

ВСЕМИРНАЯ МЕТЕОРОЛОГИЧЕСКАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ

**ЛЕКЦИИ
ПО
ЧИСЛЕННЫМ
МЕТОДАМ
КРАТКО
СРОЧНОГО
ПРОГНОЗА
ПОГОДЫ**

РЕГИОНАЛЬНЫЙ
УЧЕБНЫЙ СЕМИНАР
ВСЕМИРНОЙ
МЕТЕОРОЛОГИЧЕСКОЙ
ОРГАНИЗАЦИИ

Москва,
17 ноября — 14 декабря 1965 г.

ГИДРОМЕТЕОИЗДАТ • ЛЕНИНГРАД • 1969

В настоящем томе, публикуемом отдельно на английском и русском языках, содержатся тексты лекций, прочитанных учеными Великобритании, Советского Союза, Соединенных Штатов Америки, Федеративной Республики Германии и Швеции на Региональном учебном семинаре по численным методам прогноза погоды (Москва, 17 ноября — 14 декабря, 1965 г.). Тексты лекций приводятся в последовательности, соответствующей программе семинара.

Книга рассчитана на специалистов в области численных прогнозов погоды и в смежных областях, метеорологов-прогнозистов, студентов, аспирантов, преподавателей высших учебных заведений. Может с успехом служить в качестве учебного пособия при проведении учебных семинаров.

ПРЕДИСЛОВИЕ

На своей третьей сессии (Рим, 1961 г.) Комиссия по агрологии Всемирной Метеорологической Организации учредила Рабочую группу по численным прогнозам погоды. Выполняя рекомендацию этой группы, Исполнительный комитет Организации на своей 16-й сессии (Женева, 1964 г.) решил, что Региональный учебный семинар по численным прогнозам погоды будет проведен в рамках Организации. По любезному приглашению Правительства СССР семинар был проведен в Москве в течение четырех недель, начиная с 17 ноября 1965 г.

Цель семинара заключалась в обучении методике численного прогноза погоды. Профессор В. А. Бугаев (Гидрометеорологическая служба СССР) был назначен директором семинара, а профессор Б. Р. Дёйс (Швеция) и доктор Х. Таба (Секретариат ВМО) были назначены содиректорами. В апреле 1965 г. в Москве состоялось предварительное совещание между директором семинара, двумя содиректорами и членами организационного комитета. Главная задача совещания состояла в подготовке программы семинара и персональном подборе экспертов для чтения лекций на семинаре. Позже директором семинара были разосланы извещения приглашенным экспертам.

На семинаре были рассмотрены следующие темы:

- Основные уравнения динамической метеорологии. Атмосферные пограничные слои. Краткосрочный прогноз погоды как задача гидродинамики.

- Виды атмосферных волн. Квазистатичность. Квазигеострофичность. Вопросы фильтрации волн.

- Конечно-разностные методы интегрирования уравнений атмосферных движений.

- Баротропные модели (модели среднего уровня).

- Пространственные квазигеострофические и квазисоленоидальные модели.

- Полные (примитивные) уравнения.

- Учет трения и источников тепла в краткосрочных прогностических схемах. Прогноз облачности и осадков.

- Общие характеристики вычислительных машин и основы программирования.

— Автоматизация сбора, обработки и распространения метеорологической информации.

— Численный (объективный) анализ метеорологических данных:

а. Общие принципы объективного анализа.

б. Физико-статистические характеристики полей метеорологических элементов, которые используются при численных прогнозах.

в. Объективный анализ полей метеорологических элементов.

— Организация оперативной работы по численным методам анализа и прогноза. Составление примеров прогноза и проверка их в оперативных условиях. Использование предвычисленных карт в службе прогнозов.

Перечисленные выше темы изучались на лекциях в течение 130 часов.

Ввиду большого успеха семинара и для пользы тех, кто не смог в нем участвовать, было решено, что ВМО опубликует материалы семинара. Настоящая публикация осуществлена в соответствии с этим решением.

Я рад воспользоваться представившейся возможностью, чтобы выразить благодарность за ценную помощь, оказанную всеми экспертами, чьи имена содержатся в этой публикации. Большая благодарность выражается директорату семинара и членам организационного комитета, чьи усилия обеспечили успех семинара. И, наконец, особая благодарность советской стороне за то, что она предприняла публикацию этого тома на двух языках, английском и русском.

Д. А. Дэвис
Генеральный секретарь

Информационные сведения о семинаре

Директорат

Проф. В. А. Бугаев Директор семинара	Мировой метеорологический центр, Москва, СССР
Проф. Б. Р. Дёес Содиректор семинара	Шведский метеорологический и гидрологический институт, Стокгольм, Швеция
Д-р Х. Таба Содиректор семинара	Всемирная Метеорологическая Организация, Женева, Швейцария

Организационный комитет

Проф. В. А. Бугаев Председатель	Мировой метеорологический центр, Москва, СССР
Канд. физ.-мат. наук С. Л. Белоусов	Мировой метеорологический центр, Москва, СССР
Проф. Е. Н. Блинова Чл.-корр. АН СССР	Мировой метеорологический центр, Москва, СССР
Канд. физ.-мат. наук В. В. Быков, Ученый секретарь	Мировой метеорологический центр, Москва, СССР
Проф. И. А. Кибель Чл.-корр. АН СССР	Мировой метеорологический центр, Москва, СССР
Проф. А. М. Обухов Чл.-корр. АН СССР	Институт физики атмосферы АН СССР, Москва, СССР
Канд. физ.-мат. наук В. П. Садоков, Зам. председателя	Мировой метеорологический центр, Москва, СССР
Проф. М. И. Юдин	Главная геофизическая обсер- ватория, Ленинград, СССР

Лекторы

Канд. физ.-мат. наук С. Л. Белоусов	Мировой метеорологический центр, Москва, СССР
Канд. физ.-мат. наук А. И. Бурцев	Мировой метеорологический центр, Москва, СССР

Канд. физ.-мат. наук В. В. Быков	Мировой метеорологический центр, Москва, СССР
Проф. Л. С. Гандин	Главная геофизическая обсер- ватория, Ленинград, СССР
Проф. Б. Р. Дёёз	Шведский метеорологический и гидрологический институт, Стокгольм, Швеция
Проф. Г. И. Марчук	Вычислительный центр СО АН СССР, Новосибирск, СССР
Д-р Е. К. Найтинг	Метеорологическое управление, Брэкнелл, Великобритания
Канд. физ.-мат. наук В. П. Садоков	Мировой метеорологический центр, Москва, СССР
Проф. К. А. Семендяев	Мировой метеорологический центр, Москва, СССР
Д-р Ф. Д. Томпсон	Национальный центр атмо- сферных исследований, Бол- дер, США
Д-р К. Г. Хинкельман	Метеорологическая служба, Оффенбах-на-Майне, Феде- ративная Республика Гер- мании
Д-р Ф. Г. Шуман	Национальный метеорологиче- ский центр, Вашингтон, США
Проф. М. И. Юдин	Главная геофизическая обсер- ватория, Ленинград, СССР

Общие сведения

Учебный семинар проводился в период с 17 ноября по 14 декабря 1965 г. в Конференц-зале нового здания Мирового метеорологического центра (Москва, Большевикская ул., д. 9—11). В семинаре официально приняло участие 52 человека из 25 стран.

Лекции читались на английском и русском языках. Для присутствующих был организован синхронный перевод с английского языка на русский и французский, а с русского — на английский и французский. Участники семинара были обеспечены комплектом лекций на английском, русском или французском языках.

Общая редакция данного издания осуществлена под руководством канд. физ.-мат. наук В. В. Быкова.

Ф. Д. ТОМПСОН

АНАЛИЗ И ПРЕДСКАЗАНИЕ ПОГОДЫ ЧИСЛЕННЫМИ МЕТОДАМИ

(Главы из книги ¹)

Определение математических обозначений

До сих пор в метеорологии нет согласованной и общепринятой системы обозначений. Можно назвать примеры, когда один и тот же символ имеет несколько метеорологических значений, в то же время есть примеры, когда общепринятый в метеорологии символ применяется в ином смысле в других областях знаний. Вместо того чтобы пытаться улучшить всю систему обозначений, я, как правило, употребляю ту систему символов, которая общепринята в литературе по численному предсказанию погоды. В большинстве случаев, когда существует неопределенность, значение символа ясно из контекста. Однако в качестве дополнительной предосторожности все символы, появляющиеся в тексте в новом значении, определяются дополнительно.

Переменные и константы

ЛАТИНСКИЙ АЛФАВИТ

a — средний радиус Земли.

A — постоянная амплитуда; также коэффициент пропорциональности между вектором ветра V и его средним значением по вертикали.

A — произвольное векторное поле.

B — функция пространственных координат (x, y, θ) , предполагаемая известной.

c — фазовая скорость.

¹ Главы из книги: Philip D. Thompson. Numerical weather analysis and prediction. The Macmillan Company, N.-Y., 1961. Воспроизводятся без изменения по русскому изданию книги: Ф. Д. Томпсон. Анализ и предсказание погоды численными методами. Изд-во иностр. лит., М., 1962. Главы 2, 8 и 14 печатаются с сокращениями.

- C_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении.
 C_v — удельная теплоемкость при постоянном объеме.
 d — расстояние между точками регулярной сетки.
 D — дивергенция горизонтальной скорости.
 e — основание натуральных логарифмов.
 E — ошибка в лапласиане от φ , обусловленная ошибками округления φ .
 f — параметр Корнолиса, $2\Omega \sin \varphi$.
 F_{ij} — неоднородный член линейного дифференциального уравнения в частных производных, вычисленный в точке с индексами (i, j) .
 F — сила молекулярной вязкости (на единицу массы).
 g — вертикальная компонента ускорения силы тяжести.
 g — ускорение силы тяжести.
 g^* — ускорение силы земного тяготения.
 h — переменная высота поверхности разрыва плотности.
 H — средняя или невозмущенная высота поверхности разрыва плотности; постоянная амплитуда.
 i — мнимая единица.
 $\mathbf{i}$ — единичный вектор по оси x .
 $\mathbf{j}$ — единичный вектор по оси y .
 k — частота колебаний; переменная амплитуда.
 K — кинетическая энергия на единицу массы; функция пространственных координат (x, y, θ) , предполагаемая известной.
 $\mathbf{k}$ — единичный вектор, направленный вверх.
 L — длина волны; характерное расстояние между последовательными экстремумами функции.
 m — множитель горизонтального масштаба.
 n — целый индекс.
 p — атмосферное давление; целый индекс волнового числа.
 P — сила (на единицу массы), обусловленная градиентом давления.
 q — тепловая энергия; целый индекс волнового числа.
 Q — полная деформация жидкости во время движения.
 R — газовая постоянная для ненасыщенного воздуха; функция пространственных координат (x, y, θ) , предполагаемая известной.
 R_{ij} — невязка в точке с индексами (i, j) .
 $\mathbf{r}$ — трехмерный вектор положения точки.
 R — проекция вектора $\mathbf{r}$ на нормаль к оси вращения Земли.
 s — мера атмосферной статической устойчивости:

$$s = -gp^2\sigma.$$

t — время.

- T — продолжительный фиксированный интервал времени; абсолютная температура.
- u — составляющая скорости по оси x .
- U — невозмущенное значение u ; постоянная амплитуда.
- $\mathbf{U}$ — трехмерный вектор скорости.
- v — составляющая скорости по оси y .
- V — постоянная амплитуда; характерная горизонтальная скорость воздуха; объем интегрирования.
- $\mathbf{V}$ — горизонтальная проекция вектора скорости.
- w — составляющая скорости по оси z .
- W — характерная вертикальная скорость воздуха.
- x — координата, отсчитываемая к востоку; декартова горизонтальная координата в плоскости проекции карты.
- y — координата, отсчитываемая к северу; декартова горизонтальная координата в плоскости проекции карты.
- z — высота над уровнем моря; высота изобарической или изэнтропической поверхности.

ГРЕЧЕСКИЙ АЛФАВИТ

- α — удельный объем; волновое число в направлении оси x ; коэффициент релаксации.
- β — параметр Россби: $\beta = \frac{df}{dy}$.
- γ — отношение удельных теплоемкостей: $\gamma = C_p/C_v$.
- δ — дискриминант устойчивости.
- ϵ — ошибка округления произвольной переменной.
- ζ — относительный вихрь: $\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$.
- η — абсолютный вихрь: $\eta = \zeta + f$.
- θ — потенциальная температура: $\theta = T(p_0/p)^\kappa$.
- κ — отношение R к C_p .
- μ — безразмерный коэффициент; мера статической устойчивости.
- ν — положительно-определенная функция целых чисел p и q .
- ρ — плотность воздуха.
- σ — коэффициент статической устойчивости:

$$\sigma = \frac{1}{g\theta} \frac{\partial \theta}{\partial p}.$$

- v — независимая переменная.
- χ — потенциал скорости для безвихревой части скорости.
- φ — географическая широта; скалярная зависящая переменная.
- ψ — функция тока для бездивергентной части скорости.

Ψ — функция тока Монгомери:

$$\Psi = gz + C_p T.$$

ω — полная производная давления по времени.

Ω — угловая скорость вращения Земли.

$\vec{\Omega}$ — вектор вращения Земли.

Нижние индексы

a — приближенное значение переменной.

e — значение переменной в невозмущенном состоянии.

g — значение переменной на поверхности земли или моря.

i — целый индекс, отмечающий положение на оси x ; мнимая часть комплексного числа.

j — целый индекс, отмечающий положение на оси y .

k — целый индекс, отмечающий положение на вертикали.

m — дифференцирование по координатам в плоскости проекции карты.

n — целый индекс, отмечающий положение на оси x .

p — дифференцирование при постоянном p ; целый индекс волнового числа.

q — целый индекс волнового числа.

r — действительная часть комплексного числа.

s — значение переменной в «стандартной атмосфере».

x — составляющая вектора по оси x .

y — составляющая вектора по оси y .

z — составляющая вектора по оси z ; дифференцирование при постоянном z .

θ — дифференцирование при постоянном θ .

— значение переменной при $p=1000$ мб.

Верхние индексы

n — целый индекс времени; номер аппроксимации.

v — целый индекс времени.

$)'$ — отклонение переменной от ее среднего или невозмущенного значения.

$()^*$ — значение переменной на поверхности, где $V = \bar{A}^2 \bar{V}$.

Алгебраические и дифференциальные операторы ¹

$\frac{d}{dt}()$ — полное дифференцирование по времени.

$() \times ()$ — векторное произведение.

$() \cdot ()$ — скалярное произведение.

$\Delta()$ — конечное приращение.

¹ Незаполненные скобки обозначают те или иные зависимые переменные.

- $\frac{\partial ()}{\partial v}$ — частное дифференцирование по v .
 $\nabla ()$ — оператор горизонтального градиента.
 $\nabla \cdot ()$ — оператор горизонтальной дивергенции.
 $\nabla \times ()$ — оператор горизонтального вихря.
 $(\overline{\quad})$ — осреднение по x или p .
 $\sum$ — суммирование по указанному ряду целых индексов.
 $\nabla^2 ()$ — горизонтальный оператор Лапласа:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

 $J(\varphi, \psi)$ — горизонтальный якобиан:

$$J(\varphi, \psi) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

 $\nabla^2 ()$ — конечно-разностный оператор, соответствующий $\nabla^2 ()$.
 $J(\varphi, \psi)$ — конечно-разностный оператор, соответствующий $J(\varphi, \psi)$.
 $\delta ()$ — произвольное изменение переменной.
 $()^*$ — конечное приращение в вертикальном направлении.
 $()'$ — дифференцирование.

ГЛАВА I (2)¹

Основные физические законы и их математическое выражение

Физическая и математическая основа всех методов динамического предсказания погоды заключается в законах *сохранения количества движения, массы и энергии*. Примененные к квазинепрерывному статистическому движению молекул жидкости или газа (с помощью методов кинетической теории и статистической механики), эти основные законы выражаются математически в уравнениях Ньютона для сплошной среды, уравнении неразрывности (сохранение массы) и термодинамическом уравнении энергии. Насколько известно, эти уравнения универсальны в том смысле, что они применимы ко всем жидкостям в обычном диапазоне изменения давления, температуры и скорости независимо от состава жидкости, внешних границ и состояния движения.

Хотя общие законы, перечисленные выше, хорошо установлены и известны всем студентам — физикам и метеорологам, способ, которым они формулируются для метеорологических

¹ В скобках указан номер главы в книге «Анализ и предсказание погоды численными методами».

целей, возможно, непривычен для многих метеорологов. Вспомним, что второй закон Ньютона применим только к движению относительно инерциальной или неускоренной системы отсчета, например, движущейся без ускорения по отношению к «неподвижным» звездам. С другой стороны, очень удобно относить метеорологические движения атмосферы к системе координат, неподвижно связанной с Землей, которая делает вокруг своей полярной оси 365 оборотов в год (по отношению к Солнцу), совершает один оборот вокруг Солнца в течение года и движется равномерно-ускоренно по своей орбите вокруг Солнца. Таким образом, система координат, неподвижно связанная с Землей, не является инерциальной системой даже по отношению к Солнцу, которое в свою очередь движется с ускорением относительно неподвижных звезд. Поэтому, для того чтобы применить второй закон Ньютона к движениям относительно Земли, мы должны выразить ускорения в инерциальной системе отсчета через характеристики движений относительно Земли. По этим и по другим причинам мы прежде всего рассмотрим основные законы гидродинамики начиная со второго закона Ньютона.

Уравнения движения

К счастью, самые большие ускорения Земли по отношению к неподвижным звездам обусловлены ее вращением вокруг полярной оси, абсолютное направление которой более или менее постоянно. Это позволяет нам рассматривать Землю как тело, совершающее чистое вращение относительно инерциальной системы отсчета, перемещающейся вместе с Землей.

Начнем с рассмотрения произвольного непрерывного векторного поля $\mathbf{A}$; вектор $\mathbf{A}$ является функцией времени и трех пространственных координат. Если мы возьмем в качестве x , y и z декартовы координаты в инерциальной системе, начало которой лежит на оси вращения Земли, и если $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$ — соответствующие единичные векторы, то мы сможем написать $\mathbf{A}$ в виде

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k},$$

где A_x , A_y и A_z — составляющие $\mathbf{A}$ по осям x , y и z соответственно. Пусть теперь x' , y' и z' — декартовы координаты в системе, которая неподвижно связана с Землей, вращается вокруг полярной оси Земли с угловой скоростью Ω и начало которой совпадает с началом координат инерциальной системы. Тогда, если $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$ и $\mathbf{k}'$ — единичные векторы, соответствующие x' , y' и z' , то $\mathbf{A}$ можно также записать в виде

$$\mathbf{A} = A'_x \mathbf{i}' + A'_y \mathbf{j}' + A'_z \mathbf{k}',$$

где A'_x , A'_y и A'_z — составляющие $\mathbf{A}$ по осям x' , y' и z' . Так как направления единичных векторов $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$ и $\mathbf{k}'$ меняются со

временем, то полное дифференцирование написанного выше уравнения дает

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{dA_{x'}}{dt} \mathbf{i}' + \frac{dA_{y'}}{dt} \mathbf{j}' + \frac{dA_{z'}}{dt} \mathbf{k}' + A_{x'} \frac{d\mathbf{i}'}{dt} + \\ + A_{y'} \frac{d\mathbf{j}'}{dt} + A_{z'} \frac{d\mathbf{k}'}{dt}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Первые три члена в правой части этого уравнения попросту представляют собой полную производную от $\mathbf{A}$, взятую относительно вращающейся системы координат x' , y' и z' . Далее, так как система координат $(x', y' \text{ и } z')$ вращается с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}$, то

$$\frac{d\mathbf{i}'}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{i}', \quad \frac{d\mathbf{j}'}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{j}', \quad \frac{d\mathbf{k}'}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{k}'.$$

Таким образом, обозначая через $\frac{d'}{dt}$ полное дифференцирование относительно вращающейся системы, мы можем переписать уравнение (2.1) в виде

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d'\mathbf{A}}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{A}. \quad (2.2)$$

Это уравнение устанавливает, что разность между полными производными любого векторного поля $\mathbf{A}$, измеренными в инерциальной и вращающейся системах координат, равна векторному произведению $\mathbf{A}$ и угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}$ вращающейся системы.

Применяя полученный выше результат, мы теперь отождествим $\mathbf{A}$ с радиусом-вектором $\mathbf{r}$, определяемым равенством

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}'.$$

Уравнение (2.2) тогда принимает вид

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d'\mathbf{r}}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$$

или, так как $d\mathbf{r}/dt$ — вектор скорости,

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}' + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}, \quad (2.3)$$

где $\mathbf{U}$ и $\mathbf{U}'$ — скорости частиц, измеренные по отношению к инерциальной и вращающейся системам соответственно. Далее, отождествляя произвольный вектор $\mathbf{A}$ с $\mathbf{U}$, мы видим, что

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \frac{d'\mathbf{U}}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{U}.$$

Тогда, пользуясь уравнением (2.3) и тем, что Ω постоянно, получим

$$\begin{aligned}\frac{dU}{dt} &= \frac{d'}{dt} (U' + \Omega \times r) + \Omega \times (U' + \Omega \times r) = \\ &= \frac{d'U'}{dt} + 2\Omega \times U' + \Omega \times (\Omega \times r).\end{aligned}\quad (2.4)$$

В последнем уравнении dU/dt — ускорение относительно инерциальной системы, тогда как $d'U'/dt$ — ускорение относительно вращающейся системы. Разность между этими выражениями можно рассматривать как результирующую виртуальных сил (отнесенных к единице массы), которые должны быть приняты в расчет во вращающейся системе, даже если никакие реальные силы не действуют. Член $2\Omega \times U'$ представляет собой так называемое ускорение Кориолиса, а член $\Omega \times (\Omega \times r)$ — хорошо известное центробежное ускорение. Чтобы сделать это более ясным, заметим, что если R — проекция r , нормальная к оси вращения Земли, то

$$\Omega \times (\Omega \times r) = \Omega \times (\Omega \times R) = \Omega (R \cdot \Omega) - R (\Omega \cdot \Omega) = -\Omega^2 R, \quad (2.5)$$

где Ω — абсолютная величина Ω , или угловая скорость вращения Земли.

Теперь легко написать второй закон Ньютона в применении к движению относительно Земли. Приравнявая абсолютное ускорение результирующей всех реальных сил (на единицу массы), мы получим с учетом (2.5)

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d'U'}{dt} + 2\Omega \times U' - \Omega^2 R = F + g^* + P, \quad (2.6)$$

где F обозначает силу внутренней вязкости на единицу массы, g^* — гравитационную силу и P — силу, обусловленную пространственными изменениями атмосферного давления. Так как реальные силы в инерциальной и во вращающейся системах одни и те же, то силы F , g^* и P могут быть отнесены к вращающейся системе.

Вследствие того что гравитационная и центробежная силы являются функциями только положения точки и не зависят от движения относительно вращающейся системы, удобно рассматривать их результирующую как одну силу g , называемую силой тяжести, т. е.

$$g = g^* + \Omega^2 R.$$

Так как силы, с которыми атмосфера влияет на поверхность Земли, пренебрежимо малы по сравнению с гравитационной

или центробежной силой, форма Земли (жидкой или упругой), вращающейся как твердое тело, такова, что g направлено по нормали к поверхности Земли во всех точках этой поверхности. Над спокойной поверхностью моря это условие, конечно, выполняется очень точно. В дальнейшем мы будем определять «высоту» как расстояние по перпендикуляру от гипотетической совершенно спокойной поверхности моря, покрывающего всю Землю. Вблизи этой поверхности составляющая g , параллельная поверхности, исчезает, в то время как нормальная к поверхности составляющая равна g — величине ускорения силы тяжести.

Для целей численного расчета векторное уравнение (2.6) должно быть разложено на три скалярных уравнения, которые соответствуют составляющим по трем различным координатным направлениям. Так как уравнение (2.6) выполняется для любых координатных направлений, мы можем выбрать их произвольно. Ради удобства применения к метеорологическим данным две оси координат выбираются параллельными нашей гипотетической поверхности моря, причем одна из них направляется на север, а другая — на восток. Третья координатная ось перпендикулярна поверхности моря и направлена вверх.

Таким образом, вводя составляющие уравнения (2.6) по этим трем направлениям и имея в виду, что g направлено нормально к поверхности, мы находим

$$\frac{du}{dt} - \frac{uv \operatorname{tg} \varphi}{a} + \frac{uw}{a} - 2\Omega v \sin \varphi + 2\Omega w \cos \varphi = P_x + F_x, \quad (2.7)$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{u^2 \operatorname{tg} \varphi}{a} + \frac{vw}{a} + 2\Omega u \sin \varphi = P_y + F_y, \quad (2.8)$$

$$\frac{dw}{dt} - \frac{u^2 + v^2}{a} - 2\Omega u \cos \varphi = P_z + F_z - g. \quad (2.9)$$

Здесь x , y и z — расстояния, отсчитываемые на восток, на север и вверх соответственно¹; u , v и w — соответствующие компоненты $\mathbf{U}'$ — скорости, отнесенной к вращающейся системе; φ приближенно представляет географическую широту; a — величина, очень близкая к среднему радиусу Земли. P_x , P_y и P_z — компоненты силы градиента давления (на единицу массы) по направлениям x , y и z соответственно; F_x , F_y и F_z — соответствующие компоненты силы вязкости. Мы будем далее иметь дело только с движениями, отнесенными к системе коор-

¹ Не следует смешивать с координатами (x , y , z), введенными раньше просто для удобства рассуждений. Так как уравнение (2.5) выполняется для любого выбора начала координат и ориентации осей, нам больше не понадобится первоначальное обозначение (x , y , z).

динат, связанной с Землей, и полные производные во вращающейся системе не будут больше отмечаться штрихами.

Для сравнения величин членов различных типов в уравнениях (2.7) и (2.8) мы вначале заметим, что представление полных производных от u и v в виде суммы их частных изменений приводит к членам, размерность и величина которых соответствуют размерности и величине $2 V^2/L$, где V — характерная горизонтальная скорость ветра, L — характерное расстояние между последовательными максимумами и минимумами в поле скорости. Такие члены следует сравнить с $\frac{uv \operatorname{tg} \varphi}{a}$ и $\frac{u^2 \operatorname{tg} \varphi}{a}$, величина которых имеет порядок V^2/a . Таким образом, так как характерная длина полуволны крупномасштабных погодных возмущений имеет порядок 1500 км, а радиус Земли — около 6000 км, то члены типа $2 V^2/L$ имеют порядок величины больший, чем члены типа V^2/a . Члены порядка $2 V^2/L$ также следует сравнить с членами $u\omega/a$ и $v\omega/a$, величины которых имеют порядок VW/a , где W — характерная вертикальная скорость воздуха. Далее, характерная горизонтальная скорость ветра находится в пределах от 10^3 до 10^4 см/сек., тогда как характерная величина вертикальной скорости воздуха, связанной с крупномасштабными возмущениями, лежит в пределах от 1 до 10 см/сек. Таким образом, члены типа $2 V^2/L$ на четыре порядка величины больше, чем члены типа VW/a . Следовательно, с большой степенью точности мы можем опустить в уравнениях (2.7) и (2.8) члены, содержащие произведения составляющих скорости, так что эти уравнения примут вид

$$\frac{du}{dt} - fv = P_x + F_x, \quad (2.10)$$

$$\frac{dv}{dt} + fu = P_y + F_y, \quad (2.11)$$

где f — так называемый параметр Кориолиса, равный $2\Omega \sin \varphi$. Следует отметить, что опущенные члены являются как раз теми, которые возникают из-за пространственного изменения направлений координатных осей; отсюда мы видим, что уравнения (2.10) и (2.11) имеют ту же самую форму, что и уравнения движения в декартовой системе координат.

Пользуясь аналогичными соображениями, мы можем оценить величины членов в левой части уравнения (2.9). Их порядок соответственно составляет $2 VW/L$, V^2/a и ΩK . Для крупномасштабных движений атмосферы последние имеют порядок 10^{-4} , 10^{-2} и 1 см/сек². С другой стороны, гравитационное ускорение g имеет порядок 10^3 см/сек². Поэтому, применяя уравнение (2.9) к крупномасштабным движениям атмосферы, мы можем целиком опустить его левую часть. Так как верти-

кальные ускорения, обусловленные молекулярной вязкостью, также намного меньше ускорения силы тяжести, то уравнение (2.9) просто устанавливает, что ускорение силы тяжести g почти точно уравновешивается ускорением P_z , обусловленным плавучестью атмосферы, т. е.

$$P_z - g = 0. \quad (2.12)$$

Иначе говоря, для метеорологических целей можно считать, что атмосфера все время находится в состоянии гидростатического равновесия.

Благодаря большим горизонтальным масштабам погодных возмущений горизонтальные компоненты силы внутренней вязкости (обусловленной молекулярным переносом количества движения) также пренебрежимо малы по сравнению с силами Кориолиса и горизонтального градиента давления.

Остается выразить компоненты силы градиента давления через посредство самого поля давления. Рассмотрим элемент воздуха, заключенный в прямоугольном параллелепипеде, ребра которого параллельны координатным осям и имеют размеры Δx , Δy и Δz в направлении x , y и z соответственно, как показано на рис. 1 (2)¹. Пусть среднее давление на левую грань будет p и пусть $\frac{\partial p}{\partial x}$ — средний градиент давления в направлении оси x во всем объеме. Тогда, если Δx очень мало, среднее давление на правую грань равно $p + \Delta x \frac{\partial p}{\partial x}$. Таким образом, в соответствии с определением «давления» результирующая сила, действующая на этот элемент в направлении оси x , равна

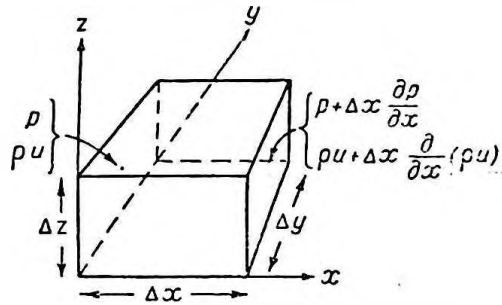


Рис. 1 (2). Схематическое представление давления или нормальных сил, действующих на прямоугольный параллелепипед воздуха, и поток массы в этот объем.

$$p \Delta y \Delta z - \left(p + \Delta x \frac{\partial p}{\partial x} \right) \Delta y \Delta z = - \frac{\partial p}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z.$$

Далее, объем этого элемента воздуха равен $\Delta x \Delta y \Delta z$, а его масса равна $\rho \Delta x \Delta y \Delta z$, где ρ — локальная плотность воздуха.

¹ В скобках указан номер рисунка в книге «Анализ и предсказание погоды численными методами».

Таким образом, результирующая сила на единицу массы, действующая на этот элемент в направлении оси x , равна

$$P_x = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Аналогично вычисляются компоненты силы градиента давления (на единицу массы) в направлениях y и z ; при этом получается

$$P_y = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad P_z = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}.$$

Подставляя результаты последних двух абзацев в уравнения (2.10)–(2.12), мы можем переписать эти уравнения в виде

$$\frac{du}{dt} - fv + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (2.13)$$

$$\frac{dv}{dt} + fu + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} + g\rho = 0. \quad (2.15)$$

Именно эта приближенная форма уравнений движения обычно используется в анализе метеорологических проблем.

Как отмечалось выше, изменения в направлениях координатных осей пренебрежимо малы; поэтому можно скомбинировать уравнения (2.13) и (2.14) в одно очень простое векторное уравнение горизонтального движения

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} + \mathbf{k} \times f\mathbf{V} + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0, \quad (2.16)$$

где $\mathbf{V}$ — проекция вектора скорости на горизонтальную поверхность, $\mathbf{k}$ — единичный вектор, направленный вертикально вверх, и ∇ — горизонтальный векторный градиент.

Применяя процедуру, аналогичную описанной выше, мы теперь оценим величины первого и второго членов уравнения (2.16). Они имеют порядок $2V^2/L$ и ΩV соответственно. Если $V = 10^3$ см/сек., то первая из этих величин имеет порядок 10^{-2} см/сек.², тогда как вторая — 10^{-1} см/сек.². Хотя такие грубые оценки, разумеется, не доказывают, что горизонтальное ускорение воздуха пренебрежимо мало, все же они говорят о наличии тенденции к тому, что силы Корiolиса и горизонтального градиента давления уравновешивают друг друга. Тогда приближенно

$$\mathbf{V} = \mathbf{k} \times \frac{1}{f} \nabla p. \quad (2.17)$$

Это так называемое соотношение геострофического ветра. Оно показывает, что ветер стремится дуть параллельно изобарам (линиям постоянного давления) на поверхности постоянной высоты и что его скорость примерно пропорциональна горизонтальному градиенту давления. Как было указано во введении, эта общая тенденция установлена эмпирически.

Уравнение неразрывности

Другой закон, который хорошо знаком специалисту по аэродинамике и инженеру-акустику и который играет существенную роль в теории крупномасштабных атмосферных движений, — это закон сохранения массы. Проще всего его выразить математически путем рассмотрения бюджета массы внутри маленького прямоугольного параллелепипеда или коробки, ребра которых параллельны координатным осям и размеры которых равны Δx , Δy и Δz по направлениям x , y и z соответственно, как уже было показано на рис. 1 (2). Подсчитаем прежде всего результирующий поток массы внутрь коробки, обусловленный движением параллельно оси x . Это движение будет оказывать влияние только на перенос массы через левую и правую грани и не будет влиять на перенос массы через остальные грани. Пусть ρu — среднее значение потока массы через левую грань и пусть $\frac{\partial \rho u}{\partial x}$ — среднее по всему объему значение производной от ρu . Тогда, если Δx очень мало, средняя величина потока массы через правую грань будет $\rho u + \Delta x \frac{\partial \rho u}{\partial x}$. Общая скорость, с которой масса поступает в коробку через левую и правую грани, равна

$$\rho u \Delta y \Delta z - \left[\rho u + \Delta x \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) \right] \Delta y \Delta z = - \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) \Delta x \Delta y \Delta z.$$

Точно такими же рассуждениями можно установить, что общие скорости переноса массы внутрь коробки через грани, параллельные плоскости чертежа, и через нижнюю и верхнюю грани соответственно равны

$$- \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) \Delta x \Delta y \Delta z \quad \text{и} \quad - \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) \Delta x \Delta y \Delta z,$$

а общая скорость переноса массы через все грани равна

$$- \Delta x \Delta y \Delta z \left[\frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) \right].$$

Далее, так как масса не возникает и не исчезает (при отсутствии сильных ядерных реакций), общая скорость поступления массы внутрь коробки должна быть точно равна скорости на-

копления массы в этой коробке. Последняя, по определению, равна

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \Delta x \Delta y \Delta z) = \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial \rho}{\partial t},$$

так как $\Delta x \Delta y \Delta z$ — фиксированный объем коробки. Окончательно приравняв скорости поступления и накопления массы, мы получим

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) - \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) - \frac{\partial}{\partial z} (\rho w). \quad (2.18)$$

Это так называемое уравнение неразрывности.

Другую, более удобную форму уравнения неразрывности можно вывести, производя дифференцирование в правой части уравнения (2.18). Перегруппировав члены, мы найдем, что

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0, \quad (2.19)$$

или, так как сумма первых четырех членов представляет собой полную производную от ρ :

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0. \quad (2.20)$$

В частности, если мы имеем дело с несжимаемой жидкостью, уравнение неразрывности сводится к следующему:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Термодинамическое уравнение энергии

Последним из физических законов, составляющих основу динамического предсказания погоды, является первое начало термодинамики. Если (как мы предположили ранее) атмосферу можно рассматривать как невязкую жидкость, то единственная работа, которая ею может производиться, — это работа расширения против нормальных сил — сил давления. Таким образом, количество тепла, получаемое данной массой воздуха, должно быть точно сбалансировано изменением ее внутренней энергии и работой, производимой для расширения ее объема. Этот закон, первое начало термодинамики, выражается математически следующим уравнением:

$$\frac{dq}{dt} = C_v \frac{dT}{dt} + p \frac{dz}{dt}. \quad (2.21)$$

Здесь dq/dt — скорость притока тепла к единице массы воздуха, и она записана в такой форме как напоминание, что это не обязательно полный дифференциал; C_v — удельная теплоемкость воздуха при постоянном объеме. Так как внутренняя энергия «идеальных» газов зависит только от абсолютной температуры T , то первый член правой части уравнения (2.21) представляет собой скорость возрастания внутренней энергии единицы массы воздуха. Второй член, в котором α — объем единицы массы, представляет собой скорость, с которой единица массы производит работу при расширении против сил давления.

Особый интерес с теоретической точки зрения представляет случай адиабатических процессов, т. е. процессов, в которых температура, давление и удельный объем могут изменяться, но приток тепла отсутствует. В этом случае уравнение (2.21) сводится к следующему:

$$C_v \frac{dT}{dt} + p \frac{d\alpha}{dt} = 0. \quad (2.22)$$

Это уравнение можно проинтегрировать, используя уравнение состояния Бойля — Шарля

$$p\alpha = RT, \quad (2.23)$$

где R — газовая постоянная для воздуха (который предполагается здесь ненасыщенным). Дифференцируя это уравнение, мы видим, что

$$p \frac{d\alpha}{dt} = R \frac{dT}{dt} - \alpha \frac{dp}{dt}.$$

Тогда, подставляя это выражение для $p d\alpha/dt$ в уравнение (2.22), мы найдем, что

$$C_p \frac{dT}{dt} - \alpha \frac{dp}{dt} = 0,$$

где C_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении, равная $(C_v + R)$. Окончательно, деля это уравнение на $C_p T$ и снова используя уравнение (2.23), получим

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{dt} - \frac{\kappa}{p} \frac{dp}{dt} = 0,$$

где κ равно R/C_p . Так как κ по существу постоянно, то предыдущее уравнение принимает вид

$$\frac{d}{dt} T \left(\frac{p_0}{p} \right)^\kappa = 0, \quad (2.24)$$

где p_0 — некоторое характерное давление, которое может быть выбрано произвольно. Если мы возьмем p_0 равным 10^3 мбар

(10^6 дин/см²), то величина $T(p_0/p)^{\gamma}$ будет представлять потенциальную температуру, обычно обозначаемую символом θ . Это температура, которую приняла бы частица воздуха, если бы она была адиабатически поднята или опущена до давления 1000 мбар начиная с давления p и абсолютной температуры T . Первое начало термодинамики для адиабатических процессов мы можем теперь сформулировать очень сжато, записав уравнение (2.24) так:

$$\frac{d\theta}{dt} = 0. \quad (2.25)$$

Согласно этому уравнению, при адиабатическом процессе потенциальная температура любой частицы воздуха будет оставаться неизменной в течение всей ее истории.

Возвращаясь к выводу уравнения (2.25), мы легко можем проверить, что в общем случае неадиабатического движения индивидуальные изменения потенциальной температуры даются следующим выражением:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\theta}{C_p T} \frac{dq}{dt}. \quad (2.26)$$

Индивидуальные изменения потенциальной температуры не превосходят нескольких градусов Цельсия в день. Исключение составляют изменения в облаках, дающих осадки и имеющих ограниченную протяженность по вертикали или горизонтали, изменения в относительно тонких слоях облака, поглощающего или испускающего тепло, и изменения в слоях воздуха, непосредственно прилегающих к относительно теплой поверхности суши или моря. С другой стороны, из-за больших вертикальных перемещений воздуха в свободной атмосфере изменения абсолютной температуры, претерпеваемые частицей воздуха, имеют порядок 20°C в день. Следовательно, для некоторых целей вполне допустимо рассматривать крупномасштабные движения атмосферы как адиабатические, хотя и не на длительный период времени.

Рассмотрим теперь наши переменные и уравнения. Пересчитав зависимые переменные, которые входят в уравнения (2.13), (2.14), (2.15), (2.18), (2.23) и (2.25), и заметив, что θ выражается через p и T , мы найдем, что эти уравнения содержат шесть переменных u , v , w , p , ρ и T . Следует также отметить, что эти шесть уравнений независимы в том смысле, что ни одно из них не может быть выведено из пяти остальных. Следовательно, в формальном математическом смысле эта система уравнений является полной системой, так как она содержит в точности столько же переменных, сколько имеется уравнений. Можно или нельзя определить решение этой системы — вопрос, который предстоит исследовать.

Следует указать, что эта система уравнений не будет в действительности полной, пока скорость притока тепла не выражена через u , v , w , p , ρ и T или не конкретизирована каким-либо образом, так как фактически уравнение (2.25) должно быть заменено более общим уравнением (2.26). Приток тепла в атмосфере фактически зависит от физических процессов поглощения, излучения, конденсации и турбулентной теплопроводности. Некоторые из этих процессов известны заведомо плохо. По этой причине, а также потому, что мы не имеем настолько детальных наблюдений в атмосфере, чтобы вычислять или предсказывать приток тепла, принято выбирать его более или менее произвольно. Конечно, проще всего принять, что приток тепла отсутствует.

Основные уравнения в координатах давления

Хотя легче всего дать физическую интерпретацию основных уравнений, если они выражены в геометрически фиксированных координатах, все же с математической точки зрения проще отнести эти уравнения к «гибридной» системе координат, в которой две системы координатных поверхностей геометрически фиксированы, а третья находится в движении. Это «координаты давления», впервые введенные Эллиassenом. В этой системе координат давления обычные координаты (x, y) обозначают положение проекции точки на горизонтальную плоскость, а давление p отмечает ее положение на вертикальной оси. «Горизонтальные» производные переменной представляют собой разности значений этой переменной в двух точках, находящихся на одной и той же *изобарической поверхности*, отнесенные к соответствующим разностям положения точки, *спроектированным на горизонтальную плоскость*. «Вертикальная» производная переменной представляет собой производную по отношению к давлению, но направлена вдоль вертикальной оси. Преобразование координат не влияет на зависимые переменные, за исключением того, что p становится одним из независимых переменных, высота z какой-либо изобарической поверхности становится зависимой переменной, а роль вертикальной скорости w берет на себя полная производная от давления ω .

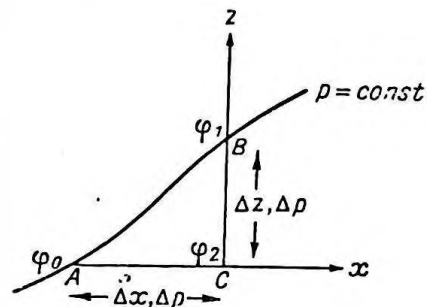


Рис. 2 (3). Вертикальное сечение, параллельное плоскости (x, z) , иллюстрирующее геометрическую связь между производными при закреплённом z и закреплённом p .

Переход от производных в системе координат (x, y, z) к производным в системе (x, y, p) легко проследить по рис. 2 (3). Пусть φ_0 и φ_1 — значения некоторой функции в двух соседних точках A и B на одной и той же изобарической поверхности, расстояние между которыми по горизонтали Δx , а по вертикали Δz . Пусть φ_2 — значение φ в точке C , которая лежит в той же горизонтальной плоскости, что и A , и на той же вертикали, что и B . Так как A и B находятся на одной и той же изобарической поверхности, приращения давления Δp , соответствующие Δx и Δz , будут одинаковы. Тогда, если Δx , Δz и Δp очень малы, то

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_z = \frac{\varphi_2 - \varphi_0}{\Delta x} = \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{\Delta x} + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\Delta x} = \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{\Delta x} + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\Delta p} \frac{\Delta p}{\Delta x}.$$

Однако, по определению,

$$\frac{\varphi_1 - \varphi_0}{\Delta x} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_p, \quad \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\Delta p} = \frac{\partial \varphi}{\partial p}, \quad \frac{\Delta p}{\Delta x} = \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_z,$$

где индексы z и p обозначают, какое переменное остается постоянным в процессе дифференцирования. Таким образом,

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_z = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_p + \frac{\partial \varphi}{\partial p} \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_z. \quad (2.27)$$

Повторяя в точности те же рассуждения, мы найдем для остальных координат

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_z = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_p + \frac{\partial \varphi}{\partial p} \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_z, \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (2.29)$$

Начиная с уравнения (2.7) и до сих пор, все горизонтальные дифференцирования проводились при фиксированном z .

Главное преимущество системы координат давления проистекает из того факта, что для метеорологических целей можно считать атмосферу находящейся в состоянии гидростатического равновесия. Чтобы оценить это преимущество, придадим конкретный вид уравнению (2.27), подставив вместо произвольной функции φ высоту изобарической поверхности z . Тогда, по определению, левая часть обращается в нуль, после чего уравнение (2.27) примет вид

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_p + \frac{\partial z}{\partial p} \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_z = 0.$$

Но из уравнений (2.15) — условия гидростатического равновесия и (2.29) мы видим, что

$$\frac{\partial z}{\partial p} = -\frac{1}{g\rho}. \quad (2.30)$$

Тогда после подстановки этого выражения для $\partial z/\partial p$ в предыдущее уравнение получим

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_z = g \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_p.$$

С помощью аналогичных рассуждений можно показать, что

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)_z = g \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_p$$

и

$$\frac{1}{\rho} \nabla_z p = g \nabla_p z. \quad (2.31)$$

Так как ускорение силы тяжести g можно считать постоянным в слое, в котором заключено 95% массы атмосферы, то приведенное выше уравнение констатирует, что сила горизонтального градиента давления (на единицу массы) пропорциональна вектору градиента изобарической высоты, причем множитель пропорциональности — постоянная величина.

Еще большее преимущество координат давления заключается в простоте формы уравнения неразрывности. Начнем с рассмотрения варианта уравнения (2.19), выраженного в векторной форме,

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_z + \mathbf{V} \cdot \nabla_z \rho + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) + \rho \nabla_z \cdot \mathbf{V} = 0.$$

Имея в виду уравнение (2.15), это уравнение можно переписать так:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right)_z + \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{V} \cdot \nabla_z p) + \frac{\partial}{\partial z} \left(w \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \frac{\partial p}{\partial z} \nabla_z \cdot \mathbf{V} - \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} \cdot \nabla_z p = 0,$$

или, замечая, что $\partial/\partial z = (\partial p/\partial z) \partial/\partial p$,

$$\frac{\partial}{\partial p} \left[\left(\frac{\partial p}{\partial t} \right)_z + \mathbf{V} \cdot \nabla_z p + w \frac{\partial p}{\partial z} \right] + \nabla_z \cdot \mathbf{V} - \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial p} \cdot \nabla_z p = 0.$$

Легко видеть, что сумма членов в квадратных скобках представляет полную производную от p . Кроме того, согласно уравнениям (2.27) и (2.28), сумма остальных членов как раз равна $\nabla_p \cdot \mathbf{V}$. Таким образом, рассматриваемое уравнение принимает форму

$$\frac{\partial \omega}{\partial p} + \nabla_p \cdot \mathbf{V} = 0, \quad (2.32)$$

где ω есть dp/dt . Это уравнение линейно относительно зависимых переменных и имеет поразительное сходство с уравнением неразрывности для несжимаемой жидкости, причем ω и p входят в это уравнение точно таким же образом, как w и z . Наконец, заметим, что полная производная от произвольной скалярной функции ϕ , которая является инвариантом при преобразовании координат, принимает следующий вид в координатах давления:

$$\frac{d\phi}{dt} \equiv \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_p + u\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_p + v\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_p + \omega\frac{\partial\phi}{\partial p}.$$

Таким образом, представляя полную производную от V суммой частных изменений в координатах давления, а также пользуясь уравнением (2.31), мы можем записать уравнение (2.16) так:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)_p + u\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_p + v\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_p + \omega\frac{\partial V}{\partial p} + \mathbf{k} \times fV + g\nabla_p z = 0. \quad (2.33)$$

Остальные уравнения, которые делают систему замкнутой, имеют вид

$$\begin{aligned} \nabla_p \cdot \mathbf{V} + \frac{\partial \omega}{\partial p} &= 0, \\ \left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right)_p + \mathbf{V} \cdot \nabla_p \theta + \omega \frac{\partial \theta}{\partial p} &= 0, \\ \frac{\partial z}{\partial p} &= -\frac{z}{g}, \\ p\alpha &= RT, \\ \theta &= T\left(\frac{p_0}{p}\right)^\kappa. \end{aligned}$$

Четыре последних уравнения будут позднее приведены к более сжатой форме, но уравнения, перечисленные выше, будут все же основными. Сформулированные выше уравнения образуют полную систему семи скалярных уравнений, содержащих семь зависимых переменных: u , v , ω , z , θ , α и T ; при этом независимыми переменными будут x , y , p и t .

