \text{ В},$$

$$\dot{E}_C = a \cdot \dot{E}_A = e^{j120^\circ} \cdot 220 \angle 0^\circ = 220 \angle 120^\circ \text{ В}.$$

2. Напряжение смещения нейтрали между нейтральными точками nN находим по формуле

$$\begin{aligned} \dot{U}_{nN} &= \frac{\frac{\dot{E}_A}{R} + \frac{\dot{E}_B}{jX_L} + \frac{\dot{E}_C}{-jX_C}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{jX_L} + \frac{1}{-jX_C}} = \frac{\frac{220 \angle 0^\circ}{25} + \frac{220 \angle -120^\circ}{j30} + \frac{220 \angle 120^\circ}{-j10}}{\frac{1}{25} + \frac{1}{j30} + \frac{1}{-j10}} = \\ &= \frac{18,15 \angle -156,2^\circ}{0,078 \angle 59^\circ} = 232,69 \angle 144,8^\circ \text{ В}. \end{aligned}$$

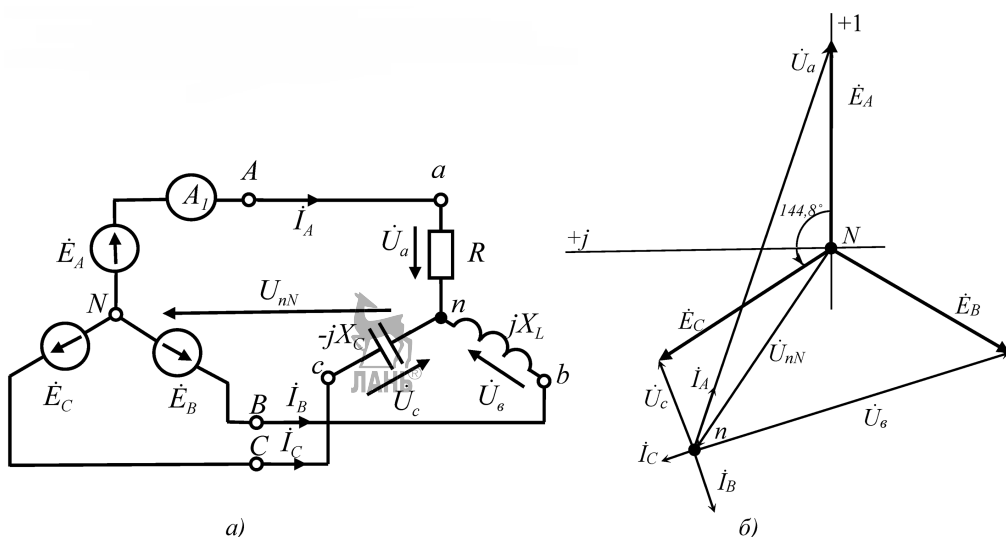


Рис. 5.16. Схема к задаче 1:
а – схема цепи; б – векторная диаграмма.

3. Напряжение на фазах нагрузки найдём по второму закону Кирхгофа:

$$\dot{U}_a = \dot{E}_A - \dot{U}_{nN} = 220 \angle 0^\circ - 232,69 \angle 144,8^\circ = 431,52 \angle -18,1^\circ \text{ В},$$

$$\dot{U}_b = \dot{E}_B - \dot{U}_{nN} = 220 \angle -120^\circ - 232,69 \angle 144,8^\circ = 334,4 \angle -76,1^\circ \text{ В},$$

$$\dot{U}_c = \dot{E}_C - \dot{U}_{nN} = 220 \angle 120^\circ - 232,69 \angle 144,8^\circ = 97,99 \angle 35,1^\circ \text{ В}.$$

4. Комплексные действующих значений токов в фазах найдём по закону Ома:

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_a}{R} = \frac{431,52 \angle -18,1^\circ}{25} = 17,26 \angle -18,1^\circ \text{ А},$$

$$\dot{I}_B = \frac{\dot{U}_b}{jX_L} = \frac{334,4 \angle -76,1^\circ}{j30} = 11,15 \angle -166,1^\circ \text{ А},$$

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{U}_c}{-jX_C} = \frac{97,99 \angle 35,1^\circ}{-j10} = 9,8 \angle 125,1^\circ \text{ А}.$$

Проверка по I закону Кирхгофа:

$$\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 17,26 \angle -18,1^\circ + 11,15 \angle -166,1^\circ + 9,8 \angle 125,1^\circ \approx 0.$$

5. Для построения векторной диаграммы напряжений и токов (рис. 5.16б) в выбранном масштабе на комплексной плоскости строим векторы фазных ЭДС $\dot{E}_A, \dot{E}_B$ и $\dot{E}_C$. Из точки N откладываем вектор напряжения $\dot{U}_{nN}$, получим нейтральную точку n нагрузки. Соединив точки A, B и C с точкой n , получим векторы фазных напряжений $\dot{U}_a, \dot{U}_b$ и $\dot{U}_c$. Векторы фазных (линейных) токов строим из точки n в зависимости от характера нагрузки в фазах или по известному значению аргумента при токе.

Задача 2

К выводам симметричного трёхфазного генератора с фазной ЭДС $E_\phi = 240 \text{ В}$ подключена несимметричная нагрузка, соединённая звездой с нейтральным (нулевым) проводом (рис. 5.17). Сопротивления фаз нагрузки $R_a = 6 \text{ Ом}, R_b = 12 \text{ Ом}, R_c = 24 \text{ Ом}$. Сопротивление каждого провода линии $R = 3 \text{ Ом}, X_L = 4 \text{ Ом}$ и сопротивление нейтрального провода $R_0 = 8 \text{ Ом}$. Определить показания приборов электромагнитной системы, установленных в схеме.

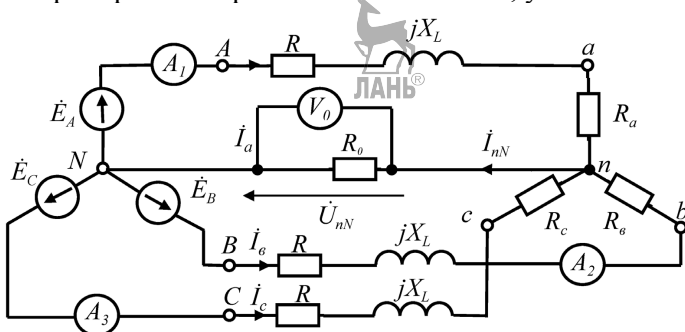


Рис. 5.17. Схема к задаче 2

Решение.

1. Комплексы действующих значений фазных ЭДС генератора. Пусть

$$\begin{aligned}\dot{E}_A &= E_\Phi e^{j0^\circ} = 240 \angle 0^\circ \text{ В, тогда} \\ \dot{E}_B &= a^2 \cdot \dot{E}_A = e^{-j120^\circ} \cdot 240 \angle 0^\circ = 240 \angle -120^\circ \text{ В,} \\ \dot{E}_C &= a \cdot \dot{E}_A = e^{j120^\circ} \cdot 240 \angle 0^\circ = 240 \angle 120^\circ \text{ В.}\end{aligned}$$

2. Комплексные сопротивления фаз нагрузки и линии:

$$\begin{aligned}\underline{Z}_A &= R + R_a + jX_L = 9 + j4 \text{ Ом.} \\ \underline{Z}_B &= R + R_g + jX_L = 15 + j4 \text{ Ом.} \\ \underline{Z}_C &= R + R_c + jX_L = 27 + j4 \text{ Ом.}\end{aligned}$$

3. Комплекс действующего значения напряжения смещения нейтрали (U_{nN} – показание вольтметра V_0):

$$\begin{aligned}\dot{U}_{nN} &= \frac{\frac{\dot{E}_A}{\underline{Z}_A} + \frac{\dot{E}_B}{\underline{Z}_B} + \frac{\dot{E}_C}{\underline{Z}_C}}{\frac{1}{\underline{Z}_A} + \frac{1}{\underline{Z}_B} + \frac{1}{\underline{Z}_C} + \frac{1}{R_0}} = \frac{\frac{240 \angle 0^\circ}{9 + j4} + \frac{240 \angle -120^\circ}{15 + j4} + \frac{240 \angle 120^\circ}{27 + j4}}{\frac{1}{9 + j4} + \frac{1}{15 + j4} + \frac{1}{27 + j4} + \frac{1}{8}} = \\ &= \frac{15,04 \angle -57,4^\circ}{0,323 \angle -11,3^\circ} = 46,56 \angle -46,1^\circ \text{ В.}\end{aligned}$$

4. Комплексы действующих значений линейных (фазных) токов:

$$\begin{aligned}\dot{I}_A &= \frac{\dot{E}_A - \dot{U}_{nN}}{\underline{Z}_A} = \frac{240 \angle 0^\circ - 46,56 \angle -46,1^\circ}{9 + j4} = 21,36 \angle -14,8^\circ \text{ А,} \\ \dot{I}_B &= \frac{\dot{E}_B - \dot{U}_{nN}}{\underline{Z}_B} = \frac{240 \angle -120^\circ - 46,56 \angle -46,1^\circ}{15 + j4} = 14,91 \angle -146,1^\circ \text{ А,} \\ \dot{I}_C &= \frac{\dot{E}_C - \dot{U}_{nN}}{\underline{Z}_C} = \frac{240 \angle 120^\circ - 46,56 \angle -46,1^\circ}{27 + j4} = 10,46 \angle 113,8^\circ \text{ А.}\end{aligned}$$

5. Комплекс действующего значения тока в нейтральном проводе:

$$\dot{I}_{nN} = \frac{\dot{U}_{nN}}{R_0} = \frac{46,56 \angle -46,1^\circ}{8} = 5,82 \angle -46,1^\circ \text{ А.}$$

Проверка решения по I закону Кирхгофа:

$$\begin{aligned}\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C - \dot{I}_N &= 21,36 \angle -14,8^\circ + 14,91 \angle -146,1^\circ + \\ &+ 10,46 \angle 113,8^\circ - 5,82 \angle -46,1^\circ \approx 0.\end{aligned}$$

6. Измерительные приборы показывают действующие значения величин:

$$I_{A1} = |\dot{I}_A| = 21,36 \text{ A}; I_{A2} = |\dot{I}_B| = 14,91 \text{ A}; I_{A3} = |\dot{I}_C| = 10,46 \text{ A},$$

$$I_{A0} = |\dot{I}_N| = 5,82 \text{ A}, U_V = |\dot{U}_{nN}| = 46,56 \text{ В}.$$

Задача 3

В четырёхпроводную линию трёхфазной симметричной сети с фазным напряжением $U_\Phi = 120 \text{ В}$ включена несимметричная трёхфазная нагрузка, соединённая звездой (рис. 5.18а). Определить показания амперметров на каждой фазе нагрузки и нейтральном проводе, если $\underline{Z}_A = 16 + j12 \text{ Ом}$, $\underline{Z}_B = 8 + j6 \text{ Ом}$, $\underline{Z}_C = 24 - j18 \text{ Ом}$. Построить диаграмму напряжений и векторную диаграмму токов.

Решение.

1. Комплексы действующих значений фазных напряжений трёхфазной цепи. Примем $\dot{U}_A = U_\Phi e^{j0^\circ} = 120 \angle 0^\circ \text{ В}$, тогда

$$\dot{U}_B = a^2 \cdot \dot{U}_A = e^{-j120^\circ} \cdot 120 \angle 0^\circ = 120 \angle -120^\circ \text{ В},$$

$$\dot{U}_C = a \cdot \dot{U}_A = e^{j120^\circ} \cdot 120 \angle 0^\circ = 120 \angle 120^\circ \text{ В}.$$

2. Так как по условиям задачи сопротивления линейных и нейтрального проводов равны нулю, то напряжение каждой фазы сети приложено непосредственно к соответствующей фазе нагрузки.

Комплексы действующих значений токов в фазах нагрузки рассчитываем по закону Ома:

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_A}{\underline{Z}_A} = \frac{120 \angle 0^\circ}{16 + j12} = 6 \angle -36,9^\circ \text{ А},$$

$$\dot{I}_B = \frac{\dot{U}_B}{\underline{Z}_B} = \frac{120 \angle -120^\circ}{8 + j6} = 12 \angle -156,9^\circ \text{ А},$$

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{U}_C}{\underline{Z}_C} = \frac{120 \angle 120^\circ}{24 - j18} = 4 \angle 156,9^\circ \text{ А}.$$

3. Комплекс действующего значения тока в нейтральном проводе определим по I закону Кирхгофа:

$$\dot{I}_N = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 6 \angle -36,9^\circ + 12 \angle -156,9^\circ + 4 \angle 156,9^\circ \approx 12 \angle -145,8^\circ \text{ А}.$$

4. Амперметры показывают действующие значения токов:

$$I_{A1} = |\dot{I}_A| = 6 \text{ А}; I_{A2} = |\dot{I}_B| = 12 \text{ А}; I_{A3} = |\dot{I}_C| = 4 \text{ А}, I_{A0} = |\dot{I}_N| = 12 \text{ А}.$$

5. Выбрав масштабы напряжений и токов, строим векторную диаграмму (рис. 5.18б). Вектор тока в нейтральном проводе получим как геометрическую сумму векторов фазных токов.

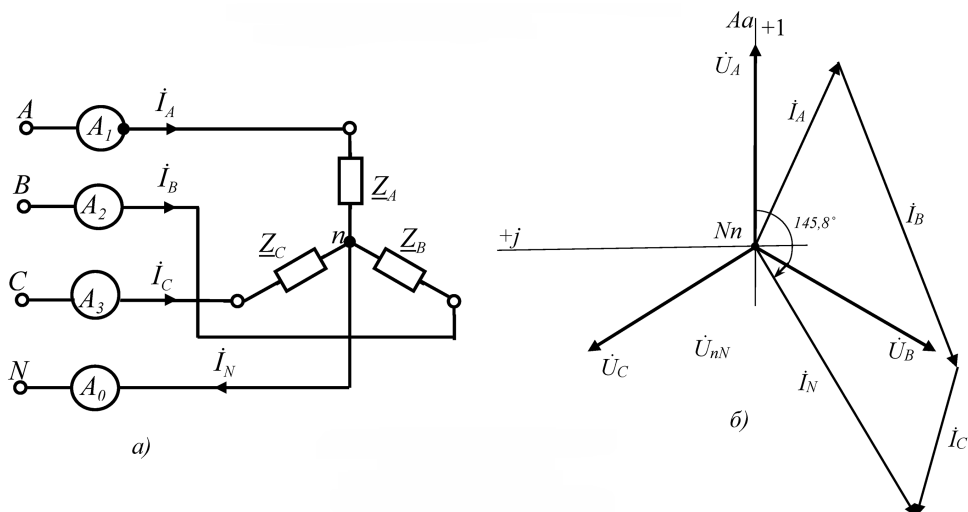


Рис. 5.18. Схема к задаче 3:
а – схема цепи; б – векторная диаграмма.

Задача 4

К выводам симметричного трёхфазного генератора с фазным напряжением $U_\Phi = 220 \text{ В}$ подключена несимметричная нагрузка, соединённая треугольником (рис. 5.19). Определить линейные, фазные токи и показания амперметров, если сопротивления нагрузки равны $R = X_L = X_C = 25 \text{ Ом}$.

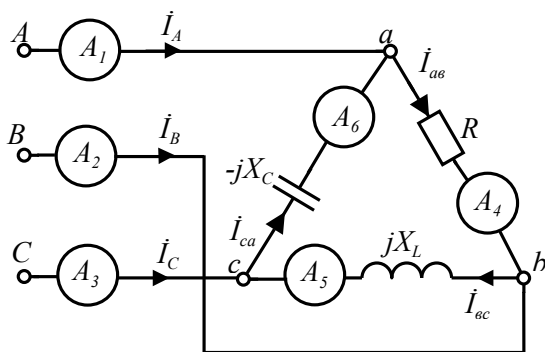


Рис. 5.19. Схема к задаче 4

Решение.

1. Пусть комплексы действующих значений линейных напряжений

$$\dot{U}_{AB} = \sqrt{3} \cdot U_\Phi e^{j0^\circ} = \sqrt{3} \cdot 220 e^{j0^\circ} = 380 \angle 0^\circ \text{ В},$$

тогда

$$\dot{U}_{BC} = a^2 \cdot \dot{U}_{AB} = e^{-j120^\circ} \cdot 380 \angle 0^\circ = 380 \angle -120^\circ \text{ В},$$

$$\dot{U}_{CA} = a \cdot \dot{U}_{AB} = e^{j120^\circ} \cdot 380 \angle 0^\circ = 380 \angle 120^\circ \text{ В}.$$

2. Комплексы действующих значений фазных токов:

$$\dot{I}_{a6} = \frac{\dot{U}_{AB}}{R} = \frac{380 \angle 0^\circ}{25} = 15,2 \angle 0^\circ \text{ A},$$

$$\dot{I}_{6c} = \frac{\dot{U}_{BC}}{jX_L} = \frac{380 \angle -120^\circ}{j25} = 15,2 \angle 150^\circ \text{ A},$$

$$\dot{I}_{ca} = \frac{\dot{U}_{CA}}{-jX_C} = \frac{380 \angle 120^\circ}{-j25} = 15,2 \angle -150^\circ \text{ A}.$$

3. Комплексы действующих значений линейных токов вычислим по I закону Кирхгофа как разность фазных токов:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{a6} - \dot{I}_{ca} = 15,2 \angle 0^\circ - 15,2 \angle -150^\circ = 29,4 \angle 15^\circ \text{ A},$$

$$\dot{I}_B = \dot{I}_{6c} - \dot{I}_{a6} = 15,2 \angle 150^\circ - 15,2 \angle 0^\circ = 29,4 \angle 165^\circ \text{ A},$$

$$\dot{I}_C = \dot{I}_{ca} - \dot{I}_{6c} = 15,2 \angle -150^\circ - 15,2 \angle 150^\circ = 15,2 \angle -90^\circ \text{ A}.$$

4. Амперметры показывают модули действующих значений фазных и линейных токов

$$I_{A1} = I_{A2} = 29,4 \text{ A}; \quad I_{A3} - I_{A6} = 15,2 \text{ A}.$$

5.5. Задачи для самостоятельного расчета трехфазных цепей с несимметричной нагрузкой с ответами

Задача 1

К трёхфазному симметричному генератору с фазной ЭДС $\dot{E}_A = 200e^{j0^\circ}$. В подключена несимметричная нагрузка, соединённая звездой (рис. 5.20а). Определить комплексы действующих токов в фазах и построить диаграмму напряжений и векторную диаграмму токов, если $R_a = 45 \text{ Ом}$, $R_b = 25 \text{ Ом}$, $R_c = 225 \text{ Ом}$.

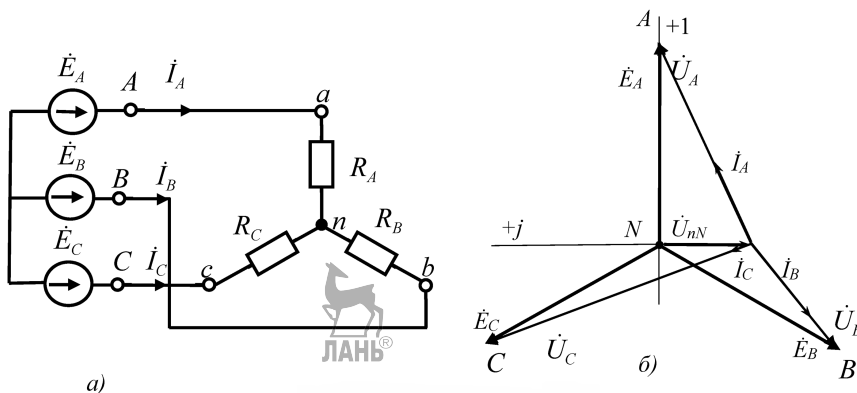


Рис. 5.20. Схема к задаче 1:
а – схема цепи; б – векторная диаграмма.

Ответ: $\dot{I}_A = 4,89 \angle 24,8^\circ \text{ A}$; $\dot{I}_B = 5,14 \angle -141,1^\circ \text{ A}$; $\dot{I}_C = 1,26 \angle 110,6^\circ \text{ A}$.
Совмещённая диаграмма напряжений и токов приведена на рис. 5.20б.

Задача 2

К четырёхпроводной трёхфазной линии (рис. 5.21а) с фазным напряжением $\dot{U}_A = 130e^{j0^\circ} \text{ В}$ присоединена несимметричная нагрузка. Определить комплекс действующих значений токов в фазах и нейтральном проводе, если комплексные сопротивления нагрузки

$$Z_A = 1,2 + j1,6 \text{ Ом}, Z_B = 0,8 - j0,6 \text{ Ом}, Z_C = 1,2 - j0,5 \text{ Ом}.$$

Построить векторную диаграмму токов и напряжений.

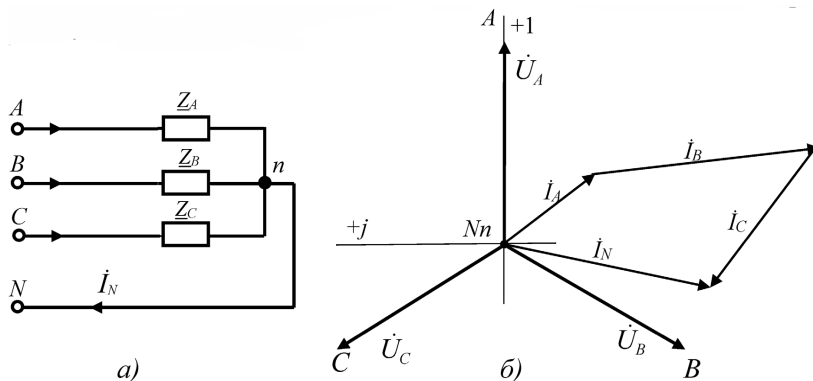


Рис. 5.21. Схема к задаче 2:
а – схема цепи; б – векторная диаграмма.