ЛИТЕРАТУРА

- Eliassen A. The Quasi-Static Equations of Motion with Pressure as Independent Variable. *Geofys. Publikasjoner*, 17, 1948.
 Haurwitz B. *Dynamic Meteorology*. McGraw-Hill Book Company, New York, 1941.
 Holmboe J., Forsythe G. E., Gustin W. S. *Dynamic Meteorology*. John Wiley and Sons, New York, 1945.
 Montgomery R. B. A Suggested Method for Representing Gradient Flow in Isentropic Surfaces. *Bull. Am. Met. Soc.*, 18, 210, 1937.
 Starr V. P. A Quasi-Lagrangian System of Hydrodynamical Equations. *J. Met.*, 2, 227, 1946.

ГЛАВА 2 (3)

Динамическое предсказание погоды как математический
и вычислительный процесс

Теперь наша забота — выяснить, как поступить с решением общих гидродинамических уравнений, отправляясь от заданных начальных условий. Для простоты (хотя в действительности в этом нет необходимости) мы предположим, что движение адиабатическое и что поверхность земли везде горизонтальна. Обобщение рассуждений на случай неадиабатических движений над неровной землей достаточно очевидное и прямое; поэтому нам легко будет рассмотреть, не вдаваясь подробно в детали, какие трудности возникают в результате этого обобщения. К этому мы вернемся позднее. Главные трудности выявятся из обсуждения того частного случая, который мы рассмотрим сейчас.

Исходным пунктом нашей теории является полная система гидродинамических уравнений в координатах x, y, z , т. е. уравнений (2.13), (2.14), (2.15), (2.19), (2.23) и (2.24) или других уравнений, которые отличаются только математической формой. Однако если некоторые из этих уравнений скомбинировать, то задача интегрирования их может быть сформулирована более сжато.

Наша ближайшая цель — выразить давление p через потенциальную температуру θ . Комбинируя уравнения (2.15) и (2.23), мы найдем

$$\frac{T}{p} \frac{\partial p}{\partial z} = - \frac{g}{R}.$$

Но определение θ подразумевает, что

$$T = \theta \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\kappa}.$$

Тогда, подставляя это выражение для T в предыдущее уравнение, мы получим

$$\frac{p^{\kappa-1}}{p_0^{\kappa}} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} = - \frac{g}{R\theta},$$

или

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\kappa} = - \frac{\kappa g}{R\theta}.$$

Наконец, мы проинтегрируем обе части этого уравнения по высоте от произвольной высоты z до бесконечности, принимая

во внимание, что давление p обращается в нуль на верхней границе атмосферы. Таким образом,

$$\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = \frac{\gamma g}{R} \int_z^{\infty} \frac{dz'}{\theta(z')}, \quad (3.1)$$

где z' — переменная интегрирования, соответствующая z . Согласно этому уравнению, распределение давления полностью определяется распределением потенциальной температуры θ .

Как было указано во введении, единственными метеорологическими величинами, которые измеряются непосредственно в обычной практике, являются давление p , абсолютная температура T и составляющие горизонтального ветра u и v . Плотность ρ легко получается по значениям p и T с помощью уравнения состояния (2.23). С другой стороны, вертикальная составляющая скорости, которая также фигурирует в гидродинамических уравнениях, не измеряется и не выражается явным образом через другие величины. Мы сейчас покажем, что вертикальная скорость воздуха в какой-нибудь момент времени полностью определяется распределением u , v и p в тот же момент. Начнем с замечания, что уравнение, непосредственно предшествующее уравнению (2.32), может быть записано в виде

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla p + w \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \frac{\partial p}{\partial z} \nabla \cdot \mathbf{V} - \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} \cdot \nabla p = 0,$$

где производные без индексов являются производными в системе координат (x, y, z) . Далее, величина в скобках представляет собой полную производную от давления, так что выписанное выше уравнение приводится к виду

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{dp}{dt} \right) = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} \cdot \nabla p - \frac{\partial p}{\partial z} \nabla \cdot \mathbf{V}.$$

Интегрируя это уравнение по высоте от некоторой высоты z' до бесконечности и замечая, что dp/dt обращается в нуль на верхней границе атмосферы, мы найдем

$$\frac{dp}{dt} = - \int_{z'}^{\infty} \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z''} \cdot \nabla p - \frac{\partial p}{\partial z''} \nabla \cdot \mathbf{V} \right) dz'', \quad (3.2)$$

где z'' — переменная интегрирования, соответствующая z или z' . Другое выражение для dp/dt можно получить, комбинируя уравнение неразрывности с термодинамическим уравнением энергии. Исключая T из уравнения (2.22) с помощью уравнения (2.23), мы найдем, что

$$\frac{C_v}{R} \left(z \frac{dp}{dt} + p \frac{dz}{dt} \right) + p \frac{dz}{dt} = 0,$$

или, так как $C_p = R + C_v$ и $\alpha = \frac{1}{\rho}$,

$$\frac{1}{\gamma p} \frac{dp}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt},$$

где γ — отношение удельных теплоемкостей C_p/C_v . Однако, согласно уравнению (2.20),

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{V} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Тогда, исключая $(1/\rho) dp/dt$ из двух предыдущих уравнений, получим

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\nabla \cdot \mathbf{V} - \frac{1}{\gamma p} \frac{dp}{dt}.$$

Интегрируя это уравнение по высоте от поверхности земли (предполагаемой горизонтальной) до произвольной высоты z и замечая, что w должна обращаться в нуль на твердой и непроницаемой горизонтальной поверхности, мы найдем, что

$$w = -\int_0^z \nabla \cdot \mathbf{V} dz' - \frac{1}{\gamma} \int_0^z \frac{1}{p} \frac{dp}{dt} dz'.$$

Наконец, подставляя вместо dp/dt его выражение по уравнению (3.2), найдем

$$w = -\int_0^z \nabla \cdot \mathbf{V} dz' + \\ + \frac{1}{\gamma} \int_0^z \frac{1}{p} \int_{z'}^{\infty} \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z''} \cdot \nabla p - \frac{\partial p}{\partial z''} \nabla \cdot \mathbf{V} \right) dz'' dz'. \quad (3.3)$$

Следует подчеркнуть, что правая часть этого уравнения включает только переменные u, v, p и не содержит производных по времени. Поэтому распределение w в любой момент времени может быть вычислено (в принципе) из распределений u, v и p в тот же момент.

Для удобства мы перечислим здесь оставшиеся уравнения полной системы. Это уравнение состояния (2.23)

$$\rho = \frac{p}{RT}, \quad (3.4)$$

определение потенциальной температуры

$$\theta = T \left(\frac{p_0}{p} \right)^\kappa, \quad \text{или} \quad T = \theta \left(\frac{p}{p_0} \right)^\kappa, \quad (3.5)$$

гидростатическое уравнение в форме (3.1)

$$\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\kappa} = \frac{\kappa g}{R} \int_z^{\infty} \frac{dz'}{\theta}, \quad (3.6)$$

термодинамическое уравнение энергии для адиабатического движения, которое получается, если расписать полную производную от θ в уравнении (2.25) в виде суммы частных изменений

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\left(\mathbf{V} \cdot \nabla \theta + w \frac{\partial \theta}{\partial z}\right), \quad (3.7)$$

и наконец, горизонтальные уравнения движения по (2.13) и (2.14):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\left(\mathbf{V} \cdot \nabla u + w \frac{\partial u}{\partial z} - f v + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}\right), \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\left(\mathbf{V} \cdot \nabla v + w \frac{\partial v}{\partial z} + f u + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}\right). \quad (3.9)$$

Легко проверить, что система уравнений (3.3) — (3.9) полная, так как эти семь уравнений содержат только семь переменных u , v , w , p , ρ , T , θ и независимы в том смысле, что ни одно из них не может быть выведено из остальных шести.

Сформулированная в очень общем виде задача динамического или численного предсказания погоды состоит в определении решения уравнений (3.3) — (3.9), которое удовлетворяет заданным начальным условиям для u , v , p и T и соответствующим граничным условиям, а именно давление и перенос массы обращаются в нуль на бесконечно большой высоте, а поток воздуха через поверхность земли отсутствует. Как уже подчеркивалось, эта система уравнений содержит семь функций и четыре независимые переменные и к тому же является нелинейной. Поэтому мы не можем использовать обычные правила суперпозиции, по которым система частных решений может быть скомбинирована так, что они будут удовлетворять начальным и граничным условиям и одновременно — полной системе уравнений. Более того, так как сложность этой системы уравнений намного превосходит сложность любой нелинейной системы, которая решалась до сих пор, то едва ли можно ожидать, что проблема динамического предсказания погоды будет решена аналитически и одним взмахом. По этим причинам мы должны обратиться к довольно скучным, но весьма эффективным методам численного интегрирования, а именно к конечно-разностным методам.

Метод конечных разностей

По существу метод конечных разностей состоит в представлении непрерывных переменных через их значения в конечном числе дискретных и близко друг от друга расположенных в пространстве точек и в аппроксимации производных от функций разностями их значений в подходящим образом расположенных точках, расстояние между которыми мало, но конечно.

Вначале рассмотрим удовлетворяющее требованиям задачи расположение дискретных точек. Мы начнем с определения трех семейств дискретных координатных поверхностей. Одно из них — это семейство меридиональных плоскостей, пересекающихся на полярной оси Земли и отделенных равными угловыми интервалами. Второе — это семейство конусов, вершины которых находятся в центре Земли, а образующие являются линиями, выходящими из центра Земли и пересекающимися одинаково отстоящие друг от друга широтные круги. Третье семейство — это равноотстоящие «горизонтальные» поверхности¹. Пересечения этих трех семейств поверхностей образуют правильное множество дискретных точек. Часть этих точек показана схематически на рис. 3(4) точками, обведенными кружками. Расстояния между соседними точками в направлениях y (на север) и z (вверх) с большой степенью точности можно считать постоянными. Пусть эти расстояния будут соответственно Δy и Δz . Однако расстояния между соседними точками в направлении x (на восток) не являются постоянными, но явно зависят от географической широты. Из геометрических соображений ясно, что если $\Delta_0 x$ — расстояние между соседними точками на экваторе, то расстояние Δx между соседними точками в направлении x на любой широте φ приближенно равно

$$\Delta x = \Delta_0 x \cos \varphi.$$

Заметим, что это соотношение, а также постоянство Δy зависят полностью от того факта, что эффективная глубина атмосферы намного меньше радиуса Земли a .

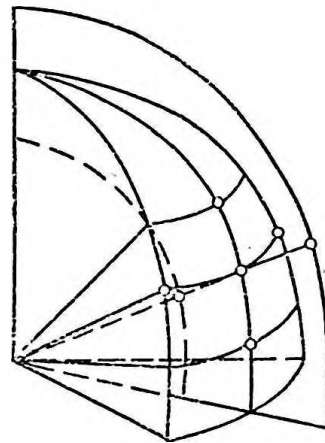


Рис. 3 (4). Пример последовательности дискретных точек (кружки), расположенных на пересечениях дискретных поверхностей уровней, дискретных конусов постоянной широты и дискретных плоскостей постоянной долготы.

¹ Для определения разностей координатных расстояний можно пренебречь несферичностью Земли.

Относительные положения дискретных точек в этом правильном множестве проще всего установить, нумеруя координатные поверхности в порядке возрастания x , y или z . Так, положение точки пересечения i -той меридиональной плоскости, j -того широтного конуса и k -той поверхности уровня однозначно определяется целыми числами i, j, k . Соответственно этому величины независимых переменных в этих дискретных точках будут отмечаться нижними индексами i, j, k . Если один (или более) из этих индексов опущен, то под этим мы будем подразумевать, что это опущен соответствующий индекс точки i, j, k . Например,

$$\varphi_{j+1} \equiv \varphi_{ij+1k}.$$

Сейчас мы подходим к решающему пункту рассуждения. Если Δx , Δy и Δz очень малы (т. е. намного меньше, чем характерные размеры крупномасштабных погодных возмущений по направлениям x, y, z соответственно), мы можем аппроксимировать производные какой-либо функции φ по направлениям x, y, z центральными разностями между ее значениями в дискретных точках нашего регулярного множества:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{ijk} = \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}}{2\Delta x},$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_{ijk} = \frac{\varphi_{j+1} - \varphi_{j-1}}{2\Delta y},$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_{ijk} = \frac{\varphi_{k+1} - \varphi_{k-1}}{2\Delta z}.$$

Хотя эти соотношения при конечных Δx , Δy , Δz являются приближенными, они становятся все точнее с уменьшением Δx , Δy , Δz . В пределе, по мере того как точки сближаются все теснее и теснее, эти уравнения превращаются просто в определения производных от φ по направлениям x, y и z .

Заметим теперь, что подынтегральные выражения в интегралах правой части уравнения (3.3) содержат только производные от u, v и p по x, y и z . Поэтому эти подынтегральные выражения могут быть вычислены приближенно методом конечных разностей в каждой точке ijk нашей сетки дискретных точек. Более того, сами интегралы могут быть вычислены методом конечных сумм, т. е. методом Симпсона, методом трапеций или каким-нибудь другим приближенным методом. Тогда в принципе мы можем вычислить начальное значение w в каждой точке ijk по начальным значениям u, v и p в некоторых точках сетки. Начальные значения p и θ в каждой точке ijk могут быть вычислены по начальным значениям p и T с помощью уравнений (3.4) и (3.5). Таким образом, начальные

значения всех функций полной системы могут быть определены в каждой точке ijk по наблюдаемым начальным значениям u , v , p и T .

С точки зрения предсказания погоды важной чертой системы уравнений (3.3)—(3.9) является то, что только уравнения (3.7)—(3.9) содержат производные по времени и что правые части этих трех уравнений содержат только производные по x , y и z . Таким образом, правые части уравнений (3.7)—(3.9) в каждой точке ijk могут быть вычислены методом конечных разностей по начальным значениям u , v , w , θ , p и r . Производные $\partial\theta/\partial z$, $\partial u/\partial z$ и $\partial v/\partial z$ не могут быть вычислены методом центральных разностей в точках на поверхности земли, но в этих точках w обращается в нуль и поэтому нет надобности вычислять эти производные у поверхности земли. Таким образом, уравнения (3.7)—(3.9) позволяют нам вычислять начальные производные по времени от θ , u и v в каждой точке ijk . Так как начальные значения θ , u и v известны и начальные значения их производных по времени могут быть вычислены, то мы можем экстраполировать их значения на малый промежуток времени с помощью конечно-разностной аппроксимации:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{ijk}^v = \frac{\varphi_{ijk}^{v+1} - \varphi_{ijk}^{v-1}}{2\Delta t},$$

где v — номер шага по времени. Когда $v=0$, мы используем формулу нецентральной разности

$$\varphi_{ijk}^1 = \varphi_{ijk}^0 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{ijk}^0 \Delta t.$$

Величины θ^1 , u^1 и v^1 , полученные таким путем, мы будем называть предсказанными значениями θ , u , v .

Далее, предсказанное значение p в каждой точке ijk может быть определено по предсказанным значениям θ путем применения метода конечных сумм в уравнении (3.6). Тогда предсказанное значение w в каждой точке ijk может быть определено по предсказанным значениям u , v и p с помощью уравнения (3.3), предсказанное значение T в каждой точке ijk может быть вычислено по предсказанным значениям θ и p с помощью уравнения (3.5) и предсказанное значение r в каждой точке ijk может быть вычислено по предсказанным значениям p и T с помощью уравнения (3.4). Таким образом, возможно на основании математических правил предсказать значения полной системы функций в каждой точке ijk в момент $t=\Delta t$, если только мы знаем значения тех же самых функций в каждой точке ijk в момент $t=0$. Затем мы просто рассматриваем предсказанные значения как новую систему начальных данных и повторяем описанный процесс много раз, пока сумма малых

приращений времени Δt не даст желаемый период предсказания.

Эта процедура решения гидродинамических уравнений может быть распространена на случай неадиабатического движения путем использования более общего уравнения (2.26) вместо уравнения (3.7) и с применением уравнения (2.21) вместо уравнения (2.22) там, где термодинамическое уравнение энергии входит как составная часть вывода уравнения (3.3). Общая форма уравнений не меняется, и метод их решения остается тем же. Более того, обобщение метода на случай движений над неровной местностью может быть произведено путем введения другой (но более сложной) системы координат, в которой одной из координатных поверхностей является поверхность земли или моря. С этими изменениями обрисованная выше процедура может быть применена в условиях, которые по своей общности приближаются к существующим в реальной атмосфере условиям.

Некоторые практические задачи численного предсказания погоды

Ввиду прямоты и большой общности метода, описанного в предыдущем параграфе, законно было бы спросить, почему этот метод не применяется в оперативной практике прогноза погоды. Имеются различные причины того, что этот метод не используется в его наиболее общей форме; при этом не последнее место занимает тот факт, что начальные значения давления p , температуры T и составляющих ветра u и v не наблюдаются во всех точках густой сетки, требуемой для применения конечно-разностных методов; они также не наблюдаются на очень больших высотах. Поэтому имеется практическое ограничение точности, с которой можно вычислять вертикальную скорость w по начальным значениям u , v и p или вычислять предсказанные значения p по предсказанным значениям θ . Эта трудность, которая присуща всем методам предсказания, носит в конечном счете экономический характер и не может быть преодолена только математическими средствами.

Второе препятствие, уже указанное в главе 1(2), состоит в том, что приток тепла непосредственно не наблюдается, а также не может быть предсказан с какой-либо степенью уверенности. Ясно, что окончательное преодоление этой трудности невозможно без развития общей теории конденсации, радиации, поглощения и излучения и турбулентной теплопроводности. Пока же мы должны или прибегнуть к крайне идеализированному механизму нагревания, или пренебречь им совсем.

Как было указано ранее, для некоторых ограниченных целей и ограниченных периодов времени термодинамические процессы в атмосфере можно рассматривать как адиабатические.

Еще одна трудность возникает из-за самого объема вычислительной задачи. Предположим, что мировая сеть содержит точки, лежащие на 50 меридиональных плоскостях, 50 широтных конусах и 10 горизонтальных поверхностях, — всего 100 000 точек. По самому скромному подсчету среднее количество вычислительных операций, которые надо провести для каждой точки на одном шаге по времени, равно 10. Наконец, как указано во введении и как будет показано позднее, число шагов по времени, требуемое для 24-часового прогноза, равно примерно 100. Таким образом, общее число численных операций, необходимое для 24-часового прогноза над всей Землей, имеет порядок 100 000 000. Это количество числовых операций, переведенное в вычислительное время, будет требовать около 10 000 сек., если эти операции производятся современными быстродействующими вычислительными машинами, работающими с полной эффективностью. Фактически вычисление на неодушевленных и не способных думать машинах включает «административные» накладные расходы порядка 1000 % полезного времени. Поэтому более реалистическая оценка общего времени, требуемого для 24-часового прогноза, составляет около 100 000 сек., или около 1,15 суток. Ясно, что это недостаточно быстро для практических целей.

Только что поставленная проблема — это проблема инженерных и экономических возможностей и к тому же допустимых возможностей. Например, достаточно только в десять раз увеличить скорость вычислений или в десять раз увеличить шаг по времени, чтобы наиболее общая процедура динамического предсказания оказалась в сфере инженерных возможностей. В связи с этой же проблемой следует снова подчеркнуть, что максимальный допустимый шаг по времени Δt определяется решениями самих уравнений. Этот факт выводит нас на путь выяснения возможности модификации уравнений (и их решений) таким образом, чтобы интервал Δt мог бы увеличиться. Проблема нахождения модификаций, которые достаточны для исключения «высокочастотных» решений, но не изменяют существенно метеорологических решений, представляет собой так называемую проблему отфильтровывания.

Последнее и наиболее серьезное препятствие для решения гидродинамических уравнений методом, описанным в предыдущем параграфе, происходит из свойств самой атмосферы. Раньше было указано, что крупномасштабные горизонтальные ускорения воздуха примерно на порядок меньше, чем любая из сил (отнесенных к единичной массе), взятая отдельно (т. е. кориолисова сила или сила горизонтального градиента давления). Также отмечалось, что вследствие этого факта компоненты ветра и горизонтального градиента давления должны измеряться и передаваться с точностью до 1 %, для того чтобы

горизонтальные ускорения можно было вычислять с точностью до 10%, если последние вычисляются непосредственно из уравнений движения (2.13) и (2.14) или из эквивалентных им уравнений (3.8) и (3.9). Однако компоненты ветра и горизонтального градиента давления не измеряются с точностью до 1%; кроме того, их измерения в отдельных точках нерепрезентативны для крупномасштабных движений атмосферы, если говорить о таких пределах точности. Поэтому горизонтальные ускорения, вычисленные непосредственно из измерений силы Кориолиса и силы горизонтального градиента давления, будут содержать ошибки в 100% и будут вообще намного больше, чем ускорения, отвечающие крупномасштабным атмосферным движениям. Такие ложные ускорения породят возмущения с очень большой скоростью и частотой; амплитуды этих возмущений будут намного больше, чем наблюдаемые амплитуды высокочастотных возмущений в земной атмосфере.

Вывод, к которому мы вынуждены прийти, состоит в том, что атмосфера сама по себе поддерживается вблизи некоторого состояния равновесия, причем гораздо ближе, чем это обнаруживается непосредственными измерениями. Таким образом, если мы должны точно вычислять горизонтальные ускорения из уравнений (3.8) и (3.9), мы должны прежде всего выяснить, в какой степени крупномасштабные движения атмосферы находятся в равновесии. Мы смогли бы тогда наложить на начальное состояние атмосферы искусственные условия равновесия, чтобы в результате ложные большие ускорения были подавлены. Задача формулировки условия естественного состояния равновесия между распределением давления с крупномасштабными движениями атмосферы была одной из главных задач динамического предсказания погоды на протяжении последних пяти лет. Как мы позднее увидим, она тесно связана с проблемой отфильтровывания.

По аналогичным причинам горизонтальная дивергенция скорости ветра не может быть точно вычислена из непосредственных измерений скорости ветра. Косвенным образом можно установить, что сумма $(\partial u/\partial x) + (\partial v/\partial y)$, как правило, на порядок меньше, чем $\partial u/\partial x$ или $\partial v/\partial y$, взятые в отдельности, т. е. последние стремятся почти полностью компенсировать друг друга. Таким образом, для того чтобы вычислить $\nabla \cdot \mathbf{V} = (\partial u/\partial x) + (\partial v/\partial y)$ с точностью до 10%, компоненты ветра должны измеряться с точностью до 1%. Ветры, однако, не измеряются и не передаются с точностью, большей чем 10%. Поэтому, так же как и горизонтальное ускорение ветра, горизонтальная дивергенция, вычисленная из непосредственных измерений ветра, содержит ошибки до 100% и, как правило, намного больше, чем дивергенция, отвечающая крупномасштабным движениям атмосферы. В результате этого вертикальная

скорость воздуха w не может быть точно вычислена из уравнения (3.3), пока не погашены каким-нибудь способом ложные большие возмущения дивергенции.

ЛИТЕРАТУРА

- Charney J. On the Scale of Atmospheric Motions. *Geofys. Publikasjoner*, 17, 1948.
Milne W. Numerical Solution of Differential Equations. John Wiley and Sons, New York, 1953.
Richardson L. Weather Prediction by Numerical Process. Cambridge Univ. Press, London, 1922.

ГЛАВА 3(4)

Типы волновых движений в атмосфере

Перед тем как мы сможем приступить к систематическому рассмотрению главных задач, перечисленных в предыдущей главе, необходимо прежде всего выделить наиболее важные и характерные типы атмосферных движений. Для того чтобы подойти к решению проблемы отфильтровывания, мы должны прежде всего посмотреть, какие разновидности движения соответствуют различным возможным типам решений гидродинамических уравнений, найти физические механизмы, которым эти различные типы движения обязаны своим существованием, и посмотреть, какие модификации гидродинамических уравнений необходимы и достаточны, чтобы исключить некоторые типы решений (или движений), оставляя в то же время остальные. Иначе маловероятно, чтобы мы случайно попали на такие модификации, которые были бы достаточны для исключения всех типов движений атмосферы, кроме метеорологических. Как отмечалось ранее, подобного рода представление необходимо также для установления условий «естественного» равновесия между распределением давления и крупномасштабными движениями атмосферы.

Таким образом, нашей ближайшей заботой будет рассмотреть кратко различные типы движения, которые могут существовать в чистой форме при очень специальных условиях и тем более должны существовать при более общих условиях. Для удобства мы рассмотрим волновые движения просто потому, что линеаризованные гидродинамические уравнения для невязкого адиабатического движения имеют частные решения, которые периодичны как по пространству, так и по времени, и потому, что путем суперпозиции элементарных периодических решений легко построить более общие решения.

Для наших теперешних целей типы чисто волновых движений в атмосфере можно классифицировать по названиям: про-

дольные, вертикально-поперечные и горизонтально-поперечные. Продольные волны (или волны сжатия) — это те, в которых траектории частиц лежат на линиях, параллельных направлению распространения волны, как показано на рис. 4(5).

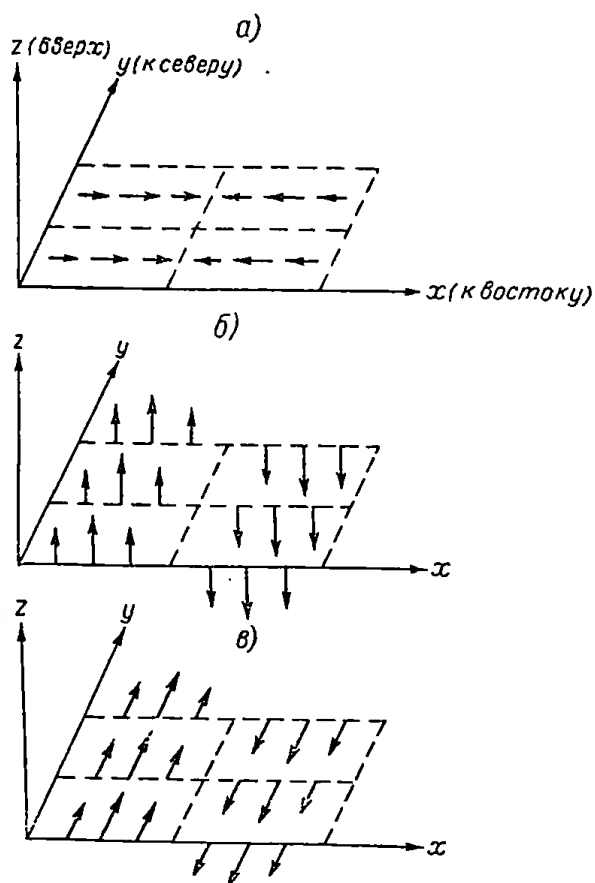


Рис. 4 (5). Схематическое распределение возмущений скорости, связанных с движущимися на восток волнами сжатия (а), движущимися на восток вертикально-поперечными волнами (б) и движущимися на восток горизонтально-поперечными волнами (в).

С другой стороны, вертикально-поперечные волны — это те, в которых частицы движутся вверх и вниз, в то время как волны распространяются горизонтально; аналогично, горизонтально-поперечные волны — это те, в которых частицы движутся на север и на юг, в то время как волны распространяются на восток.

Звуковые волны

Сначала рассмотрим продольные волны, или волны сжатия. Для того чтобы исключить поперечные волны, мы ограничим траектории частиц так, чтобы они располагались параллельно оси x ($v=w=0$), и позволим u изменяться только в направлении x . Соответствующими уравнениями будут уравнения (2.13), (2.20) и второе уравнение после уравнения (3.2), а именно

$$\frac{du}{dt} - fv + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (4.1)$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0, \quad (4.2)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{\gamma p} \frac{dp}{dt}. \quad (4.3)$$

Исключая $d\rho/dt$ из уравнений (4.2) и (4.3), мы найдем, что

$$\frac{dp}{dt} + \gamma p \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0. \quad (4.4)$$

В рассматриваемом случае, когда $v=w=0$, уравнения (4.1) и (4.4) сводятся к следующим:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + \gamma p \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (4.6)$$

Общий характер решений уравнений (4.5) и (4.6) может быть найден применением метода возмущений. Мы сначала рассмотрим состояние равновесия, в котором $u=\bar{u}$, $\rho=\bar{\rho}$ и $p=\bar{p}$; при этом $\partial \bar{u}/\partial t = \partial \bar{u}/\partial x = \partial \bar{\rho}/\partial t = \partial \bar{\rho}/\partial x = \partial \bar{p}/\partial t = \partial \bar{p}/\partial x = 0$. Тогда, обозначая через u' , ρ' и p' отклонения u , ρ и p от их значений в состоянии равновесия, мы будем иметь

$$u = \bar{u} + u', \quad \rho = \bar{\rho} + \rho', \quad p = \bar{p} + p',$$

так что уравнения (4.5) и (4.6) примут вид

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + (\bar{u} + u') \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{1}{\bar{\rho}} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\rho'}{\bar{\rho}} \right)^n \right] \frac{\partial p'}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + (\bar{u} + u') \frac{\partial p'}{\partial x} + \gamma (\bar{p} + p') \frac{\partial u'}{\partial x} = 0.$$

Таким образом, если $|u'| \ll |\bar{u}|$, $|\rho'| \ll \bar{\rho}$ и $|p'| \ll \bar{p}$, то мы можем опустить все члены, которые содержат произведения «возму-

щений» u' , ρ' и p' или их производных. Тогда два полученных выше уравнения линеаризируются:

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial p'}{\partial x} + \gamma \bar{p} \frac{\partial u'}{\partial x} = 0.$$

Исключив u' из этих двух уравнений, мы найдем, что

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) p' = \frac{\gamma \bar{p}}{\bar{\rho}} \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2}. \quad (4.7)$$

Это хорошо известное волновое уравнение. Оно имеет периодическое, или «волновое», решение вида

$$p' = A e^{i\alpha(x - ct)},$$

где A — постоянная амплитуда, α — постоянное волновое число и c — постоянная фазовая скорость. Можно проверить подстановкой, что функции этого типа являются решениями уравнения (4.7) при условии, что фазовая скорость c определяется формулой

$$c = \bar{u} \pm \left(\frac{\gamma \bar{p}}{\bar{\rho}} \right)^{1/2}.$$

Пользуясь уравнением состояния, можно записать последнее равенство так:

$$c = \bar{u} \pm \sqrt{\gamma R \bar{T}}, \quad (4.8)$$

где $\bar{T}$ — абсолютная температура в невозмущенном состоянии. В уравнении (4.8) можно узнать известную формулу для скорости звука.

Предыдущий вывод показывает, что один из возможных типов решения общих гидродинамических уравнений соответствует периодическому, или волновому, движению, в котором движения индивидуальных частиц параллельны направлению распространения волны. Это, конечно, волны сжатия, или звуковые волны, которые распространяются со скоростью порядка 1100 км/час и обычно в обоих направлениях одновременно. Стоит также отметить, что скорость звуковых волн зависит только от физических свойств среды и не зависит от амплитуды и длины (или частоты) этих волн¹.

¹ На самом деле это не совсем точно, особенно для звуковых волн очень большой интенсивности и частоты. Однако, к счастью, скорость звука с большой точностью можно считать не зависящей от частоты в обычном диапазоне звучания музыки или человеческой речи; в противном случае звук, который воспринимает слушатель, отличался бы от звука, который создается оратором, певцом или оркестром.

Для того чтобы более ясно представить себе, благодаря какому физическому механизму существуют или распространяются звуковые волны, мы качественно опишем процесс, который наши уравнения описывают количественно. Представим себе длинную трубу, наполненную первоначально воздухом, находящимся в покое при постоянном давлении и плотности; допустим, что с одной стороны этой длинной трубы вставлена другая труба, как показано на рис. 5(б). Вторая труба содержит поршень, первоначальное положение которого показано сплошными линиями. Теперь предположим, что поршень очень быстро передвигается к положению, показанному пунктирными линиями, — так быстро, что воздух, находящийся за пределами точек A и A' , еще не приходит в движение к тому моменту, когда поршень достигает конечного положения. Вопрос состоит в следующем: что происходит в результате сжатия воздуха между A' и A ?

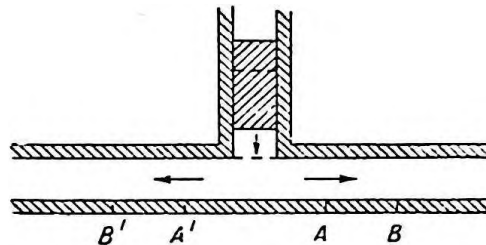


Рис. 5 (б). Схема эксперимента, иллюстрирующего распространение волн сжатия, или звуковых волн.

Длинная труба, изображенная в сечении вдоль ее длины, вначале наполнена неподвижным воздухом, имеющим постоянные температуру и давление. В короткой трубе, присоединенной к длинной, имеется плотно пригнанный поршень, который может двигаться вдоль нее.

Согласно уравнению (4.3), сжатие воздуха между A' и A повлечет за собой адиабатический рост давления между A и A' , так что давление слева от A станет больше, чем справа. Тогда, согласно уравнению движения (4.1), возникший в результате этого градиент давления сообщит воздуху в A ускорение направо. Поэтому в течение очень короткого последующего промежутка времени Δt воздух в A будет двигаться направо, тогда как воздух в B будет все еще оставаться неподвижным. Другими словами, за время Δt воздух между A и B будет сжиматься, и его давление будет адиабатически возрастать, так что градиент давления в B будет направлен вправо и будет сообщать воздуху в B ускорение направо и так далее. Таким образом, мы видим, что часть импульса давления, возникшего в результате первоначального сжатия воздуха, передается направо от точки A и по соображениям симметрии налево от точки A' . Согласно нашему математическому результату, этот импульс передается налево и направо одновременно со скоростью

$$c = \sqrt{\gamma R T}.$$

Из этого описания следует, что необходимой частью механизма, с помощью которого распространяются звуковые волны,

является адиабатическое возрастание (или убывание) давления, вызванное сжатием (или разрежением) среды. Фактически характерная особенность чисто звуковых волн состоит в том, что градиенты давления (которые порождают ускорение и как следствие этого сжатие и разрежение) обусловлены одним только адиабатическим сжатием. Если бы эта особенность отсутствовала, звуковые волны не могли бы существовать.

Гравитационные волны

Обратимся теперь к вертикально-поперечным волнам. Чтобы исключить из рассмотрения горизонтально-поперечные волны, мы ограничим движение частиц так, чтобы оно проис-

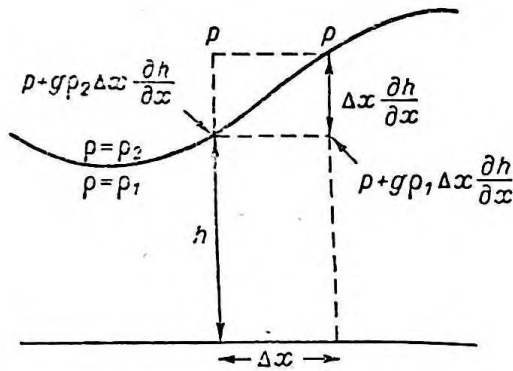


Рис. 6 (7). Градиент давления, обусловленный изменениями высоты разрыва плотности, в вертикальной плоскости, параллельной плоскости (x, z) .

ходило в плоскостях, параллельных плоскости (x, z) , а для исключения волн сжатия, или звуковых волн, мы будем считать атмосферу несжимаемой жидкостью. Для упрощения дальнейшего изложения мы будем рассматривать атмосферу состоящей из двух однородных слоев с плотностями ρ_1 и ρ_2 , разделенных поверхностью разрыва плотности. Мы также предположим, что существует некоторый уровень в верхнем слое (с плотностью ρ_2), где горизонтальный градиент давления исчезает.

Тогда из гидростатического уравнения (2.15) мы видим, что горизонтальный градиент давления исчезает везде в верхнем слое, так как

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) = - \frac{\partial}{\partial x} (g\rho_2) = 0.$$

Кроме того, если через h обозначить высоту поверхности разрыва плотности, то из гидростатического уравнения будет следовать, что горизонтальный градиент давления в нижнем слое (с плотностью ρ_1) имеет вид

$$\frac{\partial p}{\partial x} = g(\rho_1 - \rho_2) \frac{\partial h}{\partial x}. \quad (4.9)$$

Это соотношение показано графически на рис. 6(7).

Одно из важных следствий уравнения (4.9) состоит в том, что сила градиента давления не зависит от высоты. Тогда если начальная скорость не зависит от высоты, то, как следует из уравнения (2.13), ускорения также не зависят от высоты. Но это в свою очередь подразумевает, что скорость должна оставаться независимой от высоты для всех моментов времени, если она не зависела от высоты в начальный момент. Мы можем теперь потребовать, чтобы u было постоянно по высоте, будучи уверенным, что это требование динамически согласовано.

Уравнение движения, соответствующее этой модели, получается приравниванием нулю v и $\partial u/\partial z$ в уравнении (2.13) и заменой в этом уравнении $\partial p/\partial x$ его выражением по (4.9). Тогда в нижнем слое

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right) \frac{\partial h}{\partial x} = 0. \quad (4.10)$$

Так как оба слоя несжимаемы и так как $v=0$, уравнение неразрывности (2.20) сводится к следующему:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Интегрируя это уравнение по высоте от $z=0$ до $z=h$ и замечая, что u не зависит от z , мы найдем, что

$$h \frac{\partial u}{\partial x} + w_h - w_0 = 0.$$

Чтобы погасить вынужденные колебания, мы предположим, что поверхность земли ($z=0$) абсолютно плоская, откуда следует, что w обращается в нуль при $z=0$. Мы также заметим, что жидкость, примыкающая к поверхности разрыва плотности, состоит из одного и того же слоя частиц и следует за движением поверхности разрыва. Поэтому вертикальная скорость w_h жидкости на поверхности разрыва равна dh/dt . Тогда последнее уравнение может быть записано в виде.

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (4.11)$$

Это уравнение, взятое вместе с уравнением (4.10), составляет полную систему двух уравнений, в которых неизвестными являются u и h .

Как и прежде, общий характер решений уравнений (4.10) и (4.11) будет найден методом возмущений. Мы начнем с рассмотрения состояния равновесия, в котором $u=\bar{u}$ и $h=H$, так что $\partial \bar{u}/\partial t = \partial \bar{u}/\partial x = \partial H/\partial t = \partial H/\partial x = 0$. Следуя методике, описан-

ной раньше в этом параграфе, мы подставим выражения $(\bar{u} + u')$ и $(H + h')$ вместо u и h в уравнения (4.10) и (4.11) и пренебрежем членами, содержащими произведения возмущений u' и h' или их производных. В результате получим, что

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} + g \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right) \frac{\partial h'}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial h'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial h'}{\partial x} + H \frac{\partial u'}{\partial x} = 0.$$

Исключив u' из этих двух уравнений, мы найдем, что

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x}\right) h' = gH \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right) \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2}. \quad (4.12)$$

Следует отметить, что это уравнение имеет в точности ту же математическую форму, что и уравнение (4.7), причем h' соответствует p' , а константа $gH(1 - \rho_2/\rho_1)$ соответствует константе $\gamma\bar{p}/\rho$. Поэтому уравнение (4.12) имеет волновое решение вида

$$h' = Ae^{i\lambda(x - ct)}$$

при условии, что фазовая скорость c определяется формулой

$$c = \bar{u} \pm \left[gH \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right) \right]^{1/2}. \quad (4.13)$$

До сих пор единственным условием, которое принималось для жидкостей, образующих два однородных слоя, было то, что один слой имеет плотность ρ_1 , а другой — ρ_2 . Если мы теперь возьмем в качестве ρ_1 плотность воды, а в качестве ρ_2 — намного меньшую плотность прилегающего воздуха, то тогда скорость волн, перемещающихся по поверхности раздела воздуха и воды, будет очень точно описываться формулой

$$c = \bar{u} \pm \sqrt{gH}.$$

Океанолог или гидролог узнает в этом выражении формулу для скорости гравитационных волн в «мелкой воде».

Этот результат показывает, что еще один возможный тип решения общих гидродинамических уравнений соответствует волновому движению, в котором траектории частиц лежат в вертикальных плоскостях. Это так называемые внутренние гравитационные волны, которые время от времени проявляются как «волнистообразные облака» — длинные параллельные валы конденсированного водяного пара, лежащие вдоль гребней волн. Для значений H в пределах от 1 до 10 км и для значений ρ_2/ρ_1 в пределах от 0,90 до 0,99 скорость внутренних гравитационных волн относительно среды изменяется от 30 до

300 км/час в зависимости от вертикального изменения плотности. Когда ветер очень сильный, скорость гравитационных волн относительно Земли может достигать 500—550 км/час. Гравитационные волны, подобно звуковым волнам, могут распространяться в обоих направлениях одновременно. Кроме того, скорость гравитационных волн почти не зависит от амплитуды и длины (или частоты) волн¹.

Как и прежде, мы теперь попытаемся показать, благодаря какому физическому механизму существуют или распространяются гравитационные волны. Для простоты представим себе длинный глубокий канал, содержащий слой жидкости конечной плотности ρ_1 ; над этой жидкостью расположен слой жидкости

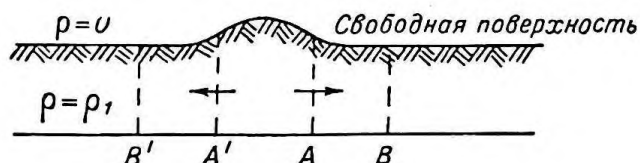


Рис. 7 (8). Схема эксперимента, иллюстрирующего распространение гравитационных волн. Жидкость постоянной плотности вначале поддерживается в неподвижном состоянии путем наложения твердого шаблона вдоль всей поверхности; она получает возможность двигаться после удаления этой формы.

с нулевой плотностью, как показано в поперечном разрезе на рис. 7(8). Жидкость вначале неподвижна, но поверхность между жидкостями и плотностями ρ_1 и нуль деформирована, как показано на рисунке, путем наложения твердого шаблона вдоль всей поверхности. Теперь предположим, что шаблон внезапно удален. Какие движения возникнут в нижнем слое жидкости?

Так как большая глубина жидкости лежит слева от линии A , то масса, находящаяся над некоторой точкой, расположенной левее A , и лежащая на заданной горизонтальной поверхности, будет больше, чем лежащая на той же горизонтальной поверхности масса, находящаяся над точкой, расположенной правее A . Поэтому, согласно закону гидростатики, горизонтальный градиент давления по всей линии A будет направлен вправо и будет ускорять жидкость в этом направлении. Тогда в течение последующего очень короткого промежутка времени Δt жидкость по всей линии A будет двигаться направо, тогда как жидкость по всей линии B будет все еще неподвижна. Отсюда следует, что общий перенос жидкости через A будет происходить быстрее, чем через B . Так как жидкость не-

¹ Это строго выполняется только в тех случаях, когда длина волны в несколько раз больше, чем глубина H . Если длина волны меньше, то нельзя больше считать, что поток находится в гидростатическом равновесии.

сжимаема, поверхность раздела между A и B должна приподняться за время Δt . Тогда немного позднее градиент давления по всей линии B будет направлен вправо и будет ускорять жидкость по всей линии B в том же направлении и т. д. Таким образом, первоначальная деформация поверхности раздела распространится направо от A и по симметрии налево от A' . Описанный здесь процесс — это в точности тот процесс, который выражен математически в уравнениях (4.10) и (4.11).

Теперь совершенно ясно, что существенной частью механизма, посредством которого распространяются гравитационные волны, является изменение давления, вызванное меняющимся весом воздуха над данной горизонтальной поверхностью. В противоположность чисто звуковым волнам, существование которых зависит от изменений давления, вызванных адиабатическим сжатием, отличительной чертой чисто гравитационных волн является то, что градиенты давления обусловлены только изменениями гидростатического давления.

Волны Россби

Теперь мы обратимся к горизонтально-поперечным волнам, которые, несмотря на их огромное значение с точки зрения метеорологии, фактически неизвестны за пределами этой области. Для погашения вертикально-поперечных волн (гравитационных волн) мы потребуем, чтобы траектории частиц лежали в горизонтальных плоскостях; для исключения же волн сжатия, или звуковых волн, мы будем считать атмосферу несжимаемой и горизонтально-однородной жидкостью. Так как $\pi = 0$ и $dp/dx = -dp/dy \neq 0$, то уравнения движения (2.13) и (2.14) сводятся к следующему:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - f v + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\rho} \right) = 0, \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + f u + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{p}{\rho} \right) = 0. \quad (4.15)$$

Из уравнения неразрывности (2.20) и условия несжимаемости следует, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (4.16)$$

Дифференцируя уравнение (4.14) по y , уравнение (4.15) — по x и вычитая первое уравнение из второго, мы найдем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \\ + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + \left(f + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0. \end{aligned}$$

Однако в силу уравнения (4.16) последний член предыдущего уравнения пропадает. Мы заметим далее, что $[(\partial v/\partial x) - (\partial u/\partial y)]$ представляет собой вертикальную составляющую «вихря» (т. е. кёрля, или ротора) вектора скорости относительно Земли. Эта составляющая вихря обычно обозначается символом ζ . Тогда, вспоминая, что f не зависит от времени, мы можем переписать предыдущее уравнение в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} (\zeta + f) + u \frac{\partial}{\partial x} (\zeta + f) + v \frac{\partial}{\partial y} (\zeta + f) = 0, \quad (4.17)$$

или, так как $\omega = 0$,

$$\frac{d}{dt} (\zeta + f) = 0. \quad (4.18)$$

Это уравнение — дифференциальная форма «теоремы о циркуляции» В. Томсона — описывает замечательное свойство, которое заключается в том, что каждый элемент жидкости сохраняет первоначальное значение $(\zeta + f)$ в течение всей его последующей истории. Так как f — вертикальная составляющая вихря вращения Земли относительно инерциальной, или абсолютной, системы и ζ — вертикальная составляющая вихря скорости воздуха относительно Земли, то $(\zeta + f)$ представляет собой вертикальную составляющую вихря скорости воздуха в абсолютной системе. По этой причине $(\zeta + f)$ называется абсолютным вихрем, а уравнение (4.18) известно как закон сохранения абсолютного вихря.

Для того чтобы определить фазовую скорость горизонтально-поперечных волн достаточно ясным и однозначным образом, предположим, что движение волн происходит только в направлении оси x ; для этого достаточно положить, что u и v не зависят от координаты y (ось y направлена на север). При этих предположениях ζ сводится к $\partial v/\partial x$. Тогда, так как f фактически не зависит от x и t , уравнение (4.17) сводится к следующему:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} + u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \beta v = 0, \quad (4.19)$$

где параметр Россби $\beta = \partial f/\partial y$ считается постоянным. Кроме того, если v не зависит от y , то уравнение (4.16) принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Мы уже потребовали, чтобы u было независимо от y , так что u может быть только функцией t . Так как уравнение (4.19) ква-

зп линейно, то мы будем рассматривать u как константу u . С этим упрощением уравнение (4.19) будет иметь периодические волновые решения типа

$$v = Ae^{i\lambda(x-ct)}.$$

Непосредственной подстановкой можно проверить, что эта функция удовлетворяет уравнению (4.19), если

$$c = \bar{u} - \frac{\beta}{\lambda^2}. \quad (4.20)$$

Это уравнение, известное как формула волн Россби, дает скорость поперечных волн в преимущественно горизонтальных движениях атмосферы.