Ответ:

$$\dot{I}_A = 65 \angle -53,1^\circ \text{ A}; \dot{I}_B = 130 \angle -83,1^\circ \text{ A}; \dot{I}_C = 100 \angle 142,6^\circ \text{ A}, \dot{I}_N = 123 \angle -101,7^\circ \text{ A}.$$

Совмещённая диаграмма напряжений и токов приведена на рис. 5.21б.

Задача 3

В трёхфазной цепи (рис. 5.22) известны токи амперметров: $I_{A1} = 8 \text{ A}$; $I_{A2} = 3 \text{ A}$, $I_{A3} = 4 \text{ A}$. Определить показание амперметра, установленного в нейтральном проводе.

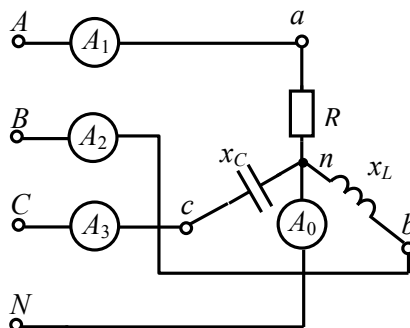


Рис. 5.22. Схема к задаче 3

Ответ: $I_N = 2 \text{ A}$.

Задача 4

Для трёхфазной цепи (рис. 5.23) определить показания амперметра, установленного в нейтральном проводе, если линейное напряжение $U_{\text{л}} = 380 \text{ В}$, сопротивления фаз $R = 115 \text{ Ом}$, $X_L = 52 \text{ Ом}$, $X_C = 24 \text{ Ом}$.

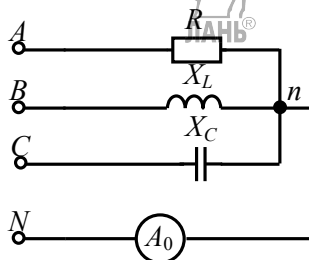


Рис. 5.23. Схема к задаче 4

Ответ: $I_N = 10 \text{ А}$.

Задача 5

К выводам симметричного трёхфазного генератора с фазной ЭДС $E_{\phi} = 200 \text{ В}$ присоединена несимметричная нагрузка, соединённая в звезду (рис. 5.24). Определить показания вольтметра электромагнитной системы, если сопротивления фаз соответственно равны:

$$\underline{Z}_A = 40 + j20 \text{ Ом}, \underline{Z}_B = 25 + j50 \text{ Ом}, \underline{Z}_C = 200 - j120 \text{ Ом}.$$

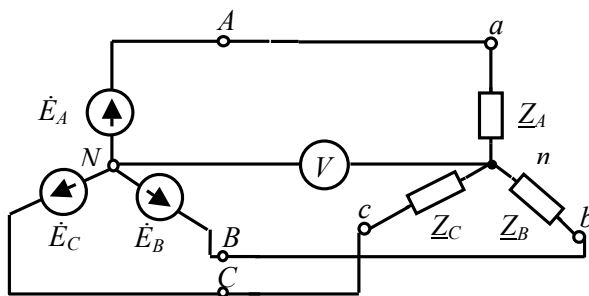


Рис. 5.24. Схема к задаче 5

Ответ: $U_V = 35,5 \text{ В}$.

Задача 6

Для трёхфазной цепи (рис. 5.25) определить комплексы действующих значений линейных и фазных токов, если напряжение фазы A симметричного источника $\dot{U}_A = 110e^{j0^\circ} \text{ В}$, сопротивления фаз несимметричной нагрузки: $R = 60 \text{ Ом}$, $X_L = 40 \text{ Ом}$, $X_C = 120 \text{ Ом}$.

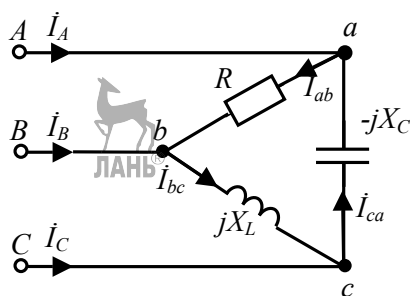


Рис. 5.25. Схема к задаче 6

Ответ: $\dot{I}_A = 4,62 \angle 39,9^\circ \text{ A}$; $\dot{I}_B = 7,68 \angle 168,1^\circ \text{ A}$; $\dot{I}_C = 4,2 \angle -19,1^\circ \text{ A}$,
 $\dot{I}_{ab} = 3,18 \angle 30^\circ \text{ A}$; $\dot{I}_{bc} = 4,76 \angle 180^\circ \text{ A}$; $\dot{I}_{ca} = 1,59 \angle -120^\circ \text{ A}$.

Задача 7

Несимметричная нагрузка, соединённая треугольником, подключена к трёхпроводной линии (рис. 5.26) с фазным напряжением $U_\phi = 220 \text{ В}$. Определить показания амперметров, установленных в линейных проводах, если сопротивления элементов схемы $R = 200 \text{ Ом}$, $X_L = 400 \text{ Ом}$, $X_C = 100 \text{ Ом}$.

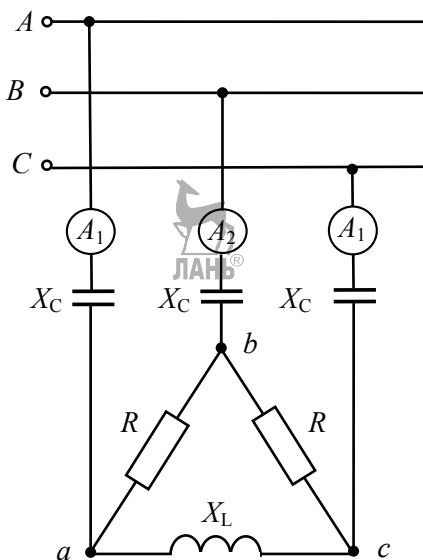


Рис. 5.26. Схема к задаче 7

Ответ: $I_{A1} = 1,25 \text{ A}$; $I_{A2} = 1,83 \text{ A}$, $I_{A3} = 2,72 \text{ A}$.

Задача 8

К зажимам четырёхпроводной сети с фазным напряжением $\dot{U}_A = 150 e^{j0^\circ} \text{ В}$ подключена несимметричная нагрузка (рис. 5.27). Определить комплекс действующего значения тока в нейтральном проводе, если сопротивления элементов цепи соответственно равны:

$$R = 10 \text{ Ом}, X_L = 20 \text{ Ом}, X_C = 15 \text{ Ом}, R_0 = 10 \text{ Ом}, X_0 = 4 \text{ Ом}.$$

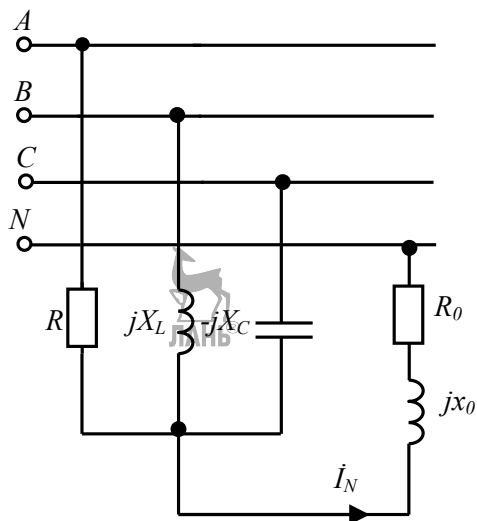


Рис. 5.27. Схема к задаче 8

Ответ: $\dot{I}_N = 0,96 \angle -117,1^\circ \text{ A}$.

5.6. Задания 12–14 для самостоятельной работы

5.6.1. Общие указания для выполнения заданий 12–14

Каждый студент выполняет свой вариант заданий. Номер варианта задаётся преподавателем в виде двух чисел: первое число определяет вариант задания напряжения (табл. 5.1), а второе число – вариант задания численных значений сопротивлений (табл. 5.2). Например, для варианта 2–10 следует взять 2-й вариант задания напряжений (т. е. 220 В) из табл. 5.1 и 10-й вариант задания сопротивлений – из табл. 5.2.

К заданиям 12 и 13 (для схем четырёхпроводной и трёхпроводной звезды) задаётся фазное напряжение генератора, а к заданию 14 (схема треугольника) – линейное напряжение генератора. Сопротивлением линейных и нейтрального проводов во всех заданиях пренебрегаем.

Варианты задания напряжений

Таблица 5.1

Фазное напряжение генератора (к заданиям 12, 13)	Линейное напряжение генератора (к заданию 14)	Вариант задания напряжения			
		1	2	3	4
U_Φ	U_L	127	220	380	660

№ Ва- рианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
R_1	1	2	3	4	2	2	1	2	3	4	1	1	4	3	2	2	1	2	4	3	2	1	1	2	3	3	2	1	3	1	3
R_2	2	3	4	2	1	4	2	1	2	3	2	4	3	2	1	1	1	4	3	2	1	2	4	3	2	2	1	3	1	3	2
R_3	3	4	2	1	2	3	4	2	1	2	2	1	2	3	4	2	4	3	2	1	2	4	3	2	2	1	2	4	3	2	1
X_L	4	2	1	2	3	2	3	4	2	1	4	1	1	3	3	1	1	2	3	4	2	1	2	3	4	2	4	3	2	1	2
X_C	2	1	2	3	4	1	2	3	4	2	3	4	2	1	2	4	2	1	2	3	4	1	1	2	3	2	1	2	3	4	1

5.6.2. Задание 12

Включением выключателя «В» на рис. 5.28 образуется четырёхпроводная электрическая цепь с соединением фаз источника и приёмника по схеме звезды с нейтральным проводом. К зажимам A , B и C со стороны источника электроэнергии (который на рисунке не показан) подведено симметричное трёхфазное напряжение. Значение U_ϕ линии приведено в табл. 5.1, а численные значения сопротивлений нагрузки – в табл. 5.2.

Используя эти данные, следует:

- 1) написать выражения для мгновенных значений фазных напряжений на линии (в точках A , B и C) и на нагрузке;
- 2) рассчитать:
 - действующие значения токов в линейных проводах и нейтральном (нулевом) проводе, показания амперметров A_1 , A_2 , A_3 , A_0 ;
 - активную, реактивную и полную мощности каждой фазы нагрузки и всей трёхфазной системы;
- 3) построить векторную диаграмму фазных и линейных напряжений и токов.

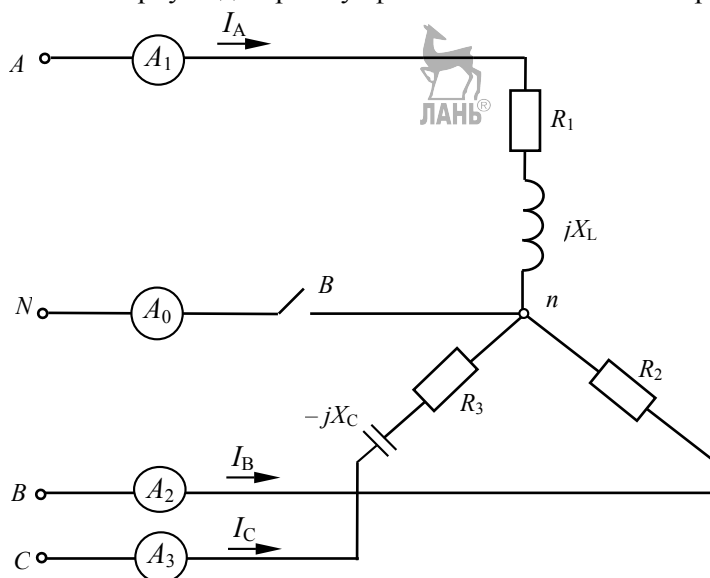


Рис. 5.28. Схема цепи к заданиям 12, 13

5.6.3. Задание 13

К зажимам A, B, C (рис. 5.28) со стороны источника электроэнергии (который на рисунке не показан) подведена симметричная трёхфазная система напряжений. Выключатель «В» отключен, что делает цепь (рис. 5.28) трёхпроводной, т. е. без нейтрального провода, с подключённой к точкам A, B, C неравномерной нагрузкой, соединённой по схеме звезды.

Значение U_ϕ линии приведено в табл. 5.1, а численные значения сопротивлений нагрузки – в табл. 5.2.

Используя эти данные, следует:

1) написать выражения для мгновенных значений фазных напряжений источника;

2) вычислить:

– действующие значения напряжения смещения U_{nN} и фазных напряжений на нагрузке;

– токов линии (нагрузки), т.е. показания амперметров A_1, A_2, A_3 ;

– активную, реактивную и полную мощности каждой фазы нагрузки и всей трёхфазной системы;

3) построить векторную диаграмму, построив векторы фазных и линейных напряжений в точках A, B и C , напряжение смещения и токов нагрузки (линейных проводов).

5.6.4. Задание 14

К зажимам A, B, C (рис. 5.29) со стороны источника электроэнергии (который на рисунке не показан) подведена симметричная трёхфазная система напряжений.

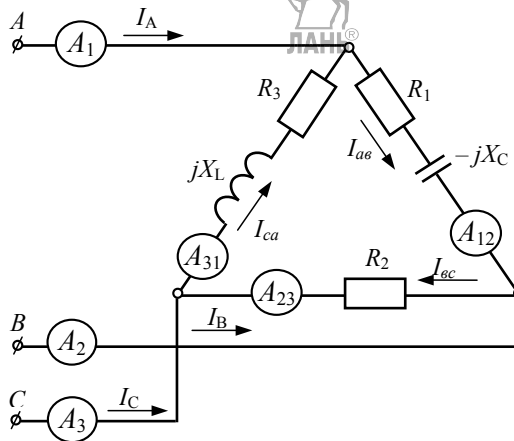


Рис. 5.29. Схема цепи к заданию 14

Значение линейного напряжения U_Δ приведено в табл. 5.1, а численные значения сопротивлений нагрузки, соединённой по схеме треугольника, – в табл. 5.2.

Используя эти данные, следует:

- 1) написать выражения для мгновенных значений линейных напряжений в точках A , B и C ;
- 2) вычислить:
 - действующие значения фазных токов нагрузки (I_{av}, I_{bc}, I_{ca}) и токов линейных проводов (I_A, I_B, I_C);
 - активные и реактивные мощности каждой фазы нагрузки, а также активную, реактивную и полную мощность всей трёхфазной нагрузки;
- 3) построить векторную диаграмму напряжений, фазных и линейных токов нагрузки.

5.7. Примеры выполнения заданий 12–14

5.7.1. Пример выполнения задания 12

Для схемы четырёхпроводной звезды (рис. 5.30) задано:

$$U_{\Phi} = 50 \text{ В}, R_1 = 1 \text{ Ом}, R_2 = 5 \text{ Ом}, R_3 = 4 \text{ Ом}, X_L = 3 \text{ Ом}, X_C = 2 \text{ Ом}.$$

Необходимо выполнить все 3 пункта задания 12.

Задание 12 может быть выполнено двумя способами:

- с помощью метода комплексных величин (т. е. символическим методом);
- графоаналитическим методом.

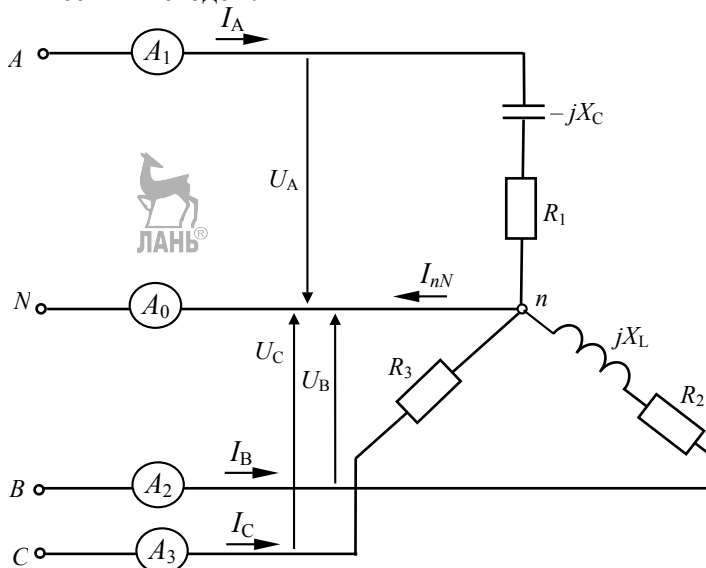


Рис. 5.30. Схема к примеру задания 12

➤ Выполнение задания 12 методом комплексных величин.

Для написания выражения для мгновенных значений фазных напряжений необходимо произвольно задаться направлением любого из фазных напряжений в точках A , B , C . Будем считать, что вектор напряжения фазы A на комплексной плоскости направлен вдоль положительной полуоси вещественных

чисел (рис. 5.31). Тогда выражения для действующих значений фазных напряжений в показательной, полярной и алгебраической форме будут иметь вид:

$$\dot{U}_A = 50e^{j0^\circ} = 50\angle 0^\circ = 50^\circ \text{ В};$$

$$\dot{U}_B = 50e^{-j120^\circ} = 50\angle -120^\circ = -25 - j43,3 \text{ В};$$

$$\dot{U}_C = 50e^{-j240^\circ} = 50\angle 120^\circ = -25 + j43,3 \text{ В}.$$

Для мгновенных значений можно написать следующие выражения:

$$u_A = U_{MA} \sin \omega t = 50\sqrt{2} \sin \omega t;$$

$$u_B = U_{MB} \sin(\omega t - 120^\circ) = 50\sqrt{2} \sin(\omega t - 120^\circ);$$

$$u_C = U_{MC} \sin(\omega t + 120^\circ) = 50\sqrt{2} \sin(\omega t + 120^\circ).$$

Поскольку по условиям задачи мы пренебрегаем сопротивлением линейных проводов, а также благодаря наличию нейтрального провода (также с нулевым сопротивлением) напряжения на нагрузке (фазные и линейные) будут такими же, как и у источника. Следовательно:

действующие значения

$$U_a = U_A;$$

$$U_b = U_B;$$

$$U_c = U_C;$$

мгновенные значения

$$u_a = u_A;$$

$$u_b = u_B;$$

$$u_c = u_C.$$

Действующие значения линейных напряжений на нагрузке находим как разность векторов соответствующих фазных напряжений (рис. 5.31).

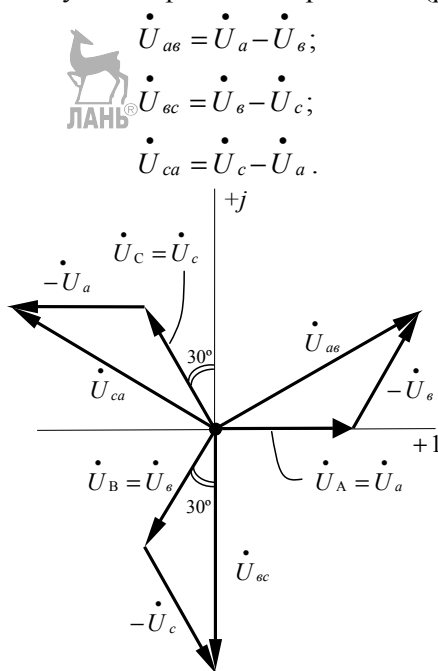


Рис. 5.31. Фазные и линейные напряжения на нагрузке на комплексной плоскости

Рассчитаем численные значения фазных токов нагрузки, которые одновременно являются линейными токами. С этой целью запишем выражения для сопротивлений фаз нагрузки в символической форме:

$$\underline{Z}_a = R_1 - jX_C = 1 - j2 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_b = R_2 + jX_L = 5 + j3 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_c = R_3 = 4 \text{ Ом};$$

Фазные токи нагрузки определяем по закону Ома:

$$\dot{I}_a = \frac{\dot{U}_a}{\underline{Z}_a} = \frac{50}{1 - j2} = \frac{50(1 + j2)}{(1 - j2)(1 + j2)} = 10 + j20 = 22,36 \angle 63^\circ \text{ А};$$

$$\dot{I}_b = \frac{\dot{U}_b}{\underline{Z}_b} = \frac{-25 - j43,3}{5 + j3} = -7,5 - j4,16 = 8,58 \angle -143,7^\circ \text{ А};$$

$$\dot{I}_c = \frac{\dot{U}_c}{\underline{Z}_c} = \frac{-25 + j43,3}{4} = -6,25 + j10,82 = 12,5 \angle 120^\circ \text{ А}.$$

Ток нейтрального провода определяем по уравнению I закона Кирхгофа:

$$\begin{aligned} \dot{I}_{nN} &= \dot{I}_a + \dot{I}_b + \dot{I}_c = (10 + j20) + (-7,5 - j4,16) + (-6,25 + j10,82) = \\ &= -3,75 + j26,66 = 26,9 \angle 97,6^\circ \text{ А}. \end{aligned}$$

На рис. 5.32 изображены вычисленные токи.