Предыдущие рассуждения показывают, что существует еще один тип решения гидродинамических уравнений, — тип, соответствующий горизонтально-поперечным волнам. Хотя такие решения содержались неявно в теории приливов Лапласа, соответствующие волновые движения названы в честь К.-Г. Россби, который первый осознал их метеорологическое значение и выделил их в чистом виде. В противоположность звуковым и гравитационным волнам волны Россби всегда распространяются на запад по отношению к среде и движутся со скоростью, которая зависит от их длины. Они движутся относительно медленно; для длины волны 5000 км их скорость относительно среды имеет порядок 15 км/час.

Среди различных типов чисто волнового движения волны Россби больше всего походят на крупномасштабные возмущения атмосферных потоков, которые обычно перемещаются значительно медленнее быстрых звуковых и гравитационных волн и распространяются только в одном направлении, причем связанные с ними горизонтальные скорости по крайней мере в 100 раз больше, чем их вертикальные скорости. Позднее мы увидим, почему это так.

ЛИТЕРАТУРА

- Haurwitz B. Zur Theorie der Wellenbewegung in Luft und Wasser. Veröffentlich. Geophys. Inst. Univ. Leipzig, 5, 1, 1931.
Haurwitz B. The Motion of Atmospheric Disturbances on the Spherical Earth. J. Marine Res., 3, 254, 1945.
Rayleigh. The Theory of Sound. Dover Publ., New York, 1945.
Rossby C. G. et al. Relation between Variations in the Intensity of the Zonal Circulation of the Atmosphere and the Displacements of the Semi-Permanent Centers of Action. J. Marine Res., 2, 38, 1939.
Rossby C. G. Planetary Flow Patterns in the Atmosphere. Q. J. Roy. Met. Soc., 66, 68, 1940.

ГЛАВА 4(5)

Конечно-разностные методы решения линейных уравнений для звуковых волн, гравитационных волн и волн Россби

В предыдущей главе было показано, что гидродинамические уравнения для адиабатических движений невязкой жидкости имеют зависящие от времени решения, соответствующие трем различным типам волнового движения, которые существуют в чистой форме при специальных условиях. Поэтому при общих условиях все три типа волнового движения существуют одновременно, хотя каждый тип несколько видоизменяется условиями, которые позволяют существовать другим типам. Следовательно, если *общие* гидродинамические уравнения должны решаться конечно-разностным методом, описанным в главе 2(3), то мы должны уметь решать этим методом по крайней мере уравнения для различных типов чисто волнового движения.

Наша ближайшая задача — применить конечно-разностные методы к решению линейных дифференциальных уравнений для звуковых волн, гравитационных волн и волн Россби. К счастью, соответствующие конечно-разностные уравнения достаточно просты, чтобы их можно было решить в конечном виде; поэтому решения конечно-разностных уравнений можно сравнить непосредственно с точными решениями первоначальных дифференциальных уравнений. Таким способом мы сможем выяснить, какая из нескольких конечно-разностных аппроксимаций данного дифференциального уравнения наиболее эффективна, и сможем определить условия, при которых конечно-разностная аппроксимация оказывается хорошей.

Конечно-разностное уравнение для звуковых и гравитационных волн

Начнем с дифференциального уравнения для чисто звуковых волн. Замечая, что оно имеет решение в форме $A \exp[i\alpha(x - ct)]$, мы видим, что уравнение (4.7) может быть записано так:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \quad (5.1)$$

где c — один из корней уравнения «частоты»

$$(c - \bar{u})^2 = \frac{\bar{\gamma} \bar{p}}{\bar{\rho}}.$$

Для бесконечной или периодической области интегрирование уравнения (5.1) представляет собой задачу с начальными данными, решение которой определяется начальными значениями p и $\partial p / \partial t$. Начальные значения $\partial p / \partial t$ могут быть выражены через начальные значения u и p с помощью уравнения (4.6). Наибо-

лее простая конечно-разностная аппроксимация уравнения (5.1) получается следующим образом. Пусть индекс n (целое число), изменяющийся от $-\infty$ до ∞ , обозначает положения дискретных точек, координаты которых в направлении x суть $x = n\Delta x$, как показано на рис. 8(9). Тогда, если значение функции в точке

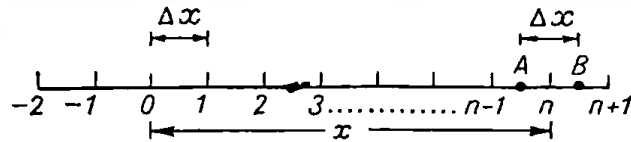


Рис. 8(9). Положение и нумерация дискретных точек в одномерной конечно-разностной сетке.

$x = n\Delta x$ обозначить нижним индексом n , то первая производная $\partial p / \partial x$ в точке B приближенно будет равна

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_B \approx \frac{1}{\Delta x} (p_{n+1} - p_n).$$

Подобным образом $\partial p / \partial x$ в точке A приближенно равна

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_A \approx \frac{1}{\Delta x} (p_n - p_{n-1}).$$

Поэтому вторая производная $\partial^2 p / \partial x^2$ в точке n приближенно равна

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} &\approx \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{1}{\Delta x} (p_{n+1} - p_n) - \frac{1}{\Delta x} (p_n - p_{n-1}) \right] = \\ &= \frac{1}{(\Delta x)^2} (p_{n+1} - 2p_n + p_{n-1}). \end{aligned} \quad (5.2)$$

В точности аналогичные рассуждения дают

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \approx \frac{1}{(\Delta t)^2} (p^{m+1} - 2p^m + p^{m-1}), \quad (5.3)$$

где верхний индекс m не показатель степени, а целый индекс, указывающий, что значение функции берется в момент времени $t = m\Delta t$. Подставляя приближенные выражения (5.2) и (5.3) в уравнение (5.1), мы получим в качестве конечно-разностной аппроксимации уравнения (5.1)

$$\frac{1}{(\Delta t)^2} (p_n^{m+1} - 2p_n^m + p_n^{m-1}) = \frac{c^2}{(\Delta x)^2} (p_{n+1}^m - 2p_n^m + p_{n-1}^m). \quad (5.4)$$

Конечно, начальные значения p_n^0 предполагаются известными. Значения p_n^1 при $t = \Delta t$ могут быть получены по начальным зна-

чениям p и $\partial p/\partial t$ линейной экстраполяцией. Тогда уравнение (5.4) обеспечивает способ вычисления p_n^2 по значениям p_{n+1}^1 , p_n^1 , p_{n-1}^1 и p_n^0 . Повторяя этот процесс, можно затем вычислить p_n^3 по значениям p_{n+1}^2 , p_n^2 , p_{n-1}^2 , p_n^1 и т. д.

Однако нет необходимости проводить итерационный процесс, предложенный выше, чтобы добиться выяснения общих свойств уравнения (5.4). В этом параграфе будет показано, что конечно-разностное уравнение (5.4) имеет решение вида

$$p_n^m = A e^{i(km\Delta t + \alpha n\Delta x)}, \quad (5.5)$$

где A — постоянная амплитуда, α — действительное волновое число и k — частота, которая может быть комплексной. Так как всякая совокупность начальных значений p_n^0 может быть представлена как линейная комбинация таких функций и так как решения линейного уравнения (5.4) допускают суперпозицию, то достаточно рассмотреть решения, соответствующие одному волновому числу α и одной частоте k . Поэтому, подставляя функцию (5.5) в конечно-разностное уравнение (5.4) и деля его на p_n^m , мы найдем, что

$$e^{ik\Delta t} - 2 + e^{-ik\Delta t} = \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 (e^{i\alpha\Delta x} - 2 + e^{-i\alpha\Delta x}),$$

или, используя формулу Эйлера,

$$\cos k\Delta t - 1 = \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 (\cos \alpha\Delta x - 1).$$

После некоторых преобразований с помощью тригонометрических тождеств последнее уравнение примет вид

$$\sin^2 \frac{k\Delta t}{2} = \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2 \frac{\alpha\Delta x}{2}.$$

Тогда значения k , соответствующие данному действительному волновому числу α , будут

$$k = \pm \frac{2}{\Delta t} \arcsin \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x} \sin \frac{\alpha\Delta x}{2} \right) \quad (5.6)$$

и элементарные решения конечно-разностного уравнения (5.4) будут

$$p_n^m = A \begin{cases} e^{-k_i m \Delta t} e^{i(\alpha n \Delta x + k_r m \Delta t)}, \\ e^{k_i m \Delta t} e^{i(\alpha n \Delta x + k_r m \Delta t)}, \end{cases} \quad (5.7)$$

где k_r и k_i — действительная и мнимая части k , определяемого из уравнения (5.6).

Если теперь $c\Delta t/\Delta x$ равно единице или меньше, то всегда существует действительное значение k , которое удовлетворяет

уравнению (5.6) при $k_i=0$. В этом случае решения (5.7) не будут расти по амплитуде с течением времени. С другой стороны, если $c\Delta t/\Delta x$ превосходит единицу, то существуют такие значения α , для которых выражение, заключенное в скобки в уравнении (5.6), будет больше единицы. В этом случае, так как синус всякого действительного числа не может превосходить единицу, $k_i \neq 0$, и одно из решений (5.7) будет с течением времени увеличиваться по амплитуде. Наконец, так как оба решения должны приниматься в расчет при удовлетворении общим начальным условиям, то некоторые компоненты общего решения уравнения (5.4) будут продолжать увеличиваться по амплитуде, пока не сделают неразличимыми все остальные компоненты. Это явление называется вычислительной неустойчивостью.

Мы уже нашли, что точные решения первоначального дифференциального уравнения (5.1) не растут по амплитуде со временем. Следовательно, для того чтобы аппроксимировать точные решения уравнения (5.1) методом конечных разностей, «интервалы сетки» Δx и Δt должны быть выбраны таким образом, чтобы $c\Delta t/\Delta x$ было меньше единицы. Следует подчеркнуть, что это условие вычислительной устойчивости не зависит от абсолютных размеров интервалов сетки, а зависит лишь от их отношения.

Если это условие не удовлетворяется, решения соответствующего конечно-разностного уравнения (5.4) «разбукнут», как бы малы ни были интервалы сетки. Хотя вычислительная неустойчивость — чисто математическое явление, ее существование вполне реально и иногда приводит к большим трудностям. В этом легко убедиться, решая уравнение (5.4) численно для периодических начальных значений p_n^0 с волновым числом, равным $\alpha = \pi/\Delta x$. При этом допустим, что

$$p_n^1 = p_n^0 - (c\Delta t/2\Delta x)(p_{n+1}^0 - p_{n-1}^0),$$

и положим $c\Delta t/\Delta x = 2$. Затем повторим вычисления для $c\Delta t/\Delta x = 1$ или $c\Delta t/\Delta x = \frac{1}{2}$.

Мы уже отмечали, что вид дифференциального уравнения для чисто гравитационных волн (4.12) тождествен виду дифференциального уравнения для чисто звуковых волн (4.7). Поэтому все, что было сказано о конечно-разностных методах решения уравнения для звуковых волн, в равной степени применимо к конечно-разностным методам решения уравнения для гравитационных волн. Для новой интерпретации наших предыдущих результатов мы просто будем рассматривать c как точную скорость гравитационных волн, а не как точную скорость звуковых волн.

Конечно-разностное уравнение для волн Россби.
Метод направленных вперед разностей по времени

Распространение волн Россби описывается линейным дифференциальным уравнением (4.19) с дополнительным ограничением, что u равно константе, например $\bar{u}$. Тогда

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} + \bar{u} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \beta v = 0. \quad (5.8)$$

В главе 3(4) было показано, что это уравнение имеет элементарные решения типа

$$v = A e^{i\alpha(x-ct)}.$$

Тогда, если мы ограничимся рассмотрением одной компоненты спектра v , соответствующей одному волновому числу α , то в течение всего времени v будет удовлетворять следующему соотношению:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\alpha^2 v,$$

так что уравнение (5.8) может быть записано в виде

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} + \left(\bar{u} - \frac{\beta}{\alpha^2} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0,$$

или, так как $\partial v / \partial x$ при условиях, принятых в главе 3(4), равно вихрю ζ и $(\bar{u} - \beta/\alpha^2)$ равно скорости c волн Россби с волновым числом α , то

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + c \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0. \quad (5.9)$$

Интегрирование этого уравнения для бесконечной или периодической области представляет собой задачу с начальными условиями, решение которой полностью определяется начальными значениями ζ .

Чтобы обнаружить некоторые ловушки, которые могут встретиться в конечно-разностных методах, мы сначала проанализируем то, что может показаться наиболее прямым численным методом решения уравнения (5.9). Это метод направленных *вперед* разностей по времени, с помощью которого $\partial \zeta / \partial t$ в момент t аппроксимируется в виде

$$\left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} \right)_n^m \approx \frac{1}{\Delta t} (\zeta_n^{m+1} - \zeta_n^m), \quad (5.10)$$

где целые индексы n и m определены в предыдущем параграфе. Производная $\partial \zeta / \partial x$ в момент t дается обычной формулой центральных разностей

$$\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)_n^m \approx \frac{1}{2\Delta x} (\zeta_{n+1}^m - \zeta_{n-1}^m). \quad (5.11)$$

Тогда, подставляя производные из приближенных уравнений (5.10) и (5.11) в уравнение (5.9), мы получим в качестве конечно-разностной аппроксимации первоначального дифференциального уравнения

$$\frac{1}{\Delta t} (\zeta_n^{m+1} - \zeta_n^m) + \frac{c}{2\Delta x} (\zeta_{n+1}^m - \zeta_{n-1}^m) = 0. \quad (5.12)$$

Начальные значения ζ_n^0 , конечно, предполагаются известными. Поэтому последнее уравнение обеспечивает способ вычисления ζ_n^1 по ζ_{n-1}^0 , ζ_n^0 и ζ_{n+1}^0 . Повторяя этот процесс, мы можем затем вычислить ζ_n^2 по ζ_{n-1}^1 , ζ_n^1 и ζ_{n+1}^1 и т. д.

Так же как и конечно-разностные уравнения для звуковых и гравитационных волн, уравнение (5.12) имеет элементарные решения вида

$$\zeta_n^m = A e^{i(km\Delta t + n\Delta x)}.$$

Подставляя эту функцию в уравнение (5.12) и деля его на ζ_n^m , мы найдем, что

$$e^{ik\Delta t} - 1 + \frac{c\Delta t}{2\Delta x} (e^{i\alpha\Delta x} - e^{-i\alpha\Delta x}) = 0.$$

Применяя формулу Эйлера, перепишем это уравнение в виде

$$e^{ik\Delta t} - 1 + \frac{ic\Delta t}{\Delta x} \sin \alpha\Delta x = 0.$$

Наконец, приравнявая к нулю действительную и мнимую части этого уравнения, мы видим, что

$$\begin{aligned} e^{-k_r\Delta t} \cos k_i\Delta t &= 1, \\ e^{-k_r\Delta t} \sin k_i\Delta t &= -\frac{c\Delta t}{\Delta x} \sin \alpha\Delta x, \end{aligned}$$

где k_r и k_i — действительная и мнимая части частоты k соответственно. Теперь легко найти k_r и k_i . Деля одно из предыдущих уравнений на другое, мы найдем

$$\operatorname{tg} k_i\Delta t = -\frac{c\Delta t}{\Delta x} \sin \alpha\Delta x$$

и, возводя в квадрат оба уравнения и складывая, получим

$$e^{-2k_i \Delta t} = 1 + \left(\frac{c \Delta t}{\Delta x} \right)^2 \sin^2 \alpha \Delta x. \quad (5.13)$$

Соответствующие решения конечно-разностного уравнения (5.12) будут

$$\zeta_n^m = A e^{-k_i m \Delta t} e^{i(k_i m \Delta t + \alpha n \Delta x)}. \quad (5.14)$$

Однако из уравнения (5.13) легко видеть, что $k_i < 0$. Поэтому решения (5.14) конечно-разностного уравнения *будут всегда расти по амплитуде, как бы малы ни были Δx и Δt* . Полное возрастание амплитуды после m шагов по времени будет

$$\left[1 + \left(\frac{c \Delta t}{\Delta x} \right)^2 \sin^2 \alpha \Delta x \right]^{m/2}.$$

Даже если множитель в квадратных скобках в этом выражении всего лишь 1,01, общее усиление после 100 шагов по времени будет порядка 2. Это недопустимо.

Так как описанный выше метод направленных вперед разностей всегда дает вычислительную неустойчивость, то он не подходит для решения уравнения для волн Россби. Более того, так как волны Россби являются преобладающим типом движения в атмосфере, то общие гидродинамические уравнения не могут быть решены методом направленных вперед разностей.

Метод центральных разностей по времени

Среди различных конечно-разностных методов решения уравнения (5.9) имеется применимый почти везде метод центральных разностей по времени, в котором $\partial \zeta / \partial t$ аппроксимируется в виде

$$\left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} \right)_n^m \approx \frac{1}{2 \Delta t} (\zeta_n^{m+1} - \zeta_n^{m-1}).$$

Подставляя производные из этого уравнения и уравнения (5.11) в уравнение (5.9), мы получим в качестве новой конечно-разностной аппроксимации первоначального дифференциального уравнения

$$-\frac{1}{2 \Delta t} (\zeta_n^{m+1} - \zeta_n^{m-1}) + \frac{c}{2 \Delta x} (\zeta_{n+1}^m - \zeta_{n-1}^m) = 0. \quad (5.15)$$

Начальные значения ζ_n^0 предполагаются известными, а значения ζ_n^1 могут быть получены из уравнения (5.12) путем использования способа предыдущего параграфа. Таким образом, пре-

дыдущее уравнение обеспечивает возможность вычисления ξ_n^2 по значениям ξ_{n+1}^1 , ξ_{n-1}^1 и ξ_n^0 . Затем по индукции можно повторить этот процесс для вычисления ξ_n^3 по ξ_{n+1}^2 , ξ_{n-1}^2 и ξ_n^1 и т. д.

Уравнение (5.15) также имеет элементарные решения типа

$$\zeta_n^m = Ae^{i(km\Delta t + \alpha n\Delta x)}.$$

Подставляя эту функцию в уравнение (5.15) и деля на ζ_n^m , мы найдем, что

$$e^{ik\Delta t} - e^{-ik\Delta t} + \frac{c\Delta t}{\Delta x} (e^{i\alpha\Delta x} - e^{-i\alpha\Delta x}) = 0,$$

или, используя формулу Эйлера,

$$\sin k\Delta t + \frac{c\Delta t}{\Delta x} \sin \alpha\Delta x = 0. \quad (5.16)$$

Как и в случае уравнения (5.6), это уравнение всегда имеет действительный корень k , если $c\Delta t/\Delta x$ равно единице или меньше. Однако если $c\Delta t/\Delta x$ превосходит единицу, то будет существовать некоторое значение α , для которого мнимая часть k будет отрицательна. В последнем случае решение конечно-разностного уравнения (5.15) становится вычислительно неустойчивым, тогда как точное решение соответствующего дифференциального уравнения (5.9) имеет постоянную амплитуду. Поэтому для аппроксимации точного решения уравнения (5.9) следует выбирать интервалы сетки Δx и Δt таким образом, чтобы $c\Delta t/\Delta x$ было меньше единицы.

Описанный выше метод центральных разностей по времени имеет по крайней мере одно преимущество, а именно он вычислительно устойчив для достаточно малых значений Δt . Остается выяснить, насколько точен этот метод, если критерий вычислительной устойчивости выполняется. Так как последнее условие гарантирует, что амплитуда волны остается неизменной (как и должно быть), то ошибки конечно-разностного метода (ошибки аппроксимации) проявятся в основном как ошибки в фазовой скорости или в положении отдельных волн. Ошибки в фазовой скорости, обусловленные конечно-разностной аппроксимацией, можно вычислить, замечая, что приближенная фазовая скорость c_a равна

$$c_a = \frac{k}{\alpha}.$$

Поэтому соотношение между приближенной и точной фазовыми скоростями дается, согласно уравнению (5.16), в виде

$$c_a = \frac{1}{\alpha\Delta t} \arcsin \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x} \sin \alpha\Delta x \right). \quad (5.17)$$

Из этого уравнения сразу видно, что если $c\Delta t/\Delta x$ равно единице, то c_α будет точной фазовой скоростью c . Однако следует помнить, что c зависит от α , так что этот результат применим только к одному значению волнового числа α и не может быть применим одновременно ко всем компонентам спектра. Тем не менее этот результат дает указание на то, что метод центральных разностей точнее всего, если Δt выбрано только слегка меньше Δx , деленного на максимальную фазовую скорость. Отношение приближенной фазовой скорости c_α к точной фазовой скорости c показано сплошной кривой на рис. 9(10) как функция $L = 2\pi/\alpha$ для $c\Delta t/\Delta x = 1/2$. Рассматривая эту диаграмму, мы видим, что c_α всегда меньше c , т. е. волновым решениям, построенным конечно-разностным методом, отвечают более медленные перемещения, чем точным волновым решениям. Ясно также, что распространение волн Россби не может быть точно предсказано этим методом, если только Δx не выбрано меньшим, чем приблизительно одна восьмая длины самой короткой из имеющих какое-либо значение волн. Если говорить о погодных возмущениях, то это означает, что Δx должно равняться примерно 400 км или меньше. Поэтому так как максимальная скорость волн Россби с длинами порядка 3000 км составляет приблизительно 160 км/час, то для поддержания вычислительной устойчивости Δt должно равняться около 2,5 часа или меньше. На практике Δt обычно берется равным одному часу или полчаса.

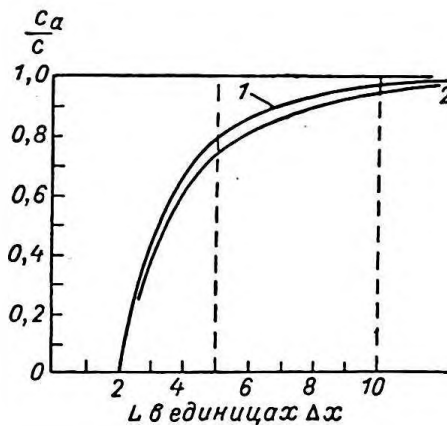


Рис. 9 (10). Отношение приближенного значения фазовой скорости к точному как функция длины волны L для двух типов конечно-разностной аппроксимации.

1 — стандартный центрально-разностный метод, 2 — неявный метод.

Неявный метод

Еще один конечно-разностный метод решения уравнения (5.9) — так называемый неявный метод — имеет значительное преимущество: он никогда не приводит к вычислительной неустойчивости. Отличительная черта этого метода заключается в том, что $\partial \xi / \partial x$ в момент $t = (m + 1/2)\Delta t$ аппроксимируется средним из ее значений в моменты $t = m\Delta t$ и $t = (m + 1)\Delta t$. Тогда,

вычисляя $\partial \zeta / \partial x$ в эти моменты времени обычным методом центральных разностей, получим

$$\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)_n^{m+1/2} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\zeta_{n+1}^{m+1} - \zeta_{n-1}^{m+1}}{2\Delta x} + \frac{\zeta_{n-1}^m - \zeta_{n+1}^m}{2\Delta x} \right). \quad (5.18)$$

Значение $\partial \zeta / \partial t$ в момент $t = (m+1/2)\Delta t$ аппроксимируется в виде

$$\left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} \right)_n^{m+1/2} \approx \frac{1}{\Delta t} (\zeta_n^{m+1} - \zeta_n^m). \quad (5.19)$$

Наконец, подставляя производные из (5.18) и (5.19) в уравнение (5.9), мы получим соответствующее конечно-разностное уравнение

$$\zeta_n^{m+1} - \zeta_n^m + \frac{c\Delta t}{4\Delta x} (\zeta_{n+1}^{m+1} + \zeta_{n+1}^m - \zeta_{n-1}^{m+1} - \zeta_{n-1}^m) = 0. \quad (5.20)$$

Так как начальные значения ζ_n^0 предполагаются известными, то возможно (в принципе) вычислить значения ζ_n^1 и т. д. Однако следует отметить, что уравнение (5.20) содержит значения ζ в *трех* точках для $(m+1)$ -го шага по времени, а именно ζ_{n+1}^{m+1} , ζ_n^{m+1} и ζ_{n-1}^{m+1} . Поэтому ζ_n^{m+1} должна быть получена по ζ_n^m путем решения системы уравнений, состоящей из конечно-разностного уравнения (5.20), примененного ко всем точкам $x = n\Delta x$. Так как значение ζ_n^{m+1} в отдельной точке $x = n\Delta x$ дается только неявно, то этот метод обычно называется неявным (имплицитным) методом. Имплицитность этого метода представляет большое неудобство и для большинства практических целей сводит к нулю главное преимущество метода.

Подобно конечно-разностным уравнениям, разобранным раньше, уравнение (5.20) имеет элементарные решения вида

$$\zeta_n^m = A e^{i(km\Delta t + zn\Delta x)}.$$

Подставляя эту функцию в уравнение (5.20) и деля на ζ_n^m , мы найдем, что

$$e^{ik\Delta t} - 1 + \frac{c\Delta t}{4\Delta x} (e^{ik\Delta t} e^{i\alpha\Delta x} + e^{i\alpha\Delta x} - e^{ik\Delta t} e^{-i\alpha\Delta x} - e^{-i\alpha\Delta x}) = 0,$$

или, выделяя общий множитель и деля на $(e^{ik\Delta t} + 1)$,

$$\frac{e^{ik\Delta t} - 1}{e^{ik\Delta t} + 1} + \frac{c\Delta t}{4\Delta x} (e^{i\alpha\Delta x} - e^{-i\alpha\Delta x}) = 0.$$

Теперь заметим, что первый член этого уравнения может быть переписан так:

$$\frac{e^{ik\Delta t/2} - e^{-ik\Delta t/2}}{e^{ik\Delta t/2} + e^{-ik\Delta t/2}}.$$

Тогда, применяя формулу Эйлера к этому выражению и к предыдущему уравнению, получим

$$\frac{i \sin k\Delta t/2}{\cos k\Delta t/2} + \frac{ic\Delta t}{2\Delta x} \sin \alpha\Delta x = 0,$$

откуда

$$\operatorname{tg} \frac{k\Delta t}{2} + \frac{c\Delta t}{2\Delta x} \sin \alpha\Delta x = 0. \quad (5.21)$$

Это уравнение частоты отличается от выведенных раньше тем, что для каждого данного действительного волнового числа α всегда существует действительное значение k , которое удовлетворяет уравнению (5.21). Таким образом, конечно-разностное уравнение (5.20) при всех условиях имеет невозрастающие по амплитуде решения. Пользуясь неявным методом, по-видимому, можно брать Δt каким угодно большим; точность метода будет снижаться, но вычислительная неустойчивость никогда не разовьется.

Для сравнения точности неявного метода с точностью стандартного метода центральных разностей на рис. 9(10) показано отношение приближенной фазовой скорости c_a к точной фазовой скорости c для $c\Delta t/\Delta x = 1/2$ (вторая кривая). Как и в случае метода центральных разностей, c_a всегда меньше c . Мы также видим, что в пределах длин волн, для которых конечно-разностный метод вообще имеет какую-либо точность, точность неявного метода только на несколько процентов меньше точности стандартного метода центральных разностей.

Итак, мы видели, что даже самые простые конечно-разностные уравнения имеют некоторые весьма специфические свойства. Различные конечно-разностные аппроксимации одного и того же дифференциального уравнения могут обладать совершенно отличными типами решений, часть которых может не соответствовать никакой физической реальности. Некоторые конечно-разностные схемы для решения одного и того же дифференциального уравнения могут быть вычислительно неустойчивыми при любых условиях, другие — устойчивы при некоторых условиях, а иные — устойчивы при любых условиях. Аналогично этому точность различных конечно-разностных схем может изменяться в широких пределах. Наконец, мы видели, что свойства какой-нибудь частной конечно-разностной аппроксимации данного дифференциального уравнения определяют выбор подходящих интервалов сетки, по крайней мере в пределах экономических возможностей.

Результаты, полученные нами в двух простых случаях, говорят о том, что первая приходящая на ум конечно-разностная схема может не только оказаться неточной, но может также

порождать решения, которые не имеют ничего общего с решениями первоначального дифференциального уравнения. Прежде чем заняться (а возможно, и истратить несколько тысяч долларов на машинное время) новой, неиспытанной конечно-разностной схемой, было бы хорошим правилом сначала проанализировать получившееся конечно-разностное уравнение, с тем чтобы посмотреть, какого рода решения оно содержит и будут ли эти решения достаточно точными аппроксимациями к решениям дифференциального уравнения в его первоначальном, не испорченном виде. Это возможно сделать только при весьма идеализированных условиях, как в данном случае. Тем не менее изучение некоторых, тщательно подобранных специальных случаев может служить руководством к действию в более общих случаях. Фактически, так как вычислительная математика еще не догнала вычислительную технику, обычно кончают тем, что используют точный математический анализ специальных случаев в качестве руководства при составлении схемы и интерпретации численных экспериментов; эти эксперименты могут затем вскрыть общие условия, при которых тот или иной численный метод может применяться. В этом и в других отношениях быстродействующие вычислительные машины привели к гигантскому расширению области, которая может быть названа экспериментальной математикой.

ЛИТЕРАТУРА

- Courant R., Friedrichs K., Lewy H. Über die partiellen Differenzgleichungen der mathematischen Physik. Math. Ann., 100, 32, 1928.
 Gates W. On the Truncation Error, Stability and Convergence of Difference Solutions of the Barotropic Vorticity Equation. J. Met., 16, 556, 1959.
 Hildebrand F. Methods of Applied Mathematics. Prentice-Hall, N. Y. 1952.
 Richtmyer R. Difference Methods for Initial-Value Problems. Interscience Publ., New York, 1957 (См. перевод: Р и х т м а й е р Р. Разностные методы решения краевых задач. ИЛ. М., 1967)

ГЛАВА 5(6)

Смешанные типы волнового движения в атмосфере. Проблема отфильтровывания

В двух предыдущих главах мы рассмотрели несколько типов атмосферного волнового движения, которые существуют в чистом виде при специальных условиях и которые при обычных условиях сосуществуют в несколько видоизмененной форме. Эти типы волнового движения заметно отличаются друг от друга не только в отношении механизма их распространения, но также по их характерным скоростям и амплитудам. Например, звуковые и гравитационные волны перемещаются со сравнительно большими скоростями по отношению к среде; так, зву-

ковые волны перемещаются со скоростью приблизительно 1000—1100 км/час, а гравитационные — со скоростью 300 км/час. С другой стороны, волны Россби перемещаются относительно медленно; волны с максимальной амплитудой имеют длины, которым соответствуют скорости перемещения порядка 15 км/час. И наоборот, амплитуды давления волн Россби имеют большую характерную величину, часто превышая 20 мб, в то время как характерные амплитуды звуковых волн составляют небольшую долю миллибара. Амплитуды гравитационных волн лежат в пределах приблизительно от одного миллибара (внутренние гравитационные волны) до малой доли миллибара (атмосферные приливы). Если рассматривать звуковые и гравитационные волны как компоненты поля атмосферного давления, то ими вполне можно пренебречь.

Несмотря на то что амплитуды звуковых и гравитационных волн по существу малы, одна лишь возможность их существования может оказаться источником трудностей. Для доказательства предположим, что присутствуют одни звуковые волны. Как мы уже видели в предыдущей главе, решение уравнения для звуковых волн методом центральных разностей по времени дает усиление по амплитуде некоторых компонентов, если интервал времени выбран больше, чем отношение пространственного интервала Δx к скорости звуковых волн. Тогда решение общих гидродинамических уравнений методом центральных разностей по времени также приведет к усилению возмущений по амплитуде, если Δt будет больше, чем Δx , деленное на скорость звуковых волн. Не имеет значения, что звуковых волн может не оказаться в реальном поле метеорологических элементов; уравнения не делают различий между физически реальными возмущениями и случайными ошибками в начальных значениях. Поэтому для того чтобы решить *общие* гидродинамические уравнения методом центральных разностей по времени, Δt должно быть взято меньше, чем Δx , деленное на скорость звука. Таким образом, если мы берем Δx равным 400 км, то Δt должно быть существенно меньше 20 мин.

Представим себе теперь, что гидродинамические уравнения каким-то образом видоизменены, так что они не имеют решений, соответствующих звуковым и гравитационным волнам, но все же обладают решениями, соответствующими волнам Россби. Тогда, согласно нашим предыдущим результатам, решение уравнений методом центральных разностей по времени не приведет к усилению каких-либо компонент спектра, если Δt взято меньше, чем Δx , деленное на максимальную скорость волн Россби. Для $\Delta x = 400$ км это требует, чтобы Δt было несколько меньше чем 2,5 часа. Следует отметить, что этот результат имеет силу независимо от того, подразумевается или нет присутствие звуковых и гравитационных волн начальными условиями; вычислительная

устойчивость решений зависит исключительно от свойств конечно-разностных уравнений, которые фактически решаются.

Как указывалось в главе 2(3), наиболее быстродействующие из современных вычислительных машин вполне способны решать гидродинамические уравнения в их первоначальной невидоизменной форме. Поэтому выбор между решением общих уравнений и решением некоторых модификаций этих уравнений не является выбором между возможностью и невозможностью. Этот выбор диктуется такими практическими и экономическими факторами, как горизонтальные размеры области, для которой желательно получить предсказание или которая необходима для точного предсказания, горизонтальное и вертикальное разрешение, требуемое для точного предсказания, и скорость вычислительной машины или в конечном счете, сколько времени она вычисляет прогноз. При прочих равных условиях «видоизмененные» уравнения могут быть решены в несколько раз быстрее, чем общие уравнения, просто потому, что для них максимально допустимый интервал по времени Δt в несколько раз больше. Для всякого, кто имеет машину с ограниченной емкостью, ограниченные денежные средства или ограниченное время, множитель 2 или 3 в его подсчете полного вычислительного времени как раз может определить разницу между практической возможностью и практической невозможностью.

Однако остается выяснить, можно ли модифицировать гидродинамические уравнения так, чтобы решения, соответствующие звуковым и гравитационным волнам, исключились бы, но без существенного видоизменения решений, соответствующих волнам Россби. Это — проблема отфильтровывания.

Решения, соответствующие звуковым волнам, могут быть исключены очень просто путем систематического применения гидростатического приближения. В главе 3(4) было указано, что существенную часть механизма распространения звука составляет изменение давления, обусловленное только адиабатическим сжатием. Поэтому, если мы потребуем, чтобы изменение давления в какой-либо точке осуществлялось только путем изменения полного веса столба воздуха над этой точкой, и явно введем это требование в гидродинамические уравнения, то тогда решения, соответствующие звуковым волнам, не смогут существовать. Это фактически уже было сделано при выводе уравнений (3.3) — (3.9). Конечно, адиабатическое уравнение является обязательным членом этой системы уравнений, но оно используется только для предсказания потенциальной температуры θ . Последняя в свою очередь используется только для предсказания температуры и плотности на каждом уровне, по которым предсказанное давление определяется гидростатически. Это рассуждение неявно формулируется с помощью уравнения (3.6) — преобразованного гидростатического уравнения.

С другой стороны, решения, соответствующие гравитационным волнам, не могут быть исключены таким прямым и очевидным способом без сильного изменения остающихся решений. Для того чтобы как можно яснее понять, как могут быть отфильтрованы решения, соответствующие гравитационным волнам, мы сначала обратимся к этой проблеме в ее наиболее простом виде путем рассмотрения простейшей гидродинамической модели, в которой возможно распространение как гравитационных волн, так и волн Россби. Такой моделью будет несжимаемая однородная жидкость в состоянии гидростатического равновесия, верхняя граница которой может свободно перемещаться и которая ограничена снизу твердой горизонтальной поверхностью.

Волны смешанного типа, составленные из гравитационных волн и волн Россби

Применяя уравнение (4.9), мы видим, что горизонтальный градиент давления в нашей модели жидкости равен

$$\frac{\partial p}{\partial x} = g\rho \frac{\partial h}{\partial x} \quad (6.1)$$

и аналогично

$$\frac{\partial p}{\partial y} = g\rho \frac{\partial h}{\partial y}, \quad (6.2)$$

где ρ — постоянная плотность жидкости, h — высота ее свободной поверхности. Тогда уравнения движения (2.13) и (2.14) принимают вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - f v + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0, \quad (6.3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + f u + g \frac{\partial h}{\partial y} = 0. \quad (6.4)$$

Следует заметить, что если u и v в начальный момент не зависят от высоты, то, как следует из уравнений (6.3) и (6.4), $\partial u/\partial t$ и $\partial v/\partial t$ также не зависят от высоты в начальный момент. Тогда если $\partial u/\partial z$ и $\partial v/\partial z$ равны нулю в начальный момент, то они будут равны нулю в течение всего последующего времени. Мы теперь примем, что u и v не зависят от высоты, имея гарантию динамической возможности этого условия. Уравнения (6.3) и (6.4) тогда сводятся к следующим:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - f v + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0, \quad (6.5)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + f u + g \frac{\partial h}{\partial y} = 0. \quad (6.6)$$

Дифференцируя второе из этих уравнений по x , а первое — по y и вычитая первое из второго, мы получим уравнение вихря

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} + v \frac{\partial f}{\partial y} + (\zeta + f) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0, \quad (6.7)$$

где, как и раньше, $\zeta = (\partial v / \partial x) - (\partial u / \partial y)$.

С помощью прямого и очевидного обобщения процедуры, посредством которой уравнение (4.11) было выведено из условия несжимаемости, уравнение неразрывности может быть приведено к виду

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} + h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0. \quad (6.8)$$

Уравнения (6.5), (6.7) и (6.8) можно рассматривать как полную систему уравнений, в которой неизвестными функциями являются u , v и h .

Общий характер решений уравнений (6.5), (6.7) и (6.8) будет найден с помощью метода «возмущений», изложенного в главе 3(4). Более того, чтобы гарантировать распространение различных возможных типов волновых движений в одном и том же направлении, мы просто потребуем, чтобы u и v не зависели от y . При этих ограничениях уравнения для возмущений, соответствующие уравнениям (6.5), (6.7) и (6.8), будут иметь вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right)_M u' - f v' + g \frac{\partial h'}{\partial x} = 0, \quad (6.9)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial v'}{\partial x} + \beta v' + f \frac{\partial u'}{\partial x} = 0, \quad (6.10)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) h' + v' \frac{d\bar{h}}{dy} + \bar{h} \frac{\partial u'}{\partial x} = 0, \quad (6.11)$$

где $\bar{u}$ — значение u в невозмущенном состоянии — постоянно; $\bar{h}$ — значение h в невозмущенном состоянии; u' и h' — отклонения от $\bar{u}$ и $\bar{h}$ соответственно; β — параметр Россби, равный $d\bar{f}/dy$. Величина v в невозмущенном состоянии равна нулю, так что $v = v'$. Нижний индекс M в уравнении (6.9) просто отличает оператор $[(\partial/\partial t) + u(\partial/\partial x)]_M$ от операторов того же вида из других уравнений. Заметим, что $\bar{h}$ не является точно константой, так как по уравнению (6.6) $\bar{u}$ и $\bar{h}$ связаны условием для невозмущенного состояния

$$f\bar{u} + g \frac{d\bar{h}}{dy} = 0, \quad (6.12)$$

так что второй член уравнения (6.11) равен $-f\bar{u}v'/g$.

Мы теперь будем искать решения уравнений (6.9), (6.10) и (6.11) в виде

$$\begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ h' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U \\ V \\ H \end{Bmatrix} e^{i\alpha(x-ct)},$$

где U , V и H — постоянные амплитуды. Легко проверить непосредственным дифференцированием, что

$$\frac{\partial}{\partial t} = -c \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} = -\alpha^2.$$

Вводя эти соотношения в уравнения (6.9), (6.10) и (6.11), мы видим, что названные уравнения могут быть записаны так:

$$(\bar{u} - c)_M \frac{\partial u'}{\partial x} - f v' + g \frac{\partial h'}{\partial x} = 0,$$

$$-\alpha^2 (\bar{u} - c) v' + \beta v' + f \frac{\partial u'}{\partial x} = 0,$$

$$(\bar{u} - c) \frac{\partial h'}{\partial x} - \frac{f \bar{u} v'}{g} + \bar{h} \frac{\partial u'}{\partial x} = 0,$$

где $(\bar{u} - c)_M$ соответствует оператору $[(\partial/\partial t) + \bar{u}(\partial/\partial x)]_M$. Следует отметить, что предыдущие уравнения представляют собой просто систему трех однородных алгебраических уравнений, в которых неизвестными являются $\partial u'/\partial x$, v' и $\partial h'/\partial x$. Следовательно, эта система уравнений обладает отличными от нуля решениями только тогда, когда детерминант из коэффициентов равен нулю, т. е.

$$\begin{vmatrix} \beta - \alpha^2 (\bar{u} - c) & 0 & f \\ -f & g & (\bar{u} - c)_M \\ -\frac{f \bar{u}}{g} & (\bar{u} - c) & \bar{h} \end{vmatrix} = 0.$$

Расписывая этот детерминант и перегруппировывая члены, мы найдем, что

$$\begin{aligned} & [\beta - \alpha^2 (\bar{u} - c)] [g \bar{h} - (\bar{u} - c) (\bar{u} - c)_M] - \\ & - f^2 [(\bar{u} - c) - \bar{u}] = 0. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Это уравнение, так называемое уравнение частоты, определяет допустимые значения фазовой скорости c , соответствующие данному волновому числу α . Его следует рассматривать как кубическое уравнение, в котором неизвестной величиной является $(\bar{u} - c)$.

Один приближенный корень уравнения (6.13) можно найти, принимая предварительно, что

$$(\bar{u} - c)^2 \ll g\bar{h}.$$

Тогда, опуская второй член во втором множителе первого члена уравнения (6.13), найдем

$$c - \bar{u} = -\frac{3 + (f^2 \bar{u} g \bar{h})}{\alpha^2 + (f^2 / g \bar{h})}. \quad (6.14)$$

Для всякого допустимого значения $\sqrt{g\bar{h}}$ — скорости чисто гравитационных волн в этой модели — относительная фазовая скорость, определяемая уравнением (6.14), очень мала. Тогда наше предварительное допущение об этом корне уравнения (6.13) оправдано. Волновые движения, соответствующие этому решению, являются, конечно, медленно движущимися волнами Россби, которые перемещаются только в одном направлении в любой данный момент времени.

Приближенные значения остальных корней уравнения (6.13) могут быть найдены, если предварительно допустить, что $|\bar{u} - c|$ значительно больше, чем β/α^2 — скорость чистых волн Россби. В этом случае мы опустим первый член в первом множителе первого члена уравнения (6.13). Замечая в то же время, что $|\bar{u} - c| \gg \bar{u}$, мы найдем, что

$$(\bar{u} - c)(\bar{u} - c)_M = g\bar{h} + \frac{f^2}{\alpha^2}. \quad (6.15)$$

Применяя результаты главы 3(4) к случаю одной однородной жидкости со свободной поверхностью, можно легко показать, что $\sqrt{g\bar{h}}$ представляет собой скорость чисто гравитационных волн. Конечно, вообще говоря, скорость гравитационных волн относительно среды намного больше скорости волн Россби, так что наша гипотеза о корнях уравнения (6.13) оправдывается апостериори. Таким образом, волновые движения, соответствующие решениям уравнения (6.15), являются по существу гравитационными волнами, распространяющимися в обоих направлениях одновременно и слегка видоизмененными эффектом инерционных восстанавливающих сил, обусловленных вращением Земли.

Аппроксимация отфильтровывания

Наша следующая задача — посмотреть, как можно исключить решения, определяемые уравнением (6.15), сохраняя при этом решения, определяемые уравнением (6.14). Из рассужде-

ния, с помощью которого было выведено уравнение (6.15), можно видеть, что гравитационные волновые решения обязаны своим существованием члену $(\bar{u} - c)(\bar{u} - c)_M$ во втором множителе первого члена уравнения (6.13). Поэтому достаточным (хотя и излишне сильным) условием для исключения гравитационных волн является приравнивание нулю $(\bar{u} - c)_M$. Восстанавливая в памяти путь, который привел к выводу уравнения (6.13), мы видим, что это условие эквивалентно пренебрежению членом $[(\partial/\partial t) + \bar{u}(\partial/\partial x)]_M u'$ в уравнении (6.9). Другими словами, одним из возможных методов отфильтровывания гравитационных волн является просто замена уравнения (6.9) соотношением

$$v' = \frac{g}{f} \frac{\partial h'}{\partial x}. \quad (6.16)$$

Как ни странно, это соотношение представляет собой как раз условие «геострофического» баланса, т. е. равновесия между силой Кориолиса и силой горизонтального градиента давления, отнесенными к единичной массе.

В соответствии с результатами предыдущего параграфа видоизмененные, или фильтрованные, уравнения состоят из уравнений (6.16), (6.10) и (6.11). Ясно, что уравнением частоты для видоизмененных уравнений будет то же уравнение (6.13), в котором $(\bar{u} - c)_M$ положено равным нулю. Поэтому уравнение (6.14) верно и для видоизмененных уравнений. Уже было показано, что уравнение (6.14) дает хорошую аппроксимацию точного значения корня уравнения (6.13), соответствующего волнам Россби.

Пока мы показали только, что гравитационные волновые решения исключаются с помощью геострофической аппроксимации (6.16) и что эта аппроксимация существенно не изменяет решения, соответствующие волнам Россби. Остается показать, почему эта аппроксимация не влияет сильно на полное решение. Дело в том, конечно, что амплитуды давления гравитационных волн намного меньше, чем амплитуды волн Россби и, кроме того, крупномасштабные движения атмосферы очень близки к состоянию геострофического баланса.

Чтобы показать, как аппроксимация отфильтровывания может быть обобщена на случай нелинейных уравнений, мы сначала рассмотрим линейную систему видоизмененных уравнений (6.16), (6.10) и (6.11). Исключая $\partial u'/\partial x$ из уравнений (6.10) и (6.11), мы найдем, что

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial v'}{\partial x} + \beta v' - \frac{f}{h} \left(\frac{\partial h'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial h'}{\partial x} - \frac{f \bar{u} v'}{g} \right) = 0. \quad (6.17)$$

Кроме того, вводя выражение для v' из уравнения (6.16), найдем

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial h'}{\partial x} - \frac{f^2}{g\bar{h}} \frac{\partial h'}{\partial t} = 0. \quad (6.18)$$

Заметим, что это уравнение содержит только одну зависимую переменную h' . Что касается двумерных нелинейных уравнений (6.7) и (6.8), то исключение $\partial u'/\partial x$ из линейных уравнений (6.10) и (6.11) эквивалентно исключению горизонтальной дивергенции скорости $[(\partial u/\partial x) + (\partial v/\partial y)]$ из уравнений (6.7) и (6.8). Тогда *нелинейное* уравнение, соответствующее уравнению (6.17), будет

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \beta v - \frac{\zeta + f}{h} \left(\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \right) = 0. \quad (6.19)$$

Кроме того, в двумерном потоке условия, соответствующие уравнению (6.16), будут

$$v = \frac{g}{f} \frac{\partial h}{\partial x}, \quad (6.20)$$

$$u = -\frac{g}{f} \frac{\partial h}{\partial y}. \quad (6.21)$$

Так как изменением f^* в коэффициентах уравнений (6.20) и (6.21) обычно пренебрегают, то

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{g}{f} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) = \frac{g}{f} \nabla^2 h, \quad (6.22)$$

где ∇^2 представляет собой горизонтальный оператор Лапласа. Подставляя u , v и ζ из (6.20), (6.21) и (6.22) в уравнение (6.19), мы увидим, что нелинейное уравнение, соответствующее линейному уравнению (6.18), будет

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 h + \frac{g}{f} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 h - \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 h \right) + \\ + \beta \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{f[f + (g/f) \nabla^2 h]}{gh} \frac{\partial h}{\partial t} = 0. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Это «видоизмененное» уравнение для рассматриваемой нами простой модели. Следует заметить, что это уравнение содержит в качестве неизвестной функции только h и представляет собой уравнение первого порядка по времени. Следовательно, оно не

может иметь решений, соответствующих гравитационным волнам, просто потому, что последние могут распространяться во всех направлениях одновременно и должны описываться уравнениями, содержащими производные по времени второго или более высоких порядков.

Только что описанная процедура, с помощью которой нелинейные уравнения для несжимаемой жидкости могут быть модифицированы, дает возможность предложить метод видоизменения уравнений для более общих и сложных моделей. Ход действий заключается в следующем:

1. Составляем вертикальную компоненту уравнения вихря применительно к рассматриваемой модели.

2. Исключаем горизонтальную дивергенцию скорости из уравнения вихря и уравнения неразрывности. Начиная с этого момента уравнения движения или уравнение неразрывности в их первоначальной форме не используются.

3. Чтобы восполнить потерю двух последних уравнений, вводим два уравнения геострофического ветра, выражая компоненты горизонтальной скорости через горизонтальные градиенты давления.

4. Выражаем температуру и плотность через давление с помощью уравнения гидростатики и уравнения состояния.

Как будет видно позднее, эта процедура приводит к одному уравнению, в котором единственным неизвестным является давление или изобарическая высота и которое не обладает решениями, отвечающими звуковым и гравитационным волнам. Уравнения этого типа применяются к так называемым «геострофическим» моделям.

Приведенная выше процедура достаточна для исключения звуковых и гравитационных волновых решений; в дальнейшем будет показано, что она связана с излишне сильными условиями. Тем не менее этот метод отфильтровывания пригоден для многих целей и представляет значительный исторический интерес, так как отфильтровывание именно этого типа было впервые предложено Чарни в 1948 г. Также интересно отметить, что идея отсеивания решений уравнений (6.9) — (6.11) может быть обнаружена в работе Россби 1940 г., хотя вопрос об отфильтровывании тогда еще не возникал.

ЛИТЕРАТУРА

- Charney J. On the Scale of Atmospheric Motions. *Geofys. Publikasjoner*, 17, 1948.
Rossby C. -G., et al. Relation between Variations in the Intensity of the Zonal Circulation of the Atmosphere and the Displacements of the Semi-permanent Centers of Action. *J. Marine Res.*, 2, 38, 1939.
Sverdrup H. Dynamics of Tides on the North Siberian Shelf. *Geofys. Publikasjoner*, 4, 5, 1927,

ГЛАВА 6(8)

Численные методы решения видоизмененных
нелинейных уравнений

В отличие от уравнений, разобранных в главах 3(4) и 4(5), уравнение (7.14) нелинейно и, вообще говоря, не может быть решено точными аналитическими методами. Поэтому мы применим конечно-разностные методы, кратко описанные в главах 2(3) и 4(5). Следует указать, что это не единственные приближенные методы решения нелинейных уравнений; другой возможностью являются приближенные методы предсказания амплитуды каждой компоненты спектра высоты 500-миллибаровой поверхности. Однако обычные конечно-разностные методы имеют достоинство логической простоты и могут быть хорошо приспособлены к вычислению на автоматических машинах.

Конечно-разностное уравнение

Точки сетки, или решетки, которая обычно используется для метеорологических приложений конечно-разностного метода, разделены не одинаковыми угловыми интервалами по широте

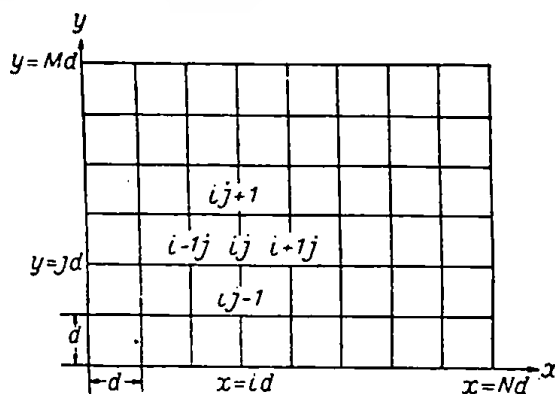


Рис. 10 (11). Расположение и нумерация точек в горизонтальной конечно-разностной сетке.

или долготе, как это было в главе 2(3), а одинаковыми расстояниями по направлениям, параллельным осям декартовой координатной системы на картографической проекции поверхности Земли. Эта сетка бывает обычно квадратной в том смысле, что прямоугольник, вершинами которого являются четыре соседние точки сетки, является квадратом со стороной d , как показано на рис. 10(11). Хотя совокупность точек сетки может иметь вось-

миугольный контур или может занимать область неправильной формы, ее чаще выбирают прямоугольной. Для простоты мы примем сетку этого последнего типа.

Картографические проекции, обычно используемые в метеорологии, являются конформными проекциями, как, например, коническая конформная проекция Ламберта и полярная стереографическая проекция. Удобным свойством таких проекций, которое приводится здесь без вывода, является то, что некото-

рые дифференциальные инварианты сохраняют свою математическую форму после преобразования к координатам карты. Примерами могут служить операторы лапласиана и якобиана, которые входят в уравнение (7.14), т. е.

$$\nabla^2 \varphi = m^2 \nabla_m^2 \varphi, \quad J(\varphi, \psi) = m^2 J_m(\varphi, \psi),$$

где «множитель горизонтального масштаба» m представляет собой отношение расстояния, измеренного на карте, к соответствующему геометрическому расстоянию, а нижний индекс m означает, что соответствующие дифференцирования проводятся в координатах карты. Для стандартных проекций множитель m зависит только от широты, но вид этой зависимости меняется с изменением проекции и масштаба карты. Вводя предыдущие соотношения и замечая, что f зависит только от координаты, направленной по меридиану, мы можем переписать уравнение (7.14) так:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \nabla_m^2 z + J_m(z, \zeta + f) - \\ & - \frac{A_0 f}{m^2 R T_0} (\zeta + f) \left[\frac{\partial z}{\partial t} - \frac{m^2 g}{f} J_m(z, z_g) \right] = 0, \end{aligned} \quad (8.1)$$

где

$$\zeta = \frac{m^2 g}{f} \nabla_m^2 z.$$

Следующий шаг — введение центральных конечно-разностных аппроксимаций; для произвольных функций φ и ψ будем иметь

$$\begin{aligned} \nabla_m^2 \varphi &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_m^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_m^2} \approx \frac{1}{d^2} (\varphi_{i+1j} + \varphi_{ij+1} + \varphi_{i-1j} + \varphi_{ij-1} - \\ & - 4\varphi_{ij}) \equiv \frac{1}{d^2} \nabla^2 \varphi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_m(\varphi, \psi) &= \frac{\partial \varphi}{\partial x_m} \frac{\partial \psi}{\partial y_m} - \frac{\partial \varphi}{\partial y_m} \frac{\partial \psi}{\partial x_m} \approx \frac{1}{4d^2} [(\varphi_{i+1j} - \varphi_{i-1j}) \times \\ & \times (\psi_{ij+1} - \psi_{ij-1}) - (\varphi_{ij+1} - \varphi_{ij-1}) (\psi_{i+1j} - \psi_{i-1j})] \equiv \frac{1}{4d^2} J(\varphi, \psi). \end{aligned}$$

Подставляя результаты этих аппроксимаций в уравнение (8.1), получим конечно-разностное уравнение

$$\begin{aligned} & \nabla^2 \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{1}{4} J(z, \zeta + f) - \\ & - \frac{d^2 A_0 f}{m^2 R T_0} (\zeta + f) \left[\frac{\partial z}{\partial t} - \frac{m^2 g}{4d^2 f} J(z, z_g) \right] = 0, \end{aligned} \quad (8.2)$$

и теперь

$$\zeta = \frac{m^2 g}{d^2 f} \nabla^2 z. \quad (8.3)$$

Наконец, обозначая через μ^2 безразмерный коэффициент членов, стоящих в квадратных скобках уравнения (8.2), мы можем переписать уравнение (8.2) в таком виде:

$$\nabla^2 \frac{\partial z}{\partial t} - \mu_{ij}^2 \frac{\partial z}{\partial t} = -\frac{1}{4} J(z, \zeta + f) - \frac{\mu^2 m^2 g}{4 d^2 f} J(z, z_g) = F_{ij}. \quad (8.4)$$

Вместе с соответствующими граничными условиями это уравнение может быть использовано для вычисления высоты z 500-миллибаровой поверхности в любой момент времени, отправляясь от ее значений в произвольно выбранный начальный момент $t=0$. По причинам, которые выявятся в дальнейшем, мы должны задать (а не предсказать) значения z и ζ в каждой точке на границе сетки в течение каждого интервала времени. Обычно полагают, что z и ζ сохраняют свои начальные значения в каждой точке границы, так что $\partial z / \partial t$ обращается в нуль во всех точках границы и во все моменты времени.

Теперь предположим, что значения z во всех внутренних точках прямоугольной сетки известны в начальный момент $t=0$. Тогда, так как начальные значения μ_{ij} и F_{ij} могут быть вычислены в каждой внутренней точке по начальным значениям z_{ij} и по граничным значениям z и ζ , уравнение (8.4) принимает форму линейного уравнения, в котором начальное значение $\partial z / \partial t$ неизвестно, а μ и F — известные функции координат сетки ij ¹. Позднее будет показано, что при заданных значениях $\partial z / \partial t$ в точках границы это уравнение может быть решено относительно $\partial z / \partial t$ для всех точек ij внутри сетки. Временно допустим, что это может быть сделано. Тогда значения z_{ij} в момент времени $t=\Delta t$ могут быть вычислены для каждой внутренней точки сетки по нецентральной конечно-разностной формуле

$$z_{ij}^1 = z_{ij}^0 + \Delta t \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)_{ij}^0,$$

где, как и в главе 4(5), верхний индекс означает номер временного интервала Δt , отсчитываемого от $t=0$. Предсказанные значения z_{ij}^1 при $t=\Delta t$ могут рассматриваться как новые начальные значения, после чего этот процесс может быть повторен много

¹ Следует заметить, что $J(z, \zeta)$ в точках, соседних с границей, зависят от значений ζ в точках на границе. Так как последние не могут быть вычислены по значениям z на границе или в пределах ее, то ζ задается в граничных точках.

раз. Для последующих шагов по времени временная экстраполяция проводится по центральной конечно-разностной формуле

$$z_{ij}^{m+1} = z_{ij}^{m-1} + 2\Delta t \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)_{ij}^m.$$

Таким образом, предсказанные значения z_{ij} могут быть вычислены для любого желаемого периода времени.

Метод релаксации (одновременный и последовательный)

Остается решить задачу отыскания тех значений φ_{ij} во внутренних точках, которые совместимы со значениями φ , заданными в граничных точках, и которые удовлетворяют конечно-разностному уравнению того же типа, что и уравнение (8.4), а именно

$$\nabla^2 \varphi - \mu_{ij}^2 \varphi_{ij} = F_{ij}, \quad (8.5)$$

где φ — какая-нибудь произвольная функция. Следует прежде всего заметить, что уравнение (8.5) должно быть удовлетворено в каждой точке внутри сетки. Тогда, если i изменяется в пределах от нуля до N и j — от нуля до M , то можно выписать систему $(N-1)(M-1)$ уравнений, из которых каждое является уравнением (8.5), записанным в одной из внутренних точек ij . Так как φ в граничных точках известна, то эта система уравнений будет включать точно $(N-1)(M-1)$ неизвестных, а именно значения φ во внутренних точках сетки. Поэтому решение уравнения (8.5) может рассматриваться как решение совместной системы $(N-1)(M-1)$ линейных алгебраических уравнений и может быть осуществлено методом исключения Гаусса — Зейделя или методами, специально предназначенными для обращения матриц очень высокого порядка. Так как N и M обычно находятся в пределах от 20 до 40, то число уравнений в такой системе будет порядка 1000. Только по этой причине уравнение (8.5) обычно не решается стандартными методами обращения матриц. Тем не менее тот факт, что решение уравнения (8.5) представляет собой просто решение полной системы линейных алгебраических уравнений, является достаточным доказательством того, что решение фактически существует.

Методы, с помощью которых уравнение (8.5) обычно решается, являются вариантами так называемого метода релаксации, требующего всего от $10(N-1)(M-1)$ до $100(N-1)(M-1)$ численных операций, которые могут быть легко закодированы для автоматической вычислительной машины. Это методы последовательных приближений, с помощью которых можно построить упорядоченную последовательность улучшающихся приближений. Самым простым с точки зрения анализа

сходимости является метод Рундсона, или одновременный метод релаксации.

Одновременный метод легче всего описать, предположив, что мы сначала приблизительно угадали φ_{ij}^0 — решение уравнения (8.5)¹. Конечно, вообще говоря, φ_{ij}^0 не будет удовлетворять уравнению (8.5), но будет отличаться от точного решения φ_{ij} на величину так называемой «невязки» R_{ij}^0 , определяемой уравнением

$$\nabla^2 \varphi^0 - \mu_{ij}^2 \varphi_{ij}^0 = F_{ij} + R_{ij}^0. \quad (8.6)$$

Если R_{ij}^0 случайно обратится в нуль во всех точках, то тогда φ_{ij}^0 будет точным решением уравнения (8.5). По определению ∇^2 , уравнение (8.6) может быть записано в таком виде:

$$\varphi_{i+1,j}^0 + \varphi_{i-1,j}^0 + \varphi_{i,j+1}^0 + \varphi_{i,j-1}^0 - (4 + \mu_{ij}^2) \varphi_{ij}^0 = F_{ij} + R_{ij}^0.$$

Теперь предположим, что начальное приближение (догадка) в некоторой точке ij изменено на величину $\delta\varphi_{ij}$ без изменения его значений в окружающих точках. Так как F_{ij} фиксировано, то из предыдущего уравнения следует, что получающееся изменение невязки в той же точке ij будет

$$\delta R_{ij} = - (4 + \mu_{ij}^2) \delta\varphi_{ij}.$$

Если бы имелась только одна внутренняя точка сетки, то мы, очевидно, изменили бы φ^0 в этой точке таким образом, чтобы результирующая невязка обратилась в нуль, т. е. чтобы было

$$\delta R_{ij} = - R_{ij}^0.$$

По предыдущему уравнению требуемое $\delta\varphi_{ij}$ будет

$$\delta\varphi_{ij} = \frac{1}{4 + \mu_{ij}^2} R_{ij}^0,$$

или, если φ_{ij}^1 обозначает результат, полученный за счет изменения $\delta\varphi_{ij}$,

$$\varphi_{ij}^1 = \varphi_{ij}^0 + \frac{1}{4 + \mu_{ij}^2} R_{ij}^0. \quad (8.7)$$

Эту формулу можно применить к сетке более чем с одной внутренней точкой, интерпретируя R_{ij}^0 как невязку, соответствующую начальным значениям φ_{ij} , не обращая внимания на то, что некоторые приближенные значения φ в точках, соседних с точкой ij , фактически могут оказаться измененными. Вообще го-

¹ Здесь верхний индекс означает не номер шага по времени, а порядок аппроксимации.

воря, эта процедура не будет приводить невязки R_{ij}^1 к нулю просто потому, что приближенные значения φ в точках, соседних с точкой ij , будут изменены. Тем не менее будет показано, что φ_{ij}^1 является лучшим приближением к точному решению φ_{ij} , чем начальное приближение φ_{ij}^0 , в том смысле, что амплитуда каждой компоненты в спектре ошибки уменьшится. Поэтому нам следует просто принять φ_{ij}^1 за новую «догадку» и вновь применить уравнение (8.7) для дальнейшего уменьшения ошибки и т. д. Эта процедура описывается общей рекуррентной формулой, для которой уравнение (8.7) является частным случаем:

$$\varphi_{ij}^{m+1} = \varphi_{ij}^m + \frac{1}{4 + \mu_{ij}^2} R_{ij}^m, \quad (8.8)$$

где

$$R_{ij}^m = \nabla^2 \varphi^m - \mu_{ij}^2 \varphi_{ij}^m - F_{ij}. \quad (8.9)$$

Эти уравнения определяют итерационную процедуру, посредством которой можно вычислить последовательность приближений φ_{ij}^m , отправляясь от начального приближения φ_{ij}^0 . Эта процедура, по-видимому, разработанная Ричардсоном, представляет собой метод одновременной релаксации.

Остается показать, что описанная выше схема, если ее провести до достаточно больших m , будет всегда приводить к значениям φ_{ij}^m , которые сходятся к точному решению φ_{ij} уравнения (8.5) независимо от того, как выбрано начальное приближение φ_{ij}^0 . Для упрощения доказательства мы сначала решим уравнение (8.5) относительно F_{ij} , а затем подставим получившееся выражение в уравнение (8.9). В результате получим

$$R_{ij}^m = \nabla^2 (\varphi^m - \varphi) - \mu_{ij}^2 (\varphi_{ij}^m - \varphi_{ij}),$$

или, замечая, что $(\varphi_{ij}^m - \varphi_{ij})$ является как раз ошибкой ε_{ij}^m m -го приближения,

$$R_{ij}^m = \nabla^2 \varepsilon^m - \mu_{ij}^2 \varepsilon_{ij}^m.$$

Далее, вычитая φ_{ij} из обеих частей уравнения (8.8), получим

$$\varepsilon_{ij}^{m+1} = \varepsilon_{ij}^m + \frac{1}{4 + \mu_{ij}^2} R_{ij}^m.$$

Наконец, исключая R_{ij}^m из двух предыдущих уравнений, мы получим конечно-разностное уравнение для ошибки ε_{ij}^m m -го приближения φ_{ij}^m

$$\varepsilon_{ij}^{m+1} = \varepsilon_{ij}^m + \frac{1}{4 + \mu_{ij}^2} (\nabla^2 \varepsilon^m - \mu_{ij}^2 \varepsilon_{ij}^m).$$

На этом этапе мы упростим анализ в одном отношении и обобщим — в другом. Вспомним, что μ^2 пропорционально абсолютному вихрю $(\zeta + f)$. Так как величина относительного вихря ζ , вообще говоря, меньше, чем f , то мы будем рассматривать μ^2 постоянной. В то же время метод перехода от приближения одного порядка к следующему мы обобщим, полагая $(\varepsilon_{ij}^{m+1} - \varepsilon_{ij}^m)$ пропорциональным R_{ij}^m с произвольным множителем. В соответствии с этим предыдущее уравнение заменится следующим:

$$\varepsilon_{ij}^{m+1} = \varepsilon_{ij}^m + \frac{\alpha}{4 + \mu^2} (\nabla^2 \varepsilon_{ij}^m - \mu^2 \varepsilon_{ij}^m), \quad (8.10)$$

где α — неопределенная константа. Граничные условия для ε_{ij}^m таковы, что ε_{ij}^m обращается в нуль при $i=0$, $i=N$, $j=0$ и $j=M$ просто потому, что значения φ в граничных точках заданы и сохраняются постоянными.

Общее решение конечно-разностного уравнения (8.10) проще всего может быть найдено, если заметить, что ошибка ε_{ij}^0 начального приближения (первой догадки) может быть представлена в виде дискретного ряда Фурье

$$\varepsilon_{ij}^0 = \sum_{p=1}^{N-1} \sum_{q=1}^{M-1} A_{pq}^0 \sin \frac{pi\pi}{N} \sin \frac{qj\pi}{M}, \quad (8.11)$$

где p и q — целые числа, которые принимают все значения в пределах, указанных знаками суммирования¹. Так как имеется $(N-1)(M-1)$ линейно независимых коэффициентов A_{pq}^0 , подлежащих определению, и точно $(N-1)(M-1)$ значений ε_{ij}^0 во внутренних точках сетки для определения коэффициентов A_{pq}^0 , то последние могут быть определены однозначно. Следует также заметить, что это представление гарантирует выполнение граничных условий для ε_{ij}^0 .

Теперь рассмотрим решения конечно-разностного уравнения (8.10), соответствующие одной компоненте спектра ошибки, а именно решения вида

$$\varepsilon_{ij}^m = k^m \sin \frac{pi\pi}{N} \sin \frac{qj\pi}{M}, \quad (8.12)$$

которые удовлетворяют граничным условиям для ε_{ij}^m при всех p , q и m . Оператор ∇^2 , примененный к уравнению (8.12), дает

$$\nabla^2 \varepsilon_{ij}^m = 2\varepsilon_{ij}^m \left(\cos \frac{p\pi}{N} + \cos \frac{q\pi}{M} - 2 \right)$$

¹ Символ i — по-прежнему целый индекс положения точки, и его не следует смешивать с мнимой единицей.

или, используя тригонометрические тождества,

$$\nabla^2 \varepsilon^m = -4\varepsilon_{ij}^m \left(\sin^2 \frac{p\pi}{2N} + \sin^2 \frac{q\pi}{2M} \right).$$

Тогда, обозначая для сокращения величину в круглых скобках через v^2 , подставляя (8.12) в уравнение (8.10) и деля последнее на ε_{ij}^m , мы найдем, что

$$k = 1 - \frac{\alpha}{4 - \mu^2} (4v^2 + \mu^2). \quad (8.13)$$

Так как уравнение (8.10) линейно, то общее решение может быть получено суперпозицией частных решений вида (8.12), т. е.

$$\varepsilon_{ij}^m = \sum_{p=1}^{N-1} \sum_{q=1}^{M-1} A_{pq}^0 (k_{pq})^m \sin \frac{pi\pi}{N} \sin \frac{qj\pi}{M}, \quad (8.14)$$

где k_{pq} определяется по уравнению (8.13). Согласно уравнению (8.14), амплитуда каждой компоненты в спектре ошибки $(m+1)$ -й итерации равняется амплитуде m -й итерации, умноженной на соответствующую константу k_{pq} . Тогда вопрос о сходимости последовательности приближений, даваемых уравнениями (8.8) и (8.9), сводится к нахождению условий, при которых $|k_{pq}| < 1$. Если это условие удовлетворяется, то ошибка ε_{ij}^m должна равномерно стремиться к нулю.

Значительный интерес представляет частный случай, когда $\mu=0$, так как в этом случае уравнение (8.5) является конечно-разностной формой хорошо известного уравнения Пуассона. Уравнение (8.13) сводится тогда к следующему:

$$k_{pq} = 1 - \alpha v_{pq}^2, \quad v_{pq}^2 = \sin^2 \frac{p\pi}{2N} + \sin^2 \frac{q\pi}{2M}.$$

Если, кроме этого, α выбрано равным единице, то $|k| < 1$, так как $0 < v^2 < 2$. Вообще $|k| < 1$, если $\alpha < 2/v_{\max}^2$, где

$$v_{\max}^2 = \sin^2 \frac{(N-1)\pi}{2N} + \sin^2 \frac{(M-1)\pi}{2M}.$$

Это условие гарантирует равномерную сходимость всех компонент спектра. Если, с другой стороны, амплитуда мелкомасштабных компонент спектра ошибки (или невязки) мала, т. е. если поле невязок состоит из крупных ячеек, то мы можем ускорить сходимость в среднем, выбрав α немного больше единицы. Соответствующая релаксационная процедура называется сверхрелаксацией, так как она эквивалентна изменению нашего начального приближения (догадки) на величину большую, чем

это требуется для сведения частной невязки к нулю. Наоборот, если поле невязок состоит из мелких ячеек, то скорость сходимости может быть увеличена, если выбрать α немного меньше единицы. Это соответствует «пониженной релаксации». Однако следует иметь в виду, что некоторые компоненты спектра ошибки будут расти по амплитуде, если только не будет $\alpha < 2/v_{\max}^2$. Поэтому в любом случае вычисление должно быть отшлифовано процедурой, в которой это условие удовлетворяется.

В общем случае, когда $\mu \neq 0$, условие сходимости имеет вид

$$\alpha < \frac{2(4 + \mu^2)}{4v_{\max}^2 + \mu^2}.$$

Заниженная оценка максимально допустимого значения α дает

$$\alpha = \frac{8 + 2\mu^2}{8 + \mu^2}.$$

Тогда, если μ имеет порядок единицы, α может быть выбрано заметно больше единицы, для того чтобы ускорить сходимость крупномасштабных компонент спектра ошибки без усиления амплитуд компонент других размеров.

ЛИТЕРАТУРА

- Charney J., Fjörtoft R., Neumann J. Numerical Integration of the Barotropic Vorticity Equation. *Tellus*, 2, 237, 1950.
 Frankel S. Convergence Rates of Iterative Treatments of Partial Differential Equations. *Math. Tables and Other Aids to Computation*, 4, 65, 1950.
 Southwell R. *Relaxation Methods in Theoretical Physics*. Clarendon Press, Oxford, 1946.

ГЛАВА 7 (9)

Проблема циклогенеза и видоизмененные уравнения бароклининого потока

Видоизмененные уравнения бароклининого движения

Исходным пунктом для нас будет являться векторное уравнение (2.33), т. е. горизонтальное уравнение движения, выраженное в координатах давления. Используя векторное тождество

$$u \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} \equiv (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \equiv \nabla \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}}{2} + \mathbf{k} \times \zeta \mathbf{V},$$

можем записать это уравнение в виде

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}}{2} + \mathbf{k} \times (\zeta + f) \mathbf{V} + \omega \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial p} + g \nabla z = 0, \quad (9.3)$$

где все дифференцирования по времени и по горизонтальным координатам проводятся при закреплённом p . Общая форма уравнения вихря получается путем применения оператора вертикальной компоненты вихря или ротора к каждому члену предыдущего уравнения. Тогда

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \nabla \cdot (\zeta + f) \mathbf{V} + \omega \frac{\partial \zeta}{\partial p} + \mathbf{k} \cdot \nabla \omega \times \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial p} = 0 \quad (9.4)$$

Второй член этого уравнения может быть переписан так:

$$\nabla \cdot (\zeta + f) \mathbf{V} = \mathbf{V} \cdot \nabla (\zeta + f) + (\zeta + f) \nabla \cdot \mathbf{V},$$

или в силу уравнения неразрывности (2.32)

$$\nabla \cdot (\zeta + f) \mathbf{V} = \mathbf{V} \cdot \nabla (\zeta + f) - (\zeta + f) \frac{\partial \omega}{\partial p}.$$

Подставляя этот результат в уравнение (9.4), мы найдем, что

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla (\zeta + f) - (\zeta + f) \frac{\partial \omega}{\partial p} + \omega \frac{\partial \zeta}{\partial p} + \mathbf{k} \cdot \nabla \omega \times \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial p} = 0. \quad (9.5)$$

Теперь, согласно этапу 3 процедуры отфильтровывания, описанной в конце главы 5(6), фактический ветер и фактический вихрь должны быть заменены геострофическим ветром и геострофическим вихрем там, где они входят в предыдущее уравнение. Иначе говоря, мы полагаем

$$\mathbf{V} = \mathbf{k} \times \frac{g}{f} \nabla z, \quad \zeta = \frac{g}{f} \nabla^2 z. \quad (9.6)$$

Подставляя эти выражения в уравнение (9.5), мы можем привести уравнения вихря к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 z + J(z, \zeta + f) - \frac{f(\zeta + f)}{g} \frac{\partial \omega}{\partial p} + \omega \frac{\partial}{\partial p} \nabla^2 z + \\ + \nabla \omega \cdot \nabla \frac{\partial z}{\partial p} = 0, \end{aligned} \quad (9.7)$$

где ζ следует выразить через z с помощью уравнения (9.6). Это одно из двух видоизменённых уравнений бароклинного движения.

Другое видоизменённое уравнение для бароклинного движения получается из первого начала термодинамики. Выражённое в координатах давления, уравнение (2.25) принимает вид

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \theta + \omega \frac{\partial \theta}{\partial p} = 0. \quad (9.8)$$

Комбинируя уравнение, определяющее θ , с уравнением гидростатики и уравнением состояния, мы найдем, что θ можно выразить такими способами:

$$\theta \equiv T \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\kappa} = \frac{p}{R \rho} \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\kappa} = - \frac{g p}{R} \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\kappa} \frac{\partial z}{\partial p}. \quad (9.9)$$

Подставляя последнее выражение для θ в уравнение (9.8) и замечая, что p не меняется на изобарической поверхности, мы найдем, что

$$\frac{g p}{R} \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\kappa} \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial p} + \mathbf{V} \cdot \nabla \frac{\partial z}{\partial p} \right) - \omega \frac{\partial \theta}{\partial p} = 0.$$

Кроме того, из определения θ и уравнения состояния имеем

$$\frac{g p}{R} \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\kappa} = g_0 \theta.$$

Тогда предыдущее уравнение может быть записано так:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial p} + \mathbf{V} \cdot \nabla \frac{\partial z}{\partial p} - \left(\frac{1}{g_0 \theta} \frac{\partial \theta}{\partial p} \right) \omega = 0. \quad (9.10)$$

Наконец, согласно этапу 3 процедуры отфильтровывания, описанной в конце главы 5(6), мы вводим геострофическое приближение, выраженное уравнениями (9.6). Тогда уравнение (9.10) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial p} + \frac{g}{f} J \left(z, \frac{\partial z}{\partial p} \right) - \sigma \omega = 0, \quad (9.11)$$

где $\sigma = (1/g_0 \theta) \partial \theta / \partial p$. Так как и θ , и p выражаются через z с помощью уравнения (9.9) и уравнения гидростатики, то σ зависит только от z . Уравнение (9.11) является вторым из двух видоизмененных уравнений бароклинного движения. Это уравнение вместе с уравнением (9.7) составляет полную систему уравнений, содержащих только две неизвестные функции z и ω .

Уравнение для ω

Так как физические граничные условия налагают существенные ограничения на ω (или вертикальный перенос массы), то будет естественно поискать уравнение, которое связывало бы ω в любой данный момент времени с распределением z в тот же момент. Такое уравнение можно получить, дифферен-

цируя уравнение (9.7) по p , применяя горизонтальный оператор Лапласа к уравнению (9.11) и вычитая первое из этих уравнений из второго. Замечая при этом, что

$$\partial \zeta / \partial p = (g/f) \nabla^2 \partial z / \partial p,$$

мы можем записать получившееся уравнение в виде

$$\begin{aligned} \nabla^2 (\omega) - \frac{f(\zeta + f)}{g} \frac{\partial^2 \omega}{\partial p^2} + \omega \nabla^2 \frac{\partial^2 z}{\partial p^2} + \nabla \omega \cdot \nabla \frac{\partial^2 z}{\partial p^2} + \\ + \nabla \frac{\partial \omega}{\partial p} \cdot \nabla \frac{\partial z}{\partial p} = \frac{g}{f} \nabla^2 J \left(z, \frac{\partial z}{\partial p} \right) - \frac{\partial}{\partial p} J(z, \zeta + f). \end{aligned} \quad (9.12)$$

Как было указано раньше, σ и ζ могут быть выражены через одно только z . Поэтому уравнение (9.12) может рассматриваться как линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка, в котором z считается известным, а ω принято за неизвестное. Это уравнение заменяет уравнение (9.11) и вместе с уравнением (9.7) составляет полную систему уравнений, в которой неизвестными функциями являются ω и z .

Имеются две особенности видоизмененных уравнений (9.7) и (9.12), которые следует отметить здесь. Первая особенность состоит в том, что весь прогностический элемент системы содержится в уравнении (9.7). Так как это уравнение первого порядка по времени, то уравнения (9.7) и (9.12) не могут иметь решений, соответствующих звуковым и гравитационным волнам. Вторая особенность состоит в том, что прогностическое уравнение (9.7) является уравнением вихря, связывающим изменения вихря, испытываемые частицей жидкости, с реальными силами и силами инерции, вызывающими закручивающее усилие в жидкости. При этом уравнение вихря (9.7) не может отображать почти полного равновесия между силами Кориолиса и градиента давления просто потому, что сила, обусловленная градиентом давления, является нормальной силой и не может вызывать закручивающего усилия. Это свойство прогностического уравнения (9.7) освобождает его от одной из главных трудностей, возникающих при интегрировании уравнений движения в их первоначальной невидоизмененной форме, а именно от трудности вычисления суммы почти полностью компенсирующихся членов по неточным и нерепрезентативным данным.

Уравнение вихря для бароклинического движения часто записывается в простой приближенной форме, которая получается путем пренебрежения четвертым и пятым членами уравнения (9.7) и замены $(\zeta + f)$ на f в третьем члене. Из наблюдений известно, что четвертый и пятый члены стремятся компенсировать друг друга и что их сумма значительно меньше по вели-

чнее, чем первый или второй член. С этими приближениями уравнение (9.7) сводится к следующему:

$$\nabla^2 \frac{\partial z}{\partial t} + J(z, \zeta + f) - \frac{f^2}{g} \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0. \quad (9.13)$$

Уравнение, соответствующее уравнению (9.12), примет тогда вид

$$\sigma \nabla^2 \omega - \frac{f^2}{g} \frac{\partial^2 \omega}{\partial p^2} = \frac{g}{f} \nabla^2 J\left(z, \frac{\partial z}{\partial p}\right) - \frac{\partial}{\partial p} J(z, \zeta + f). \quad (9.14)$$

Величина σ всегда отрицательна и испытывает гораздо меньшие (в процентном отношении) изменения, чем ω ; поэтому изменениями σ пренебрегают, хотя по существу в этом нет необходимости.

Конечно-разностные уравнения бароклинного движения

Следуя рассуждениям, которые аналогичны описанным в главе 6(8), мы рассмотрим сетку точек, горизонтальные координаты которых на конформной проекции карты будут $x=id$ и $y=jd$. Положения этих точек вдоль вертикальной оси обозначаются с помощью множителя, на который умножается некоторое постоянное приращение давления Δp :

$$p = k\Delta p,$$

где k может принимать значения $0, 1/2, 1, 3/2, 2, 5/2, \dots, Q$. Тогда в обозначениях главы 6(8) конечно-разностные уравнения соответствующие уравнениям (9.13) и (9.14), будут

$$\begin{aligned} \nabla^2 \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)_{k+1/2} + \frac{1}{4} J(z_{k+1/2}, \zeta_{k+1/2} + f) - \\ - \frac{f^2 d^2}{gm^2 \Delta p} (\omega_{k+1} - \omega_k) = 0, \end{aligned} \quad (9.15)$$

$$\begin{aligned} \sigma_k \nabla^2 \omega_k - \frac{f^2 d^2}{gm^2 (\Delta p)^2} (\omega_{k-1} - 2\omega_k + \omega_{k+1}) = \\ = \frac{g}{8fd^2 \Delta p} \nabla^2 m^2 J(z_{k+1/2} + z_{k-1/2}, z_{k+1} - z_{k-1/2}) - \\ - \frac{1}{4\Delta p} |J(z_{k+1/2}, \zeta_{k+1/2} + f) - J(z_{k-1/2}, \zeta_{k-1/2} + f)|, \end{aligned} \quad (9.16)$$

где нижний индекс k отвечает значению функции при $p=k\Delta p$ и

$$\zeta = \frac{gm^2}{fd^2} \nabla^2 z.$$

Уравнения (9.15) и (9.16) обеспечивают основу для метода предсказания, значительно более общего, чем простая схема, описанная в главе 6(8).

Схема предсказания, основанная на уравнениях бароклинического движения

Предположим теперь, что нам даны начальные значения во всех точках тех изобарических поверхностей, которые соответствуют дробным значениям k , как показано на рис. 11(12).

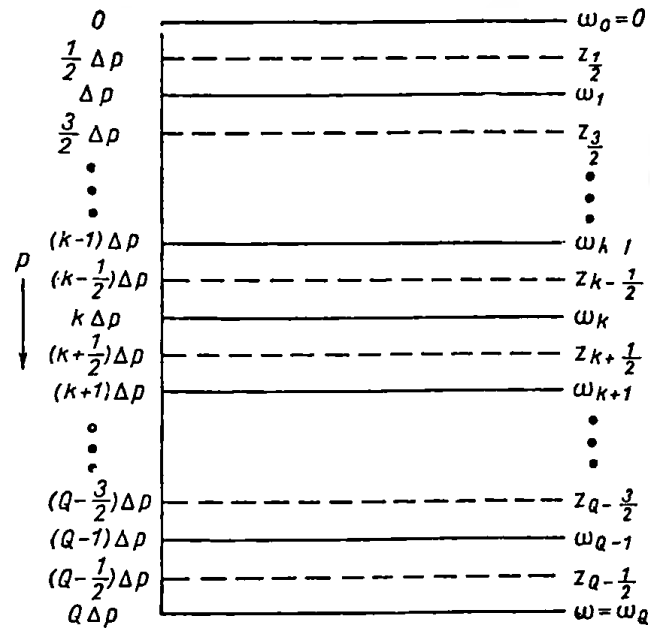


Рис. 11 (12). Расположение и нумерация дискретных поверхностей с данными в многоуровневой бароклинической модели.

В соответствии с этим правая часть уравнения (9.16) может быть вычислена по начальным значениям z для всех значений k от 1 до $Q-1$. Тогда, если мы применим уравнение (9.16) для каждого значения k в этих пределах, то мы получим систему $(Q-1)$ линейных алгебраических уравнений, содержащих $(Q+1)$ неизвестных $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_Q$. Так как число неизвестных на два больше, чем число уравнений, то необходимо задать значения двух ω . Однако они не должны задаваться произвольно, так как естественные граничные условия требуют, чтобы ω_0 обращалось в нуль и чтобы масса не проникала через поверхность Земли. Последнее условие, как было показано раньше, может быть выражено приближенной формулой

$$\omega_Q = V_Q \cdot \nabla p_s,$$

если считать что $Q\Delta p$ близко к давлению на поверхности земли; p_s — стандартное давление на этой поверхности. В конечно-разностных обозначениях предыдущее уравнение приближенно записывается в виде

$$\omega_Q = \frac{gm^2}{4fd^2} J(z_{Q+1/2}, p_s).$$

Вместе с этими условиями решение уравнения (9.16) становится определенным.

Уравнение (9.16) является трехмерным обобщением уравнения (8.5) и может быть решено прямым распространением методов релаксации, описанных в главе 6(8). Как и в двумерном случае, мы прежде всего вычисляем невязку, соответствующую нашему первому приближению к точному решению уравнений (9.16), а затем изменяем приближенное решение в каждой точке на величину, которая необходима для сведения невязки в этой точке к нулю. После того как подобным образом рассмотрены все точки сетки, мы принимаем измененное приближение в качестве нового приближенного решения и повторяем снова весь процесс и т. д. Процесс трехмерной релаксации можно проанализировать с помощью рассуждений, в точности аналогичных выводу уравнений (8.13) и (8.14). Результаты такого анализа показывают, что процесс релаксации порождает последовательность приближенных решений, которые равномерно сходятся к точному решению уравнения (9.16). Таким образом, начальные значения ω на поверхностях, соответствующих целым значениям k , могут быть вычислены по начальным значениям z на поверхностях, соответствующих дробным значениям k .

Следующий этап этой схемы состоит в подстановке вычисленных начальных значений ω в третий член уравнения (9.15). Так как второй член этого уравнения может быть вычислен по начальным значениям z , то уравнение (9.15) можно рассматривать как двумерное уравнение Пауссона, в котором $(\partial z / \partial t)_{k+1/2}$ является неизвестным, т. е.

$$\nabla^2 \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)_{k+1/2} = F_{k+1/2}, \quad (9.17)$$

где F является известной функцией i, j и k . Следует заметить, что это уравнение является специальным случаем уравнения (8.5), когда $\mu=0$. Поэтому с заданными значениями $(\partial z / \partial t)_{k+1/2}$ на границе области прогноза уравнение (9.15) может быть решено релаксационными методами, описанными в главе 6(8). Таким образом, начальные значения $\partial z / \partial t$ могут быть вычислены для всех дробных значений k .

Заключительный этап этой схемы состоит в вычислении $z_{k+1/2}^1$ через короткий интервал времени Δt после начального момента путем использования нецентральной конечно-разностной формулы

$$z_{k+1/2}^1 = z_{k+1/2}^0 + \Delta t \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)_{k+1/2}^0,$$

где верхний индекс обозначает последовательные шаги по времени в итерационном процессе. Предсказанные значения $z_{k+1/2}^1$ затем рассматриваются как новые начальные данные, и весь описанный выше процесс повторяется столько раз, сколько это требуется для вычисления прогноза желаемой заблаговременности. После первого шага по времени экстраполяция по времени производится по формуле центральных разностей.

На сегодняшний день методы численного предсказания описанного выше типа стандартизированы для машинного вычисления и подвергнуты испытанию не менее чем пятью независимыми исследовательскими группами. Двух- и трехуровневые модели (соответствующие $Q=2$ и $Q=3$) были изучены Чарни и Филлипсом из Института высших исследований (метеорологический отдел). Было исследовано большое количество двухуровневых моделей (отличающихся лишь второстепенными чертами): Томпсон и Гейтс в управлении геофизических исследований Кембриджского исследовательского центра военно-воздушных сил США, Бушби и Хайнс из Британской метеорологической службы и Белоусов в СССР¹.

Методы, основанные на двух почти идентичных двухуровневых моделях, были применены в ежедневной оперативной практике Объединенным центром численного предсказания погоды в Вашингтоне и Королевскими шведскими военно-воздушными силами в сотрудничестве с Международным метеорологическим институтом в Стокгольме.

До сих пор единственной бароклиной моделью, которая была испытана широко и систематически, остается двухуровневая модель. В целом результаты применения методов предсказания, основанных на этой модели, были разочаровывающими. Во-первых, хотя они могут предсказать и действительно предсказывают циклогенез, они редко предсказывают правильно время, место и интенсивность его. Выяснилось также, что двух-

¹ С. Л. Белоусов реализовал на советской быстродействующей электронной счетной машине БЭСМ одноуровневую и четырехуровневую модели. Двухуровневая модель была реализована в СССР (на БЭСМ) С. А. Машковичем.

Способы вычисления в этих, а также в других советских исследованиях отличались от зарубежных. Они были основаны на широком использовании функции Грина. (Прим. ред.)

уровенные предсказания воздушных течений в средней тропосфере (т. е. вблизи 500-миллибаровой поверхности) лишь немного лучше предсказаний, основанных на эквивалентно-баротропной модели. Конечно, в значительной степени недостатки двухуровневой модели должны быть приписаны тому факту, что высоты только двух (значительно удаленных друг от друга) изобарических поверхностей плохо описывают детали вертикальной структуры атмосферных движений. Особенно это относится к уровням, находящимся ниже 1500 м. Поэтому, как и можно было ожидать, современная тенденция развития направлена к моделям с большим числом уровней, как правило, от четырех до шести.

Однако в некоторых отношениях сравнение между предсказаниями, основанными на двухуровневой и эквивалентно-баротропной моделях, незаконно, так как последняя не обеспечивает прямого метода предсказания крупномасштабных вертикальных движений атмосферы. С другой стороны, побочным продуктом двухуровневых предсказаний является полная производная от давления ω . Так как изменение давления, испытываемое частицей воздуха, вызывается прежде всего изменением высоты ее над уровнем моря, то предсказанные значения ω с большой степенью точности можно считать пропорциональными вертикальной скорости воздуха w . Кроме того, полная производная от давления непосредственно связана с адиабатическим изменением температуры, испытываемым влажным, но ненасыщенным воздухом. Следовательно, в тех областях, где предсказанные значения отрицательны, можно ожидать, что влажный воздух станет насыщенным. Несмотря на все недостатки двухуровневой модели, предсказанные с ее помощью распределения вертикальных движений исключительно хорошо согласуются с наблюдаемыми распределениями обложных осадков и непрерывного облачного покрова.

Наконец, независимо от применимости двухуровневой модели в оперативном прогнозе погоды эта модель чрезвычайно ценна для общего понимания динамических свойств бароклинного движения и может быть приспособлена для исследовательских целей за пределами области краткосрочного предсказания погоды. Некоторые из ее преимуществ будут использованы в следующей главе.

ЛИТЕРАТУРА

- Bushby F., Hinds M. The Computation of Forecast Charts by Application of the Sawyer-Bushby Two-Parameter Model. Q. J. Roy. Met. Soc., 80, 165, 1954.
Bushby F. Further Computation of 24-hr Pressure Changes based on a Two-Parameter Model. Q. J. Roy. Met. Soc., 81, 395, 1955.

- Charney J., Phillips N. Numerical Integration of the Quasi-geostrophic Equations for Barotropic and Simple Baroclinic Flows. *J. Met.*, 10, 71, 1953.
- Eady E. Note on Weather Computing and the So-Called $2\frac{1}{2}$ -Dimensional Model. *Tellus*, 4, 157, 1952.
- Ellassen A. Simplified Dynamic Models of the Atmosphere, Designed for the Purpose of Numerical Prediction. *Tellus*, 4, 145, 1952.
- Sawyer J., Bushby F. A Baroclinic Model Suitable for Numerical Integration. *J. Met.*, 10, 54, 1953.
- Sutcliffe R. A Contribution to the Problem of Development. *Q. J. Roy. Met. Soc.*, 73, 370, 1947.
- Thompson P. On the Theory of Large-Scale Disturbance in a Two-Dimensional Baroclinic Equivalent of the Atmosphere. *Q. J. Roy. Met. Soc.*, 79, 51, 1953.
- Thompson P., Gates W. A Test of Numerical Prediction Methods Based on the Barotropic and Two-Parameter Baroclinic Models. *J. Met.*, 13, 127, 1956.

ГЛАВА 8(14)

Ошибки и нерешенные проблемы

Неточности в описании начального состояния

Источник значительных ошибок заключается в том, что мы не знаем полностью исходное состояние атмосферы. Независимо от неточности метеорологических измерений все наблюдения мировой сети станций представляют собой только образец состояния атмосферы в точках, отстоящих друг от друга на несколько сотен километров. Поэтому восстановление состояния атмосферы между станциями может быть сделано с большей или меньшей ошибкой — в зависимости от расстояния между станциями. Естественно спросить, как такие ошибки в начальном состоянии распространяются из-за численного прогноза, и, в частности, выяснить, при каких условиях такие ошибки могут усиливаться. Если они усиливаются, то наша неточность в описании начального состояния атмосферы приведет к довольно низкому пределу точности предсказания численными методами или по той же причине любым другим методом.

Не вдаваясь в математические подробности, мы можем указать, что этот вопрос тесно связан с вопросом о реальной неустойчивости. Другими словами, так как мы не можем отличить поле случайной ошибки от поля физически реальных возмущений, то мы можем интерпретировать поведение одного из них через поведение другого. Далее, мы уже видели в главе (10), что физически реальные возмущения могут спонтанно усиливаться при сильном вертикальном сдвиге ветра (большом горизонтальном градиенте температуры) и низкой статической устойчивости. Точно так же могут усиливаться в течение прогноза начальные ошибки. Будут ли они на самом деле усиливаться или нет, это зависит от масштаба или «размера ячеек» начального поля ошибок или в конечном счете от расстояния между соседними наблюдательными станциями.

Теоретическое исследование вопроса о точности предсказания дано в работе Томпсона. Главные выводы, которые частично подтверждены численными экспериментами с моделированной сетью данных, состоят в том, что средняя квадратическая ошибка предсказания, порожденная начальной ошибкой анализа, удваивает свое начальное значение в течение приблизительно двух дней и достигает средней квадратической ошибки случайного прогноза приблизительно в течение недели при нормальных зимних условиях в зоне умеренных широт и с современной сетью наблюдательных станций. Оценки показали, что, для того чтобы уничтожить рост начальной ошибки анализа, средняя плотность станций должна быть примерно удвоена.

Уменьшение ошибки аппроксимации

Остается несколько других типов ошибок, которые в противоположность ошибкам, коренящимся в физических моделях или в начальных данных, имеют чисто математический характер. Среди них наиболее серьезной является ошибка аппроксимации производных непрерывной функции конечными разностями между значениями функции в ряде дискретных точек. Эта ошибка (так называемая ошибка аппроксимации, разобранная в главе 4(5)) присуща всем конечно-разностным методам и никогда не может быть полностью исключена.