Показания приборов равны модулям соответствующих токов, т. е. показания приборов следующие:

$$A_1 \rightarrow 22,36 \text{ А};$$

$$A_2 \rightarrow 8,58 \text{ А};$$

$$A_3 \rightarrow 12,5 \text{ А};$$

$$A_0 \rightarrow 26,9 \text{ А}.$$

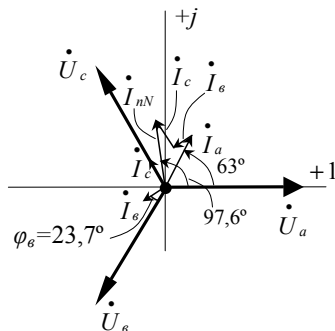


Рис. 5.32. Токи на комплексной плоскости

Полные мощности фаз нагрузки вычисляем по формулам:

$$\dot{S}_a = \dot{U}_a \cdot \dot{I}_a = 50(10 - j20) = 500 - j1000 \text{ В} \cdot \text{А},$$

т. е. $P_a = 500 \text{ Вт};$

$Q_a = 1000$ вар (является ёмкостной нагрузкой):

$$\dot{S}_e = \dot{U}_e \cdot \dot{I}_e = (-25 - j43,3)(-7,5 + j4,16) = 367,6 + j220,7 \text{ кВ} \cdot \text{А},$$

т. е. $P_e = 367,6$ Вт;

$Q_e = 220,7$ вар (является индуктивной нагрузкой):

$$\dot{S}_c = \dot{U}_c \cdot \dot{I}_c = (-25 + j43,3)(-6,25 - j10,82) = 625 \text{ В} \cdot \text{А},$$

т. е. $P_c = 625$ Вт;

$Q = 0$ вар.

Полную мощность трёхфазной нагрузки определим как алгебраическую сумму комплексов мощностей трёх фаз:

$$\dot{S} = \dot{S}_a + \dot{S}_e + \dot{S}_c = 500 - j1000 + 367,6 + j220,7 + 625 = 1492,6 - j779,3 \text{ В} \cdot \text{А}.$$

т. е. $P = 1492,6$ Вт,

$Q_a = -779,3$ вар.

Суммарная реактивная мощность трёхфазной нагрузки Q отрицательная, т. е. имеет ёмкостный характер.

Модуль полной мощности:

$$S = \sqrt{1492,6^2 + (-779,3)^2} = 1683,8 \text{ В} \cdot \text{А}.$$

➤ *Пример выполнения задания 12 графоаналитическим методом.*

Для написания выражения для мгновенных значений фазных напряжений будем полагать, что вектор напряжения фазы A ($\bar{U}_A$) на векторной диаграмме (рис. 5.33) направлен по горизонтали вправо. Вектор фазного напряжения $\bar{U}_B$ отстаёт от $\bar{U}_A$ на угол 120° , а вектор $\bar{U}_C$ отстаёт от $\bar{U}_B$ на угол 120° .

Поскольку по условиям задачи мы пренебрегаем сопротивлением линейных проводов, а также благодаря наличию нейтрального провода, также имеющего нулевое сопротивление, фазные напряжения на нагрузке будут равны фазным напряжениям источника:

действующие значения

$$U_a = U_A;$$

$$U_e = U_B;$$

$$U_c = U_C;$$

$$u_a = u_A;$$

$$u_e = u_B;$$

$$u_c = u_C.$$

Выражения для мгновенных значений фазных напряжений на нагрузке напишем исходя из того, что максимальное значение напряжения больше действующего значения в $\sqrt{2}$:

$$u_a = u_A = 50\sqrt{2} \sin \omega t;$$

$$u_e = u_B = 50\sqrt{2} \sin(\omega t - 120^\circ);$$

$$u_c = u_C = 50\sqrt{2} \sin(\omega t + 120^\circ).$$

Действующие значения линейных напряжений на нагрузке (рис. 5.33) получим как геометрическую разность соответствующих фазных напряжений.

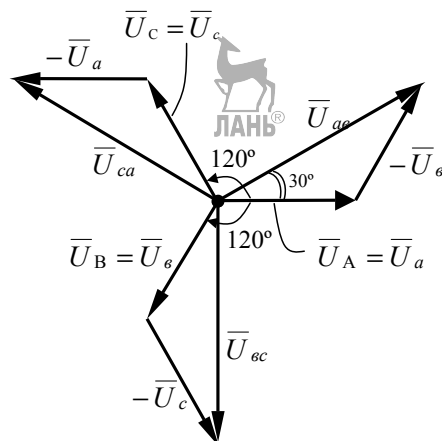


Рис. 5.33. Фазные и линейные напряжения на нагрузке

Рассчитаем численные значения фазных токов нагрузки, которые в схеме звезды одновременно являются линейными токами. С этой целью рассчитаем численные значения полных сопротивлений фаз нагрузки:

$$Z_a = \sqrt{R_1^2 + X_C^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = 2,24 \text{ Ом};$$

$$Z_e = \sqrt{R_2^2 + X_L^2} = \sqrt{5^2 + 3^2} = 5,83 \text{ Ом};$$

$$Z_c = R_3 = 4 \text{ Ом}.$$

Фазные токи нагрузки определим по закону Ома:

$$I_a = \frac{U_a}{Z_a} = \frac{50}{2,24} = 22,3 \text{ А};$$

$$I_e = \frac{U_e}{Z_e} = \frac{50}{5,83} = 8,58 \text{ А};$$

$$I_c = \frac{U_c}{Z_c} = \frac{50}{4} = 12,5 \text{ А}.$$

Напомним, что по условию задачи $U_a = U_e = U_c = U_\phi = 50 \text{ В}$.

Углы сдвига токов фаз нагрузки от соответствующих фазных напряжений нагрузки:

$$\varphi_a = (I_a; U_a) = \arcsin \frac{X_c}{Z_a} = \arcsin \frac{2}{2,24} = 63^\circ;$$

$$\varphi_e = (I_e; U_e) = \arcsin \frac{X_L}{Z_e} = \arcsin \frac{3}{5,84} = 23,7^\circ;$$

$$\varphi_c = (I_c; U_c) = 0^\circ.$$

На рис. 5.34 ток $\bar{I}_a$ опережает по фазе напряжение $\bar{U}_a$ на угол φ_a (как активно-ёмкостный ток). Ток $\bar{I}_e$ отстаёт по фазе от вектора $\bar{U}_e$ как активно-

индуктивный ток. Ток $\bar{I}_c$ совпадает по фазе с $\bar{U}_c$ на угол φ_c как чисто активный ток ($\varphi_c = 0$).

Ток нейтрального провода определяем графически согласно уравнению I закона Кирхгофа, записанного для узла n (рис. 5.30), как геометрическую сумму фазных токов нагрузки: $\bar{I}_{nN} = \bar{I}_a + \bar{I}_b + \bar{I}_c$.

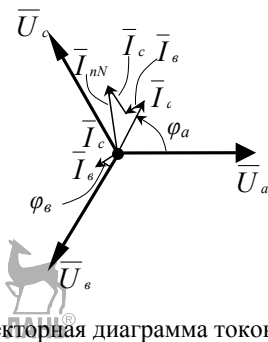


Рис. 5.34. Векторная диаграмма токов

Из рис. 5.34 находим численные значения $\bar{I}_{nN}$: зная масштаб токов (который задаётся перед построением векторной диаграммы) и умножив длину вектора I_{nN} на масштаб токов, получим $I_{nN} = 26,9$ А.

Вычисленные величины действующих значений токов и являются показаниями амперметров, измеряющих эти токи:

A_1	_____	22,3 А;
A_2	_____	8,58 А;
A_3	_____	12,5 А;
A_0	_____	26,9 А;

Мощность фаз рассчитываем по формулам:

– для фазы A

$$P_a = I_a^2 \cdot R_1 = 22,3^2 \cdot 1 = 500 \text{ Вт};$$

$$Q_a = I_a^2 \cdot (-X_c) = 22,3^2 \cdot (-2) = -1000 \text{ вар},$$

т. е. Q_a – ёмкостная мощность;

– для фазы B

$$P_b = I_b^2 \cdot R_2 = 8,58^2 \cdot 5 = 367,6 \text{ Вт};$$

$$Q_b = I_b^2 \cdot X_L = 8,58^2 \cdot 3 = 220,7 \text{ вар},$$

т. е. Q_b – индуктивная мощность;

– для фазы C

$$P_c = I_c^2 \cdot R_3 = 12,5^2 \cdot 4 = 625 \text{ Вт};$$

$$Q_c = 0.$$

Мощность трёхфазной нагрузки:

– активная

$$P = \sum P_i = 500 + 367,6 + 625 = 1492,6 \text{ Вт};$$

- реактивная

$$Q = \sum Q_i = -1000 + 220,7 = -779,3 \text{ вар};$$

- полная

$$S = \sqrt{1492,6^2 + (-779,3)^2} = 1683,8 \text{ В} \cdot \text{А}.$$

5.7.2. Пример выполнения задания 13

Для схемы трёхпроводной звезды (рис. 5.35) задано фазное напряжение источника: $U_\Phi = 50 \text{ В}$, $R_1 = 1 \text{ Ом}$, $R_2 = 5 \text{ Ом}$, $R_3 = 4 \text{ Ом}$, $X_L = 3 \text{ Ом}$, $X_C = 2 \text{ Ом}$.

Для написания выражений для мгновенных значений фазных напряжений необходимо задаться направлением любого из фазных напряжений источника на комплексной плоскости. Будем считать, что вектор напряжения фазы A на комплексной плоскости направлен вдоль положительной полуоси оси мнимых чисел (рис. 5.35).