Для того чтобы получить общее представление о ситуации, возьмем простейшую задачу, а именно вычисление первой частной производной по одному из переменных — x . В применении к какой-либо скалярной функции φ обычная центрально-разностная формула для первой производной будет

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_a = \frac{1}{2d} (\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}), \quad (14.5)$$

где нижний индекс a обозначает приближенное значение производной $\partial \varphi / \partial x$, а целый нижний индекс i приписывается к значениям функции в дискретных точках $x = id$, расположенных на расстоянии d друг от друга вдоль оси x . Для простоты мы теперь рассмотрим одну компоненту спектра Фурье для функции φ , например,

$$\varphi = A \sin \pi x.$$

Применяя формулу центральных разностей к этой функции, мы найдем, что

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_a &= \frac{A}{2d} [\sin \pi d (i+1) - \sin \pi d (i-1)] = \\ &= \frac{A \sin \pi d}{d} \cos i \pi d = \frac{A \sin \pi d}{d} \cos \pi x. \end{aligned}$$

С другой стороны, точное значение $\partial\varphi/\partial x$ равно

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = A\alpha \cos \alpha x$$

и отношение приближенного значения к точному для $\partial\varphi/\partial x$ равно

$$\frac{(\partial\varphi/\partial x)_a}{\partial\varphi/\partial x} = \frac{\sin \alpha d}{\alpha d}.$$

Это отношение нанесено как функция безразмерного числа αd на рис. 12(18) (кривая 2). Эта диаграмма показывает, что обычная центрально-разностная аппроксимация довольно точна, когда αd не превосходит единицы (т. е. длина волны не меньше,

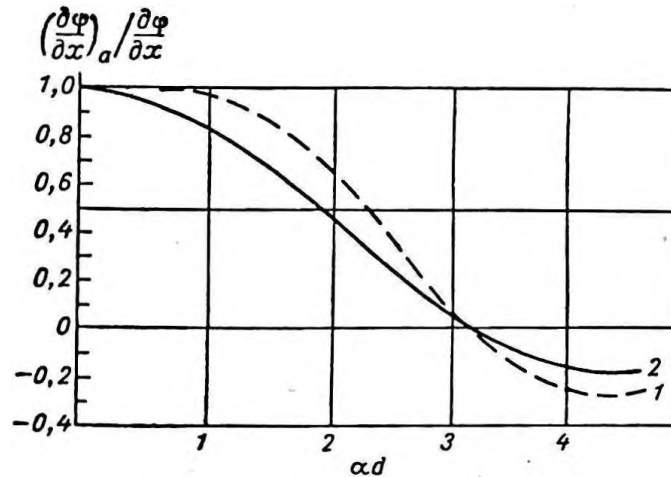


Рис. 12 (18). Отношение приближенного значения производной к точному как функция волнового числа α для двух типов конечно-разностных аппроксимаций:

1 — аппроксимация второго порядка, 2 — стандартный центрально-разностный метод.

чем примерно шесть интервалов сетки), но она становится чрезвычайно неточной, когда αd больше единицы. Таким образом, даже если интервал сетки d взят размером до 250 км, ошибка аппроксимации будет недопустимо большой тогда и там, где характерный масштаб флуктуаций φ меньше, чем примерно 1500 км. Это часто имеет место в действительности.

Наиболее очевидным средством против ошибки аппроксимации будет просто достаточное уменьшение d , с тем чтобы сделать отношение $(\sin \alpha d)/\alpha d$ близким к единице для всех волновых компонентов, которые имеют ощутимые амплитуды. Однако

если существуют какие-либо мелкомасштабные компоненты, то этот прием может предъявить большие требования к объему памяти вычислительной машины, так как число точек сетки, соответствующей данной области, обратно пропорционально d^2 . Поэтому естественно задать вопрос, нельзя ли уменьшить ошибку аппроксимации без увеличения числа точек сетки.

Другой метод уменьшения ошибки аппроксимации основан на том факте, что функции, которые мы хотим дифференцировать, «квазианалитичны», т. е. плавно меняющиеся и с плавно меняющимися производными. Если бы функция φ действительно была аналитической, то тогда она имела бы везде равномерно сходящееся разложение Тэйлора, такое, что

$$\varphi(x+d) = \varphi(x) + d\varphi'(x) + \frac{d^2}{2}\varphi''(x) + \frac{d^3}{3!}\varphi'''(x) + \dots,$$

$$\varphi(x-d) = \varphi(x) - d\varphi'(x) + \frac{d^2}{2}\varphi''(x) - \frac{d^3}{3!}\varphi'''(x) + \dots,$$

где штрихи обозначают порядок дифференцирования. Тогда, вычитая второе уравнение из первого, мы найдем, что

$$\varphi(x+d) - \varphi(x-d) = 2d\varphi'(x) + \frac{d^3}{3}\varphi'''(x) + \dots,$$

или, решая относительно $\varphi'(x)$,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{1}{2d}(\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}) - \frac{d^2}{6}\varphi''' + \dots$$

Мы видим, что это уравнение похоже на обычную центрально-разностную формулу для приближенного значения $\partial\varphi/\partial x$, однако отличается тем, что содержит поправочный член порядка d^2 и другие члены более высокого порядка. Мы теперь аппроксимируем поправочные члены предыдущей формулы, опуская все члены с порядком выше, чем d^2 , и аппроксимируя φ''' с помощью обычного центрально-разностного метода, т. е.

$$\varphi_{i+1}'' \approx \frac{1}{d^2}(\varphi_{i+2} - 2\varphi_{i+1} + \varphi_i),$$

$$\varphi_{i-1}'' \approx \frac{1}{d^2}(\varphi_i - 2\varphi_{i-1} + \varphi_{i-2}),$$

$$\varphi_i''' \approx \frac{1}{2d}(\varphi_{i+1}'' - \varphi_{i-1}'') \approx \frac{1}{2d} \cdot \frac{1}{d^2}(\varphi_{i+2} - 2\varphi_{i+1} + 2\varphi_{i-1} - \varphi_{i-2}),$$

после чего наша исправленная аппроксимация $\partial\varphi/\partial x$ будет иметь вид

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_a &= \frac{1}{2d}(\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}) - \frac{1}{12d}(\varphi_{i+2} - 2\varphi_{i+1} + 2\varphi_{i-1} - \varphi_{i-2}) = \\ &= \frac{2}{3d}(\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}) - \frac{1}{12d}(\varphi_{i+2} - \varphi_{i-2}).\end{aligned}\quad (14.6)$$

Применяя эту формулу к функции $\varphi = A \sin \alpha x$, мы найдем, что

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_a = \frac{A \sin \alpha d}{d} \left[1 + \frac{1}{3}(1 - \cos \alpha d)\right] \cos \alpha x.$$

Таким образом, отношение исправленного приближенного значения $\partial\varphi/\partial x$ к точному будет

$$\frac{(\partial\varphi/\partial x)_a}{\partial\varphi/\partial x} = \frac{\sin \alpha d}{\alpha d} \left[1 + \frac{1}{3}(1 - \cos \alpha d)\right].$$

Это отношение как функция αd нанесено на рис. 12(18) (кривая 1). Мы видим, что наша новая конечно-разностная формула (14.6) значительно более точна, чем обычная центрально-разностная формула (14.5). Она достаточно точна, если длина волны составляет четыре интервала сетки или более, и становится неточной лишь в тех случаях, когда длина волны меньше, чем три интервала сетки.

Если учесть величины других типов ошибок, то будет практически допустимой максимальная ошибка аппроксимации в 10%. Примем эту величину как максимально допустимую ошибку и рассмотрим способы, с помощью которых эта степень точности может поддерживаться. Если производная вычисляется по обычной центрально-разностной формуле (14.5), то, как показывает рис. 12(18), αd должно быть не больше чем 0,8. С другой стороны, если производная вычисляется по исправленной конечно-разностной формуле (14.6), то αd может достигать до 1,4. Таким образом, в последнем случае d может быть в 1,75 раза больше, чем в первом, так как α одно и то же в обоих случаях. Поэтому для двумерной решетки обычный центрально-разностный метод требует примерно в три раза больше точек сетки, чем исправленный центрально-разностный метод, для того чтобы поддержать ту же степень точности. Отсюда следует:

1. Так как количество вычислений пропорционально числу точек сетки, то обычный центрально-разностный метод требует почти в полтора раза больше вычислительного времени, чем исправленный конечно-разностный метод.

(Следует иметь в виду, что исправленный конечно-разностный метод требует примерно в два раза больше времени на одну точку сетки по сравнению с обычным центрально-разностным методом.)

2. Место, необходимое для хранения в накопителе чисел двумерных полей, уменьшается в три раза для исправленного конечно-разностного метода.

В целом преимущество явно на стороне конечно-разностной аппроксимации более высокого порядка.

Описанный выше прием может быть обобщен (и был обобщен) для оценки ошибки аппроксимации при вычислении более сложных дифференциальных операторов как линейных, так и нелинейных и для анализа экономии вычислений других конечно-разностных методов.

ЛИТЕРАТУРА

- Bristor C. Zonal Wind Errors in the Barotropic Model. Mon. Weather Rev., 87, 57, 1959.
- Bristor C. Effect of Data Coverage on the Accuracy of 500mb Forecasts. Mon. Weather Rev., 86, 299, 1958.
- Buch H. Hemispheric Wind Conditions during the Year 1950. Report of the General Circulation Project, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, 1954.
- Charney J., Eliassen A. A Numerical Method for Predicting the Perturbations of the Middle Latitude Westerlies. Tellus, 1, 38, 1949.
- Cressman G. Barotropic Divergence and Very Long Atmospheric Waves. Mon. Weather Rev., 86, 293, 1958.
- Knighiting E. Reduction of Truncation Error in Symmetrical Finite-difference Operators. JNWP Unit, Tech. Memo, 3, Washington, D. C., 1955.
- Knighiting E., Jones D., Hinds M. Numerical Experiments in the Integration of the Meteorological Equations of Motion. Q. J. Roy. Met. Soc., 84, 91, 1958.
- Kuo H.-L. Dynamical Aspects of the General Circulation and the Stability of Zonal Flow. Tellus, 3, 268, 1951.
- Martin D. An Investigation of Systematic Errors in the Barotropic Forecasts. Tellus, 10, 451, 1958.
- Phillips N. The General Circulation of the Atmosphere: a Numerical Experiment. Q. J. Roy. Met. Soc., 82, 123, 1956.
- Shuman F. Numerical Methods in Weather Prediction. II. Smoothing and Filtering. Mon. Weather Rev., 85, 357, 1957.
- Smagorinsky J. The Dynamical Influence of Large-Scale Heat Sources and Sinks on the Quasi-Stationary Mean Motions of the Atmosphere. Q. J. Roy. Met. Soc., 79, 342, 1953.
- Thompson P. Optimum Smoothing of Two-Dimensional Fields. Tellus, 8, 384, 1956.
- Thompson P. Uncertainty of Initial State as a Factor in the Predictability of Large-Scale Atmospheric Flow Patterns. Tellus, 9, 275, 1957.
- Wolff P. The Error in Numerical Forecasts Due to Retrogression of Ultra-long Waves. Mon. Weather Rev., 86, 245, 1958.

Г. И. МАРЧУК

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПРОГНОЗА ПОГОДЫ И ТЕОРИИ КЛИМАТА¹

Введение

К настоящему времени рассмотрено большое число теоретических схем гидродинамического прогноза полей метеорологических элементов, обзор которых содержится в ряде монографий и обзорных работ (Кибель И. А. [1], Юдин М. И. [2], Томпсон Ф. Д. [3], Филлипс Н. А. [4] и др.). Большинство теоретических схем основано на использовании квазистатического приближения в рамках адиабатической модели атмосферы. В указанных предположениях уравнения динамики атмосферных процессов, как правило, рассматриваются в квазигеострофическом приближении [5—14]. В последние годы наметилась вполне определенная тенденция использования для целей прогноза погоды более полных уравнений гидротермодинамики [15—22]. Большое значение для развития методов прогноза погоды имели работы по изучению динамики процессов в баротропной и бароклинной атмосфере [23—24]. Важным этапом в развитии численных методов прогноза являются работы по гидродинамическому описанию общей циркуляции атмосферы, которые позволяют отработать физически обоснованную модель атмосферных процессов в аспекте теории климата и изучить механизм преобразования одних форм энергии в другие [25—28].

В связи с интенсивным развитием вычислительной математики и вычислительной техники открываются новые возможности для решения сложных задач прогноза полей метеорологических элементов, основанные на представлении системы уравнений прогноза погоды в виде последовательности фундаментальных алгоритмов, связанных с решением простейших математических задач. Следует отметить, что современный аппарат вычислительной математики вполне подготовлен для практического осуществления сформулированного принципа. Наиболее мощным средством в этом смысле является метод

¹ Печатается по монографии: Г. И. Марчук. Численные методы решения задач прогноза погоды и теории климата. Редакционно-изд. отдел СО АН СССР, Новосибирск, 1965.

расщепления многомерных операторов задач на произведения операторов простейшего вида. Другим мощным средством оказался релаксационный метод решения задач, связанный с применением быстро сходящихся итерационных процессов.

В настоящее время усилия математиков в основном направлены на построение конкретных алгоритмов решения прогностических задач, поскольку каждое новое видоизменение задачи приводит, как правило, к коренной переработке всего алгоритма решения.

Последние годы бурного развития вычислительной математики и кибернетики привели к созданию систем автоматического программирования. Это существенно облегчает труд математиков по подготовке алгоритмов для машинных языков. Однако это всего лишь одна, хотя и существенная, но далеко не главная часть «технологии», облегчающей труд математика и ускоряющей темп развития новых исследований.

Вычислительная математика встала перед новой большой проблемой — автоматического построения алгоритмов решения сложных задач науки и техники. Научный поиск в указанном направлении уже начался применительно к отдельным областям научных исследований. В дальнейшем, по мере расширения возможностей ЭВМ и наших познаний, автоматизированный поиск алгоритмов с учетом определенных принципов оптимального отбора будет занимать все более важное место. Последующие обобщения частных исследований дадут возможность развития широкого научного поиска в абстрактных областях науки. Это должно привести к необходимой формализации общих принципов решения проблемы автоматического алгоритмирования, которые будут положены в основу частных исследований.

Поскольку метеорологические задачи являются весьма сложными объектами математического и численного анализа, они могут быть рассмотрены именно под указанным углом зрения. В настоящей работе делается попытка разработки основных принципов построения сложных вычислительных алгоритмов на основе простейших элементарных алгоритмов, эффективно реализуемых на ЭВМ. Методологической основой такой конструкции является метод расщепления. Будет показано, что задача прогноза погоды может быть представлена в виде конечного числа элементарных алгоритмов, которые позволяют не только в принципе, но и по существу получить требуемое решение сформулированной общей задачи. Особенно важной здесь оказывается возможность «механического» подхода к различного рода видоизменениям математической постановки задачи, когда усложнение задачи не связано с коренной перестройкой алгоритма, а лишь с добавлением ряда новых элементарных алгоритмов в рамках общей вычислительной схемы.

Таким образом, главной целью настоящей работы является обсуждение общих методов сведения сложных задач прогноза погоды к элементарным алгоритмам и изучение элементарных алгоритмов в связи с их возможной реализацией на ЭВМ. Предполагается, что высказанные в настоящей работе соображения могут быть использованы для организации системы автоматического построения алгоритмов решения метеорологических задач. При этом главным требованием построения такой системы является создание универсального алгоритма, способного описать эволюцию полей метеорологических элементов разных масштабов — от мезо процессов до планетарных. Вместе с тем алгоритмы должны быть сформулированы таким образом, чтобы всякий раз существенные для данной задачи эффекты могли быть учтены с требуемой точностью, а процессы несущественные (метеорологические шумы) могли бы быть отфильтрованы выбором подходящих разностных схем. Отсюда следует, что требования, предъявленные к вычислительному алгоритму, весьма жесткие и они позволяют существенно сузить класс элементарных алгоритмов и способов расщепления для решения поставленной общей задачи.

Для того чтобы несущественными выкладками и преобразованиями не усложнить понимания общих идей, рассмотрения проводятся для случая «плоской» Земли в системе координат x, y, z, t , а все процессы в атмосфере считаются адиабатическими. В том случае, когда неадиабатические факторы оказываются существенными, их учет производится с помощью функции ϵ , которая предполагается известной на основе решения задачи в предыдущий момент времени по отношению к расчетному.

§ 1. Математическая постановка задачи

Рассмотрим полную систему уравнений динамики атмосферных процессов в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} - \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial u}{\partial z} - \mu \Delta u &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + l v, \\ \frac{dv}{dt} - \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial v}{\partial z} - \mu \Delta v &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - l u, \\ \frac{dw}{dt} - \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial w}{\partial z} - \mu \Delta w &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g, \\ \frac{dT}{dt} - \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial T}{\partial z} - \mu \Delta T &= - \gamma_a w + \frac{\epsilon}{c_p}, \\ \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 \\ p &= \rho R T. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь

$$\mathbf{u} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

а ε — приток тепла к единице массы. Обозначения остальных величин в системе уравнений (1.1) общеизвестны.

Произведем некоторые упрощения системы уравнений (1.1) с использованием стандартной атмосферы. Отметим физические величины для стандартной атмосферы чертой сверху. Тогда будем иметь:

$$\bar{p} = R\bar{\rho}\bar{T}, \quad \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{d\bar{p}}{dz} = -g, \quad \frac{d\bar{T}}{dz} = -\gamma. \quad (1.2)$$

Введем далее в рассмотрение отклонения физических величин в атмосфере, которые будем отличать штрихами. Произведем теперь упрощение уравнений (1.1), записанных для отклонений, аналогично тому, как это делается в теории конвекции [2]. Тогда с учетом порядка величин метеорологических элементов получим

$$\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p}{\partial z} + g = \frac{R\bar{T}}{\bar{p}} \frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{g}{\bar{T}} T'. \quad (1.3)$$

Рассмотрим теперь уравнение неразрывности

$$\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{d\bar{\rho}}{dt} + \operatorname{div} \mathbf{u} = 0$$

и исключим из этого уравнения $\bar{\rho}$. Принимая во внимание, что имеет место приближенное равенство

$$\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{d\bar{\rho}}{dt} = \frac{1}{\bar{p}} \frac{dp'}{dt} - \frac{g - \gamma R}{R\bar{T}} w, \quad (1.4)$$

уравнение неразрывности можно представить в виде

$$\frac{1}{\bar{p}} \frac{dp'}{dt} + \operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{g - \gamma R}{R\bar{T}} w. \quad (1.5)$$

С точностью до малых величин можно положить

$$\frac{1}{\bar{p}} \frac{\partial p'}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \frac{p'}{\bar{p}}.$$

Если теперь ввести в рассмотрение новую функцию $\varphi = \frac{p'}{\bar{p}}$, а $\frac{T'}{\bar{T}}$ обозначить через θ , то приходим к следующей системе

уравнений, упрощенной за счет предположения теории конвекции:¹

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} - \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial u}{\partial z} - \mu \Delta u &= -RT \frac{\partial \varphi}{\partial x} + l v, \\ \frac{dv}{dt} - \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial v}{\partial z} - \mu \Delta v &= -RT \frac{\partial \varphi}{\partial y} - l u, \\ \frac{dw}{dt} - \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial w}{\partial z} - \mu \Delta w &= -RT \frac{\partial \varphi}{\partial z} + g \vartheta, \\ \frac{d\vartheta}{dt} - \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \vartheta}{\partial z} - \mu \Delta \vartheta &= -\frac{(\gamma_a - \gamma)}{T} w - \frac{\epsilon}{c_p}, \\ \frac{d\varphi}{dt} + \operatorname{div} \mathbf{u} &= \frac{g - \gamma R}{RT} w.\end{aligned}\quad (1.6)$$

Здесь под величиной T подразумевается $\bar{T}(z)$.

Разумеется, что для целей прогноза погоды в третьем уравнении системы (1.6) левую часть можно положить равной нулю и перейти к квазистатическому приближению. Однако такое упрощение нам будет удобно сделать в дальнейшем при рассмотрении конкретных задач.

Обратимся к постановке граничных условий для системы уравнений динамики. На поверхности $z=0$ будем считать, что

$$\begin{aligned}u &= 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial z} &= 0, \quad RT \frac{\partial \varphi}{\partial z} = g \vartheta.\end{aligned}\quad (1.7)$$

Кроме известного условия «прилипания», здесь использовано предположение, что в окрестности земной поверхности имеет место условие квазистатичности процесса. Относительно граничного условия для ϑ может быть предположена весьма общая постановка в зависимости от конкретной задачи.

На верхней границе атмосферы при $z \rightarrow \infty$ предполагаются следующие условия:

$$\nu \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad \nu \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad \nu \frac{\partial \vartheta}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad w = 0. \quad (1.8)$$

¹ Сделанные упрощения приводят к приближенной постановке задачи. Более строгая постановка задачи существенно не отличается от рассматриваемой и дается в монографии [47].

В том случае, когда турбулентность исключается из рассмотрения, граничные условия (1.7) — (1.8) переходят в следующие:

$$\text{при } z = 0 \quad w = 0, \quad RT \frac{\partial \tau}{\partial z} = g\vartheta, \quad (1.9)$$

$$\text{при } z = \infty \quad w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (1.10)$$

Поскольку коэффициенты уравнений для u , v и ϑ при производной по z в связи с условиями (1.9), (1.10) вырождаются, то этих условий вполне достаточно для решения задачи.

До сих пор предполагалось, что область определения решения распространена в плоскости (x, y) до бесконечности. На самом деле эта область G является ограниченной некоторой поверхностью s и плоскостями $z=0$, $z=H \rightarrow \infty$. Граничные условия на поверхности s заданы следующим образом:

$$u = u_s, \quad v = v_s, \quad w = w_s, \quad \vartheta = \vartheta_s, \quad \varphi = \varphi_s. \quad (1.11)$$

В том случае, когда турбулентность в модели отсутствует, условия (1.11) переопределены. В этом случае необходимо поставить следующие:

$$u = u_r, \quad v = v_r, \quad w = w_r, \quad \vartheta = \vartheta_r, \quad \varphi = \varphi_s. \quad (1.12)$$

Здесь индексом r отмечен тот факт, что соответствующие величины заданы не на всей поверхности s , а на той ее части r , где вектор скорости $\underline{u}$ направлен внутрь области G . Что касается функции φ , то она по-прежнему определена на всей поверхности s .

Переходим теперь к постановке начальных данных.

Очевидно, что для решения задачи (1.6), (1.7), (1.8), (1.11) необходимо задать в начальный момент времени ($t=0$) все пять функций:

$$u_0, \quad v_0, \quad w_0, \quad \vartheta_0 \text{ и } \varphi_0. \quad (1.13)$$

Из метеорологических наблюдений принципиально можно получить только четыре из рассматриваемых пяти функций. Это u_0 , v_0 , ϑ_0 , φ_0 . Кроме того, для прогноза можно использовать предположение о квазистатичности атмосферных процессов. Тогда нам достаточно иметь сведения только о трех начальных полях

$$u_0, \quad v_0 \text{ и } \vartheta_0. \quad (1.14)$$

В задачах локальной метеорологии, где гипотеза квазистатичности оказывается грубой, можно положить $w_0=0$, а функцию φ_0 по-прежнему найти с помощью уравнений квазистатичности, если нет прямых ее измерений.

§ 2. Метод расщепления

Решение сформулированной задачи будем искать с помощью метода расщепления. С этой целью введем в рассмотрение вектор-функции

$$\psi = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ \vartheta \\ \varphi \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} RT \frac{\partial \varphi}{\partial x} - l v \\ RT \frac{\partial \varphi}{\partial y} + l u \\ RT \frac{\partial \varphi}{\partial z} + g \vartheta \\ \frac{(\gamma_a - \gamma)}{T} w \\ \operatorname{div} u - \frac{g - \gamma R}{RT} w \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

и матрицу A с компонентами

$$A_{ii} = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} \circ \frac{\partial}{\partial z} + u \Delta & \text{при } i = 1, 2, 3, 4, \\ 0 & \text{при } i = 5. \end{cases}$$

Тогда систему уравнений (1.6) запишем в виде одного векторного уравнения

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + u \frac{\partial \psi}{\partial x} + v \frac{\partial \psi}{\partial y} + w \frac{\partial \psi}{\partial z} - A \psi = -f. \quad (2.2)$$

Отметим одну весьма важную особенность уравнения (2.2), а именно, рассмотрим частный случай, когда $f=0$. Легко видеть, что такой случай имел бы место в приближении геострофического и статического движения. Поскольку атмосферные процессы приближенно являются геострофическими и статическими, то в реальной атмосфере компоненты вектор-функции f будут, как правило, на порядок меньше соответствующих компонентов членов левой части уравнения (2.2). Такая конструкция уравнения (2.2) дает указание на естественный способ расщепления этого уравнения. С этой целью весь интервал $0 \leq t \leq T$ разобьем на частичные интервалы $\Delta t = t_{j+1} - t_j$. В пределах каждого из таких элементарных интервалов введем в рассмотрение две следующие задачи:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial t} + u \frac{\partial \xi}{\partial x} + v \frac{\partial \xi}{\partial y} + w \frac{\partial \xi}{\partial z} - A \xi &= 0, \\ \xi &= \psi^j \quad \text{при } t = t_j \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \text{и} \quad & \frac{\partial \eta}{\partial t} + B\eta = 0, \\ & \eta = \xi^{j+1} \quad \text{при} \quad t = t_j. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь оператор B определим следующим образом:

$$B = \begin{vmatrix} 0 & -l & 0 & 0 & RT \frac{\partial}{\partial x} \\ l & 0 & 0 & 0 & RT \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & -g & RT \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{\gamma_a - \gamma}{T} & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} - \frac{g - \gamma R}{RT} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Отметим, кроме того, что имеет место соотношение $B\psi = f$. При этом приближенное решение задачи ψ^{j+1} найдем в виде

$$\psi^{j+1} = \eta^{j+1}. \quad (2.5)$$

Естественно, что к уравнениям (2.3) и (2.4) следует присоединить граничные условия (1.7) и (1.8). Расщепление одного уравнения (2.2) на два позволяет далее решать задачи (2.3) и (2.4) на интервале Δt более или менее независимо друг от друга. При этом мы можем теперь выбирать характерные расчетные подынтервалы Δt_n , составляющие интервал Δt , с учетом особенностей решения соответствующих задач. Естественно выбрать интервал Δt из условия достаточно хорошей аппроксимации уравнения из (2.3). Что касается интервала Δt_n для уравнения из (2.4), то он будет много меньше Δt , поскольку при решении задачи (2.4) мы будем иметь дело с быстро протекающими процессами, связанными с распространением волновых возмущений в бароклинной атмосфере. Основные принципы метода расщепления уравнений динамики атмосферных процессов изложены в работах [21 и 29—31].

При расщеплении уравнения (2.3) рассмотрим схему второго порядка аппроксимации в классе непрерывных и многократно дифференцируемых функций по всем переменным. С этой целью введем в рассмотрение следующие операторы:

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= u^j \frac{\partial}{\partial x} E - u^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} D, \\ \Lambda_2 &= v^j \frac{\partial}{\partial y} E - v^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} D, \\ \Lambda_3 &= w^j \frac{\partial}{\partial z} E - \frac{\partial}{\partial z} v \frac{\partial}{\partial z} D, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где E — единичная матрица, а

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

и

$$\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3.$$

Тогда задачу (2.3) представим в следующем виде:

$$\left(E + \frac{\tau}{2} \Lambda_1\right) \left(E + \frac{\tau}{2} \Lambda_2\right) \left(E + \frac{\tau}{2} \Lambda_3\right) \frac{\xi^{j+1} - \xi^j}{\tau} + \Lambda \xi^j = 0 \quad (2.7)$$

при условии, что

$$\xi^j = \psi^j.$$

Покажем, что разностное уравнение (2.7) аппроксимирует соответствующее уравнение из (2.3) с точностью до величин второго порядка малости $\tau = \Delta t$.

В самом деле, реализуем операторы в уравнении (2.7). Тогда получим

$$\left(E + \frac{\tau}{4} S\right) \frac{\xi^{j+1} - \xi^j}{2} + \Lambda \frac{\xi^{j+1} + \xi^j}{2} = 0, \quad (2.8)$$

где

$$S = \Lambda_1 \Lambda_2 + \Lambda_1 \Lambda_3 + \Lambda_2 \Lambda_3 + \frac{\tau}{2} \Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3.$$

Если решение уравнения (2.8) принадлежит классу непрерывных вместе с производными высокого порядка функций, то уравнение (2.8) будет иметь второй порядок аппроксимации по Δt , поскольку оператор, стоящий в скобках, отличается от единичного на величину порядка малости τ^2 .

Это значит, что уравнение (2.8) с точки зрения порядка аппроксимации эквивалентно следующему уравнению:

$$\frac{\xi^{j+1} - \xi^j}{\tau} + \Lambda \frac{\xi^{j+1} + \xi^j}{2} = 0, \quad (2.9)$$

которое, как известно, также имеет второй порядок аппроксимации.

Однако необходимо сделать одно замечание. А именно, операторы Λ_i зависят от решения задачи ф. Поэтому для получения второго порядка аппроксимации, вообще говоря, необхо-

димо в Λ_i коэффициенты при первых производных брать не в момент времени t_j , а при $t_{j+\frac{1}{2}}$. Этого можно достичь с помощью формальной экстраполяции решения на половину шага Δt .

Поскольку нам необходимо находить решение с заданной точностью, то одного указания на порядок аппроксимации еще мало. Необходимо потребовать, чтобы остаточный член был малым. С этой целью произведем разложение решения уравнения (2.8) в окрестности t_j . Тогда будем иметь

$$\xi^{j+1} = \xi^j + \frac{\partial \xi^j}{\partial t} \tau + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \xi^j}{\partial t^2} \tau^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \xi^j}{\partial t^3} \tau^3 + O(\tau^4). \quad (2.10)$$

Подставим выражение (2.10) в (2.8) и воспользуемся уравнением

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \Lambda \xi = 0.$$

Тогда приходим к соотношению

$$\frac{\partial \xi^j}{\partial t} + (E - \tau^2 R) \Lambda \xi^j = 0, \quad (2.11)$$

где

$$R = \frac{1}{4} (\Lambda_1 \Lambda_2 + \Lambda_1 \Lambda_3 + \Lambda_2 \Lambda_3) - \frac{1}{12} \Lambda^2 + O(\tau) \quad (2.12)$$

Сравнивая равенство (2.11) с уравнением (2.9), взятым при $t=t_j$, видим, что аппроксимация будет обеспечена, если

$$\tau^2 \|R\| \ll 1.$$

Здесь норма оператора понимается в обычном смысле [32]. Для суждения о величине погрешностей, возникающих при решении приближенной задачи, в уравнении (2.11) отбросим индекс j и решим это уравнение для любого момента времени. Тогда формальное решение задачи найдется в виде

$$\xi_\tau^j = e^{-(E - \tau^2 R)\tau} \xi_0, \quad (2.13)$$

где ξ_0 — единичный вектор, а индексом τ отмечено, что решение является приближенным. В то же время точное решение будет иметь вид

$$\xi^j = e^{-\Lambda t} \xi_0. \quad (2.14)$$

Вычитая из (2.14) равенство (2.13), получим

$$\varepsilon = \xi^j - \xi_\tau^j = (E - e^{-\tau^2 R \Lambda t}) \xi^j. \quad (2.15)$$

Для оценки относительной ошибки можно применить гармонический анализ в предположении, что коэффициенты уравнения — u , v , w — величины постоянные. Тогда

$$\epsilon^j = |1 - e^{-i\tau r j}|, \quad (2.16)$$

где r — константа, зависящая от размера возмущения. Здесь предполагается, что решение задачи ищется в виде отдельной гармонической волны

$$\xi = \xi(t) e^{ikx + i ly + i pz}, \quad (2.17)$$

а турбулентность отсутствует.

Если будем интересоваться возмущениями с характерным масштабом порядка 1000 км и больше, то величину

$$r = \frac{\tilde{k} + \tilde{l} + \tilde{p}}{4} \left[\tilde{k}\tilde{l} + \tilde{k}\tilde{p} + \tilde{l}\tilde{p} - \frac{1}{3}(\tilde{k} + \tilde{l} + \tilde{p})^2 \right], \quad (2.18)$$

где

$$\tilde{k} = k|u|, \quad \tilde{l} = l|v|, \quad \tilde{p} = p|w|,$$

можно оценить. Поскольку для крупномасштабных процессов $p \ll k, l$ и можно положить для простоты $k=l$, то величина приближенно оценивается следующим образом:

$$r < \frac{5}{3} k^2.$$

Если учтем выражение для параметра

$$\tilde{k} = \frac{2\pi}{L} |u|,$$

где L — удвоенный характерный масштаб процесса, то получим оценку для r :

$$r < \frac{5}{3} \left(\frac{2\pi |u|}{L} \right)^2. \quad (2.19)$$

Для того чтобы относительная погрешность ϵ была малой, необходимо потребовать, чтобы показатель экспоненты по абсолютной величине был мал. Тогда приходим к неравенству

$$\frac{5}{3} \left(\frac{2\pi |u| \tau}{L} \right)^2 j \ll 1.$$

Отсюда следует примерная оценка величины временного интервала:

$$\tau < \sqrt[3]{\frac{3}{50j}} \frac{L}{2\pi |u|}. \quad (2.20)$$

В этом случае показатель экспоненты

$$\tau^3 r j < \frac{1}{10}.$$

Если принять $L = 2 \cdot 10^6$, $|u| = 3 \cdot 10$, $j = 50$, то приходим к оценке $\tau \leq 10^3$ сек.

Разумеется, эта оценка очень груба, но уже она дает указание на характерный интервал времени τ , который следует выбирать при расчетах, связанных с прогнозом погоды. Более точную оценку для τ следует находить с помощью анализа результатов расчета на ЭВМ с разными временными интервалами.

Переходим теперь к реализации алгоритма решения уравнения (2.7). Нетрудно видеть, что указанное уравнение может быть записано в следующем виде:

$$\begin{aligned} \left(E + \frac{\tau}{2} \Lambda_1\right) \xi^{j+1/4} &= -\tau \Lambda \psi^j, \\ \left(E + \frac{\tau}{2} \Lambda_2\right) \xi^{j+2/4} &= \xi^{j+1/4}, \\ \left(E + \frac{\tau}{2} \Lambda_3\right) \xi^{j+3/4} &= \xi^{j+2/4}, \\ \xi^{j+1} &= \psi^j + \xi^{j+3/4}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Таким образом, уравнение (2.7) представлено в виде совокупности одномерных задач, которые могут быть решены с помощью разностных методов. Вопросы, связанные с методом решения уравнений (2.11), будут обсуждены в § 3.

Возвратимся теперь к задаче (2.4) и распишем ее в скалярной форме. Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - l v &= -RT \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + l u &= -RT \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ \frac{\partial w}{\partial t} - g \vartheta &= -RT \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \frac{(\gamma_a - \gamma)}{T} w &= 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{u} - \sigma w &= 0, \end{aligned} \quad (2.22)$$

где

$$\sigma = \frac{g - \gamma R}{RT}.$$

Здесь ради удобства опущен индекс j при неизвестных функциях. Будем предполагать, что ищется решение этой системы на интервале (t_j, t_{j+1}) , причем в качестве условий при $t=t_j$ берется решение задачи (2.3) в момент времени t_{j+1} .

Система уравнений (2.22) имеет и самостоятельный интерес, так как дает решение полной системы уравнений динамики, линеаризированных относительно состояния равновесия атмосферы в отсутствие движений.

Прежде чем разработать метод численного решения системы уравнений (2.22), произведем качественный анализ. С этой целью систему уравнений (2.22) сведем к одному уравнению для функции φ .

Из первых двух уравнений системы получим

$$\begin{aligned} u &= -RT \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + l^2 \right)^{-1} (\varphi_{xt} + l\varphi_y), \\ v &= -RT \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + l^2 \right)^{-1} (\varphi_{yt} - l\varphi_x), \end{aligned} \quad (2.23)$$

а из двух следующих

$$\begin{aligned} w &= -RT \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\gamma_a - \gamma}{T} g \right)^{-1} \varphi_{zt}, \\ \eta &= -R(\gamma_a - \gamma) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\gamma_a - \gamma}{T} g \right)^{-1} \varphi_z. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Здесь индексом «—1» отмечены соответствующие обратные операторы. Подставляя равенства (2.23) и (2.24) в последнее уравнение системы (2.22), получим уравнение для функции φ

$$\begin{aligned} \varphi_t &= RT \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + l^2 \right)^{-1} (\Delta \varphi_t + \beta \varphi_x) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\gamma_a - \gamma}{T} g \right)^{-1} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{g - \gamma R}{RT} \frac{\partial}{\partial z} \right) \varphi_t \right], \end{aligned} \quad (2.25)$$

где $\beta = \frac{dl}{dy}$ и $\frac{\gamma_a - \gamma}{T} g$ предполагаются величинами постоянными.

Здесь сделано предположение о том, что имеют место приближенные равенства [47]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + l^2 \right)^{-1} &\approx \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + l^2 \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial x}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + l^2 \right)^{-1} &\approx \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + l^2 \right)^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{2}{l} \frac{\partial l}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Поддействуем далее на уравнение (2.25) оператором

$$L = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + l^2 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\gamma_a - \gamma}{T} g \right).$$

Тогда приходим к приближенному уравнению [47]

$$\begin{aligned} & \left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\gamma_a - \gamma}{T} g \right) \left[\frac{1}{RT} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + l^2 \right) - \Delta \right] - \right. \\ & \left. - \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + l^2 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{g - \gamma R}{RT} \frac{\partial}{\partial z} \right) \right\} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \\ & - \beta \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\gamma_a - \gamma}{T} g \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Существенное значение для дальнейшего будет иметь уравнение (2.26), записанное в системе координат (x, y, p, t) . С этой целью рассмотрим уравнение статики для стандартной атмосферы

$$\frac{d\bar{p}}{dz} = -\bar{g}.$$

Используя далее уравнение состояния

$$\bar{p} = R\bar{\varphi}\bar{T},$$

будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial z} = -\frac{pg}{RT} \frac{\partial}{\partial p}.$$

Здесь отброшена черта над стандартными величинами. Предполагая, что T изменяется с высотой мало, и выбирая его среднее значение, перейдем в уравнении (2.26) от координаты z к p . В результате уравнение (2.26) перейдет в следующее:

$$\begin{aligned} & \left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\gamma_a - \gamma}{T} g \right) \left[\frac{1}{RT} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + l^2 \right) - \Delta \right] - \left(\frac{g}{RT} \right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + l^2 \right) \times \right. \\ & \left. \times \frac{\partial}{\partial p} p^2 \frac{\partial}{\partial p} \right\} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \beta \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\gamma_a - \gamma}{T} g \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Здесь ради простоты положено $\frac{g - \gamma R}{RT} \approx \frac{g}{RT}$.

Для дальнейшего анализа в уравнениях (2.16) и (2.17) введем безразмерные переменные

$$x = Lx_1, \quad y = Ly_1, \quad z = Hz_1, \quad p = Pp_1, \quad t = \tau t_1.$$

Здесь τ — характерный масштаб времени для изучаемого процесса.

Тогда уравнения (2.26) и (2.27) приведем к следующему виду:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + E \right) \left\{ \left[\mu^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \alpha^2 \right) - \Delta \right] \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \chi \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\} - \\ & - \nu^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \alpha^2 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \delta \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

и

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + E \right) \left\{ \left[\mu^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \alpha^2 \right) - \Delta \right] \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \chi \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\} - \\ & - \nu_p^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \alpha^2 \right) \frac{\partial}{\partial p} p^2 \frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \end{aligned} \quad (2.29)$$

где

$$\alpha^2 = l^2 \tau^2, \quad \varepsilon = \frac{\gamma a - \gamma}{T} g \tau^2, \quad \mu^2 = \frac{L}{RT \tau^2},$$

$$\nu^2 = \frac{L^2}{H^2 \tau^2}, \quad \nu_p^2 = \frac{L^2 g^2}{\varepsilon^2 R^2 T^2}, \quad \delta = \frac{g - \gamma R}{RT} H, \quad \chi = \beta \tau L.$$

Выберем далее $\tau > 10^3$ сек. В этом случае будем иметь $\sigma \ll 1$, и уравнения (2.28) и (2.29) переходят в следующие:

$$\left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \alpha^2 \right) \left[\mu^2 - \nu^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \delta \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] - \Delta \right\} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \chi \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \quad (2.30)$$

с граничными условиями

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad \text{при} \quad z = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad \text{при} \quad z = 1$$

и

$$\left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \alpha^2 \right) \left[\mu^2 - \nu_p^2 \frac{\partial}{\partial p} p^2 \frac{\partial}{\partial p} \right] - \Delta \right\} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \chi \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \quad (2.31)$$

с граничными условиями

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p} = 0 \quad \text{при} \quad p = 1,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p} = 0 \quad \text{при} \quad p = 0.$$

Отметим, что граничные условия являются следствиями требования обращения в нуль вертикальной скорости w .

§ 3. Исследование структуры метеорологических полей

Естественно, что в известном смысле оптимальный алгоритм решения задачи (2.30) или (2.31) может быть разработан с учетом особенностей спектральной структуры операторов исследуемых задач. С этой целью рассмотрим спектр следующей однородной задачи:

$$\begin{aligned}\frac{d^2\psi}{dz^2} - \delta \frac{d\psi}{dz} + \lambda\psi &= 0, \\ \frac{d\psi}{dz} &= 0 \quad \text{при } z = 0, \\ \frac{\partial\psi}{\partial z} &= 0 \quad \text{при } z = 1.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Задача (3.1) определяет систему собственных значений и функций, определяемых равенствами

$$\begin{aligned}\lambda_n &= n^2\pi^2 + \frac{\delta^2}{4}, \\ \psi_n &= e^{\frac{\delta z}{2}} \left[\cos n\pi z - \frac{\delta}{2} \frac{\sin n\pi z}{n\pi} \right], \quad n = 1, 2, 3, \dots\end{aligned}\tag{3.2}$$

Заметим далее, что $\lambda_0 = 0$ также является точкой спектра. Соответствующее решение равно тождественно константе. Про нормируем ее на единицу. Тогда будем иметь

$$\psi_0 = 1.\tag{3.3}$$

Поскольку уравнение (3.1) несамосопряженное, необходимо ввести в рассмотрение сопряженную задачу в смысле Лагранжа по отношению к задаче (3.1). Введем в рассмотрение скалярное произведение

$$(\psi, \psi^*) = \int_0^1 \psi \psi^* dz.\tag{3.4}$$

Функции ψ будем считать удовлетворяющими граничным условиям (3.1). В этом случае задачу (3.1) формально можно представить в виде

$$L\psi + \lambda\psi = 0.$$

Сопряженное уравнение тогда получим, используя тождество Лагранжа:

$$(\psi^*, L\psi + \lambda\psi) = (\psi, L^*\psi^* + \lambda\psi^*).\tag{3.5}$$

Произведя соответствующие выкладки, приходим к сопряженному уравнению:

$$L^* \psi^* + \lambda \psi^* = 0. \quad (3.6)$$

Эта задача окончательно записывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \psi^*}{dz^2} + \delta \frac{d \psi^*}{dz} + \lambda \psi^* &= 0, \\ \frac{d \psi^*}{dz} + \delta \psi^* &= 0 \quad \text{при } z=0, \\ \frac{d \psi^*}{dz} + \delta \psi^* &= 0 \quad \text{при } z=1. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Решения задачи (3.7) нетрудно найти в форме

$$\psi_n^* = \alpha_n e^{-\frac{\delta}{2} z} \left[\cos n\pi z - \frac{\delta}{2} \frac{\sin n\pi z}{n\pi} \right], \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.8)$$

где α_n — произвольные константы, которые в дальнейшем выберем из условия нормировки.

Кроме этих решений, задача (3.7) допускает решение, соответствующее $\lambda_0 = 0$. Это решение имеет вид

$$\psi_0^* = \alpha_0 e^{-\delta z}. \quad (3.9)$$

Можно проверить, что системы функций ψ_n и ψ_n^* биортогональны.

Если произвольные постоянные α_n выбрать в виде

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{\delta}{2n\pi} \right)^2 \right]}, \\ \alpha_0 &= \frac{\delta}{1 - e^{-\delta}}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

то будут выполнены условия нормировки, т. е.

$$(\psi_n, \psi_m^*) = \begin{cases} 1, & n = m, \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$

Решение задачи (2.30) будем иметь в виде ряда

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \psi_n(z). \quad (3.11)$$

Тогда коэффициенты Фурье φ_n найдутся по формулам

$$\varphi_n = \int_0^1 \varphi \psi_n^* dz. \quad (3.12)$$

Подставим ряд (3.11) в уравнение (2.30). Тогда приходим к следующей системе уравнений для коэффициентов Фурье:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{RT} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + l^2 \right) - \Delta \right] \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} - \beta \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} = 0, \\ & \left[\left(\frac{\frac{n^2 \pi^2}{H^2} + \frac{\partial^2}{4}}{\frac{\gamma_a - \gamma}{T} g} + \frac{1}{RT} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + l^2 \right) - \Delta \right] \frac{\partial \varphi_n}{\partial t} - \\ & - \beta \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} = 0, \quad n = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Анализ уравнений (3.13) показывает, что функция φ_0 описывает постоянную по высоте составляющую поля φ , и она может быть интерпретирована как решение задачи в приближении баротропной модели атмосферы.

Для каждой гармоники ряда Фурье (3.13) можно ввести в рассмотрение скорость распространения данного типа возмущений. Обозначим ее c_n . Тогда для c_n^2 будем писать

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_n^2} &= \frac{1}{RT} + \frac{\frac{n^2 \pi^2}{H^2} + \frac{\partial^2}{4}}{\frac{\gamma_a - \gamma}{T} g}, \\ \frac{1}{c_0^2} &= \frac{1}{RT}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Простые оценки порядка величин позволяют дать приближенные значения c_n :

$$\begin{aligned} c_0 &= 1000 \text{ км/час}, \\ c_1 &= 200 \text{ км/час}, \\ c_2 &= 100 \text{ км/час}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

• • • • •

Оценим теперь скорость волн Россби для отдельных гармоник ряда Фурье. Для этой цели будем считать, что решение ищется в виде отдельной гармонической волны

$$\varphi_n = e^{\frac{2\pi i}{L}(x - c_n t)}, \quad (3.16)$$

где L — характерная длина волны характерного возмущения. Подставим частное решение (3.16) в уравнение (3.13); тогда для скоростей волн Россби σ_n получим формулы

$$\sigma_0 = -\frac{3L^2}{4\pi^2},$$

$$\sigma_n = -\frac{\sigma_0}{1 + \frac{L^2}{4\pi^2} \frac{l^2 - \sigma_n^2 \frac{4\pi^2}{L^2}}{c_n^2}}. \quad (3.17)$$

Оценка показывает, что практически для всех метеорологических значимых возмущений имеют место неравенства

$$\frac{4\pi^2}{L^2} \sigma_n^2 \ll l^2. \quad (3.18)$$

В этом случае формула для σ_n упрощается

$$\sigma_n = -\frac{V_R}{1 + \frac{l^2 L^2}{4\pi^2 c_n^2}}, \quad (3.19)$$

где $V_R = \frac{3L^2}{4\pi^2}$ — классическая скорость волн Россби. Рассмотрим характерное для атмосферных процессов возмущение с длиной волны $L = 2000$ км. Для таких возмущений будем иметь

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= -V_R, \\ \sigma_1 &= -\frac{4}{5} V_R, \\ \sigma_2 &= -\frac{1}{2} V_R, \end{aligned} \quad (3.20)$$

.....

причем $V_R \cong 36$ км/час.

Таким образом, чем выше номер гармоники в ряду (3.12), тем меньшее значение для волн такого типа имеют силы инерции, отклоняющие крупномасштабное возмущение на запад. Однако здесь следует отметить, что вряд ли в природе часто возникают крупномасштабные процессы, имеющие несколько перемен знака по высоте. По-видимому, это преимущественно процессы небольшого масштаба, на которые инерциальные силы вращения Земли почти не оказывают влияния.

Теперь обратим внимание на связь фундаментальных систем в z и p координатах. Поскольку такие функции инвари-

антны к преобразованию координат, то вид функции ψ_n в системе координат p получается непосредственной заменой $z = z(p)$. Что касается собственных чисел, то они переходят в λ_p с помощью преобразования

$$\lambda = \left(\frac{gH}{RT} \right)^2 \lambda_p. \quad (3.21)$$

В заключение отметим, что весь предыдущий качественный анализ был проведен в предположении, что атмосфера однородна по высоте, т. е. $\sigma^2 = \text{const}$. На самом деле необходимо учитывать изменение функции σ с высотой, взяв, например, для этой цели среднее климатическое значение. Тогда приходим к следующей основной задаче:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \chi \frac{d\psi}{dz} - \chi \delta \frac{d\psi}{dz} + \lambda \psi &= 0, \\ \frac{d\psi}{dz} &= 0 \quad \text{при } z = 0, \\ \frac{d\psi}{dz} &= 0 \quad \text{при } z = 1, \end{aligned} \quad (3.22)$$

где

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{g - \gamma R}{RT} H, \quad \chi = \frac{\chi(z)}{\chi(0)}, \\ \chi(z) &= \frac{RTz^2}{1 + \frac{\gamma a - \gamma}{T} g z^2}. \end{aligned}$$

В этом случае сопряженная задача имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \chi \frac{d\psi^*}{dz} + \chi \delta \frac{d\psi^*}{dz} + \lambda \psi^* &= 0, \\ \frac{d\psi^*}{dz} + \delta \psi^* &= 0 \quad \text{при } z = 0, \\ \frac{d\psi^*}{dz} + \delta \psi^* &= 0 \quad \text{при } z = 1. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Собственные числа и собственные функции задач (3.22), (3.23) могут быть найдены численно.

В настоящей работе мы ограничимся рассмотрением только тенденции в изменении λ_n под влиянием переменности параметра $\chi(z)$. Для этого разовьем теорию малых возмущений. Пусть L — оператор основной (невозмущенной) задачи (3.1),

а L^* — соответствующий оператор сопряженной задачи. Обозначим теперь через L' — оператор задачи (3.22), которую будем называть возмущенной; при этом

$$\gamma(z) = 1 - \varepsilon(z),$$

где $\varepsilon(z)$ — возмущение. Тогда приходим к двум задачам:

$$\begin{aligned} L^*\psi^* + \lambda\psi^* &= 0, \\ L'\psi' + \lambda'\psi' &= 0, \end{aligned} \quad (3.24)$$

где штрихами отмечены величины и операторы возмущенной задачи. Помножим скалярно первое уравнение на ψ' , второе на ψ^* и результаты вычтем друг из друга. Будем иметь

$$(\psi', L^*\psi^*) - (\psi^*, L'\psi') = (\lambda' - \lambda)(\psi^*, \psi'). \quad (3.25)$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} L' &= L + \partial L, \\ \lambda' &= \lambda + \partial\lambda \end{aligned}$$

и используем тот факт, что L и L^* удовлетворяют тождеству Лагранжа. В результате получим

$$\partial\lambda = - \frac{(\psi^*, \partial L \psi')}{(\psi^*, \psi')}. \quad (3.26)$$

Поскольку

$$\partial L = - \frac{d}{dz} \varepsilon \left(\frac{d}{dz} - \partial \right)$$

и возмущение предполагается малым и, следовательно, функции ψ' можно заменить на ψ , нетрудно получить

$$\partial\lambda_n = \varepsilon \psi_n^* \left(\frac{d\psi_n}{dz} - \partial\psi_n \right) \Big|_0^1 - \int_0^1 \varepsilon \frac{d\psi_n^*}{dz} \left(\frac{d\psi_n}{dz} - \partial\psi_n \right) dz. \quad (3.27)$$

Разумеется, наибольший интерес представляет собой $\partial\lambda_0$. Это связано с тем, что $\lambda_0 \approx 0$ и знак $\partial\lambda_0$ имеет принципиальное значение для теории. Предположим для оценки, что $\varepsilon = \varepsilon_0 z$, где ε_0 — некоторая малая константа. Тогда, принимая во внимание вид функций ψ_0 и ψ_0^* , получим

$$\partial\lambda_0 = \varepsilon_0 k^2 > 0,$$

где k^2 — некоторая положительная константа. Таким образом, вариация первого собственного числа будет положительной. Это значит, что

$$\lambda_0' = \partial\lambda_0 > 0.$$

Рассмотрим теперь вопрос о биортогональных системах функций для поля температуры и вертикальных токов. По-

скольку вертикальная скорость w и температура θ связаны с функцией φ соотношениями (2.24), то, очевидно, система основных уравнений будет иметь вид

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \delta \frac{\partial \psi}{\partial z} + \lambda \psi = 0, \quad (3.28)$$

$$\psi = 0 \quad \text{при} \quad z = 0,$$

$$\psi = 0 \quad \text{при} \quad z = 1.$$

Решение системы (3.28) находится в форме

$$\psi_n = e^{-\frac{\delta}{2} z} \sin n\pi z, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.29)$$

Аналогичным образом приходим к сопряженной системе

$$\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial z^2} + \delta \frac{\partial \psi^*}{\partial z} + \lambda \psi^* = 0, \quad (3.30)$$

$$\psi^* = 0 \quad \text{при} \quad z = 0;$$

$$\psi^* = 0 \quad \text{при} \quad z = 1.$$

Решение сопряженной системы имеет вид

$$\psi_n^* = \frac{1}{2} e^{-\frac{\delta}{2} z} \sin n\pi z, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.31)$$

Биортогональная система функций (3.29) и (3.31) может быть использована для представления профиля отклонения температуры по высоте атмосферы. Эти функции дают наилучшее приближение.

Изложенные результаты дают указания на то, как естественным путем подойти к математической формулировке малопараметрических моделей прогноза погоды. Эта проблема тесным образом связана с существованием биортогональных собственных функций. Можно ожидать, что эмпирические функции [33], являющиеся собственными функциями корреляционной матрицы, связаны с рассмотренной биортогональной системой. Однако этот вопрос требует специального рассмотрения. Здесь мы только отметим тот факт, что по своей идее эмпирические функции, по-видимому, ближе к собственным функциям следующей самосопряженной задачи:

$$L^* L \psi + \lambda \psi = 0. \quad (3.32)$$

В скалярной форме это уравнение представится в виде

$$\frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{d^2}{dz^2} - \delta^2 \right) \psi + \lambda \psi = 0. \quad (3.33)$$

К этому уравнению необходимо присоединить граничные условия

$$\begin{aligned}\frac{d\psi}{dz} &= 0 \quad \text{при } z = 0, \\ \frac{d\psi}{dz} &= 0 \quad \text{при } z = 1.\end{aligned}\quad (3.34)$$

Условий (3.34) достаточно для обеспечения самосопряженности задачи. Остальные два условия можно выбирать более или менее произвольно, исходя из физического смысла задачи. Может быть, в качестве таких условий можно принять

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} &= 0 \quad \text{при } z = 0, \\ \psi &= 0 \quad \text{при } z = 1.\end{aligned}\quad (3.35)$$

Первое из условий (3.35) связано с требованием адиабатичности процесса «на земле». Выбор двух дополнительных граничных условий может быть осуществлен и другими способами.

Важно отметить, что задача (3.33) — (3.35) определяет полную систему собственных функций, по которой может быть произведено разложение и восстановление поля. Однако важно подчеркнуть, что, хотя аппроксимация поля давления с помощью этих функций будет хорошей, они не могут быть эффективно использованы при решении уравнения (2.30), поскольку в этом уравнении оператор L , а не L^*L . В результате мы приходим к сложным уравнениям для коэффициентов ряда Фурье, содержащим все неизвестные коэффициенты Фурье в каждом из полученных уравнений.

Для аппроксимации вертикальных токов и температуры снова будем иметь уравнение (3.33). В этом случае, однако, следует поставить несколько иные граничные условия. А именно

$$\begin{aligned}\psi &= 0, \quad \frac{d\psi}{dz} = 0 \quad \text{при } z = 0, \\ \psi &= 0, \quad \frac{d\psi}{dz} = 0 \quad \text{при } z = 1.\end{aligned}\quad (3.36)$$

Переходим теперь к рассмотрению функций одного класса, для которого одновременно выполняются условия

$$\begin{aligned}f_z &= 0 \quad \text{при } z = 0; \\ f_z &= 0, \quad f = 0 \quad \text{при } z = 1.\end{aligned}\quad (3.37)$$

Исследуем вопрос о том, как наилучшим образом, пользуясь системой функций $\psi_n(z)$, определяемых задачей (3.28), представить функцию $f(z)$ в виде ряда по функциям $\psi_n(z)$. Иначе говоря, можно ли построить систему функций $\psi_n(z)$, которая бы удовлетворяла условиям (3.37). Оказывается, это сделать можно, если ввести в рассмотрение систему основных функций

$$\psi_n(z) = (-1)^n - e^{\frac{\delta}{2}(z-1)} \left(\cos n\pi z - \frac{\delta}{2} \frac{\sin n\pi z}{n\pi} \right) \quad (3.38)$$

и систему сопряженных функций

$$\psi_n^*(z) = \alpha_n e^{\frac{\delta}{2}z} \sin n\pi z, \quad (3.39)$$

где α_n — новая константа нормировки. Непосредственно можно убедиться, что системы функций $\{\psi_n(z)\}$ и $\{\psi_n^*(z)\}$ биортогональны. Следует отметить также, что биортогональная система функций полна на всюду плотном множестве $\{f(z)\}$. Для случая уравнения с постоянными коэффициентами алгебраическими преобразованиями можно задачу на собственные функции привести к самосопряженной, для которой доказана полнота системы собственных функций.

В случае уравнений с коэффициентами, зависящими от z , полнота предполагается. Это значит, что любая функция из $\{f\}$ может быть представлена в виде ряда

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \psi_n(z), \quad (3.40)$$

причем

$$f_n = (f, \psi_n^*).$$

Однако мы не располагаем данными наблюдений, которые указывали бы в прогностических задачах на существование условий (3.37). Тем не менее можно ожидать, что при рассмотрении теории общей циркуляции атмосферы или задач мезометеорологии системы функций (3.38) и (3.39) могут найти свое место.

В задачах численного прогноза, как правило, приходится иметь дело с моделью атмосферы, состоящей из ряда дискретных уровней, процессы на которых тесно взаимосвязаны между собой и регулируются законами динамики. Естественно поэтому, что задача прогноза с непрерывным аргументом z должна быть аппроксимирована соответствующей задачей с дискретным аргументом. Такая аппроксимация возможна с помощью различных методов. Мы рассмотрим два метода, первый из которых связан с непосредственной аппроксимацией дифферен-

циального оператора разностным, а второй — с аппроксимацией вполне непрерывного оператора, обратного дифференциальному.

Итак, рассмотрим первый метод. С этой целью начнем изучение с аппроксимации задачи на собственные числа:¹

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \gamma \frac{d\psi}{dz} - \gamma \delta \frac{d\psi}{dz} + \lambda \psi &= 0; \\ \frac{d\psi}{dz} &= 0, \quad z = 0, \quad z = H. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Интервал $0 \leq z \leq H$ разобьем на систему основных интервалов с точками деления

$$z_1 = 0, \quad z_2, \dots, z_{n+1} = H.$$

Кроме того, введем в рассмотрение систему вспомогательных интервалов с точками деления

$$z_{\frac{1}{2}} = \frac{\Delta z}{2}, \quad z_{\frac{3}{2}}, \dots, z_{n+\frac{1}{2}} = n\Delta z - \frac{\Delta z}{2}.$$

На основных уровнях z_p определим функцию ψ . Для получения разностных уравнений проинтегрируем (3.41) в пределах $z_{p-\frac{1}{2}} \leq z \leq z_{p+\frac{1}{2}}$. Тогда получим:

$$\frac{1}{\Delta z_p} (J_{p+\frac{1}{2}} - J_{p-\frac{1}{2}}) - \frac{\delta}{\Delta z_p} \int_{z_{p-\frac{1}{2}}}^{z_{p+\frac{1}{2}}} J dz + \frac{\lambda}{\Delta z_p} \int_{z_{p-\frac{1}{2}}}^{z_{p+\frac{1}{2}}} \psi dz = 0, \quad (3.42)$$

где использовано обозначение

$$J = \gamma \frac{d\psi}{dz}. \quad (3.43)$$

Решение задачи (3.41) принадлежит классу непрерывных функций ψ и J .

С точностью до малых величин второго порядка по Δz уравнение (3.42) заменим следующим:

$$\frac{1}{\Delta z_p} \left[\left(1 - \frac{\delta \Delta z_p}{2}\right) J_{p+\frac{1}{2}} - \left(1 + \frac{\delta \Delta z_p}{2}\right) J_{p-\frac{1}{2}} \right] + \lambda \psi_p = 0. \quad (3.44)$$

¹ В [34] разработан алгоритм построения разностного аналога задачи (3.41), когда γ — разрывная функция. Применение такого алгоритма приводит к монотонным схемам, хорошо аппроксимирующим задачу (3.41).

Из уравнения (3.44) исключим функции $J_{p \pm 1/2}$ с помощью равенства (3.43). Однако формальное исключение этой величины невозможно, поскольку функция $k(z)$ может быть быстро изменяющейся по z или разрывной. В этом случае разрешим уравнение (3.43) относительно производной $\frac{d\psi}{dz}$. Тогда будем иметь

$$\frac{d\psi}{dz} = \frac{1}{\gamma} J. \quad (3.45)$$

Уравнение (3.45) проинтегрируем далее в пределах $z_{p-1} \leq z \leq z_p$. Тогда получим

$$\psi_p - \psi_{p-1} = \int_{z_{p-1}}^{z_p} \frac{J}{\gamma} dz. \quad (3.46)$$

Соотношение (3.46) приближенно запишем в виде

$$\psi_p - \psi_{p-1} = J_{p - \frac{1}{2}} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \frac{dz}{\gamma}. \quad (3.47)$$

Здесь использован тот факт, что функция $J(z)$ непрерывна.

Разрешим уравнение (3.47) относительно $J_{p - 1/2}$:

$$J_{p - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\int_{z_{p-1}}^{z_p} \frac{dz}{\gamma}} (\psi_p - \psi_{p-1}). \quad (3.48)$$

Равенство (3.48) используем для исключения величин $J_{p \pm 1/2}$ из равенства (3.44). В результате приходим к следующему разностному уравнению:

$$\begin{aligned} & \frac{v_{p+1}}{\Delta z_p} \left(1 - \frac{\delta \Delta z_p}{2}\right) (\psi_{p+1} - \psi_p) - \\ & - \frac{v_p}{\Delta z_p} \left(1 + \frac{\delta \Delta z_p}{2}\right) (\psi_p - \psi_{p-1}) + i\psi_p = 0, \end{aligned} \quad (3.49)$$

где

$$v_p = \frac{1}{\int_{z_{p-1}}^{z_p} \frac{dx}{\gamma}}. \quad (3.50)$$

Систему разностных уравнений (3.49) необходимо замкнуть с учетом граничных условий. С этой целью в соотношении (3.44) положим $p=1$ и $p=m$ и учтем условия

$$J_{\frac{1}{2}} = 0, \quad J_{m+\frac{1}{2}} = 0. \quad (3.51)$$

Тогда с учетом равенства (3.44) получаем недостающие два уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{v_2}{\Delta z_1} \left(1 - \frac{\gamma \Delta z_1}{2}\right) (\psi_2 - \psi_1) + \lambda \psi_1 &= 0; \\ -\frac{v_m}{\Delta z_m} \left(1 + \frac{\gamma \Delta z_m}{2}\right) (\psi_m - \psi_{m-1}) + \lambda \psi_m &= 0. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Введем в рассмотрение трехдиагональную матрицу

$$B_p = \begin{pmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & -b_2 & a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & -b_3 & a_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c_{m-1} & -b_{m-1} & a_{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_m & -b_m \end{pmatrix},$$

где коэффициенты матрицы B_p определены следующим образом:

$$\begin{aligned} a_p &= \frac{v_{p+1}}{\Delta z_p} \left(1 - \frac{\gamma \Delta z_p}{2}\right); \\ c_p &= \frac{v_p}{\Delta z_p} \left(1 + \frac{\gamma \Delta z_p}{2}\right); \\ b_p &= a_p + c_p. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Введем в рассмотрение вектор-функции ψ^h с компонентами ψ_p . Тогда приходим к следующей задаче на собственные числа:

$$B_p \psi^h + \lambda B_p \psi^h = 0. \quad (3.54)$$

Введем далее в рассмотрение сопряженное уравнение

$$B_p^* \psi^{*h} + \lambda B_p^* \psi^{*h} = 0, \quad (3.55)$$

где B_p^* — транспонированная матрица по отношению к B_p . Таким образом, мы пришли к приближенной постановке спектральных проблем.

Уравнения (3.54) и (3.55) определяют биортогональную и нормированную систему функций

$$\{\psi_n^h\} \quad \text{и} \quad \{\psi_n^{*h}\}$$

и систему собственных чисел $-\lambda_n^B$, так что любой m -мерный вектор f может быть представлен в виде ряда

$$f = \sum_{n=0}^m f_n \psi_n^h, \quad (3.56)$$

где

$$f_n = (f, \psi_n^{*h}), \quad (3.57)$$

а скалярное произведение векторов понимается в обычном смысле.

Рассмотрим теперь спектральную задачу, естественную для представления в форме ряда полей температуры и вертикальных токов. Для этой цели продифференцируем почленно уравнение (3.41) по z и введем в рассмотрение новую функцию $\Omega(z)$ по формуле

$$\Omega = \gamma \frac{d\psi}{dz}. \quad (3.58)$$

В этом случае приходим к следующей задаче:

$$\frac{d^2\Omega}{dz^2} - \gamma \frac{d\Omega}{dz} + \frac{\lambda}{\gamma} \Omega = 0; \quad (3.59)$$

$$\Omega = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, \quad z = H.$$

Разностный аналог задачи (3.58) можно было бы построить методом, аналогичным предыдущему. Однако можно пойти более простым путем, описывая связь между функциями Ω_n и ψ_n на основе рассмотренного выше алгоритма.

Легко видеть, что соотношения (3.43) и (3.58) тождественны, если положить $\Omega = J$. Но для вектора J уже получена корректная формула (3.48), которую теперь можно переписать в виде

$$\Omega_{p-\frac{1}{2}}^h = \alpha_p (\psi_p^h - \psi_{p-1}^h).$$

Это и будет формула, связывающая компоненты вектора Ω^h с компонентами вектора ψ^h . Эта связь имеет место при любом n . Таким образом, решая задачу (3.54), можно получить функцию ψ^h , а следовательно, и Ω^h .

Если F принадлежит классу функций $\{F\}$, обращающихся в нуль при $z=0$ и $z=H$ и таких, что оператор

$$Z = \frac{d^2}{dz^2} - \delta \frac{d}{dz} + \frac{\lambda}{\gamma}$$

на этой системе функций имеет смысл, то функция F может быть приближенно представлена в виде ряда

$$F = \sum_{n=1}^m F_n \Omega_n^h, \quad (3.60)$$

где

$$F_n = (F, \Omega_n^{*h}). \quad (3.61)$$

Переходим теперь к другой формулировке спектральной проблемы на основе аппроксимации обратного оператора по отношению к дифференциальному. С этой целью будем предполагать, что решение задачи (3.41) известно с заданной степенью точности. Такое решение, например, может быть найдено с помощью рассмотренного выше метода при выборе большого числа узловых точек на интервале $[0, H]$. Тогда всякая функция $f(z)$ из некоторого класса, заданная на интервале $[0, H]$, может быть представлена в виде

$$f(z) = \sum_{n=0}^m f_n \psi_n(z), \quad (3.62)$$

где

$$f_n = \int_0^H f(z') \psi_n^*(z') dz'. \quad (3.63)$$

Подставим выражение (3.63) в (3.62) и переменим порядки суммирования и интегрирования. Тогда приходим к интегральному представлению функции $f(z)$:

$$f(z) = \int_0^H f(z') P(z, z') dz', \quad (3.64)$$

где

$$P(z, z') = \sum_{n=0}^m \psi_n(z) \psi_n^*(z').$$

Сформулируем теперь интегральное уравнение, соответствующее задаче (3.41). Нетрудно проверить, что оно имеет вид

$$\lambda^G \psi(z) = \int_0^H \psi(z') G(z, z') dz', \quad (3.65)$$

где ядро уравнения $G(z, z')$ имеет вид

$$G(z, z') = \sum_{n=0}^m \lambda_n^G \psi_n(z) \psi_n^*(z'), \quad (3.66)$$

а λ_n — собственные числа уравнения (3.41). Естественно, что союзное уравнение по отношению к (3.65) имеет вид

$$\lambda_n^G \psi_n^*(z) = \int_0^H \psi_n^*(z) G(z', z) dz'. \quad (3.67)$$

Рассмотрим теперь однородное уравнение (3.65) и представим его в форме

$$\lambda_n^G \psi(z) = \sum_{p'=1}^m \int_{z_{p'-1}}^{z_{p'}} \psi(z') G(z, z') dz'. \quad (3.68)$$

Проинтегрируем уравнение (3.68) в пределах $[z_{p-1}, z_p]$. Тогда будем иметь

$$\lambda_n^G \int_{z_{p-1}}^{z_p} \psi(z) dz = \sum_{p'=1}^m \int_{z_{p'-1}}^{z_p} dz \int_{z_{p'-1}}^{z_{p'}} \psi(z') G(z, z') dz'. \quad (3.69)$$

Предположим, что под знаком интеграла в правой части уравнения (3.69) одна из функций $\psi(z')$ или $G(z, z')$ изменяется медленно. Тогда возможно следующее приближенное представление:

$$\int_{z_{p-1}}^{z_p} dz \int_{z_{p'-1}}^{z_{p'}} \psi(z') G(z, z') dz' = \psi_{p-\frac{1}{2}}^h g_{pp'} \Delta z_{p-\frac{1}{2}}, \quad (3.70)$$

где

$$\psi_{p-\frac{1}{2}}^h = \frac{1}{\Delta z_{p-\frac{1}{2}}} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \psi(z) dz; \quad (3.71)$$

$$g_{pp'} = \frac{1}{\Delta z_{p-1}} \int_{z_{p-1}}^{z_p} dz \int_{z_{p'-1}}^{z_{p'}} G(z, z') dz'.$$

В результате приходим к следующей системе линейных уравнений:

$$\lambda_n^G \psi_{p-\frac{1}{2}}^h = \sum_{p'=1}^m g_{pp'} \psi_{p'-\frac{1}{2}}^h. \quad (3.72)$$

Введем в рассмотрение вектор ψ^h с компонентами ψ_{p-1}^h и матрицу G^h с компонентами $g_{pp'}$. Тогда систему уравнений (3.72) запишем в виде

$$\lambda G \psi^h = G^h \psi^h. \quad (3.73)$$

Система сопряженных уравнений определяется уравнением

$$\lambda G \psi^{*h} = G^{*h} \psi^{*h}, \quad (3.74)$$

где G^{*h} — транспонированная матрица по отношению к G^h . Так же как и в первом случае, любой n -мерный вектор f может быть представлен с помощью $\{\psi^h\}$ и $\{\psi^{*h}\}$ в виде (3.56) и (3.57), где в качестве функций ψ_n^h и ψ_n^{*h} следует теперь взять решения задач (3.73) и (3.74).

Система биортогональных функций задачи (3.73) и (3.74) может иметь существенное преимущество перед системой решений задач (3.54) и (3.55), поскольку она является следствием аппроксимации вполне непрерывного оператора. Отметим, однако, одну особенность интегрального уравнения (3.65). А именно, точка $\nu = \infty$ является точкой спектра. Как известно, этому значению $\lambda_0 = 0$ соответствуют функции

$$\psi_0 = 1, \quad \psi_0^* = \alpha_0 e^{-z^2}.$$

В дальнейшем будем предполагать, что при решении задачи прогноза погоды всякий раз баротропная составляющая поля выделяется особо, поэтому разложение по собственным функциям задачи (3.65) производится за вычетом баротропной составляющей. В таком классе функций полнота систем $\{\psi_n^h\}$ и $\{\psi_n^{*h}\}$ для $n = 1, 2, \dots$ обеспечена.

Таким образом, в настоящей работе развит подход к решению уравнений динамики атмосферных процессов для произвольных линейных операторов на основе биортогональных разложений.

Следует отметить, что впервые идея использования собственных функций разностного оператора для решения уравнений динамики была высказана в работах [35, 36], посвященных канонизации уравнений для поля давления. В дальнейшем эта идея в несколько иной форме была рассмотрена в работе [37] применительно к случаю атмосферы с постоянной стратификацией, когда можно было воспользоваться классическим анализом Фурье с весовой функцией.

Можно ожидать, что указанное направление работ окажется весьма перспективным и найдет применение при формулировке различных численных алгоритмов решения задач прогноза погоды.

§ 4. Разностная аппроксимация и решение уравнений Эйлера

В настоящем параграфе рассмотрим разностные методы решения уравнений расщепленной системы при отсутствии турбулентности и вязкости. Поскольку все уравнения системы (2.21) однотипны, рассмотрим одно из них [38]:

$$\frac{\partial \tilde{z}}{\partial t} + u \frac{\partial \tilde{z}}{\partial x} = 0. \quad (4.1)$$

Значение коэффициента u будем считать известным.

Интервал $\Delta t = t_{j+1} - t_j$ разобьем на два равных интервала. На первом из них $t_j \leq t \leq t_{j+1/2}$ уравнение (4.1) аппроксимируем разностным уравнением первого порядка точности по обоим переменным:

$$\tilde{z}_k^{j+\frac{1}{2}} = \tilde{z}_k^j - \mu_k \begin{cases} \tilde{z}_k^{j+\frac{1}{2}} - \tilde{z}_{k-1}^{j+\frac{1}{2}} & \text{при } \mu_k > 0; \\ \tilde{z}_{k+1}^{j+\frac{1}{2}} - \tilde{z}_k^{j+\frac{1}{2}} & \text{при } \mu_k < 0, \end{cases} \quad (4.2)$$

где

$$\mu_k = \frac{u_k \tau}{\Delta x}, \quad \tau = \frac{\Delta t}{2}.$$

Уравнение (4.2) запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} (|\mu_k| + \mu_k) \tilde{z}_{k-1}^{j+\frac{1}{2}} - 2(1 + |\mu_k|) \tilde{z}_k^{j+\frac{1}{2}} + \\ + (|\mu_k| - \mu_k) \tilde{z}_{k+1}^{j+\frac{1}{2}} = -2\tilde{z}_k^j. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Разностное уравнение (4.3) формально объединяет в себе оба случая: $\mu_k > 0$ и $\mu_k < 0$. Более того, уравнение (4.3) формально имеет трехточечную форму записи:

$$a_k \tilde{z}_{k-1}^{j+\frac{1}{2}} - 2b_k \tilde{z}_k^{j+\frac{1}{2}} + c_k \tilde{z}_{k+1}^{j+\frac{1}{2}} = -g_k, \quad (4.4)$$

$$a_k = |\mu_k| + \mu_k;$$

$$b_k = 1 + |\mu_k|;$$

$$c_k = |\mu_k| - \mu_k;$$

$$g_k = 2\tilde{z}_k^j. \quad (4.5)$$

Для решения уравнения (4.4) используем метод разностной факторизации [34]. Как известно [38], метод факторизации устойчив, если выполняется условие

$$a_k + c_k \leq 2b_k.$$

Очевидно, в нашем случае это условие выполнено, поскольку

$$a_k + c_k = 2|u_k|.$$

Решение уравнения (4.4) найдем в виде

$$\begin{aligned} \varphi_{k+1} &= \frac{c_k}{2b_k - a_k \varphi_k}; \\ z_{k+1} &= \frac{a_k z_k + g_k}{2b_k - a_k \varphi_k}; \\ \varphi_k &= \varphi_{k-1} z_{k+1} + z_{k-1}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Для полной определенности решения систему (4.6) необходимо дополнить заданием граничных условий. Простой анализ показывает, что таких условий следует взять два, если $u_0 > 0$ и $u_n < 0$, одно, если $u_0 > 0$, $u_n > 0$ или $u_0 < 0$, $u_n < 0$, и совсем не требуется граничных условий, если $u_0 < 0$, а $u_n > 0$. Таким образом, граничные условия нужно ставить только в тех случаях, когда в граничных точках вектор скорости направлен внутрь области определения решения.

Такая естественная постановка задачи связана с тем, что уравнение (4.4) только формально трехточечное, а на самом деле двухточечное¹. В том случае, когда это необходимо, граничные условия ставим следующим образом:

$$\varphi_1 = 0, \quad z_1 = \varphi(0); \quad \varphi_n = \varphi(x_n),$$

где $\varphi(0)$ и $\varphi(x_n)$ — заданные граничные условия.

С помощью разложения в ряд Тейлора решения уравнения (4.1) в окрестности точки (x_n, t_j) можно показать, что порядок аппроксимации уравнения (4.4) будет первым по общим переменным. Можно показать, что разностное уравнение (4.4) на самом деле аппроксимирует уравнение

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + u \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \nu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad (4.7)$$

где

$$\nu = \frac{u^2 \Delta t}{4} + \frac{|u| \Delta x}{2}.$$

Таким образом, аппроксимация уравнения (4.1) разностной схемой (4.4) приводит к появлению эффекта «счетной вязкости», причем величина коэффициента вязкости может быть очень большой и, естественно, это приведет к существенному

¹ Метод сведения задачи (4.1) к формально трехточечной разностной схеме был разработан Т. А. Темноевой.

сглаживанию метеорологических полей. Для того чтобы получить решение без эффекта счетной вязкости, необходимо на втором интервале $t_{j+1/2} \leq t \leq t_{j+1}$ воспользоваться схемой корректора в следующем виде¹:

$$\xi^{j+1} = \xi^j - \mu \Delta_k \xi^{j+\frac{1}{2}}.$$

Здесь и в дальнейшем мы будем пользоваться следующими обозначениями:

$$\nabla_k a = a_k - a_{k-1};$$

$$\Delta_k a = a_{k+1} - a_{k-1}.$$

Комбинация схем (4.4) и (4.7) приводит к аппроксимации второго порядка точности по переменным Δt и Δx .

Покажем теперь, что комбинация схем (4.4) и (4.7) оказывается счетно устойчивой. С этой целью рассмотрим простейший случай $\mu = \text{const} > 0$. Тогда получаем [38]:

$$\begin{aligned} \xi^{j+\frac{1}{2}} &= \xi^j - \mu \nabla_k \xi^{j+\frac{1}{2}}; \\ \xi^{j+1} &= \xi^j - \mu \Delta_k \xi^{j+\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Из системы уравнений (4.8) исключим неизвестную с дробным индексом. Тогда приходим к следующей разностной схеме:

$$(E + \mu \nabla_k) (\xi^{j+1} - \xi^j) + \mu \Delta_k \xi^j = 0. \quad (4.9)$$

Здесь, конечно, использовано предположение о постоянстве μ .

Решение уравнения (4.9) будем искать в виде

$$\xi_k^j = \lambda^j e^{ik\alpha}, \quad (4.10)$$

где λ и α — произвольные числа.

Подставляя (4.10) в уравнение (4.9), будем иметь

$$\lambda = \frac{1 + \mu(1 - \cos \alpha) - i\mu \sin \alpha}{1 + \mu(1 - \cos \alpha) + i\mu \sin \alpha}.$$

Отсюда непосредственно следует, что

$$|\lambda| = 1.$$

Это значит, что разностная схема (4.8) устойчива.

С помощью разложения решения в ряд Тейлора нетрудно показать, что комбинация схем (4.8) позволяет получить решение исходной задачи с точностью до величин второго порядка малости по всем переменным.

¹ Здесь и в дальнейшем индекс k при функциях ξ и коэффициентах μ будем опускать.

Важное значение в расчетах имеет схема второго порядка точности. Рассмотрим уравнение (4.1) и аппроксимируем его разностным уравнением второго порядка точности по x и первого по t . Тогда

$$\frac{\mu_k}{2} \xi_{k-1}^{j+\frac{1}{2}} - \xi_k^{j+\frac{1}{2}} - \frac{\mu_k}{2} \xi_{k+1}^{j-\frac{1}{2}} = -\xi_k^j. \quad (4.11)$$

Уравнение (4.11), по существу, трехточечное и, следовательно, имеет два характеристических корня, хотя исходное уравнение (4.1) имеет только один корень, поскольку является уравнением первого порядка. Отметим, что рассмотренное выше разностное уравнение (4.3) имеет только одно линейно независимое решение. Таким образом, при аппроксимации дифференциального уравнения (4.1) разностным возникло одно паразитическое решение, которое следует отфильтровать. Это можно сделать с помощью корректной постановки граничных условий. А именно, пусть $\mu_k > 0$. Это значит, что собственным граничным условием задачи будет $\varphi(0) = \varphi_0$. Хотя разностное уравнение (4.11) допускает постановку произвольного условия $\varphi(x_n) = \varphi_n$, оно не будет согласовано с решением. Для согласования воспользуемся самим уравнением (4.1), которое распишем в разностном виде по схеме (4.2). Тогда для точки x_n будем иметь

$$(1 + \mu_k) \xi_n^{j+\frac{1}{2}} + \mu_k \xi_{n-1}^{j-\frac{1}{2}} = \xi_n^j. \quad (4.12)$$

Уравнение (4.12) будет теперь играть роль недостающего второго граничного условия для трехточечной схемы (4.11). Решение уравнения (4.11) вместе с граничными условиями ищется методом факторизации (4.6). В отличие от разностного уравнения (4.3), метод факторизации для уравнения (4.11) условно устойчив при выполнении неравенства

$$|\mu_k| \leq \frac{1}{2}.$$

Однако это условие не связано с существенными ограничениями в решении задачи. Важно отметить, что сформулированная задача универсально решается для случая, когда μ_k меняет знак.

Для того чтобы повысить точность расчета по Δt , на втором полушаге необходимо воспользоваться корректором. В результате приходим к комбинации двух схем

$$\begin{aligned} \xi^{j+\frac{1}{2}} &= \xi^j - \mu \Delta_k \xi^{j-\frac{1}{2}}; \\ \xi^{j+1} &= \xi^j - 2\mu \Delta_k \xi^{j+\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Исключая неизвестную с дробным индексом, приходим к разрешенной схеме

$$(E + \mu \Delta_k) (\xi^{j+1} - \xi^j) + 2\mu \Delta_k \xi^j = 0. \quad (4.14)$$

При получении схемы (4.14) было использовано предположение модельной задачи, в которой принято $\mu = \text{const}$. На интервале Δt схема (4.14) не вносит счетной вязкости и имеет второй порядок аппроксимации по обоим переменным.

В плане решения уравнения (4.1) остается рассмотреть еще один принципиальный вопрос, а именно показать, что коэффициент u в уравнении (4.1) можно брать при $t = t_j$. Здесь мы рассмотрим два разных случая. Первый случай, когда $\max_k |\mu_k^j| \ll 1$, и второй, когда $\max_k |\mu_k^j|$ сравним с единицей или больше единицы. В первом случае погрешность от замены u на u^j в пределах интервала Δt будет малой. В самом деле, ограничиваясь величинами первого порядка малости Δt , уравнение (4.1) перепишем в виде

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \left[u^j + \frac{\partial u^j}{\partial t} (t - t_j) \right] \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0.$$

Имеет место следующее уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - l v + R T \frac{\partial \xi}{\partial x} \right). \quad (*)$$

Учитывая порядки величин в уравнении (*), можно дать следующую оценку:

$$u^j + \frac{\partial u^j}{\partial t} \Delta t = u^j (1 + 2\mu R_1^j + \alpha R_2^j), \quad (**)$$

где

$$\mu = \frac{u \Delta t}{2 \Delta x}, \quad \alpha = l \Delta t.$$

Здесь величины R_1^j и R_2^j имеют порядок единицы.

В уравнении (**), кроме того, использовано предположение, что

$$\left| w \frac{\partial u}{\partial z} \right| \ll \left| u \frac{\partial u}{\partial x} \right|.$$

Таким образом, если Δt выбрать достаточно малым, например порядка 10^3 сек., то погрешность аппроксимации будет малой.

Рассмотрим теперь второй случай, когда $\mu_k^j > 1/2$. Как видно из (4.13), аппроксимация здесь уже будет плохой и использование разностной схемы с корректировкой не приведет к улучшению результата. В этом случае необходимо произвести кор-

ректировку по полному уравнению для ξ , и алгоритм расчета ξ^{j+1} можно описать следующим образом:

Сначала на интервале $\Delta t/2$ решаются задачи:

$$\begin{aligned}\xi^{j+\frac{1}{6}} &= \xi^j - \frac{\Delta t}{2} \Lambda_1^{h_1} \xi^{j+\frac{1}{6}}; \\ \xi^{j+\frac{2}{6}} &= \xi^{j+\frac{1}{6}} - \frac{\Delta t}{2} \Lambda_2^{h_2} \xi^{j+\frac{2}{6}}; \\ \xi^{j+\frac{1}{2}} &= \xi^{j+\frac{2}{6}} - \frac{\Delta t}{2} \Lambda_3^{h_3} \xi^{j+\frac{1}{2}},\end{aligned}\quad (4.15)$$

где индексом h_1 отмечено, что соответствующие разностные операторы имеют первый порядок аппроксимации. После этого производится корректировка коэффициентов $u^{j+1/2}$, $v^{j+1/2}$, $w^{j+1/2}$. Далее с полученными коэффициентами, а следовательно, и с исправленным оператором Λ^{h_1} находим решение задачи в момент времени t^{j+1} :

$$\xi^{j+1} = \xi^j - \Delta t \Lambda^{h_2} \xi^{j+\frac{1}{2}}, \quad (4.16)$$

где индекс h_2 отмечает второй порядок аппроксимации для оператора Λ . Совокупность разностных схем (4.15) и (4.16) дает аппроксимацию уравнения

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + u \frac{\partial \xi}{\partial x} + v \frac{\partial \xi}{\partial y} + w \frac{\partial \xi}{\partial z} = 0 \quad (4.17)$$

с точностью до величин второго порядка малости по всем переменным.

В простейшем случае, когда коэффициенты уравнения (4.17) постоянны, можно с помощью гармонического анализа доказать устойчивость сформулированного алгоритма. В самом деле, на первой половине шага $\frac{\Delta t}{2}$ решим три следующих уравнения:

$$\begin{aligned}\xi^{j+\frac{1}{6}} &= \xi^j - \mu_1 \nabla_k \xi^{j+\frac{1}{6}}; \\ \xi^{j+\frac{2}{6}} &= \xi^{j+\frac{1}{6}} - \mu_2 \nabla_l \xi^{j+\frac{2}{6}}; \\ \xi^{j+\frac{1}{2}} &= \xi^{j+\frac{2}{6}} - \mu_3 \nabla_p \xi^{j+\frac{1}{2}},\end{aligned}\quad (4.18)$$

где $\mu_1 = \frac{u\tau}{\Delta x}$, $\mu_2 = \frac{v\tau}{\Delta y}$, $\mu_3 = \frac{w\tau}{\Delta z}$, $\tau = \frac{\Delta t}{2}$.

На второй половине шага запишем уравнение

$$\xi^{j+1} = \xi^j - (\mu_1 \Delta_k + \mu_2 \Delta_l + \mu_3 \Delta_p) \xi^{j+\frac{1}{2}}. \quad (4.19)$$

Из системы уравнений (4.18) и (4.19) исключим неизвестные с дробными индексами. Тогда получим следующее разрешенное уравнение:

$$(E + \mu_1 \nabla_k)(E + \mu_2 \nabla_l)(E + \mu_3 \nabla_p)(\xi^{j+1} - \xi^j) + (\mu_1 \Delta_k + \mu_2 \Delta_l + \mu_3 \Delta_p) \xi^j = 0. \quad (4.20)$$

Заметим, что уравнение (4.20) может быть получено только в предположении постоянства коэффициентов μ_1, μ_2, μ_3 .

Решение уравнения (4.20) будем искать в виде гармонического возмущения

$$\xi_k^j = \lambda^j e^{ikx_1 + ilx_2 + ipx_3}, \quad (4.21)$$

где α_i — произвольные постоянные.

Подставим выражение (4.21) в уравнение (4.20). Тогда для характеристического числа λ получим следующее выражение:

$$\lambda = \frac{\operatorname{Re} \Delta + i [\operatorname{Im} \Delta - 2(y_1 + y_2 + y_3)]}{\operatorname{Re} \Delta + i \operatorname{Im} \Delta}, \quad (4.22)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta &= (1 + x_1 + iy_1)(1 + x_2 + iy_2)(1 + x_3 + iy_3); \\ x_i &= 2\mu_i \sin^2 \frac{\alpha_i}{2}; \\ y_i &= \mu_i \sin \alpha_i. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Здесь μ предполагается положительной величиной.

Вычислим модуль характеристического числа

$$|\lambda| = \sqrt{\frac{\operatorname{Re}^2 \Delta + \operatorname{Im}^2 \Delta - 4\Phi}{\operatorname{Re}^2 \Delta + \operatorname{Im}^2 \Delta}}, \quad (4.24)$$

где

$$\Phi = \operatorname{Im} \Delta (y_1 + y_2 + y_3) - (y_1 + y_2 + y_3)^2. \quad (4.25)$$

Произведем анализ функции Φ . Для этой цели найдем выражение для $\operatorname{Im} \Delta$.

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \Delta &= y_1(1 + x_2)(1 + x_3) + y_2(1 + x_1)(1 + x_3) + \\ &+ y_3(1 + x_1)(1 + x_2) - y_1 y_2 y_3. \end{aligned}$$

Тогда можно найти Φ :

$$\begin{aligned} \Phi &= (y_1 + y_2 + y_3) [y_1(x_2 + x_3 + x_2 x_3) + y_2(x_1 + x_3 + \\ &+ x_1 x_3) + y_3(x_1 + x_2 + x_1 x_2) - y_1 y_2 y_3]. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Найдем минимум функции Φ . При этом воспользуемся тем фактом, что функция Φ симметрична относительно переменных

x_1, x_2, x_3 и y_1, y_2, y_3 . Это значит, что абсолютный экстремум функции Φ возможен только при

$$x_1 = x_2 = x_3 = x, \quad y_1 = y_2 = y_3 = y.$$

В результате приходим к функции двух переменных

$$\Phi(x, y) = 9y^2(2x + x^2) - 3y^4. \quad (4.27)$$

Ради удобства анализа выражение (4.27) с учетом соотношений (4.23) запишем в виде

$$\Phi(\alpha; \mu) = \mu^2 \sin^2 \alpha \left[36\mu \sin^2 \frac{\alpha}{2} \left(1 + \mu \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) - 3\mu^2 \sin^2 \alpha \right]. \quad (4.28)$$

Для нахождения области отрицательных значений функции Φ разложим ее в ряд по степеням α . Тогда получим

$$\Phi(\alpha; \mu) = 3\mu^3 \alpha^4 (3 - \mu). \quad (4.29)$$

Отсюда следует, что отрицательные значения функции Φ будут при $\mu > 3$. Следовательно, устойчивость схемы обеспечивается при условии

$$0 \leq |\mu| \leq 3.$$

Если теперь предположить, что в системе (4.18) и (4.19) разностные операторы по переменной z отсутствуют и система имеет вид

$$\begin{aligned} \xi^{j+\frac{1}{4}} &= \xi^j - \mu_1 \nabla_k \xi^{j+\frac{1}{4}}; \\ \xi^{j+\frac{1}{2}} &= \xi^{j+\frac{1}{4}} - \mu_2 \nabla_l \xi^{j+\frac{1}{2}}, \\ \xi^{j+1} &= \xi^j - (\mu_1 \Delta_k + \mu_2 \Delta_l) \xi^{j+\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (4.30)$$

то разрешенное уравнение будет следующее:

$$(E + \mu_1 \nabla_k)(E + \mu_2 \nabla_l)(\xi^{j+1} - \xi^j) + (\mu_1 \Delta_k + \mu_2 \Delta_l) \xi^j = 0.$$

Последующий анализ устойчивости приводит к соотношению

$$|\lambda| = \sqrt{\frac{\operatorname{Re}^2 \Delta + \operatorname{Im}^2 \Delta - 4\Phi}{\operatorname{Re}^2 \Delta + \operatorname{Im}^2 \Delta}},$$

где

$$\Phi = (y_1 + y_2)(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

В силу симметричности функции по индексам $x_i y_i$ ее минимум не будет зависеть от индекса. В результате приходим к функции

$$\Phi(x, y) = 4xy^2,$$

где $x > 0$.

Отсюда следует, что минимум достигается при $\alpha=0$, так что $\Phi(0)=0$, и во всех случаях имеет место соотношение

$$\Phi(x, y) \geq 0.$$

Переходим теперь к построению и анализу другой интересной в практическом отношении схемы. А именно, рассмотрим совокупность следующих схем. На первой половине шага

$$\begin{aligned}\xi^{j+\frac{1}{6}} &= \xi^j - \mu_1 \Delta_k \xi^{j+\frac{1}{6}}; \\ \xi^{j+\frac{2}{6}} &= \xi^{j+\frac{1}{6}} - \mu_2 \Delta_l \xi^{j+\frac{2}{6}}; \\ \xi^{j+\frac{1}{2}} &= \xi^{j+\frac{2}{6}} - \mu_3 \Delta_p \xi^{j+\frac{1}{2}}\end{aligned}\quad (4.31)$$

и на второй

$$\xi^{j+1} = \xi^j - (\mu_1 \Delta_k + \mu_2 \Delta_l + \mu_3 \Delta_p) \xi^{j+\frac{1}{2}}. \quad (4.32)$$

Разрешенная схема в предположении $\mu = \text{const}$ примет вид

$$\begin{aligned}(E + \mu_1 \Delta_k)(E + \mu_2 \Delta_l)(E + \mu_3 \Delta_p)(\xi^{j+1} - \xi^j) + \\ + (\mu_1 \Delta_k + \mu_2 \Delta_l + \mu_3 \Delta_p) \xi^j = 0.\end{aligned}\quad (4.33)$$

Подставляя частное решение (4.21) в (4.33), снова приходим к уравнению (4.22), где

$$\begin{aligned}\Delta &= (1 + 2iy_1)(1 + 2iy_2)(1 + 2iy_3); \\ y_i &= \mu_i \sin \alpha_i.\end{aligned}\quad (4.34)$$

Модуль характеристического числа снова определяется по формуле (4.24). В результате приходим к функции Φ , которая принимает вид

$$\Phi = -8(y_1 + y_2 + y_3)y_1 y_2 y_3. \quad (4.35)$$

Формула (4.35) показывает, что для всех положительных значений y_1, y_2, y_3 область значений функции Φ состоит из отрицательных чисел. Таким образом, «запаса устойчивости», который имеют простейшие одномерные уравнения (4.31), не хватает для обеспечения устойчивости схемы с корректором.

Рассмотрим теперь случай, когда разностный оператор по z отсутствует. Тогда система разностных уравнений с корректором принимает вид

$$\begin{aligned}\xi^{j+\frac{1}{4}} &= \xi^j - \mu_1 \Delta_k \xi^{j+\frac{1}{4}}; \\ \xi^{j+\frac{1}{2}} &= \xi^{j+\frac{1}{4}} - \mu_2 \Delta_l \xi^{j+\frac{1}{2}}; \\ \xi^{j+1} &= \xi^j - (\mu_1 \Delta_k + \mu_2 \Delta_l) \xi^{j+\frac{1}{2}}.\end{aligned}\quad (4.36)$$

Система (4.36) в случае μ_1 и μ_2 постоянных сводится к одному уравнению вида

$$(E + \mu_1 \Delta_k)(E + \mu_2 \Delta_k)(\xi^{j+1} - \xi^j) + (\mu_1 \Delta_k - \mu_2 \Delta_l) \xi^j = 0. \quad (4.37)$$

Анализ показывает, что в этом случае

$$|\lambda| = 1.$$

Таким образом, схемы с центральными разностями по геометрическим координатам оказываются устойчивыми только для случая одного или двух разностных операторов. Эти схемы в данных случаях могут быть успешно использованы в расчетах.