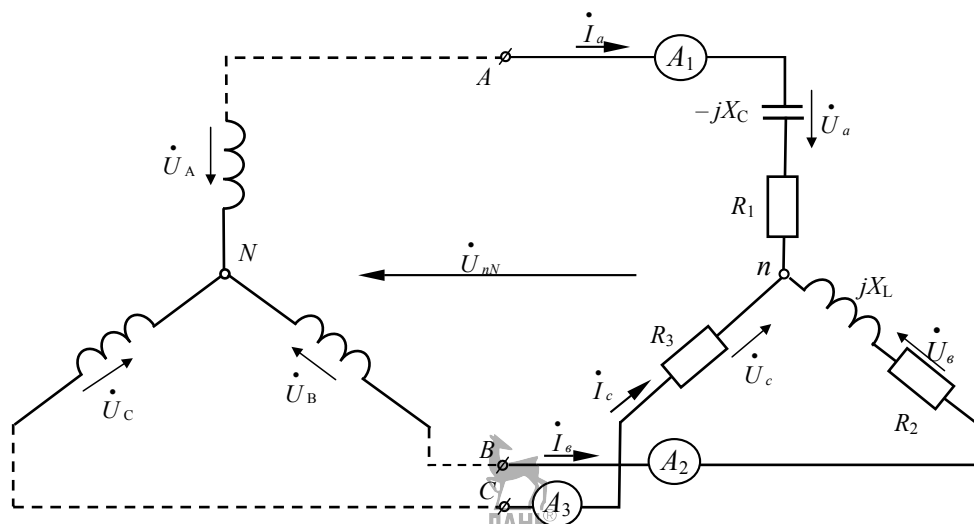


Рис. 5.35. Схема трёхпроводной звезды при соединении фаз приёмника звездой

В этом случае выражения для действующих значений фазных напряжений источника в показательной, полярной и алгебраической форме будут иметь вид:

$$\dot{U}_A = 50e^{j90^\circ} = 50\angle 90^\circ = j50 \text{ В};$$

$$\dot{U}_B = 50e^{-j30^\circ} = 50\angle -30^\circ = 43,3 - j25 \text{ В};$$

$$\dot{U}_C = 50e^{-j150^\circ} = 50\angle 150^\circ = -43,3 - j25 \text{ В}.$$

Выражения для мгновенных значений источника:

$$u_A = U_{MA} \sin(\omega t + 90^\circ) = 50\sqrt{2} \sin(\omega t + 90^\circ);$$

$$u_B = U_{MB} \sin(\omega t - 30^\circ) = 50\sqrt{2} \sin(\omega t - 30^\circ);$$

$$u_C = U_{MC} \sin(\omega t - 150^\circ) = 50\sqrt{2} \sin(\omega t - 150^\circ),$$

где $U_{MA} = U_A \cdot \sqrt{2}$ и т. д.

Запишем выражения для сопротивлений фаз нагрузки в символической форме:

$$\underline{Z}_a = R_1 - jX_C = 1 - j2 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_b = R_2 + jX_L = 5 + j3 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_c = R_3 = 4 \text{ Ом}.$$

Рассчитаем комплексы проводимостей фаз нагрузки:

$$\underline{Y}_a = \frac{1}{\underline{Z}_a} = \frac{1}{1 - j2} = 0,2 + j0,4 \text{ См};$$

$$\underline{Y}_b = \frac{1}{\underline{Z}_b} = \frac{1}{5 + j3} = 0,147 - j0,088 \text{ См};$$

$$\underline{Y}_c = \frac{1}{\underline{Z}_c} = \frac{1}{4} = 0,25 \text{ См}.$$

Напряжение смещения нейтрали определим по известной формуле:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{nN} &= \frac{\dot{U}_A \cdot \underline{Y}_a + \dot{U}_B \cdot \underline{Y}_b + \dot{U}_C \cdot \underline{Y}_c}{\underline{Y}_a + \underline{Y}_b + \underline{Y}_c} = \\ &= \frac{j50(0,2 + j0,4) + (43,3 - j25) \cdot (0,147 - j0,088) + (-43,3 - j25) \cdot 0,25}{(0,2 + j0,4) + (0,147 - j0,088) + 0,25} = \\ &= \frac{-25,665 - j3,75}{0,597 + j0,312} = -36,3 + j12,8 \text{ В}. \end{aligned}$$

Фазные напряжения на нагрузке вычислим как разности фазных напряжений источника и напряжения смещения:

$$\dot{U}_a = \dot{U}_A - \dot{U}_{nN} = j50 - (-36,3 + j12,8) = 36,3 + j37,2 \text{ В};$$

$$\dot{U}_b = \dot{U}_B - \dot{U}_{nN} = (43,3 - j25) - (-36,3 + j12,8) = 79,6 - j37,8 \text{ В};$$

$$\dot{U}_c = \dot{U}_C - \dot{U}_{nN} = (-43,3 - j25) - (-36,3 + j12,8) = -7 - j37,8 \text{ В}.$$

На векторной диаграмме построим напряжения фаз источника $\dot{U}_A, \dot{U}_B, \dot{U}_C$ и напряжение смещения нейтрали $\dot{U}_{nN}$, а векторы фазных напряжений на нагрузке получим как разности векторов фазных напряжений источника и вектора $\dot{U}_{nN}$ (рис. 5.36).

Фазные токи равны линейным в схеме звезды. Вычислим их по формулам закона Ома:

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_a}{\underline{Z}_a} = \frac{36,3 - j37,2}{1 - j2} = -6,65 + j22 \text{ A};$$

$$\dot{I}_B = \frac{\dot{U}_b}{\underline{Z}_b} = \frac{79,6 - j37,8}{5 + j3} = 8,4 - j12,6 \text{ A};$$

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{U}_c}{\underline{Z}_c} = \frac{-7 - j37,8}{4} = 1,75 - j9,4 \text{ A}.$$

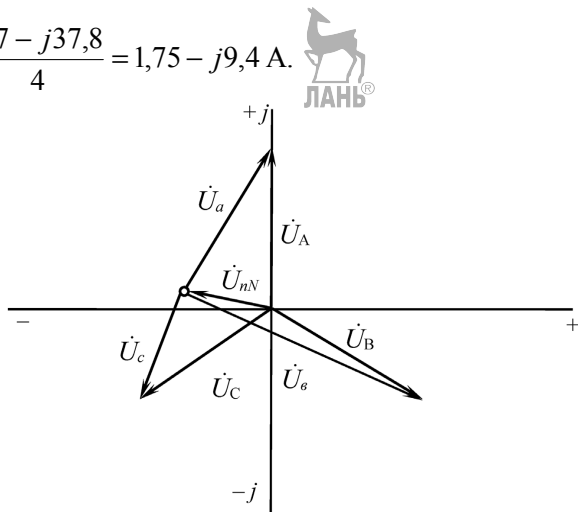


Рис. 5.36. Векторная диаграмма напряжений для трёхпроводной схемы звезды

Правильность расчёта токов проверим с помощью уравнения I закона Кирхгофа, записанного для узла n:

$$\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = (-6,65 + j22) + (8,4 - j12,6) + (1,75 - j9,4) = 0.$$

Равенство нулю суммы комплексов фазных токов нагрузки свидетельствует о правильности проведённых расчётов.

Построенные на векторной диаграмме токи в соответствии с принятым масштабом при их геометрическом сложении должны дать нулевой результат.

Расчёт мощностей отдельных фаз и всей трёхфазной нагрузки следует провести аналогично тому, как это сделано в предыдущем параграфе. Напомним, что комплекс мощности определяется как произведение комплекса напряжения на сопряжённый комплекс тока:

$$\dot{S} = \dot{U} \cdot \dot{I}^*$$

5.7.3. Пример выполнения задания 14

Рассчитать значения фазных и линейных токов, активной, реактивной и полной мощностей трёхфазной цепи, в которой нагрузочные ветви соединены по схеме треугольника (рис. 5.37).

При этом задано линейное напряжение источника $U_{\Phi} = 200 \text{ В}$, а также сопротивления:

$$R_1 = 3 \text{ Ом}, R_2 = 2 \text{ Ом}, R_3 = 4 \text{ Ом}, X_L = 1 \text{ Ом}, X_C = 5 \text{ Ом}.$$

Задание 14 может быть выполнено двумя способами:

- с помощью метода комплексных величин (символического метода);
- графоаналитическим способом.

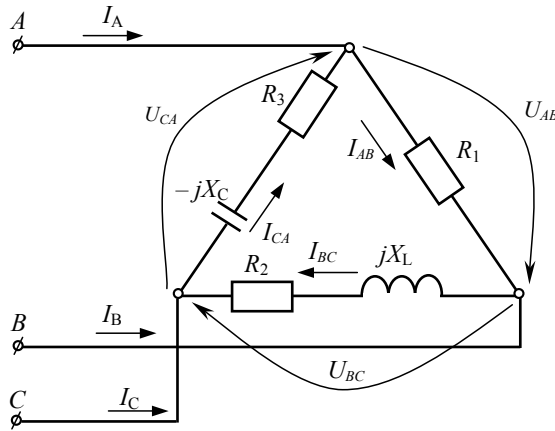


Рис. 5.37. Схема трехфазной цепи при соединении сопротивлений нагрузки треугольником

➤ Выполнение задания 14 методом комплексных величин.

При соединении фаз нагрузки треугольником фазные напряжения являются одновременно линейными, т. е. $U_{\Phi} = U_{\text{Л}}$. Будем считать, что вектор фазного напряжения U_{AB} направлен вдоль положительной полуоси мнимых чисел. Тогда выражения для действующих значений фазных (линейных) напряжений в показательной, полярной и алгебраической форме будут иметь вид:

$$\dot{U}_{AB} = 200e^{j90^\circ} = 200\angle 90^\circ = j200 \text{ В};$$

$$\dot{U}_{BC} = 200e^{-j30^\circ} = 200\angle -30^\circ = 173,2 - j100 \text{ В};$$

$$\dot{U}_{CA} = 200e^{-j150^\circ} = 200\angle 150^\circ = -173,2 - j100 \text{ В}.$$

Выражения для мгновенных значений этих напряжений с учётом того, что $U_{\text{М}} = \sqrt{2}U$, запишутся в виде:

$$u_{AB} = U_{MAB} \sin(\omega t + 90^\circ) = 200\sqrt{2} \sin(\omega t + 90^\circ);$$

$$u_{BC} = U_{MBC} \sin(\omega t - 30^\circ) = 200\sqrt{2} \sin(\omega t - 30^\circ);$$

$$u_{CA} = U_{MCA} \sin(\omega t - 150^\circ) = 200\sqrt{2} \sin(\omega t - 150^\circ).$$

Запишем выражения для сопротивлений фаз нагрузки в комплексном виде:

$$\underline{Z}_{AB} = R_1 = 3 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{BC} = R_2 + jX_L = 2 + j1 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{CA} = R_3 - jX_C = 4 - j5 \text{ Ом}.$$

Фазные токи нагрузки определим по закону Ома:

$$\dot{I}_{AB} = \frac{\dot{U}_{AB}}{\underline{Z}_{AB}} = \frac{j200}{3} = j66,6 \text{ А};$$

$$\dot{I}_{BC} = \frac{\dot{U}_{BC}}{\underline{Z}_{BC}} = \frac{173,2 - j100}{2 + j1} = 49,28 - j74,64 \text{ А};$$

$$\dot{I}_{CA} = \frac{\dot{U}_{CA}}{\underline{Z}_{CA}} = \frac{-173,2 - j100}{4 - j5} = -4,7 - j30,09 \text{ А}.$$

На основе I закона Кирхгофа определяем линейные токи:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA} = j66,6 - (-4,7 - j30,09) = 4,7 + j97,5 \text{ А};$$

$$\dot{I}_B = \dot{I}_{BC} - \dot{I}_{AB} = (49,28 - j74,64) - j66,6 = 49,28 - j141 \text{ А};$$

$$\dot{I}_C = \dot{I}_{CA} - \dot{I}_{BC} = (-4,7 - j30,09) - (49,28 - j74,64) = -53,98 + j43,74 \text{ А}.$$

Мощность отдельных фаз и всей трёхфазной нагрузки рассчитывается аналогично тому, как это сделано в п. 5.7.1 (пример выполнения задания 12).

Задавись предварительно масштабом напряжений и токов, строим на комплексной плоскости напряжения, фазные и линейные токи по их численным значениям, полученным выше.

Выполнение задания 14 графоаналитическим методом.

Для написания выражений для мгновенных значений фазных (линейных) напряжений условимся, что вектор действующего фазного напряжения U_{AB} на векторной диаграмме (рис. 5.38) занимает вертикальное положение. Назовём этот момент времени (когда U_{AB} вертикален) нулевым (т. е. $t = 0$). Тогда выражения для мгновенных значений фазных напряжений будут иметь вид:

$$u_{AB} = U_{AB} \sqrt{2} \sin \omega t = 200\sqrt{2} \sin \omega t;$$

$$u_{BC} = U_{BC} \sqrt{2} \sin(\omega t - 120^\circ) = 200\sqrt{2} \sin(\omega t - 120^\circ);$$

$$u_{CA} = U_{CA} \sqrt{2} \sin(\omega t + 120^\circ) = 200\sqrt{2} \sin(\omega t + 120^\circ),$$

т. е. на векторной диаграмме (рис. 5.38) фазные (линейные) напряжения изображаются тремя векторами, равными по величине и сдвинутыми относительно друг друга на угол 120° .

Рассчитаем численные значения фазных токов нагрузки. С этой целью предварительно определим численные значения полных сопротивлений фаз нагрузки:

$$Z_{AB} = R_1 = 3 \text{ Ом};$$

$$Z_{BC} = \sqrt{R_2^2 + X_L^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = 2,24 \text{ Ом};$$

$$Z_{CA} = \sqrt{R_3^2 + X_C^2} = \sqrt{4^2 + 5^2} = 6,4 \text{ Ом}.$$

Фазные токи нагрузки определяем по закону:

$$I_{AB} = \frac{U_{AB}}{Z_{AB}} = \frac{200}{3} = 66,7 \text{ А};$$

$$I_{BC} = \frac{U_{BC}}{Z_{BC}} = \frac{200}{2,24} = 89,3 \text{ А};$$

$$I_{CA} = \frac{U_{CA}}{Z_{CA}} = \frac{200}{6,4} = 31,25 \text{ А}.$$

Напомним, что по условиям задачи $U_{AB} = U_{BC} = U_{CA} = 200 \text{ В}$.

Углы сдвига по фазе каждого из фазных токов по отношению к своему напряжению рассчитаем по известным формулам:

$$\varphi_{AB} = \angle U_{AB}, I_{AB} = \arcsin \frac{X_{AB}}{Z_{AB}} = \arcsin \frac{0}{3} = 0^\circ;$$

$$\varphi_{BC} = \angle U_{BC}, I_{BC} = \arcsin \frac{X_L}{Z_{BC}} = \arcsin \frac{1}{2,24} = 26,5^\circ;$$

$$\varphi_{CA} = \angle U_{CA}, I_{CA} = \arcsin \frac{X_C}{Z_{CA}} = \arcsin \frac{-5}{6,4} = -52^\circ.$$

Задаёмся масштабом напряжений и масштабом токов и строим на рис. 5.38 фазные напряжения и фазные токи, используя углы $\varphi_{AB}, \varphi_{BC}, \varphi_{CA}$. При этом векторы $\bar{I}_{AB}$ и $\bar{U}_{AB}$ совпадают по фазе, $\bar{I}_{BC}$ на $26,5^\circ$ отстаёт от $\bar{U}_{BC}$ (так как $\bar{I}_{BC}$ имеет активно-индуктивный характер), $\bar{I}_{CA}$ опережает $\bar{U}_{CA}$ (так как $\bar{I}_{CA}$ имеет активно-емкостной характер).

Действующие значения линейных токов получим на рис. 5.38 как геометрическую разность соответствующих векторов фазных токов (согласно I закону Кирхгофа):

$$\bar{I}_A = \bar{I}_{AB} - \bar{I}_{CA};$$

$$\bar{I}_B = \bar{I}_{BC} - \bar{I}_{AB};$$

$$\bar{I}_C = \bar{I}_{CA} - \bar{I}_{BC}.$$

Измерив линейкой токи I_A, I_B, I_C в см и умножив эти длины на масштаб токов, получим численные значения линейных токов в амперах:

$$I_A = 97,6 \text{ А};$$

$$I_B = 149,4 \text{ А};$$

$$I_C = 69,5 \text{ А}.$$

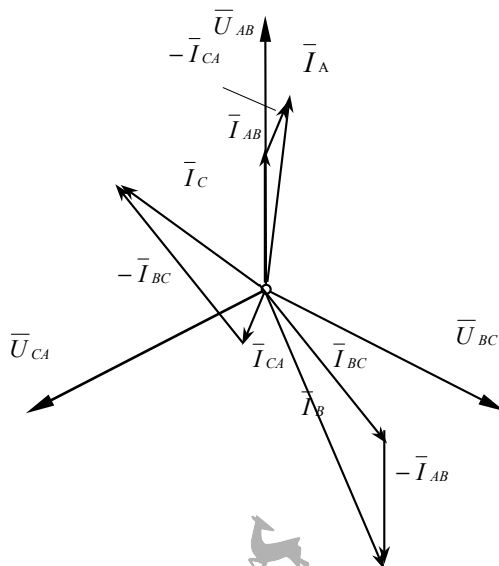


Рис. 5.38. Векторная диаграмма напряжений и токов

Вычислим мощности:

– фаза AB

$$P_{AB} = I_{AB}^2 \cdot R_1 = 66,7^2 \cdot 3 = 13347 \text{ Вт};$$

$$Q_{AB} = 0 \text{ вар},$$

так как реактивных сопротивлений в фазе AB нет;

– фаза BC

$$P_{BC} = I_{BC}^2 \cdot R_2 = 89,3^2 \cdot 2 = 15949 \text{ Вт},$$

$$Q_{BC} = I_{BC}^2 \cdot X_L = 89,3^2 \cdot 1 = 7974 \text{ вар};$$

– фаза CA

$$P_{CA} = I_{CA}^2 \cdot R_3 = 31,25^2 \cdot 4 = 3906 \text{ Вт},$$

$$Q_{CA} = I_{CA}^2 \cdot (-X_C) = 31,25^2 \cdot (-5) = -4883 \text{ вар}.$$

Полная мощность всей трёхфазной нагрузки:

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{\sum P^2 + (\sum Q_L - \sum Q_C)^2} = \sqrt{(P_{AB} + P_{BC} + P_{CA})^2 + (Q_{BC} - Q_{CA})^2} = \\ &= \sqrt{33202^2 + 3091^2} = 33347 \text{ В} \cdot \text{А} = 33,35 \text{ кВт} \cdot \text{А}. \end{aligned}$$

Контрольные вопросы к главе 5

1. Назовите отличительные признаки симметричной трехфазной системы ЭДС.
2. Как на практике получают трехфазную систему ЭДС?
3. Напишите уравнения мгновенных значений и комплексные выражения действующих значений симметричной трехфазной системы ЭДС.
4. Как получить трехфазную систему соединения обмоток источника и фаз приемника звездой и треугольником?
5. Какие напряжения в трехфазной цепи называются фазными, а какие линейными?
6. Каково соотношение между линейными и фазными напряжениями в симметричной трехфазной системе? Каково это соотношение в несимметричной системе?
7. Что понимается под симметричной и несимметричной нагрузкой?
8. Какие токи в трехфазной цепи называют фазными, а какие линейными? Каково соотношение между фазными и линейными токами при симметричной и несимметричной нагрузке?
9. Почему при соединении звездой линейные токи равны фазным токам в каждой фазе?
10. Что такое смещение нейтрали? В каких случаях смещение нейтрали отсутствует?
11. Почему при симметричной нагрузке применяется трехпроводная связь источника с приемником.
12. Какова роль нейтрального провода?
13. В чем состоит особенность расчета трехфазной цепи при:
 - симметричной нагрузке фаз;
 - несимметричной нагрузке фаз?



ПРИЛОЖЕНИЕ

Буквенные обозначения и единицы основных величин в электротехнике

Наименование величины	Символ	Единица	
		Наименование	Обозначение
Время	t	секунда	с
Емкость электрическая	C	фарад	Ф
Заряд электрический	Q, q	кулон	Кл
Индуктивность	L	генри	Гн
Индуктивность взаимная	M, L_M	генри	Гн
Индукция магнитная	B	тесла	Тл
Коэффициент мощности при синусоидальных напряжении и токе	$\cos \varphi$	—	—
КПД	η	—	м
Коэффициент трансформации	n	—	м
Мощность, мощность активная	P	ватт	Вт
Мощность полная	S	вольт-ампер	В·А
Мощность реактивная	Q	вольт-ампер реактивный	вар
Намагниченность	M	ампер на метр	А/м
Напряжение электрическое	U	вольт	В
Напряженность магнитного поля	H	ампер на метр	А/м
Напряженность электрического поля	E	ньютон на кулон	Н/Кл
Период колебаний электрической или магнитной величины	T	секунда	с
Плотность тока	J	ампер на квадратный метр	А/м ²
Постоянная времени электрической цепи	t, T	секунда	с
Постоянная магнитная	μ_0	генри на метр	Гн/м
Постоянная электрическая	ϵ_0	фарад на метр	Ф/м
Потенциал электрический	V, φ	вольт	В
Поток магнитный	Φ	вебер	Вб
Потокосцепление	Ψ	вебер	Вб
Проводимость магнитная	λ	вебер на ампер	Вб/А
Проводимость электрическая активная	G, g	сименс	См
Проводимость электрическая полная	Y	сименс	См
Проводимость реактивная	B, b	сименс	См
Проводимость электрическая удельная	γ, σ	сименс на метр	См/м
Проницаемость диэлектрическая абсолютная	ϵ_a, ϵ	фарад на метр	Ф/м
Проницаемость магнитная абсолютная	ϵ_r	—	—
Проницаемость магнитная относительная	μ_a, μ	генри на метр	Гн/м
Разность электрических потенциалов	U	вольт	В
Сдвиг фаз между напряжением и током	φ	радиан	рад
Сила магнитодвижущая вдоль замкнутого контура	F, F_M	ампер	А
Сила электродвижущая	E	вольт	В
Сопротивление магнитное	R_M, r_M	ампер на вебер	А/Вб
Сопротивление электрическое, сопротивление электрическое постоянному току	R, r	ом	Ом
Сопротивление электрическое активное	R, r	ом	Ом