Разработанные схемы решения уравнения для ξ с корректором относятся к случаю, когда турбулентный обмен отсутствует. Обобщение результатов на случай учета турбулентности может быть произведено в следующем направлении. Турбулентность в атмосфере за период интервала прогноза Δt играет весьма малую роль. В самом деле, если учесть, что коэффициенты горизонтального и вертикального турбулентного обмена равны соответственно $\mu = 10^6$ MTS, $\nu = 10^2$ MTS, то величины, характеризующие вклад турбулентности в динамику атмосферных процессов, будут оцениваться примерно следующим образом:

$$\frac{\mu \Delta t}{\Delta x^2} = \frac{1}{20}; \quad \frac{\nu \Delta t}{\Delta z^2} = \frac{1}{5}, \quad (4.38)$$

если $\Delta t = 3,6 \cdot 10^3$ сек., $\Delta x = 3 \cdot 10^5$ м, $\Delta z = 2 \cdot 10^3$ м. Заметим, что в оценках (4.38) коэффициенты турбулентного обмена взяты с завышением примерно на порядок.

Ввиду того что турбулентный обмен вносит небольшой вклад за период Δt , он может быть учтен по явной схеме после того, как произведена корректировка функции ξ . Практически это сводится к некоторому дополнительному сглаживанию решения, свойственному статистической природе атмосферных движений. При такой точке зрения при расчете вектор-функции ξ в пределах интервала Δt турбулентный обмен можно из рассмотрения исключить.

Рассмотрим другой метод решения уравнения для функции ξ , имеющий второй порядок точности по всем переменным. А именно, рассмотрим разностную задачу

$$\begin{aligned} & \left(E + \frac{\tau}{2} \Lambda_1^{h_1}\right) \left(E + \frac{\tau}{2} \Lambda_2^{h_2}\right) \left(E + \frac{\tau}{2} \Lambda_3^{h_3}\right) \xi^{j+1} = \\ & = \left(E - \frac{\tau}{2} \Lambda_1^{h_1}\right) \left(E - \frac{\tau}{2} \Lambda_2^{h_2}\right) \left(E - \frac{\tau}{2} \Lambda_3^{h_3}\right) \xi^j, \end{aligned} \quad (4.39)$$

где $\Lambda_i^{h_i}$ — операторы, аппроксимирующие Λ_i центральными разностями. Раскроем скобки. Тогда приходим к уравнению

$$\left(E + \frac{\tau^2}{4} R\right) \frac{\xi^{j+1} - \xi^j}{\tau} + \left(\Lambda^{h_2} + \frac{\tau^2}{4} S\right) \frac{\xi^{j+1} + \xi^j}{2} = 0, \quad (4.40)$$

где

$$R = \Lambda_1^{h_1} \Lambda_2^{h_2} + \Lambda_1^{h_1} \Lambda_3^{h_3} + \Lambda_2^{h_2} \Lambda_3^{h_3};$$

$$S = \Lambda_1^{h_1} \Lambda_2^{h_2} \Lambda_3^{h_3}. \quad (4.41)$$

Поскольку предполагается, что $|\mu_2| \ll 1$, то $\frac{\tau^2}{4} \|R\| \ll 1$, и $\frac{\tau^2}{4} S \ll \|A\|$. Последнее равенство тем более верно, так как $\|\Lambda_{1,2}^{h_{1,2}}\| \gg \|\Lambda_3^{h_3}\|$. Таким образом, разностная схема (4.39) действительно дает хорошую аппроксимацию при решении, когда $\tau \sim 1$ час, $h \sim 3 \cdot 10^5$ м.

Схема реализации уравнения (4.39) весьма проста и является комбинацией явных схем

$$\begin{aligned} \xi^{j+\frac{1}{6}} &= \left(E - \frac{\tau}{2} \Lambda_3^{h_3}\right) \xi^j; \\ \xi^{j+\frac{2}{6}} &= \left(E - \frac{\tau}{2} \Lambda_2^{h_2}\right) \xi^{j+\frac{1}{6}}; \\ \xi^{j+\frac{3}{6}} &= \left(E - \frac{\tau}{2} \Lambda_1^{h_1}\right) \xi^{j+\frac{2}{6}} \end{aligned} \quad (4.42)$$

и неявных

$$\begin{aligned} \left(E + \frac{\tau}{2} \Lambda_1^{h_1}\right) \xi^{j+\frac{4}{6}} &= \xi^{j+\frac{3}{6}}; \\ \left(E + \frac{\tau}{2} \Lambda_2^{h_2}\right) \xi^{j+\frac{5}{6}} &= \xi^{j+\frac{4}{6}}; \\ \left(E + \frac{\tau}{2} \Lambda_3^{h_3}\right) \xi^{j+1} &= \xi^{j+\frac{5}{6}}. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Неявные схемы реализуются с помощью метода прогонки с корректировкой граничных условий.

§ 5. Разностные уравнения для поля давления

Переходим к решению задачи (2.4) на интервале $t_j \leq t \leq t_{j+1/2}$. Уравнение (2.4) в скалярной форме представляет собой систему дифференциальных уравнений (2.22). Эти уравне-

ния приближенно аппроксимируем системой разностных уравнений первого порядка точности по Δt . Тогда

$$\begin{aligned} u^{j+\frac{1}{2}} - u^j &= \alpha v^{j+\frac{1}{2}} - c^2 \tau \varphi_x^{j+\frac{1}{2}}; \\ v^{j+\frac{1}{2}} - v^j &= -\alpha u^{j+\frac{1}{2}} - c^2 \tau \varphi_y^{j+\frac{1}{2}}; \\ w^{j+\frac{1}{2}} - w^j &= g \tau \vartheta^{j+\frac{1}{2}} - c^2 \tau \varphi_z^{j+\frac{1}{2}}; \\ \vartheta^{j+\frac{1}{2}} - \vartheta^j &= -\frac{\gamma a - \gamma}{T} \tau w^{j+\frac{1}{2}}; \\ \varphi^{j+\frac{1}{2}} - \varphi^j &= -\tau \left(\operatorname{div} \mathbf{u}^{j+\frac{1}{2}} - \sigma w^{j+\frac{1}{2}} \right), \end{aligned} \quad (5.1)$$

где использованы обозначения: $c^2 = RT$, $\alpha = k$, $\tau = \frac{\Delta t}{2}$, $\sigma = \frac{g - \gamma R}{RT}$.

Неизвестные в системе (5.1) выразим через $\varphi^{j+\frac{1}{2}}$ и начальные данные при $t = t_j$. Тогда получим

$$\begin{aligned} u^{j+\frac{1}{2}} &= -\frac{1}{1+\alpha^2} \left[c^2 \tau (\varphi_x + \alpha \varphi_y)^{j+\frac{1}{2}} - (u + \alpha v)^j \right]; \\ v^{j+\frac{1}{2}} &= -\frac{1}{1+\alpha^2} \left[c^2 \tau (\varphi_y - \alpha \varphi_x)^{j+\frac{1}{2}} - (v - \alpha u)^j \right]; \\ w^{j+\frac{1}{2}} &= -\chi \left(c^2 \tau \varphi_z^{j+\frac{1}{2}} - g \tau \vartheta^j - w^j \right); \\ \vartheta^{j+\frac{1}{2}} &= \chi \left[\vartheta^j + \frac{\gamma a - \gamma}{T} \tau \left(c^2 \tau \varphi_z^{j+\frac{1}{2}} - w^j \right) \right], \end{aligned} \quad (5.2)$$

где

$$\chi = \frac{1}{1 + \frac{\gamma a - \gamma}{T} g \tau^2}.$$

Полученные выражения подставим в последнее из уравнений (5.1). В результате приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial w^{j+\frac{1}{2}}}{\partial z} - \sigma w^{j+\frac{1}{2}} &= -F; \\ w^{j+\frac{1}{2}} &= -\chi \left(c^2 \tau \varphi_z^{j+\frac{1}{2}} - w \right), \end{aligned} \quad (5.3)$$

где

$$F = \frac{1}{c^2} \left(\varphi^{j+\frac{1}{2}} - \varphi^j \right) + (u_x + v_y)^{j+\frac{1}{2}}; \\ \omega = g \vartheta^j + \bar{\omega}^j. \quad (5.4)$$

Систему уравнений (5.3) аппроксимируем с помощью разностных уравнений по переменной z . С этой целью будем предполагать, что решение системы (5.3) ищется в классе непрерывных по z функций φ и ω , причем вертикальная компонента скорости обращается в нуль на поверхности Земли и на «верхней границе» атмосферы:

$$\omega^{j+\frac{1}{2}} = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, \quad z = H. \quad (5.5)$$

Вывод системы разностных уравнений произведем методом, уже рассмотренным при получении уравнения (3.54).

Пронтегрируем первое из уравнений (5.3) по z в пределах $z_{p-1/2} \leq z \leq z_{p+1/2}$. Тогда получим

$$\frac{1}{\Delta z_p} \left(\omega_{p+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} - \omega_{p-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} \right) - \frac{c}{\Delta z_p} \int_{z_{p-\frac{1}{2}}}^{z_{p+\frac{1}{2}}} \omega^{j+\frac{1}{2}} dz = \\ = - \frac{1}{\Delta z_p} \int_{z_{p-\frac{1}{2}}}^{z_{p+\frac{1}{2}}} F dz. \quad (5.6)$$

С точностью до малых второго порядка по Δz запишем

$$\frac{1}{\Delta z_p} \left[\left(1 - \frac{c \Delta z_p}{2} \right) \omega_{p+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} - \left(1 + \frac{c \Delta z_p}{2} \right) \omega_{p-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} \right] + F_p = 0. \quad (5.7)$$

Далее, разрешим второе из уравнений системы (5.3) относительно функции φ , и результат проинтегрируем по z в пределах $z_{p-1} \leq z \leq z_p$. Будем иметь

$$\varphi_p^{j+\frac{1}{2}} - \varphi_{p-1}^{j+\frac{1}{2}} = - \frac{1}{c^2} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \frac{\omega^{j+\frac{1}{2}}}{\gamma} dz + \frac{1}{c^2} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \omega dz. \quad (5.8)$$

Поскольку функции ω и ω непрерывны, вынесем их значения за знак интеграла в средней точке интервала и результат разрешим относительно ω . Тогда получим

$$\omega_{p-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} = -\mu_p c^2 \tau \left(\varphi_p^{j+\frac{1}{2}} - \varphi_{p-1}^{j+\frac{1}{2}} \right) + \mu_p \Delta z_{p-\frac{1}{2}} \omega_{p-\frac{1}{2}}^j, \quad (5.9)$$

где μ_p определено по форме (3.50). Исключим далее величины $\omega_{p+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}}$ из уравнения (5.7), пользуясь соотношением (5.9).

В результате приходим к разностному уравнению

$$a_p \varphi_{p+1}^{j+\frac{1}{2}} - b_p \varphi_p^{j+\frac{1}{2}} + c_p \varphi_{p-1}^{j+\frac{1}{2}} = R_p, \quad (5.10)$$

где

$$R_p = \frac{1}{c^2 \tau} \left(F_p + a_p \Delta z_{p+\frac{1}{2}} \omega_{p+\frac{1}{2}}^j - c_p \Delta z_{p-\frac{1}{2}} \omega_{p-\frac{1}{2}}^j \right). \quad (5.11)$$

Здесь, кроме того, использованы обозначения (3.53).

Систему уравнений (5.10) запишем в виде

$$B_p \varphi = R, \quad (5.12)$$

где B — матрица, определяемая коэффициентами (3.53), а R — вектор с компонентами R_p .

Найдем явное выражение для функции F_p . С этой целью воспользуемся первыми двумя равенствами из (5.2). Тогда приближенно будем иметь

$$F_p = \frac{1}{\tau} \left\{ \left[E - \frac{c^2 \tau^2}{1 + \alpha^2} \left(\Delta + \beta \frac{\partial}{\partial x} \right) \right] \varphi^{j+\frac{1}{2}} - \varphi^j - \frac{\tau}{1 + \alpha^2} [(u - \alpha v)_x^j + (v + \alpha u)_y^j] \right\}. \quad (5.13)$$

Подставим выражения (5.11) и (5.13) в уравнение (5.12). Тогда получим

$$\left[A_p + \frac{c^2 \tau^2}{1 + \alpha^2} \left(\Delta + \beta \frac{\partial}{\partial x} \right) \right] \varphi^{j+\frac{1}{2}} = -f^j, \quad (5.14)$$

где

$$\begin{aligned} A_p &= c^2 \tau^2 B_p - E; \\ f_p^j &= \varphi^j + \frac{\tau}{1 + \alpha^2} [(u - \alpha v)_x^j + (v + \alpha u)_y^j]_p - \\ &\quad - \tau \left(a_p \Delta z_{p+\frac{1}{2}} \omega_{p+\frac{1}{2}}^j - c_p \Delta z_{p-\frac{1}{2}} \omega_{p-\frac{1}{2}}^j \right). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Здесь $f_p^j = z$ — компонента вектора f^j .

Уравнение (5.14) аппроксимируем системой разностных уравнений по x_k и y_l . С этой целью функции φ и ω определим на основной системе точек (x_k, y_l) , а функции u и v — на вспомогательной системе точек $(x_{k+\frac{1}{2}}, y_{l+\frac{1}{2}})$. Учитывая это обстоятельство, производные запишем с помощью центральных разностей. В результате приходим к уравнению

$$A^h \varphi^{j+\frac{1}{2}} = f^h, \quad (5.16)$$

где

$$A^h = A_p + A_k + A_l.$$

Здесь использовано обозначение

$$A_k \varphi = \frac{c^2 - z^2}{1 + z^2} \frac{1}{h^2} [\varphi_{k+1} - 2\varphi_k + \varphi_{k-1} + 2zh(\varphi_{k+1} - \varphi_{k-1})],$$

$$A_l \varphi = \frac{c^2 - z^2}{1 + z^2} \frac{1}{h^2} (\varphi_{l+1} - 2\varphi_l + \varphi_{l-1}). \quad (5.17)$$

Рассмотрим теперь вопрос о представлении приближенного решения задачи (5.3) с помощью системы функций спектральных задач (3.73) и (3.74). С этой целью исключим из системы уравнений (5.3) функцию $\omega_{j+\frac{1}{2}}$. Тогда приходим к следующему уравнению:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - \partial \right) \frac{\partial \Phi}{\partial z} = F, \quad (5.18)$$

при условии, что $\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0$ при $z=0, z=H$,

где

$$\Phi = \gamma \left(c^2 \tau \varphi^{j+\frac{1}{2}} - \int_0^z \omega dz \right).$$

Выделим заранее баротропную компоненту поля $\Phi = \Phi_0(x, y, t)$. Для оставшейся части поля Φ запишем решение с помощью функции источника:

$$\Phi = \int_0^H F(z') G(z, z') dz', \quad (5.19)$$

где ядро $G(z, z')$ определяется формулой (3.66).

Уравнение (5.19) представим в следующей приближенной форме:

$$\Phi^h = G^h F^h, \quad (5.20)$$

где матрица G^h определена так же, как и в уравнении (3.73), а Φ^h и F^h — векторы с компонентами:

$$\Phi_{p-\frac{1}{2}}^h = \frac{1}{\Delta z_{p-\frac{1}{2}}} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \Phi dz;$$

$$F_{p-\frac{1}{2}}^h = \frac{1}{\Delta z_{p-\frac{1}{2}}} \int_{z_{p-1}}^{z_p} F dz.$$

Решение уравнения (5.20) будем искать в виде

$$\Phi^h = \sum_{n=1}^m \Phi_n^h \psi_n^h;$$

$$F^h = \sum_{n=1}^m F_n^h \psi_n^h. \quad (5.21)$$

Подставим выражения (5.21) в уравнение (5.20) и воспользуемся равенством (3.73). Тогда приходим к уравнениям для коэффициентов Фурье:

$$\Phi_n^h = \lambda_n^G F_n^h,$$

или с учетом (5.19) и (5.21)

$$c^2 \tau \varphi_n^{j, + \frac{1}{2}} - \rho_n^j = \lambda_n^G F_n^j, \quad (5.22)$$

где ρ_n^j — вектор с компонентами:

$$\rho_{p_n}^j = \frac{1}{\Delta z_{p-\frac{1}{2}}} \int_{z_{p-1}}^{z_p} dz' \int_0^{z'} \omega^j dz''.$$

Компоненты вектора ρ_n^j могут быть найдены с помощью подходящей квадратурной формулы. В самом деле, интегрируя по частям, соотношения для $\rho_{p_n}^j$ приведем к виду

$$\rho_{p_n}^j = \int_0^{z_p} \omega_n^j dz - \frac{1}{\Delta z_{p-\frac{1}{2}}} \int_{z_{p-1}}^{z_p} (z - z_{p-1}) \omega_n^j dz.$$

Поскольку функцию ω_n^j удобно определить на системе узловых точек z_p , то последнее равенство запишем в виде:

$$\rho_{p_n}^j = \sum_{p'=1}^p \int_{z_{p'-1}}^{z_{p'}} \omega_n^j dz - \int_{z_{p-1}}^{z_p} \frac{z - z_{p-1}}{\Delta z_{p-\frac{1}{2}}} \omega_n^j dz.$$

В пределах каждого из интервалов $[z_{p'-1}, z_{p'}]$ воспользуемся линейной интерполяцией функции ω_n^j :

$$\omega_n^j = \frac{z_{p'} - z}{\Delta z} \omega_{p'-1, n}^j + \frac{z - z_{p'-1}}{\Delta z} \omega_{p', n}^j.$$

Подставляя полученное значение ω_n^j в формулу для $\rho_{p_n}^j$, получим

$$\rho_{p_n}^j = \sum_{p'=1}^p a_{p', p} \omega_n^j p', \quad (5.23)$$

где $a_{p', p}$ — коэффициенты квадратурной формулы.

После того как вектор ρ_n^j определен, можно получить уравнение для $\varphi_n^{j+1/2}$, используя соотношение (5.22). В самом деле, используя соотношение (5.13) для коэффициентов F_{p_n} , получим

$$\left[\lambda_n^A E - \frac{c^2 \tau^2}{1 + \tau^2} \left(\Delta + \tau \frac{\partial}{\partial x} \right) \right] \varphi_n^{j+1/2} = -f_n^j, \quad (5.24)$$

где

$$\lambda_n^A = 1 + \frac{c^2 \tau^2}{|\lambda_n^G|};$$

$$f_n^j = \varphi_n^j - \frac{\tau}{1 + \tau^2} [(u - av)_x^j + (v + au)_y^j] - \frac{\tau}{|\lambda_n^G|} T \omega_n^j.$$

Здесь T — матрица коэффициентов квадратурной формулы (5.23). При выводе уравнения (5.24) был использован тот факт, что спектр λ_n^G состоит только из отрицательных элементов.

Разностный аналог уравнения (5.24) имеет вид

$$(A_{kl} - \lambda_n^A) \varphi_n^{j+1/2} = -f_n^j, \quad (5.24a)$$

где

$$A_{kl} = A_k + A_l.$$

Это уравнение соответствует разностному уравнению (5.16), где оператор A_p заменен соответствующим собственным числом λ_n^A .

Рассмотрим методы решения разностного уравнения (5.16) и проведем соответствующий теоретический анализ схем реализации различных методов. Такое исследование дает указание на выбор эффективного метода решения разностного уравнения (5.16) для целей оперативного расчета прогноза погоды.

Сначала рассмотрим релаксационный метод решения уравнения (5.16) в следующем виде:

$$(E - \tau A_p) \varphi^{i+1} = (E + \tau A_{kl}) \varphi^i + \tau f, \quad (5.25)$$

где $A_{kl} = A_k + A_l$, а τ — произвольный параметр релаксации.

Предположим, что процесс последовательных приближений (5.25) сходится при $i \rightarrow \infty$. Тогда, полагая $i+1 = \infty$, $i = \infty$, легко убеждаемся, что предельный элемент φ^∞ удовлетворяет уравнению (5.16).

Далее сформулируем условие, при котором релаксационный процесс (5.16) сходится. С этой целью на уравнение (5.16) слева подействуем оператором $(E - \tau A_p)^{-1}$. Тогда получим уравнение, разрешенное относительно φ^{i+1} :

$$\varphi^{i+1} = (E - \tau A_p)^{-1} [(E + \tau A_{kl}) \varphi^i + \tau f]. \quad (5.26)$$

В работе С. В. Немчинова [35] показано, что оператор A_p положительно определенный и симметризуемый. Ради простоты анализа в дальнейшем будем полагать $\beta = 0$. В этом случае оператор A_{kl} будет симметричным и положительно определенным.

Рассмотрим следующие спектральные задачи:

$$\begin{aligned} A_p \psi + \lambda^A \psi &= 0; \\ A_p^* \psi^* + \lambda^A \psi^* &= 0; \\ A_{kl} \psi + \nu \psi &= 0. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Заметим, что собственные числа матрицы A_p связаны с собственными числами B_p соотношением

$$\lambda^A = 1 + \tau \lambda^B.$$

Задачи (5.27) определяют вещественные и положительные спектры собственных чисел $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\}$ $\{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_N\}$, где m — число основных уровней в модели атмосферы, а $N+1$ — число внутренних точек в квадрате $L \times L$ в плоскости (xy) . Функцию φ подставим в виде ряда

$$\varphi = \sum_{kln} \varphi_{kln} \psi_n \phi_l, \quad (5.28)$$

где φ_{kln} — коэффициенты ряда Фурье, представляемые системами ортогональных функций ψ_n и биортогональными системами

$$\{\psi_n\} \quad \text{и} \quad \{\psi_n^*\}.$$

Подставим ряд Фурье (5.28) в уравнение (5.24), результат умножим скалярно на $\psi_n^* \rho_{kl}$, и воспользуемся уравнениями (5.27). Тогда будем иметь

$$\varphi_{kln}^{j+1} = \frac{1 - \tau \nu_{kl}}{1 + \tau \lambda_n^A} \varphi^j + \frac{\tau}{1 + \tau \lambda_n^A} f_{kln}. \quad (5.29)$$

Заметим, что выражение для собственных чисел ν_{kl} дается формулой

$$\nu_{kl} = \frac{4c^2 \tau^2}{(1 + \tau^2) h^2} \left(\sin^2 \frac{k\pi}{2} \frac{h}{L_x} + \sin^2 \frac{l\pi}{2} \frac{h}{L_y} \right).$$

Вычислим максимальное и минимальное числа ν_{kl} . Очевидно, имеют место оценки:

$$\nu_{\max} = \frac{8c^2 \tau^2}{(1 + \tau^2) h^2}, \quad \nu_{\min} = \frac{c^2 \pi^2}{L^2} \tau^2.$$

В качестве нормы оператора A_τ примем максимальное собственное число λ_1^A , так как именно оно будет определять скорость сходимости итерационного процесса. Оценка скорости сходимости процесса будет дана выражением

$$q = \frac{1 - \tau \nu_1}{1 + \tau \lambda_1^A},$$

где τ — произвольный параметр. Релаксационный параметр выберем следующим образом:

$$\tau = \frac{1}{\nu_{\max}}.$$

В этом случае

$$q = \frac{1 - \frac{\nu_1}{\nu_{\max}}}{1 + \frac{\lambda_1^A}{\nu_{\max}}}. \quad (5.30)$$

При таком выборе параметра τ мелкие гармоники в (5.26) будут подавляться очень быстро, а решения для крупных возмущений будут итерироваться со скоростью, определяемой знаменателем геометрической прогрессии (5.30). Поскольку

$$\frac{\lambda_1}{\nu_{\max}} \ll 1, \quad \frac{\nu}{\nu_{\max}} \ll 1,$$

сходимость процесса будет очень медленной. Практически знаменатель q имеет значение порядка

$$q \cong 1 - \varepsilon.$$

Следовательно, для достижения требуемой точности расчета необходимо произвести большое число итераций. Конечно, число итераций может быть сокращено за счет применения методов ускорения сходимости. Общее число арифметических операций можно оценить следующим образом:

$$S = \frac{mN\Sigma \ln \varepsilon}{\ln \frac{1 - \frac{\nu_1}{\nu_{\max}}}{1 + \frac{\lambda_1^A}{\nu_{\max}}}}, \quad (5.31)$$

где m — число уровней в модели атмосферы; N — общее число узловых точек на одном уровне; Σ — число арифметических операций в расчете на одну точку; ε — погрешность итерационного метода. Практически для доведения решения до хорошей математической точности требуется обычно произвести около 10 млн. арифметических операций для стандартной постановки задачи о краткосрочном прогнозе на один шаг τ при $m=5$. Во многих схемах прогноза не добиваются хорошей точности в решении задач для поля давления и этим существенно сокращают время счета.

Рассмотрим теперь метод расщепления для решения уравнения (5.16). С этой целью введем в рассмотрение обобщенный релаксационный процесс:

$$\left(E - \frac{\tau}{2} A_p\right) \left(E - \frac{\tau}{2} A_{kl}\right) (\varphi^{i+1} - \varphi^i) = \tau (A\varphi^i + f), \quad (5.32)$$

где

$$A = A_p + A_{kl}, \quad A_{kl} = A_k + A_l.$$

Предположим, что предельный элемент в методе последовательных приближений (5.32) существует. Тогда этот элемент является решением задачи

$$A\varphi^h = -f^h. \quad (5.33)$$

В самом деле, при устремлении i к бесконечности левая часть равенства (5.32) стремится к нулю, следовательно, правая часть равенства также должна быть нулем в пределе при $i \rightarrow \infty$. А это и доказывает высказанное утверждение. Остается показать, что итерационный процесс (5.32) сходится. С этой целью рассмотрим решение в форме (5.28) и подставим его в уравнение (5.32).

Затем умножим скалярно на $\psi_n^* \rho_{kl, l}$. Тогда для отдельной гармоники ряда Фурье будем иметь

$$\begin{aligned} \varphi_{kln}^{i+1} = & \frac{\left(1 - \frac{\tau}{2} \lambda_n^A\right) \left(1 - \frac{\tau}{2} \gamma_{kl}\right)}{\left(1 + \frac{\tau}{2} \lambda_n^A\right) \left(1 + \frac{\tau}{2} \gamma_{kl}\right)} \varphi_{kln}^i + \\ & + \frac{\tau}{\left(1 + \frac{\tau}{2} \lambda_n^A\right) \left(1 + \frac{\tau}{2} \gamma_{kl}\right)} f_{kln}. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Отсюда видно, что метод последовательных приближений сходится при любом выборе параметра τ , причем знаменатель мажорирующей геометрической прогрессии равен

$$q = \frac{\left(1 - \frac{\tau}{2} \lambda_n^A\right) \left(1 - \frac{\tau}{2} \gamma_{kl}\right)}{\left(1 + \frac{\tau}{2} \lambda_n^A\right) \left(1 + \frac{\tau}{2} \gamma_{kl}\right)}. \quad (5.35)$$

До сих пор параметр релаксации предполагается произвольным. Будем последовательно выбирать его из условия

$$\frac{\tau}{2} \lambda_n^A = 1;$$

отсюда следует, что

$$\tau_n = \frac{2}{\lambda_n^A}. \quad (5.36)$$

Выбирая на каждом итерационном шаге τ по формуле (5.36), мы за $n=p_0$ шагов переберем все собственные числа λ_p . Очевидно, выбор параметра релаксации τ_n по формуле (5.36) приводит к обращению в нуль величины q . Это значит, что задача решена за $n=p_0$ шагов.

Рассмотрим теперь схему реализации процесса (5.32) на каждом шаге:

$$\begin{aligned} \left(E - \frac{\tau_l}{2} A_p\right) \Phi^{i+\frac{1}{2}} &= \tau_l F^i; \\ \left(E - \frac{\tau_l}{2} A_{kl}\right) \Phi^{i+1} &= \Phi^{i+\frac{1}{2}}; \\ \varphi^{i+1} &= \varphi^i + \Phi^{i+1}, \end{aligned} \quad (5.37)$$

где

$$F^i = A\varphi^i + f \quad (5.38)$$

— невязка метода последовательных приближений на каждом итерационном шаге. Мы установили, что итерационный про-

цесс (5.37) реализуется p_0 шагами. Однако на каждом таком шаге необходимо производить решение второго из уравнений (5.37). Для решения этого уравнения снова воспользуемся методом расщепления. С этой целью рассмотрим второе из уравнений (5.37) и запишем его в виде

$$\left(E - \frac{\tau}{2} A_{kl}\right) \psi = g. \quad (5.39)$$

Введем в рассмотрение внутренний итерационный процесс:

$$\left[\left(1 + \frac{\Delta\xi}{4}\right)E - \frac{\tau\Delta\xi}{4}A_k\right]\left[\left(1 + \frac{\Delta\xi}{4}\right)E - \frac{\tau\Delta\xi}{4}A_l\right](\psi^{n+1} - \psi^n) = \Delta\xi\left[\left(E - \frac{\tau}{2}A_{kl}\right)\psi^n - g\right]. \quad (5.40)$$

Сходимость этого процесса доказывается аналогично предыдущему.

Если решение уравнения (5.40) искать в виде ряда Фурье

$$\psi = \sum_{kl} \psi_{kl} \psi_{kl}, \quad (5.41)$$

где ψ_{kl} — коэффициенты Фурье, то приходим к равенству

$$\psi_{kl}^{n+1} = \frac{1 - \frac{\Delta\xi}{4}(1 + \tau\nu_k)}{1 + \frac{\Delta\xi}{4}(1 + \tau\nu_k)} \cdot \frac{1 - \frac{\Delta\xi}{4}(1 + \tau\nu_l)}{1 + \frac{\Delta\xi}{4}(1 + \tau\nu_l)} \psi_{kl}^n - \frac{\Delta\xi}{\left[1 + \frac{\Delta\xi}{4}(1 + \tau\nu_k)\right]\left[1 + \frac{\Delta\xi}{4}(1 + \tau\nu_l)\right]} g_{kl}. \quad (5.42)$$

Сходимость итерационного процесса (5.42) зависит от выбора произвольного параметра. Этот параметр следует выбрать так, чтобы минимизировать величину

$$q = \frac{1 - \frac{\Delta\xi}{4}(1 + \tau\nu_k)}{1 + \frac{\Delta\xi}{4}(1 + \tau\nu_k)} \cdot \frac{1 - \frac{\Delta\xi}{4}(1 + \tau\nu_l)}{1 + \frac{\Delta\xi}{4}(1 + \tau\nu_l)}. \quad (5.43)$$

Выберем $\Delta\xi$ из условия

$$\Delta\xi = \frac{4}{1 + \tau\nu_{\max}}, \quad (5.44)$$

где

$$\nu_{\max} = \frac{4}{h^2}.$$

Поскольку $v_{\min} \ll v_{\max}$, то положим $v_{\min} = 0$. В результате выражение для q приближенно имеет вид

$$q = \left(\frac{v_{\max} \tau}{2 + v_{\max} \tau} \right)^2. \quad (5.45)$$

Такой выбор параметра релаксации $\Delta \xi$ предполагает в первую очередь «подавление» высоких частот в решении.

Схема реализации уравнения (5.40) имеет вид

$$\begin{aligned} \left[\left(1 + \frac{\Delta \xi}{4} \right) E - \frac{\tau \Delta \xi}{4} A_k \right] \psi^{n+\frac{1}{2}} &= G^n; \\ \left[\left(1 + \frac{\Delta \xi}{4} \right) E - \frac{\tau \Delta \xi}{4} A_l \right] \psi^{n+1} &= \psi^{n+\frac{1}{2}}; \\ \psi^{n+1} &= \psi^n + \psi^{n+1}, \end{aligned} \quad (5.46)$$

где

$$G^n = \Delta \xi \left[\left(E - \frac{\tau}{2} A_{kl} \right) \psi^n - g \right] \quad (5.47)$$

— невязка релаксационного процесса. Разностные схемы (5.46) реализуются с помощью прогонки.

Для того чтобы организовать процесс решения уравнения (5.32) наиболее рационально, необходимо начать расчет с выбора τ , соответствующего минимальному значению параметра $\lambda_n = \lambda_0$, и в дальнейшем последовательно увеличивать ρ .

В некоторых случаях удобно пользоваться полностью расщепленной схемой решения уравнения (5.33); а именно, рассмотрим итерационный процесс

$$\begin{aligned} \left(E - \frac{\tau}{2} A_p \right) \left(E - \frac{\tau}{2} A_k \right) \left(E - \frac{\tau}{2} A_l \right) (\varphi^{i+1} - \varphi^i) &= \\ &= \tau (A \varphi^i + f). \end{aligned} \quad (5.48)$$

Схема реализации процесса (5.48) особенно проста:

$$\begin{aligned} \left(E - \frac{\tau}{2} A_p \right) \Phi^{i+\frac{1}{3}} &= \tau F^i; \\ \left(E - \frac{\tau}{2} A_k \right) \Phi^{i+\frac{1}{3}} &= \Phi^{i+\frac{1}{3}}; \\ \left(E - \frac{\tau}{2} A_l \right) \Phi^{i+1} &= \Phi^{i+\frac{2}{3}}; \\ \varphi^{i+1} &= \varphi^i + \Phi^{i+1}, \end{aligned} \quad (5.49)$$

где

$$F^i = A\varphi^i + f \quad (5.50)$$

— невязка итерационного процесса.

Выбор оптимального значения параметра τ здесь производится на основе оптимизации

$$\frac{dq}{d\tau} = 0,$$

где

$$q = \frac{\left(1 - \frac{\tau}{2} \lambda_n\right) \left(1 - \frac{\tau}{2} \nu_k\right) \left(1 - \frac{\tau}{2} \nu_l\right) + \tau (\lambda_n + \nu_k + \nu_l)}{\left(1 + \frac{\tau}{2} \lambda_n\right) \left(1 + \frac{\tau}{2} \nu_k\right) \left(1 + \frac{\tau}{2} \nu_l\right)}. \quad (5.51)$$

При этом особое внимание необходимо уделить сходимости процесса при $\lambda_p = \lambda_0$.

Все изложенные выше алгоритмы решения уравнения (5.33) оказываются универсальными и хорошо реализуемыми на ЭВМ. Однако следует заметить, что все они страдают некоторым недостатком, а именно сходимостью всего процесса последовательных приближений, вообще, определяется минимальными собственными числами.

$$\min \lambda_p, \quad \min \nu_k, \quad \min \nu_l.$$

В дальнейшем будет предложен алгоритм, который требует осуществления значительно меньшего числа арифметических действий. Он основан на представлении поля φ по биортогональной системе функции $\{\psi_p\}$ $\{\psi_p^*\}$. С этой целью снова рассмотрим спектральную задачу для матриц A_p :

$$\begin{aligned} A_p \psi + \lambda^A \psi &= 0; \\ A_p^* \psi^* + \lambda^A \psi^* &= 0, \end{aligned} \quad (5.52)$$

где A_p^* — транспонированная матрица A_p .

Введем в рассмотрение скалярное произведение:

$$(\psi, \varphi) = \sum_{n=0}^m \psi_n^* \varphi_n,$$

где ψ_n и φ_n — компоненты векторов ψ и φ соответственно. Будем предполагать, что биортогональные системы векторов ψ_n и ψ_n^* нормированы. Тогда решение уравнения (5.33) будем искать в виде

$$\varphi^h = \sum_{n=0}^m \varphi_n \psi_n, \quad (5.53)$$

где

$$\varphi = (\varphi^h, \varphi_n^*).$$

Подставим ряд (5.53) в уравнение (5.33) и результат скалярно помножим на ψ_n^* . Тогда приходим к системе уравнений для коэффициентов Фурье:

$$A_{kl}\varphi_n - \lambda_n^A \varphi_n = -f_n \quad (5.54)$$

К этому же виду приводится система (5.24а), где λ_n^A — собственные числа задач (5.52).

Решение уравнений (5.54) производим методом расщепления:

$$\begin{aligned} \left[E + \frac{\Delta \xi}{2} \left(\frac{\lambda_n^A}{2} - A_k \right) \right] \left[E + \frac{\Delta \xi}{2} \left(\frac{\lambda_n^A}{2} - A_l \right) \right] (\varphi_n^{l+1} - \varphi_n^l) = \\ = \Delta \xi [(A_{kl} - \lambda_n^A) \varphi_n^l + f_n], \end{aligned} \quad (5.55)$$

где $\Delta \xi$ — параметр релаксации. Наиболее медленная сходимость будет иметь место по-прежнему для случая $\min \lambda_n$, $\min \nu_k$, $\min \nu_l$. Однако существенно новым обстоятельством здесь является то, что нам необходимо теперь решить задачу с плохой сходимостью только для одного коэффициента Фурье φ , соответствующего баротропной составляющей поля, в то время как раньше аналогичное уравнение (5.39) должно было быть решено для всех уровней атмосферы. Естественно, что это не менее чем на порядок экономит число арифметических операций.

Схема реализации для уравнения (5.55) аналогична системе (5.46). Возможен и несколько другой подход, а именно: в соответствии с изложенной схемой производится выделение баротропной составляющей поля φ и для разности $\varphi = \varphi - \varphi_0$ формулируется итерационный процесс (5.48), который теперь будет сходиться весьма быстро, так как медленно сходящаяся часть поля предварительно уже выделена. Поэтому скорость сходимости процесса теперь будет определяться совокупностью чисел:

$$\lambda_1, \min \nu_n, \min \nu_l.$$

§ 6. Схемы решения задачи о прогнозе погоды

В предыдущих параграфах подготовлен математический аппарат решения задачи численного интегрирования уравнений динамики атмосферных процессов. В настоящем параграфе будут рассмотрены общие принципы построения конкретных схем реализации алгоритма. Естественно, что выбор той или

инной схемы расчета диктуется целевым назначением результатов задачи. Например, если требуется найти решение системы прогностических уравнений на срок не более трех-четырех часов, то в этом случае вполне целесообразно воспользоваться разностными уравнениями первого порядка аппроксимации по всем переменным. В качестве такой схемы удобно взять

$$(E + \tau \Lambda_1^{h_1}) (E + \tau \Lambda_2^{h_2}) (E + \tau \Lambda_3^{h_3}) (E + \tau B^{h_4}) \psi^{j+1} = \psi^j. \quad (6.1)$$

Эта схема весьма удобна при реализации, если для операторов $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ принята аппроксимация первого порядка точности, но с учетом направления вектора скорости, а оператор B^h аппроксимирует B с точностью до величин второго порядка по геометрическим переменным. Выше было показано, что схема (6.1) содержит в себе паразитический эффект счетной вязкости, который пропорционален выражению

$$P = \nu \Delta \psi, \quad (6.2)$$

где

$$\nu = \frac{u^2 \Delta t}{2} + |u| h. \quad (6.3)$$

Здесь принято $h = \Delta x = \Delta y$. Это значит, что уравнение (6.1) на самом деле аппроксимирует на интервале Δt уравнение

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \Lambda \psi = \nu \Delta \psi, \quad (6.4)$$

отличающееся от исходного наличием члена с вязкостью. Разумеется, что при $\Delta t \rightarrow 0$ и $h \rightarrow 0$ решение уравнения (6.4) стремится к решению искомого уравнения

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \Lambda \psi = 0. \quad (6.5)$$

Однако в реальных расчетах приходится иметь дело с фиксированными значениями h и Δt . В результате эффект счетной вязкости существенно присутствует в приближенном решении задачи (6.1). Для того чтобы грубо оценить эффект счетной вязкости в уравнении (6.4), положим $\Lambda = 0$ и решение будем искать в виде отдельного гармонического возмущения

$$\psi = \psi_n e^{i \frac{2\pi}{L_n} x},$$

где L_n — период характерного гармонического возмущения. В этом случае уравнение (6.4) перейдет в следующее:

$$\frac{d\psi_n}{dt} + \nu \left(\frac{2\pi}{L_n} \right)^2 \psi_n = 0;$$

решение этого уравнения имеет вид

$$\psi_n(t) = \psi_n(0) e^{-\nu \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 t}.$$

Полагая $t=t_0$ — характерному интервалу времени прогноза, можно оценить изменение поля ψ_n в течение этого времени:

$$\frac{\psi_n(t)}{\psi_n(0)} = e^{-\nu \left(\frac{2\pi}{L_n}\right)^2 t_0}. \quad (6.6)$$

Если теперь принять $t_0=10^4$ сек., $\Delta t=3 \cdot 10^3$ сек., $h=3 \cdot 10^5$ м, $u=10$ м/сек., $L_n=2 \cdot 10^6$ м, то получим

$$\frac{\psi_n(t_0)}{\psi_n(0)} \cong \frac{3}{4}.$$

Разумеется, на самом деле эффект будет несколько иным вследствие нелинейности задачи и возможного перераспределения энергии между гармониками. Однако соотношение (6.6) дает приблизительное указание на характер изменения поля ψ за счет наличия эффекта счетной вязкости.

Если требуется дать прогноз на сутки вперед, то схема (6.1) с аппроксимацией первого порядка точности по всем переменным уже оказывается грубой, поскольку за сутки эффект счетной вязкости уже значительно изменяет решение. Однако можно показать, что если в разностной схеме (6.1) обеспечена аппроксимация всех операторов Λ_i с точностью до величины второго порядка малости по Δx , Δy , Δz , то она может быть с успехом использована для прогноза. В самом деле, в этом случае

$$\nu = \frac{u^2 \Delta t}{2}$$

и соответствующие оценки для $\nu=10^5$ сек. дают

$$\frac{\psi_n(t_0)}{\psi_n(0)} \cong \frac{5}{6}.$$

Такая точность в качественной оценке указывает на возможность использования модифицированной схемы (6.1) в целях прогноза погоды.

Предположим далее, что время прогноза удлиняется до 7—10 суток. В этом случае использование схем со счетной вязкостью оказывается нецелесообразным, поскольку можно ожидать существенного изменения поля ψ за счет вязкости. Здесь следует воспользоваться схемой второго порядка точности по

геометрическим переменным и первого порядка точности по t , где эффект счетной вязкости отсутствует. Такой схемой будет

$$\begin{aligned} & \left(E + \frac{\tau}{2} \Lambda_1^{h_1}\right) \left(E + \frac{\tau}{2} \Lambda_2^{h_2}\right) \left(E + \frac{\tau}{2} \Lambda_3^{h_3}\right) \left(E + \frac{\tau}{2} B^{h_4}\right) \psi^{j+1} = \\ & = \left(E - \frac{\tau}{2} \Lambda_1^{h_1}\right) \left(E - \frac{\tau}{2} \Lambda_2^{h_2}\right) \left(E - \frac{\tau}{2} \Lambda_3^{h_3}\right) \left(E - \frac{\tau}{2} B^{h_4}\right) \psi^j. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Здесь предполагается, что операторы $\Lambda_i^{h_i}$, B^{h_4} аппроксимируют Λ_i , B с точностью до величин второго порядка по Δx , Δy , Δz . Отметим далее, что при реализации схемы (6.7) величины u , v , w , входящие коэффициентами в операторы Λ_i берутся в момент времени t_j . За этот счет мы приходим к схемам первого порядка точности. Если бы эти коэффициенты были постоянными, то легко видеть, что схема (6.7) имела бы второй порядок точности по t . Конечно, второго порядка точности можно добиться с помощью схемы (6.7) при переменных u , v , w , если для вычисления этих коэффициентов на первой половине шага $\frac{\Delta t}{2}$ произвести решение уравнения первого порядка точности по Δt :

$$\left(E + \frac{\Delta t}{2} \Lambda_1^{h_1}\right) \left(E + \frac{\Delta t}{2} \Lambda_2^{h_2}\right) \left(E + \frac{\Delta t}{2} \Lambda_3^{h_3}\right) \left(E + \frac{\Delta t}{2} B^{h_4}\right) \psi^{j+\frac{1}{2}} = \psi^j. \quad (6.8)$$

Однако во многих случаях достаточно ограничиться просто схемой (6.7) с коэффициентами, взятыми при $t = t_j$. По крайней мере такая схема не будет вносить в решение счетной вязкости. Следует отметить, что схема (6.7) устойчива, причем, если u , v , w — постоянные, то анализ Неймана приводит к условию

$$\frac{\|\psi^{j+1}\|}{\|\psi^j\|} = 1.$$

Поскольку мы ограничимся схемами первого порядка точности по t при отсутствии счетной вязкости, то следует пользоваться более устойчивыми схемами. В качестве одной из таких схем можно принять следующую:

$$\begin{aligned} & \left(E + \frac{\tau}{2} \Lambda_1^{h_1}\right) \left(E + \frac{\tau}{2} \Lambda_2^{h_2}\right) \left(E + \frac{\tau}{2} \Lambda_3^{h_3}\right) (E + \tau B^{h_4}) \psi^{j+1} = \\ & = \left(E - \frac{\tau}{2} \Lambda_1^{h_1}\right) \left(E - \frac{\tau}{2} \Lambda_2^{h_2}\right) \left(E - \frac{\tau}{2} \Lambda_3^{h_3}\right) \psi^j. \end{aligned} \quad (6.9)$$

В следующем параграфе будет показано, что схема (6.9) имеет существенное преимущество перед схемой (6.7), поскольку она автоматически осуществляет фильтрацию метеорологически несущественных возмущений.

Переходим теперь к рассмотрению схем прогноза погоды на срок более 10 суток, а также моделей циркуляции атмосферы. Для целей прогноза погоды на длительный срок все рассмотренные выше схемы оказываются неприемлемыми, поскольку они при больших t_0 будут иметь значительную погрешность аппроксимации. Для этой цели необходимо использовать дивергентные схемы.

Введем в рассмотрение следующие определения разностных операторов:

$$\Lambda_1^{h_1} = \sigma_k u \nabla_k, \quad \Lambda_2^{h_1} = \sigma_l v \nabla_l, \quad \Lambda_3^{h_1} = \sigma_p \omega \nabla_p,$$

где односторонние разности берутся в соответствии со знаками функций $\sigma_k u$, $\sigma_l v$ и $\sigma_p \omega$, где операторы σ_k , σ_l и σ_p определяются так:

$$\sigma_k a = \frac{1}{2} (a_{n+1} + a_{n-1}).$$

Далее, пусть

$$\Lambda_1^{h_2} = \sigma_k u \Delta_k, \quad \Lambda_2^{h_2} = \sigma_l v \Delta_l, \quad \Lambda_3^{h_2} = \sigma_p \omega \Delta_p,$$

где символ Δ_k отмечает центральную разность:

$$\Delta_k a = a_{n+1} - a_{n-1}.$$

Рассмотрим теперь совокупность следующих двух схем:

$$\left(E + \frac{\tau}{2} \Lambda_1^{h_1}\right) \left(E + \frac{\tau}{2} \Lambda_2^{h_1}\right) \left(E + \frac{\tau}{2} \Lambda_3^{h_1}\right) \xi^{j+\frac{1}{2}} = \xi^j;$$

$$\xi^{j+1} = \xi^j - \tau (\Lambda^{h_2} \xi)^{j+\frac{1}{2}}. \quad (6.10)$$

После того как найдем вектор ξ^{j+1} , решается уравнение для η :

$$\eta^{j+1} = \eta^j - \tau B^{h_1} \eta^{j+1}, \quad (6.11)$$

где

$$\eta^j = \xi^{j+1}. \quad (6.12)$$

Затем функция ψ^{j+1} находится по формуле

$$\psi^{j+1} = \eta^{j+1}.$$

Нетрудно видеть, что система уравнений (6.10)–(6.12) «почти» дивергентна. В самом деле, на основе введенных выше аппроксимаций и обозначений можно показать, что уравнение (6.12) отличается от соответствующего уравнения, записанного в дивергентной форме,

$$\psi^{j+1} = \psi^j - \tau (\Delta_k u^j + \Delta_l v^j + \Delta_p w^j)^{j, \frac{1}{2}}, \quad (6.13)$$

на величину второго порядка малости по Δx , Δy и Δz .

Выше было показано, что совокупность схем (6.10) и (6.12) устойчива в счетном отношении. Что касается системы уравнений (6.10), (6.13), которая более предпочтительна, поскольку полностью дивергентна, то здесь пока нет доказательства счетной устойчивости совокупности этих схем. По-видимому, проверить устойчивость в этом случае эффективно можно на основе конкретного счета.

В настоящем параграфе не был детализирован способ решения расщепленной системы, поскольку эти вопросы подробно обсуждены в предыдущих параграфах работы.