Наименование величины	Символ	Единица	
		Наименование	Обозначение
Сопротивление электрическое полное	Z	ом	Ом
Сопротивление электрическое реактивное	X, x	ом	Ом
Сопротивление электрическое удельное	ρ	омметр	Ом·м
Ток	I	ампер	А
Угловая скорость	Ω	секунда в минус первой степени	с^{-1}
Частота вращения	n	оборотов в минуту	1/мин
Частота колебаний электрической или магнитной величины	f, ν	герц	Гц
Частота колебаний угловая электрической или магнитной величины	ω, Ω	секунда в минус первой степени	с^{-1}
Число витков	N, w	—	—
Число пар полюсов	p	—	—
Число фаз многофазовой системы	m	—	—
Энергия электромагнитная	W	ватт-секунда	Вт·с



БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Демирчян, К. С.* Теоретические основы электротехники : учебник для вузов. Т. 3 / К. С. Демирчян, Л. Р. Нейман, Н. В. Коровкин [и др.]. – 4-е изд. – СПб. : Питер, 2009. – 432 с.
2. *Немцов, М. В.* Электротехника : учебник для студ. учреждений высш. образования : в 2 кн. Кн. 1 / М. В. Немцов. – М. : Издат. центр «Академия», 2014. – 204 с.
3. *Нейман, Л. Р.* Теоретические основы электротехники : учебник : в 2-х т. Т. 1 / Л. Р. Нейман, К. С. Демирчян. – 3-е изд., перераб. и доп. – Л. : Энергоиздат, 1981. – 416 с.
4. *Кольниченко, Г. И.* Расчёт электрических цепей. Ч. 1 : учеб.-метод. пособие / Г. И. Кольниченко, В. И. Панферов. – М. : ГОУ ВО МГУЛ, 2009. – 59 с.
5. *Кольниченко, Г. И.* Электрические цепи в примерах и задачах : учеб. пособие / Г. И. Кольниченко, В. И. Панферов. – М. : ФГБОУ ВПО МГУЛ, 20013. – 146 с.
6. *Мурашев, В. П.* Сборник тестов по электротехнике и электронике. Ч. 1. Электрические и магнитные цепи : учеб. пособие / В. П. Мурашев, Я. В. Тарлаков, А. В. Сиротов. – М. : ФБГОУ ВПО МГУЛ, 2013. – 109 с.
7. *Нейман, В. Ю.* Теоретические основы электротехники в примерах и задачах. Ч. 2. Линейные электрические цепи однофазного синусоидального тока : учеб. пособие / В. Ю. Нейман. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2008. – 116 с.
8. *Купцов, А. М.* Электротехника с элементами энергосбережения : учеб. пособие / А. М. Купцов // Томский политехнический университет. — 2010. – 372 с.

Оглавление

Предисловие.....	4
Введение.....	5
Глава 1. Основы электростатики.....	8
1.1. Электрический заряд и электромагнитное поле элементарных частиц.....	8
1.2. Проводники, диэлектрики, полупроводники.....	9
1.3. Закон Кулона. Напряженность электрического поля.....	12
1.4. Электрический потенциал, напряжение и электродвижущая сила (ЭДС).....	15
1.5. Электрическая емкость.....	18
1.6. Примеры к главе 1.....	19
Контрольные вопросы к главе 1.....	20
Глава 2. Электрические цепи постоянного тока.....	21
2.1. Основные электрические параметры.....	21
2.2. Электрическая цепь: основные элементы, понятия и законы.....	22
2.3. Расчет линейных цепей постоянного тока.....	32
2.3.1. Расчет цепей с одним источником электрической энергии.....	33
2.3.2. Расчет сложных электрических цепей с помощью законов Кирхгофа.....	37
2.3.3. Принципы суперпозиции, компенсации, взаимности.....	39
2.3.4. Двухполюсники и четырехполюсники.....	40
2.3.5. Потеря напряжения в линии электропередачи.....	43
2.3.6. Задания 1 и 2 для самостоятельной работы.....	44
2.4. Нелинейные цепи постоянного тока.....	55
Контрольные вопросы к главе 2.....	58
Глава 3. Электромагнетизм.....	60
3.1. Магнитное поле электрического тока.....	60
3.2. Электромеханическое действие магнитного поля. Магнитная индукция.....	61
3.3. Магнитная проницаемость, напряженность магнитного поля.....	62
3.4. Закон полного тока.....	63
3.5. Намагничивание ферромагнитных материалов.....	64
3.6. Магнитный гистерезис.....	66
3.7. Магнитные цепи.....	67
3.8. Индукционное действие магнитного поля. Закон электромагнитной индукции.....	69
3.9. Потокосцепление.....	70
3.10. Вихревые токи.....	71
3.11. Самоиндукция и взаимоиндукция.....	72
3.12. Энергия магнитного поля. Тяговое усилие электромагнита.....	74
3.13. Примеры к главе 3.....	75
Контрольные вопросы к главе 3.....	79
Глава 4. Цепи однофазного синусоидального тока.....	81
4.1. Основные определения.....	81
4.2. Получение синусоидальной ЭДС.....	82
4.3. Волновые и векторные диаграммы. Сдвиг фаз.....	83
4.4. Сложение и вычитание векторных величин.....	87

4.5.	Среднее значение величин синусоидального тока.....	88
4.6.	Действующее значение синусоидального тока.....	88
4.7.	Задания 3–5 к самостоятельной работе.....	89
4.7.1.	Задания 3–5.....	89
4.7.2.	Пример выполнения задания 3–5.....	92
4.8.	Фазовые соотношения в резистивном, индуктивном и емкостном элементах цепей синусоидального тока.....	97
4.9.	Электрическая цепь синусоидального тока с R , X_L и X_C	98
4.10.	Активная, реактивная, полная мощности цепи синусоидального тока. Компенсация реактивной мощности.....	100
4.11.	Эквивалентные зависимости, связывающие сопротивления и проводимости в цепи переменного тока.....	102
4.12.	Резонансные явления в цепи переменного тока.....	104
4.12.1.	Последовательная цепь. Резонанс напряжений.....	104
4.12.2.	Цепь с параллельным соединением сопротивлений. Резонанс токов.....	105
4.13.	Задания 6–8 для самостоятельной работы.....	107
4.13.1.	Пример выполнения задания 6.....	107
4.13.2.	Задание 6.....	110
4.13.3.	Пример выполнения задания 7.....	111
4.13.4.	Задание 7.....	116
4.13.5.	Пример выполнения задания 8.....	117
4.13.6.	Задание 8.....	120
4.14.	Символический метод (метод комплексных величин) расчета цепей синусоидального тока.....	121
4.14.1.	Предварительные сведения.....	121
4.14.2.	Действия над комплексными числами.....	122
4.14.3.	Изображение электрических параметров в символической форме.....	124
4.14.4.	Примеры решения простейших задач символическим методом.....	126
4.15.	Задания 9–11 для самостоятельной работы.....	132
4.15.1.	Задание 9.....	132
4.15.2.	Пример выполнения задания 9.....	133
4.15.3.	Задание 10.....	135
4.15.4.	Пример выполнения задания 10.....	136
4.15.5.	Задание 11.....	138
4.15.6.	Пример выполнения задания 11.....	139
4.16.	Расчет сложных цепей синусоидального тока символическим методом.....	142
4.17.	Задачи для самостоятельного решения с ответами.....	146
	Контрольные вопросы к главе 4.....	154
Глава 5.	Трехфазные цепи.....	156
5.1.	Предварительные сведения.....	156
5.2.	Примеры расчета трехфазных цепей с симметричной нагрузкой.....	162
5.3.	Задачи для самостоятельного расчета трехфазных цепей с симметричной нагрузкой с ответами.....	169
5.4.	Примеры расчета трехфазных цепей с несимметричной нагрузкой.....	172
5.5.	Задачи для самостоятельного расчета трехфазных цепей с несимметричной нагрузкой с ответами.....	177

5.6.	Задания 12–14 для самостоятельной работы.....	181
5.6.1.	Общие указания для выполнения заданий 12–14.....	181
5.6.2.	Задание 12.....	182
5.6.3.	Задание 13.....	183
5.6.4.	Задание 14.....	183
5.7.	Примеры выполнения заданий 12–14.....	184
5.7.1.	Пример выполнения задания 12.....	184
5.7.2.	Пример выполнения задания 13.....	190
5.7.3.	Пример выполнения задания 14.....	193
	Контрольные вопросы главе 5.....	197
	Приложение. Буквенные обозначения и единицы основных величин в электротехнике.....	199
	Библиографический список.....	200



*Георгий Иванович КОЛЬНИЧЕНКО,
Яков Викторович ТАРЛАКОВ,
Александр Владиславович СИРОТОВ,
Игорь Николаевич КРАВЧЕНКО*
ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

У ч е б н и к

Издание второе, стереотипное

Зав. редакцией
инженерно-технической литературы *Е. В. Баженова*

ЛР № 065466 от 21.10.97
Гигиенический сертификат 78.01.10.953.П.1028
от 14.04.2016 г., выдан ЦГСЭН в СПб

Издательство «ЛАНЬ»
lan@lanbook.ru; www.lanbook.com
196105, Санкт-Петербург, пр. Юрия Гагарина, д.1, лит. А.
Тел.: (812) 336-25-09, 412-92-72.
Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

ГДЕ КУПИТЬ

ДЛЯ ОРГАНИЗАЦИЙ:

*Для того, чтобы заказать необходимые Вам книги, достаточно обратиться
в любую из торговых компаний Издательского Дома «ЛАНЬ»:*

по России и зарубежью
«ЛАНЬ-ТРЕЙД». 196105, Санкт-Петербург, пр. Юрия Гагарина, 1, лит. А
тел.: (812) 412-85-78, 412-14-45, 412-85-82; тел./факс: (812) 412-54-93
e-mail: trade@lanbook.ru; ICQ: 446-869-967
www.lanbook.com

пункт меню «Где купить»
раздел «Прайс-листы, каталоги»

в Москве и в Московской области
«ЛАНЬ-ПРЕСС». 109387, Москва, ул. Летняя, д. 6
тел.: (499) 722-72-30, (495) 647-40-77; e-mail: lanpress@lanbook.ru

в Краснодаре и в Краснодарском крае
«ЛАНЬ-ЮГ». 350901, Краснодар, ул. Жлобы, д. 1/1
тел.: (861) 274-10-35; e-mail: lankrd98@mail.ru

ДЛЯ РОЗНИЧНЫХ ПОКУПАТЕЛЕЙ:

интернет-магазин **ЛАНЬ®**
Издательство «Лань»: <http://www.lanbook.com>
магазин электронных книг
Global F5: <http://globalf5.com/>

Подписано в печать 16.04.21.
Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Формат 70×100¹/₁₆.
Печать офсетная. Усл. п. л. 16,58. Тираж 100 экз.

Заказ № 437-21.

Отпечатано в полном соответствии
с качеством предоставленного оригинал-макета
в АО «Т8 Издательские технологии»
109316, г. Москва, Волгоградский пр., д. 42, к. 5.