В заключение необходимо отметить, что использованный в работе термин «счетная вязкость» не полностью и не всегда верно отражает роль эффектов аппроксимации, как простой диссипации энергии, поскольку коэффициент ν в данном случае является либо квадратичной, либо линейной функцией компонент вектора скорости. Поскольку компоненты вектора скорости существенно изменяются и во времени и в пространстве, и, кроме того, постоянно действует нелинейный механизм перераспределения энергии в спектре возмущений, то простая интерпретация этого эффекта крайне затруднительна.

§ 7. Об устойчивости в целом и проблема универсального алгоритма

Для модели расщепления основных уравнений Эйлера в предположении постоянства коэффициентов методом гармонического анализа была показана устойчивость вычислительного алгоритма решения задачи для вектора ξ . Для того чтобы в рамках указанной модели доказать устойчивость алгоритма в целом, необходимо произвести анализ спектра оператора B^h .

Предположим, что решение задачи представлено в виде разложения по биортогональной системе функций $\{\psi_n\}$ и $\{\psi_n^*\}$. Тогда для n -й компоненты ряда Фурье приходим к задаче

$$\frac{\partial \eta_n}{\partial t} + B_n \eta_n = 0, \quad (7.1)$$

где

$$B_{n,p} = \begin{vmatrix} 0 & -l & 0 & 0 & RT \frac{\partial}{\partial x} \\ l & 0 & 0 & 0 & RT \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & -g & RT \\ 0 & 0 & \frac{\gamma a - 1}{T} & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \lambda_n & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Здесь λ_n — собственное число задачи (7.2).

Рассмотрим спектральную задачу

$$B_n \Phi + \mu \Phi = 0, \quad (7.2)$$

где μ — собственное число однородной задачи (7.2). Поскольку нас в основном интересуют гармонические колебания, то для возмущений типа

$$\Phi_{kl} = \Phi e^{i\rho_1 x + i\rho_2 y}$$

спектральная задача переходит в следующую:

$$B_{n,p} \Phi_{n,p} + \mu \Phi_{n,p} = 0, \quad (7.3)$$

где

$$B_{n,p} = \begin{vmatrix} 0 & -l & 0 & 0 & i\rho_1 RT \\ l & 0 & 0 & 0 & i\rho_2 RT \\ 0 & 0 & 0 & -g & RT \\ 0 & 0 & \frac{\gamma a - 1}{T} & 0 & 0 \\ i\rho_1 & i\rho_2 & \lambda_n & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Для определения спектра μ необходимо приравнять нулю определитель системы (7.3), т. е.

$$\det(B_{n,p} + \mu E) = 0. \quad (7.4)$$

В результате приходим к следующему уравнению:

$$\mu \left\{ \left(\mu^2 + \frac{\gamma a - 1}{T} g \right) \left[\frac{1}{RT} (\mu^2 + l^2) + r^2 \right] - (\mu^2 + l^2) \lambda_n \right\} = 0, \quad (7.5)$$

где $r^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2$. Один из корней этого уравнения равен нулю и соответствует стационарному решению. Остальные удовлетворяют уравнению

$$\left(\mu^2 + \frac{\gamma_a - \gamma}{T} g\right) \left[\frac{1}{RT} (\mu^2 + l^2) + r^2\right] + (\mu^2 + l^2) \lambda_n = 0. \quad (7.6)$$

Исследованию уравнения (7.5) посвящено значительное число работ [23, 24 и др.]. Нетрудно убедиться с помощью критерия Гурвица, что уравнение (7.6) имеет только сопряженно мнимые корни. Следовательно, все решения уравнения (7.1) будут иметь колебательный во времени характер. Следует также заметить, что вывод о существовании стационарного решения основан на предположении, что $l = \text{const}$. Если считать $l = \beta y$, то исключением всех компонент в Φ , кроме ϕ , получим характеристическое уравнение вида

$$\mu \left\{ \left(\mu^2 + \frac{\gamma_a - \gamma}{T} g \right) \left[\frac{1}{RT} (\mu^2 + l^2) + r^2 \right] + (\mu^2 + l^2) \lambda_n \right\} - \\ - i\beta \left(\mu^2 + \frac{\gamma_a - \gamma}{T} g \right) \mu = 0. \quad (7.7)$$

Это уравнение уже не имеет стационарного корня. Вместо него здесь появляется корень, соответствующий волнам Россби. Будем предполагать, что решение уравнения (7.1) ищется в виде отдельной гармонической волны. Тогда решение этого уравнения, удовлетворяющее условию $\eta = \eta(0)$ при $t=0$, будет иметь вид

$$\eta_{n,p} = A(t) \eta_{n,p}(0), \quad (7.8)$$

где

$$A(t) = \sum_{\alpha} c_{\alpha} e^{i\lambda_{\alpha} t},$$

а c_{α} — матрицы, коэффициенты которых удовлетворяют условию

$$\sum_{\alpha} c_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta, \\ 0, & \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

Следствием этих условий является

$$\sum_{\alpha} c_{\alpha} = E.$$

Таким образом, пользуясь начальными данными $\eta(0)$, можно получить решение задачи в форме

$$\eta_{n,p} = \sum_{\nu} c_{\nu} \eta_{n,p} (0) e^{i\mu_{\nu} t}. \quad (7.9)$$

Это решение также можно преобразовать к виду

$$\eta_{n,p} = \sum_{\nu} c_{\nu} \eta_{n,p} (t_j) e^{i\mu_{\nu} (t-t_j)}. \quad (7.9a)$$

Здесь μ_{ν} — корни характеристического уравнения (7.7). В дальнейшем мы будем пользоваться обозначениями

$$\mu_1 = \mu_R, \quad \mu_{2,3} = \pm \mu_{3b}, \quad \mu_{4,5} = \pm \mu_{2p}.$$

Причем μ_R в пределе при $\lambda=0$, $RT=\infty$ соответствует классическим волнам Россби. Корни $\mu_{2,3}$ соответствуют при $\lambda_n=0$, $\beta=0$, $l=0$ звуковым волнам, а оставшиеся два корня в пределе соответствуют гравитационным волнам. Оценим порядок величин для μ_R , μ_{3b} и μ_{2p} по крайней мере в асимптотических случаях. Очевидно, они имеют следующий порядок:

$$\begin{aligned} \mu_R &= -\frac{\beta\alpha}{r^2}; \\ \mu_{3b} &= \sqrt{RT}r^2; \\ \mu_{2p} &= \sqrt{\frac{1a-1}{T}}g. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Разумеется, что это лишь предельный случай, который, вообще говоря, не характеризует всего многообразия различных сочетаний параметров. Однако уже эти асимптотические формулы говорят о большом различии в величинах при метеорологически значимых возмущениях порядка $2 \cdot 10^6$ м. Как правило, быстро протекающие процессы связаны с гравитационными и звуковыми волнами. Однако при росте параметра n волны, соответствующие μ_{3b} , оказываются уже медленно меняющимися со временем, сближаясь при этом по порядку величин с волнами Россби.

Для того чтобы описать решение, соответствующее волнам Россби, достаточно взять характерный расчетный интервал времени порядка нескольких часов. В то же время описание звуковых и гравитационных колебаний для всех n требует интервала порядка нескольких минут. Таким образом, общий расчетный интервал казалось бы необходимо взять равным нескольким минутам для того, чтобы получить результат с заданной точностью. Однако существо задачи этого не требует. В са-

мом деле наиболее важными в метеорологическом аспекте являются волны Россби. Что касается волн, условно названных звуковыми и гравитационными, то они являются, по существу, только инструментом для согласования полей, когда происходит некоторая их перестройка. Так, например, если произведено расщепление основной задачи для функции ψ на две задачи — для ξ и η на интервале Δt и сначала ищется решение задачи для ξ , то естественно, что полученное решение не является динамически согласованным. Следовательно, при решении уравнения для η происходит требуемое согласование полей. Если интервал Δt достаточно мал, то рассогласование поля ξ будет малым, если Δt большое, то такое рассогласование будет существенным. Для того чтобы это было ясно, рассмотрим крайний случай, а именно при прогнозе на сутки интервал Δt выберем равным суткам. В этом случае произойдет следующее. При решении уравнения для ξ поле ψ будет существенно рассогласовано. Появятся большие возмущения, которые со скоростями волн Россби, звуковыми и гравитационными начнут распространяться в пространстве (x, y, z) . Если затем будем решать уравнение для η , то убедимся, что некоторая часть возмущений с большими скоростями переместится на многие тысячи километров от места их возникновения и суммарный прогноз окажется неправильным даже в своих грубых чертах. Для того чтобы избежать таких эффектов, обычно производят фильтрацию быстрых волн. Это можно сделать, например, отбросив вторые производные в уравнении (2.26) и оставив только волны Россби. При этом мы получим прогноз существенно лучше, чем предыдущий. В сущности, в этом случае мы приходим к квазигеострофической модели. Таким образом, во всех работах по численному интегрированию уравнений динамики атмосферных процессов исключительное значение придается именно вопросам фильтрации несущественных в метеорологическом аспекте возмущений. К настоящему времени предложено большое число различных приемов, которые позволяют отделять процессы существенные от несущественных. В этом смысле нам, казалось бы, следует заранее отфильтровать по крайней мере гравитационные волны, взяв вместо третьего уравнения Эйлера уравнение статики. Это было бы разумно для целей прогноза погоды, однако такое упрощение, введенное с самого начала, не позволило бы нам применить алгоритм для решения задач, где существенное значение имеют короткие волны. Такие задачи, например, возникают в мезометеорологии.

Весьма заманчивым является разработка такого метода численного решения полной системы, который бы автоматически производил фильтрацию несущественных для данной задачи волновых возмущений. В качестве одного из таких фор-

мальных приемов можно предложить использование оператора m , определенного следующим образом:

$$ma = \frac{1}{2\Delta t} \int_{t_j - \Delta t}^{t_j + \Delta t} a dt. \quad (7.11)$$

Применим оператор m к решению (7.9а). Тогда получим

$$m\tau_{n,p}^j = \sum_{\gamma} c_{\gamma} \tau_{n,p}^{\gamma}(t_j) \frac{\sin \mu_{\gamma} \Delta t}{\mu_{\gamma} \Delta t}. \quad (7.12)$$

Очевидно, если $\mu_{3b} \Delta t \gg 1$ и $\mu_{2p} \Delta t \gg 1$, то в решении (7.12) останутся только возмущения, соответствующие волнам Россби. Если далее сделаем предположение, что

$$m\tau_i^j = \tilde{\tau}_i^j, \quad (7.13)$$

то приходим к естественному алгоритму фильтрации метеорологически несущественных волн.

Важно отметить, что функция $\tilde{\eta}_{n,p}^j$ динамически согласована с полем, поскольку каждая из ее компонент $\eta_{n,p}(t)$ была динамически согласована. Следовательно, фильтрация несущественных возмущений приводит снова к динамически согласованному полю. Возникает теперь вопрос, из каких соображений следует выбирать расчетный интервал Δt . С одной стороны, при большом временном интервале хорошо фильтруются несущественные волны, но, с другой стороны, ухудшается аппроксимация решения задачи для ξ и всей задачи в целом. Такой оптимальный для прогноза интервал должен быть выбран на основе комплексного рассмотрения проблемы с учетом всех ее частей. По-видимому, таким в известном смысле оптимальным вариантом выбора будет $\Delta t = 1$ час.

Заметим, однако, что предложенный алгоритм фильтрации с помощью оператора m требует проведения решения задачи (7.1) на интервале $2\Delta t$ с хорошим приближением. Это значит, что весь интервал $2\Delta t$ следует разбить на большое число подынтервалов τ так, чтобы на каждом из этих интервалов быстро протекающие процессы были описаны достаточно хорошо. Очевидно, такое условие накладывает весьма жесткие требования на τ так, что общий объем вычислений становится очень большим и идея универсальности алгоритма не окупается возрастающим объемом вычислений по сравнению со схемой предварительной фильтрации, выполненной за счет понижения порядка основного уравнения.

Решение вопроса об эффективном построении универсального алгоритма будет дано ниже после рассмотрения спектральной проблемы для разностного аналога уравнения (7.1).

Рассмотрим разностный аналог оператора B_n

$$B_n^{h_2} = \begin{vmatrix} 0 & -l & 0 & 0 & \frac{RT}{2\Delta x} \Delta_k \\ l & 0 & 0 & 0 & \frac{RT}{2\Delta y} \Delta_l \\ 0 & 0 & 0 & -g & RT \\ 0 & 0 & \frac{\gamma_a - \gamma}{T} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\Delta x} \Delta_k & \frac{1}{\Delta y} \Delta_l & \lambda_n & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

и задачу на собственные значения:

$$B_n^{h_2} \Phi^h + \mu^h \Phi^h = 0. \quad (7.14)$$

Решение задачи (7.14) будем искать в виде отдельной гармонической волны

$$\Phi^h = \Phi e^{ik\alpha_1 + il\alpha_2},$$

где α_1 и α_2 — произвольные вещественные числа. Тогда приходим к следующей задаче:

$$B_{n,\rho}^{h_2} \Phi^h + \mu^h \Phi^h = 0, \quad (7.15)$$

где

$$B_{n,\rho}^{h_2} = \begin{vmatrix} 0 & -l & 0 & 0 & i\rho_1 RT \\ l & 0 & 0 & 0 & i\rho_2 RT \\ 0 & 0 & 0 & -g & RT \\ i\rho_1 & i\rho_2 & \lambda_n & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Здесь использованы обозначения

$$\rho_1 = \frac{1}{\Delta x} \sin \alpha_1, \quad \rho_2 = \frac{1}{\Delta y} \sin \alpha_2.$$

Анализ матрицы $B_{n,\rho}^{h_2}$ показывает, что она с точностью до обозначений ρ_1, ρ_2 совпадает с матрицей $B_{n,\rho}$. Это значит, что все выводы о спектре матрицы B остаются в силе и для матрицы $B_{n,\rho}^{h_2}$. Таким образом, мы приходим к утверждению, что спектр задачи (7.15) состоит из пяти чисел $i\mu_j$, где $\mu_1^h = \mu_R^h$, $\mu_{2,3}^h = \pm \mu_{3b}^h$, $\mu_{4,5}^h = \pm \mu_{2p}^h$.

Рассмотрим теперь вопрос об универсальном алгоритме с естественной фильтрацией. Таким алгоритмом решения задачи для функции η будет следующий. Пусть известно значе-

ние η в момент времени t_j . Тогда решение задачи в момент времени t_{j+1} найдем с точностью до величин первого порядка аппроксимации по неявной схеме:

$$\eta^{j+1} = \eta^j - \tau B^{h_2} \eta^{j+1}. \quad (7.16)$$

Найдем формальное решение уравнения (7.16)

$$\eta^{j+1} = (E + \tau B^{h_2})^{-1} \eta^j. \quad (7.17)$$

Если решение уравнения (7.16) искать в виде отдельной гармоники, то получим

$$\eta^{j+1} = \sum_{\nu} c_{\nu}^h \eta_{n,p}^j \frac{1}{1 + i \Delta t \mu_{\nu}^h}. \quad (7.18)$$

Анализ эволюции гармонической волны показывает, что для быстро изменяющихся гравитационных и звуковых волн

$$\tau \mu_{\nu}^h \gg 1, \quad (*)$$

и, следовательно, амплитуда соответствующих волн будет затухать. Можно показать, что явная схема или неявная схема второго порядка точности не будут обладать качеством естественного фильтра. Более того, явная схема будет давать решение

$$\eta^{j+1} = (E - \tau B^{h_2}) \eta^j, \quad (7.19)$$

которое для случая гармонической волны представляется в виде

$$\eta_{n,p}^{j+1} = \sum_{\nu} c_{\nu}^h \eta_{n,p}^j (1 - i \Delta t \mu_{\nu}^h) \quad (7.20)$$

и приводит к неустойчивости при описании процессов, для которых имеет место условие (*). Поэтому схема (7.19) не может быть использована для решения задач при $\Delta t > 10$ мин. Что касается схемы второго порядка точности, то она в разрешенном виде будет представлена равенством

$$\eta^{j+1} = \left(E + \frac{\tau}{2} B^{h_2}\right)^{-1} \left(E - \frac{\tau}{2} B^{h_2}\right) \eta^j, \quad (7.21)$$

или для отдельного гармонического возмущения

$$\eta_{n,p}^{j+1} = \sum_{\nu} c_{\nu}^h \eta_{n,p}^j \frac{1 - i \frac{\Delta t}{2} \mu_{\nu}^h}{1 + i \frac{\Delta t}{2} \mu_{\nu}^h}. \quad (7.22)$$

Эта схема устойчива, поскольку при любых значениях Δt

$$\left| \frac{1 - i \frac{\Delta t}{2} \mu_{\nu}^h}{1 + i \frac{\Delta t}{2} \mu_{\nu}^h} \right| = 1.$$

Однако, она не фильтрует быстротекающие процессы типа гравитационных и звуковых волн, а «собирает» их. При больших интервалах Δt в результате использования схемы (7.19) приходим к эффекту знакопеременной «болтанки» решения, правда, с ограниченной и не растущей со временем амплитудой.

В работах [21], [29]—[31] были использованы именно схемы естественного фильтра. К аналогичным схемам при исследовании простейших уравнений динамики пришли также авторы работ [39], [40].

§ 8. Объективный анализ полей метеорологических элементов

Объективный анализ является важной составной частью прогноза погоды, поскольку роль начальных данных в прогнозе погоды весьма велика. Это значит, что следует стремиться к возможно большей точности в определении начальных полей метеорологических элементов. К настоящему времени известен ряд подходов к решению этой проблемы. Наибольшее распространение получили методы полиномиальной аппроксимации [41], [42] и метод оптимальной интерполяции [43]. Новый оригинальный подход к решению проблемы объективного анализа выдвинул Сасаки [44]. Нам представляется, что именно этот подход может оказаться наиболее эффективным. В дальнейшем мы будем опираться на метод, близкий по своей идее к методу Сасаки.

Главная идея метода состоит в том, чтобы для анализа начальных полей по возможности использовать всю полезную информацию, которой располагает сеть метеорологических наблюдений. Предположим, что в нашем распоряжении имеются следующие элементы:

$$\varphi, \vartheta, u, v.$$

Рассмотрим далее уравнение для φ

$$\left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\gamma_a - \gamma}{T} g \right) \left[\frac{1}{RT} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + l^2 \right) - \Delta \right] - \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + l^2 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{g - \gamma R}{RT} \frac{\partial}{\partial z} \right) \right\} \varphi_t - \beta \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\gamma_a - \gamma}{T} g \right) \varphi_x = 0. \quad (8.1)$$

Предположим, что процесс адаптируется к квазистационарному состоянию мгновенно, т. е. все вторые производные по t можно отбросить. Отбросим также и волны Россби, положив $\beta = 0$. Тогда, проинтегрировав полученное уравнение по t , будем иметь тождество

$$\left[\frac{\gamma_a - \gamma}{T} g \left(\frac{l^2}{RT} - \Delta \right) - l^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{g - \gamma R}{RT} \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] \varphi = f^0, \quad (8.2)$$

где

$$f^0 = \frac{\gamma_a - \gamma}{T} g \frac{l^2}{RT} \left[\left(\varphi^0 + \frac{1}{l} \Omega_g^0 \right) + \frac{1}{g} \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{g - \gamma R}{RT} \right) \right] \vartheta^0. \quad (8.3)$$

Здесь использовано квазигеострофическое и квазистатическое приближение:

$$\Omega_g = -\frac{RT}{l} \Delta \varphi, \quad \vartheta = -RT \varphi_z.$$

Для объективного анализа удобно использовать именно уравнение (8.2). Предположим, что мы имеем независимые измерения φ^0 , ϑ^0 . Тогда уравнение (8.2) позволяет найти поле φ с учетом дополнительной информации ϑ .

Алгоритм будет следующий. Сначала решение уравнения (8.2) ищется с помощью системы биортогональных функций. В результате приходим к уравнениям

$$\left[\frac{\gamma_a - \gamma}{T} g \left(\frac{l^2}{RT} - \Delta \right) + l^2 \lambda_n \right] \varphi_n = f_n^0, \quad (8.4)$$

где

$$f_n^0 = \frac{\gamma_a - \gamma}{T} g \frac{l^2}{RT} \left[\varphi_n^0 + \frac{1}{l} \Omega_n^0 \right] + \frac{l^2}{RT} \lambda_n \vartheta_n^0. \quad (8.5)$$

Функции f_n^0 рассчитываются в каждой точке наблюдения и производится их интерполяция с помощью обычных методов объективного анализа на регулярную сеть. После этого решаются уравнения (8.4) и находится исправленное значение поля геопотенциала.

Естественно, что если бы поле ветра $\mathbf{u}^0$ было известно с хорошей точностью, то при вычислении f^0 как функции от Ω следовало бы его использовать.

После того как исправленное φ на регулярной сети найдено, необходимо рассчитать согласованное с ним поле $\vartheta = -RT \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ и поле ветра $\mathbf{u}^0$.

Для нахождения поля ветра следует использовать систему уравнений

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - lv &= -RT \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + lu &= -RT \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \end{aligned} \quad (8.6)$$

Решение этой системы находится стационарованием с последующим осреднением результата [45]. Алгоритм решения задачи

будет следующий. Стационарной системе уравнений ставим в соответствие систему нестационарную

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - l v &= -RT \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + l u &= -RT \frac{\partial \varphi}{\partial y},\end{aligned}\quad (8.7)$$

где φ предполагается уже известным. Рассмотрим начальные данные:

$$\begin{aligned}u^0 &= -\frac{RT}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \\ v^0 &= \frac{RT}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial x}.\end{aligned}\quad (8.8)$$

Решение системы уравнений (8.7) вместе с начальными данными (8.8) и соответствующими граничными условиями ищем с помощью метода расщепления.

Рассмотрим интервал $t_j \leq t \leq t_{j+1}$. На этом интервале систему (8.7) запишем в виде следующих двух:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_1}{\partial t} + u^j \frac{\partial u_1}{\partial x} + v^j \frac{\partial u_1}{\partial y} &= 0; \\ \frac{\partial v_1}{\partial t} + u^j \frac{\partial v_1}{\partial x} + v^j \frac{\partial v_1}{\partial y} &= 0\end{aligned}\quad (8.9)$$

при условии

$$\begin{aligned}u_1^j &= u^j, \quad v_1^j = v^j; \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} - l v_2 &= -RT \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \\ \frac{\partial v_2}{\partial t} + l u_2 &= -RT \frac{\partial \varphi}{\partial y},\end{aligned}\quad (8.10)$$

если

$$u_2^j = u_1^{j+1}, \quad v_2^j = v_1^{j+1}.$$

Решение u, v при t_{j+1} найдется в виде

$$u^{j+1} = u_2^{j+1}, \quad v^{j+1} = v_2^{j+1}.\quad (8.11)$$

Для того чтобы добиться требуемой точности, следует обеспечить второй порядок точности в решении системы (8.9). С этой целью используем неявные схемы с односторонними разностями с корректировкой точности (см. § 4).

Общее решение однородной системы, соответствующей системе (8.10), представляется суперпозицией гармонических волн вида $e^{\pm i\lambda t}$, которые являются паразитическими в данной задаче.

Разрешим однородную систему, записанную в конечных разностях, относительно u_2^{j+1} и v_2^{j+1}

$$\begin{aligned} u_2^{j+1} &= \frac{1}{1+a^2} (u_2^j + av_2^j); \\ v_2^{j+1} &= \frac{1}{1+a^2} (v_2^j - au_2^j). \end{aligned} \quad (8.12)$$

Решение будем искать в виде

$$u_2^j = \lambda^j; \quad v_2^j = c\lambda^j, \quad (8.13)$$

где c и λ — постоянные.

Подставляя (8.13) в (8.12), получим

$$\lambda = \frac{1 \pm ia}{1+a^2}, \quad (8.14)$$

отсюда

$$|\lambda| = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}. \quad (8.15)$$

Таким образом, приходим к выводу, что начальное возмущение u и v должно затухать как геометрическая прогрессия со знаменателем $q = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$. Это значит, что паразитические колебания будут естественным образом отфильтрованы при решении задачи (8.9), (8.10) с помощью специального определения разностного аналога этой задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кибель И. А. Введение в гидродинамические методы краткосрочного прогноза погоды. Гостехиздат, М., 1957.
2. Юдин М. И. Новые методы и проблемы краткосрочного прогноза погоды. Гидрометеониздат, Л., 1963.
3. Томпсон Ф. Д. Анализ и предсказание погоды численными методами. Изд-во иностр. лит., М., 1962.
4. Phillips N. A. Geostrophic Motion. Rev. of Geoph., 1, 2, 1963.
5. Кибель И. А. Приложение к метеорологии уравнений механики бароклинной жидкости. Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., № 5, 1960.
6. Обухов А. М. К вопросу о геострофическом ветре. Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., № 4, 1949.
7. Charney J. G. A physical basis for numerical prediction of large-scale motions in the atmosphere. J. of Meteorol. Soc., 6, No. 6, 1949.
8. Обухов А. М., Чаплыгина А. С. Изменение барического поля в средней тропосфере. Труды ИФА АН СССР, вып. 2, 1958.

9. Булеев Н. И., Марчук Г. И. О динамике крупномасштабных процессов. Труды ИФА АН СССР, вып. 2, 1958.
10. Hinkelmann K. Zur numerische Wettervorhersage mittels Relaxationsmethode unter Einbeziehung barokliner Effekte. Tellus, 2, No. 5, 1953.
11. Куо Н. L. On quasi-nondivergent prognostic equations and their integration. Tellus, 8, No. 3, 1956.
12. Блинова Е. Н. Метод решения нелинейной задачи об атмосферных движениях планетарного масштаба. ДАН СССР, 110, № 6, 1956.
13. Монин А. С. Изменение давления в бароклинной атмосфере. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 4, 1958.
14. Bolin B. An improved barotropic model and some aspects of using the balance equation for three-dimensional flow. Tellus, 8, No. 1, 1956.
15. Charney J. G. The use of the primitive equations of motions in numerical prediction. Tellus, 7, No. 1, 1955.
16. Eliassen A. A procedure for numerical integration of the primitive equations of the two-parameter model of the atmosphere. Univ. of California. Depart. of Meteorolog. Sci., Rep. 4, 1956.
17. Кибель И. А. Конечно-разностная схема решения полной системы уравнений краткосрочного прогноза погоды и соотношения квази-геострофичности. ДАН СССР, 132, 1, 1960.
18. Булеев Н. И., Марчук Г. И. Некоторые вопросы теории краткосрочного прогноза полей метеорологических элементов. Труды ВНМС, т. 2, 1963.
19. Блинова Е. Н. К гидродинамической теории климата и долгосрочного прогноза погоды. Сб. «Гидродинамический долгосрочный прогноз погоды». Изд-во «Наука», М., 1964.
20. Немчинов С. В., Садоков В. П. Построение устойчивой по начальным данным схемы расчетов для прогноза метеорологических элементов на основе решения полных уравнений термодинамики. Труды ВНМС, т. 2, 1963.
21. Марчук Г. И. Теоретическая модель прогноза погоды малой заблаговременности. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 5, 1964.
22. Марчук Г. И. [и др.]. О решении системы уравнений краткосрочного прогноза погоды. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 12, 1964.
23. Монин А. С., Обухов А. М. Малые колебания атмосферы и адаптация метеорологических полей. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 11, 1958.
24. Диккий Л. А. Об акустических и гравитационных колебаниях атмосферы. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 8, 1959.
25. Smagorinsky J. General circulation experiments with the primitive equations-I. The basic experiment. Monthly Weather Review, 91, No. 3, 1963.
26. Leith C. E. Numerical simulation of the Earth's atmosphere. Methods in computational physics, 14, Academic Press, New York, 1965.
27. Mintz Y. Very long-term global integration of the primitive equations of atmospheric motions. Proceedings of the WMO/IUGG Symposium. Boulder, Colorado, 1964.
28. Winn-Nielsen A. A study of energy conversion and meridional circulation for the large-scale motion in the atmosphere. Monthly Weather Review, 87, No. 9, 1959.
29. Марчук Г. И. Численный алгоритм решения уравнений прогноза погоды. ДАН СССР, 156, № 2, 1964.
30. Марчук Г. И. Численный прогноз погоды на сфере. ДАН СССР, 156, № 4, 1964.
31. Марчук Г. И. Новый подход к численному решению задачи прогноза погоды. Метеорология и гидрология, № 5, 1964.
32. Виленин Н. Я. [и др.] Функциональный анализ. Изд-во «Наука», М., 1964.

33. Обухов А. М. О статистически ортогональных разложениях эмпирических функций. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 3, 1960.
34. Марчук Г. И. Методы расчета ядерных реакторов. Атомиздат, 1961.
35. Немчинов С. В. О решении уравнения для прогноза поля атмосферного давления. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 12, 1959.
36. Немчинов С. В. Исследование решения уравнения для прогноза барического поля атмосферы. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 11, 1960.
37. Гаврилин Б. Л. Об описании вертикальной структуры синоптических процессов. Изв. АН СССР, серия физики атмосферы и океана, 1, № 1, 1965.
38. Годунов С. К., Рябенский В. С. Введение в теорию разностных схем. Физматгиз, М., 1962.
39. Kasahara A. On certain finite-difference methods for fluid dynamics. Monthly Weather Review, 93, No. 1, 1965.
40. Kurihara Y. On the use of implicit and iterative methods for the time integration of the wave equation. Monthly Weather Review, 93, No. 1, 1965.
41. Cressman G. P. An operational objective analysis system. Monthly Weather Review, 87, No. 10, 1959.
42. Быков В. В., Курбаткин Г. П. Опыт объективного анализа аэрологических данных. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 2, 1961.
43. Гандин Л. С. Объективный анализ метеорологических полей. Гидрометсониздат, Л., 1963.
44. Sasaki Y. An objective analysis based on the variational method. Journ. of Meteorol. Soc. of Japan, 36, No. 3, 1958.
45. Марчук Г. И., Темноева Т. А. О методах решения некоторых стационарных задач динамической метеорологии. Труды Симпозиума по общей циркуляции атмосферы, М., 1964.
46. Рунтмайер Р. Д. Разностные методы решения краевых задач. Изд-во иностр. лит., М., 1960.
47. Марчук Г. И. Численные методы в прогнозе погоды. Гидрометеониздат, 1967.

Ф. Д. ТОМПСОН

НЕЭЙЛЕРОВЫ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

ЧАСТЬ А

Вследствие нелинейности даже простейших нетривиальных форм гидродинамических уравнений все методы их решения неизбежно оказываются приближенными. Кроме того, все возможные методы, за исключением тех, которые связаны с использованием специальных аналоговых устройств (например, дифференциального анализатора Буша), являются по существу численными методами, согласно которым дифференциальные и интегральные операторы аппроксимируются алгебраическими операторами, а количество определенных чисел (назовем их данными) является ограниченным. Последнее обусловлено ограниченностью скорости и памяти цифровых вычислительных машин и дискретным представлением в них переменных.

В качестве примера можно упомянуть эйлеровы конечно-разностные схемы, разобранные ранее Г. И. Марчуком. В этом случае любая непрерывная переменная представляется ее значениями в конечном (но большом) числе дискретных точек пространства и в дискретные моменты времени. Таким образом, ясно, что численное интегрирование в пределах конечного периода времени охватывает лишь конечное число данных и требует ограниченного количества операций, которые можно выполнить за ограниченный промежуток времени.

Хотя конечно-разностный метод и дискретно-точечное представление переменных являются естественными, логичными и простыми, это не единственно возможный способ формулировки уравнений для численного решения. Для некоторых исследовательских целей этот метод не всегда оказывается лучшим.

Я собираюсь описать вкратце два различных метода, обеспечивающие в некоторых частных, но нетривиальных случаях точные решения, с которыми можно сравнить приближенные решения.

Представление с помощью ортогональных функций

Начнем с рассмотрения простейшей формы уравнений, с которой приходится иметь дело, а именно с условия сохранения относительного вихря¹

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \zeta = 0,$$

где

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

В горизонтальном бездивергентном потоке

$$\mathbf{V} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad u = -\frac{\partial \psi}{\partial y},$$

поэтому

$$\zeta = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nabla^2 \psi.$$

Таким образом, условие сохранения вихря принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi + \mathbf{K} \cdot \nabla \psi \times \nabla (\nabla^2 \psi) = 0. \quad (1)$$

Предположим далее, что жидкость содержится внутри замкнутой жесткой граничной кривой B , вдоль которой $\psi = \text{const}$ в любой заданный момент времени. Кроме того, поскольку функция тока ψ не является недифференцируемой, можно положить, что $\psi = 0$ на B во все моменты времени.

Суть предлагаемого метода заключается в том, что функция тока ψ во всех точках и в любой момент времени представляется в виде линейной комбинации конечного числа функций, которые ортогональны по отношению друг к другу в области A , ограниченной B , т. е.

$$\psi(x, y, t) = \sum_{i=1}^N A_i(t) \Phi_i(x, y),$$

где функции Φ_i удовлетворяют дифференциальным уравнениям типа

$$\nabla^2 \Phi_i = -\alpha_i^2 \Phi_i,$$

¹ Последующее рассуждение легко обобщается на случай сохранения абсолютного вихря.

при условии, что $\Phi_i=0$ на B , и являются также нормализованными:

$$\int_A \Phi_i^2 dA = 1.$$

Далее будем предполагать, что собственная функция Φ_i , соответствующая любому дискретному собственному значению α_i , является однозначной (за исключением некоторых случаев, это обычно имеет место).

Легко показать, что любые две различные собственные функции Φ_p и Φ_q являются ортогональными, так как

$$\nabla^2 \Phi_p = -\alpha_p^2 \Phi_p,$$

$$\nabla^2 \Phi_q = -\alpha_q^2 \Phi_q.$$

Умножая первое уравнение на Φ_q , а второе — на Φ_p и вычитая второе из первого, видим, что

$$\nabla \cdot (\Phi_q \nabla \Phi_p - \Phi_p \nabla \Phi_q) = -(\alpha_p^2 - \alpha_q^2) \Phi_p \Phi_q.$$

Таким образом, интегрируя по области A и применяя теорему Гаусса, получим

$$\oint_B \left(\Phi_q \frac{\partial \Phi_p}{\partial n} - \Phi_p \frac{\partial \Phi_q}{\partial n} \right) dB = -(\alpha_p^2 - \alpha_q^2) \int_A \Phi_p \Phi_q dA,$$

где производная берется по нормали n к B . Наконец, так как и Φ_p , и Φ_q стремятся к нулю на B , то

$$\int_A \Phi_p \Phi_q dA = 0 \quad (p \neq q).$$

Это является одним из существенных свойств функций Φ . Теперь просто подставим наше приближенное представление ψ в уравнение (1), замечая, что

$$\nabla^2 \psi = \sum_{i=1}^N A_i(t) \nabla^2 \Phi_i(x, y) = - \sum_{i=1}^N A_i(t) \alpha_i^2 \Phi_i(x, y).$$

Условие сохранения вихря тогда примет вид

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \frac{dA_i}{dt} \alpha_i^2 \Phi_i(x, y) = \\ & = \mathbf{K} \cdot \nabla \left[\sum_{i=1}^N A_i(t) \Phi_i(x, y) \right] \times \nabla \left[\sum_{i=1}^N A_i(t) \alpha_i^2 \Phi_i(x, y) \right] \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \frac{dA_i}{dt} \alpha_i^2 \Phi_i(x, y) = \\ & = K \left[\sum_{i=1}^N A_i(t) \nabla \Phi_i(x, y) \right] \times \left[\sum_{i=1}^N A_i(t) \alpha_i^2 \nabla \Phi_i(x, y) \right] = \\ & = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_j^2 A_i(t) A_j(t) K \cdot \nabla \Phi_i(x, y) \times \nabla \Phi_j(x, y). \end{aligned}$$

Таким образом, умножая на Φ_k и интегрируя по области A , получим

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \frac{dA_i}{dt} \alpha_i^2 \int_A \Phi_i(x, y) \Phi_k(x, y) dA = \\ & = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_j^2 A_i(t) A_j(t) \int_A \Phi_k K \cdot \nabla \Phi_i \times \nabla \Phi_j dA. \end{aligned}$$

Так как

$$\int_A \Phi_i \Phi_k dA = 0 \quad \text{для } i \neq k$$

и

$$\int_A \Phi_k^2 dA = 1,$$

то

$$\alpha_k^2 \frac{dA_k}{dt} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_j^2 A_i(t) A_j(t) \int_A \Phi_k K \cdot \nabla \Phi_i \times \nabla \Phi_j dA.$$

Это основное уравнение для определения изменения амплитуд конечного числа колебаний, представляемых ортогональными функциями. Необходимо подчеркнуть, что собственные значения α являются определяемыми постоянными и что интеграл

$$\int_A \Phi_k K \cdot \nabla \Phi_i \times \nabla \Phi_j dA$$

можно определить раз и навсегда как функцию индексов i , j и k . Таким образом, полагая, что k изменяется от 1 до N , можно построить полную систему N обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений для N неизвестных амплитуд A_k .

Конечный этап заключается, очевидно, в конечно-разностной аппроксимации производных по времени от A_k , хотя, по-видимому, можно интегрировать уравнения с помощью аналогового устройства.

Этот метод, очевидно, устраняет (или мог бы устранить) обычный тип ошибок аппроксимации, присущий конечно-разностным методам, однако ясно, что ему свойствен другой тип ошибок аппроксимации, возникающий вследствие ортогонального представления в виде конечного числа членов.

Чтобы показать некоторые преимущества этого метода, рассмотрим очень простую систему, для которой $N=3$. В этом случае основные уравнения сводятся к следующим:

$$\begin{aligned} \alpha_1^2 \frac{dA_1}{dt} &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \alpha_j^2 A_i A_j \int_A \Phi_1 K \cdot \nabla \Phi_i \times \nabla \Phi_j dA; \\ \alpha_2^2 \frac{dA_2}{dt} &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \alpha_j^2 A_i A_j \int_A \Phi_2 K \cdot \nabla \Phi_i \times \nabla \Phi_j dA; \\ \alpha_3^2 \frac{dA_3}{dt} &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \alpha_j^2 A_i A_j \int_A \Phi_3 K \cdot \nabla \Phi_i \times \nabla \Phi_j dA. \end{aligned}$$

Сначала заметим, что интеграл

$$C_{ijk} = \int_A \Phi_k K \cdot \nabla \Phi_i \times \nabla \Phi_j dA$$

стремится к нулю, когда $i=j$. Кроме того, C_{ijk} стремится к нулю, когда $k=i$ или $k=j$. Заметим далее, что

$$C_{ijk} = -C_{jik},$$

и так как функции Φ стремятся к нулю на B , то

$$C_{ijk} = -C_{kji};$$

$$C_{ijk} = -C_{ikj},$$

откуда следует, что

$$C_{ijk} = -C_{jik} = C_{jki} = -C_{kji} = C_{kij}.$$

Если ввести $C = C_{ijk}$, то основные уравнения при $N=3$ примут вид

$$\begin{aligned} \alpha_1^2 \frac{dA_1}{dt} &= C (\alpha_2^2 - \alpha_3^2) A_2 A_3; \\ \alpha_2^2 \frac{dA_2}{dt} &= C (\alpha_3^2 - \alpha_1^2) A_1 A_3; \\ \alpha_3^2 \frac{dA_3}{dt} &= C (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) A_1 A_2. \end{aligned} \quad (2)$$

Очевидно, что это полная система трех уравнений для трех переменных A_1 , A_2 и A_3 .

Интересное свойство этой системы, присущее обычно системам более высокого порядка, заключается в сохранении некоторых интегральных инвариантов исходных дифференциальных уравнений. Например, вследствие уравнения (1)

$$\frac{d}{dt} \int_A \nabla \psi \cdot \nabla \psi dA = 0$$

и

$$\frac{d}{dt} \int_A (\nabla^2 \psi)^2 dA = 0.$$

В ограниченной системе, представленной уравнениями (2),

$$\begin{aligned} \int_A (\nabla^2 \psi)^2 dA &= \sum_{i=1}^N A_i^2 x_i^4 = A_1^2 x_1^4 + A_2^2 x_2^4 + A_3^2 x_3^4, \\ \frac{d}{dt} \int_A (\nabla^2 \psi)^2 dA &= 2 \left[\alpha_1^4 A_1 \frac{dA_1}{dt} + \alpha_2^4 A_2 \frac{dA_2}{dt} + \alpha_3^4 A_3 \frac{dA_3}{dt} \right], \end{aligned}$$

что тождественно равно нулю.

Таким образом, вихревое выражение сохраняется как в общей, так и в ограниченной системах. Доказательство сохранения кинетической энергии ($\alpha_1^2 A_1^2 + \alpha_2^2 A_2^2 + \alpha_3^2 A_3^2$) в ограниченной системе является таким же простым.

Систему уравнений (2) можно свести к одному уравнению всего лишь для одной переменной следующим образом. Из уравнений (2) видим, что

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (A_1^2 + A_2^2 + A_3^2) &= \\ &= 2C \left(\frac{\alpha_2^2 - \alpha_3^2}{\alpha_1^2} + \frac{\alpha_3^2 - \alpha_1^2}{\alpha_2^2} + \frac{\alpha_1^2 - \alpha_2^2}{\alpha_3^2} \right) A_1 A_2 A_3 = 2Ck A_1 A_2 A_3, \\ \frac{d}{dt} (A_1 A_2 A_3) &= C \left(\frac{\alpha_2^2 - \alpha_3^2}{\alpha_1^2} A_2^2 A_3^2 + \frac{\alpha_3^2 - \alpha_1^2}{\alpha_2^2} A_1^2 A_3^2 + \frac{\alpha_1^2 - \alpha_2^2}{\alpha_3^2} A_1^2 A_2^2 \right). \end{aligned}$$

Дифференцируя первое из этих уравнений и подставляя второе, получим

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} (A_1^2 + A_2^2 + A_3^2) &= 2Ck \frac{d}{dt} (A_1 A_2 A_3) = \\ &= 2C^2 k \left[\frac{\alpha_2^2 - \alpha_3^2}{\alpha_1^2} A_2^2 A_3^2 + \frac{\alpha_3^2 - \alpha_1^2}{\alpha_2^2} A_1^2 A_3^2 + \frac{\alpha_1^2 - \alpha_2^2}{\alpha_3^2} A_1^2 A_2^2 \right]. \quad (3) \end{aligned}$$

Теперь можно представить A_1^2 , A_2^2 и A_3^2 в виде линейной комбинации «переменных»

$$\begin{aligned} S &= A_1^2 + A_2^2 + A_3^2, \\ K &= \alpha_1^2 A_1^2 + \alpha_2^2 A_2^2 + \alpha_3^2 A_3^2, \\ V &= \alpha_1^4 A_1^2 + \alpha_2^4 A_2^2 + \alpha_3^4 A_3^2. \end{aligned}$$

Только что было отмечено, однако, что выражения K и V являются инвариантными и постоянными, зависящими только от начальных условий. Таким образом, определяя A_1^2 , A_2^2 , A_3^2 и подставляя их в уравнение (3), можно записать это уравнение в виде

$$\frac{d^2 S}{dt^2} = aS^2 + bS + c, \quad (4)$$

где a , b и c — постоянные, которые зависят от α_1 , α_2 , α_3 , C , K и V .

Уравнению (4) удовлетворяют решения общего уравнения первого порядка

$$\frac{dS}{dt} = f(S),$$

поэтому, в частности, по уравнению (4)

$$\frac{d^2 S}{dt^2} = \frac{df}{dS} \frac{dS}{dt} = f \frac{df}{dS} = aS^2 + bS + c.$$

Функция $f(S)$, следовательно, имеет вид

$$f^2 = \frac{2aS^3}{3} + bS^2 + 2cS + d,$$

где d — постоянная, которую можно задавать произвольно. Таким образом,

$$\frac{dS}{dt} = \left(\frac{2aS^3}{3} + bS^2 + 2cS + d \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Окончательно, вводя фиктивную переменную σ , соответствующую S , найдем, что

$$t = \int_{S_0}^S \left(\frac{2a\sigma^3}{3} + b\sigma^2 + 2c\sigma \right)^{-\frac{1}{2}} d\sigma,$$

где S_0 — значение S при $t=0$. Решение, приведенное выше, связано с эллиптическими интегралами и может быть выражено через табулированные функции.

Значение полученного результата заключается в том, что это точное решение действительно нелинейной системы, с которым можно сравнивать различные приближенные (конечно-разностные) решения уравнений (2).

Метод интегрирования в переменных Лагранжа

Другой способ представления непрерывного поля с помощью конечного числа дискретных переменных заключается в том, что вся жидкость рассматривается как совокупность ограниченного количества соприкасающихся жидких элементов малого, но конечного размера, каждый из которых сохраняет некоторое характерное свойство при перемещении из одного положения в другое. В частности, предположим, что некоторая двумерная область разбита сначала на N квадратных элементов равной площади dA , каждый из которых характеризуется координатами (x_i, y_i) и вихрем ζ_i .

Как и в предыдущем разделе, рассмотрим простой случай сохранения относительного вихря в двумерном бездивергентном потоке. В этом случае

$$u = -\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad \zeta = \nabla^2\psi.$$

Начнем с расчета u и v по распределению ζ . В общем случае

$$\nabla^2\psi = \zeta. \quad (1)$$

Функция тока ψ может быть определена методом Грина. Сначала определим такую функцию G , что

$$\begin{aligned} \nabla^2 G &= 0; \\ G &= G(r), \\ \text{где } r^2 &= (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2; \\ G &= 0 \quad \text{при } r = R. \end{aligned}$$

Легко проверить, что эти условия выполняются для функции

$$G = A \ln \frac{r}{R}.$$

Умножая уравнение (1) на G и пользуясь определением G , находим, что

$$\begin{aligned} G\nabla^2\psi &= G\zeta; \\ \nabla \cdot (G\nabla\psi - \psi\nabla G) + \psi\nabla^2 G &= G\zeta; \\ \nabla \cdot (G\nabla\psi - \psi\nabla G) &= G\zeta. \end{aligned}$$

Интегрируя далее по площади круга A радиусом R с центром в (x, y) , найдем

$$\psi(x, y) \int_0^{2\pi} \left(\frac{dG}{dr} \right)_r d\theta - \int_0^{2\pi} \psi_R \left(\frac{dG}{dr} \right)_R R d\theta = \int_A G(r) \zeta(\xi, \eta) dA$$

или, так как

$$\frac{dG}{dr} = \frac{A}{r};$$

$$\psi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi_R d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_A \ln\left(\frac{r}{R}\right) \zeta(\xi, \eta) dA.$$

В частности,

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_R d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_A \frac{y-\eta}{r^2} \zeta(\xi, \eta) dA;$$

$$v(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v_R d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_A \frac{x-\xi}{r^2} \zeta(\xi, \eta) dA.$$

Если радиус R велик, то

$$u(x, y) \simeq - \frac{1}{2\pi} \int_A \frac{y-\eta}{r^2} \zeta(\xi, \eta) dA;$$

$$v(x, y) \simeq \frac{1}{2\pi} \int_A \frac{x-\xi}{r^2} \zeta(\xi, \eta) dA.$$

Применим теперь приведенные выше формулы к расчету u_n и v_n — составляющих скорости n -го элемента жидкости с координатами (x_n, y_n) . Аппроксимируя интегралы конечными суммами, получим

$$u_n = \frac{dx_n}{dt} = - \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N \frac{y_n - y_i}{(x_n - x_i)^2 + (y_n - y_i)^2} \zeta_i dA_i;$$

$$v_n = \frac{dy_n}{dt} = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N \frac{x_n - x_i}{(x_n - x_i)^2 + (y_n - y_i)^2} \zeta_i dA_i.$$

Можно еще больше упростить эту систему, если заметить, что dA_i и ζ_i (соответствующие каждому элементу жидкости)

являются инвариантными просто вследствие бездивергентности потока и сохранения вихря. Таким образом,

$$\begin{aligned}\frac{dx_n}{dt} &= -\frac{dA}{2\pi} \sum_{i=1}^N \frac{\zeta_i (y_n - y_i)}{(x_n - x_i)^2 + (y_n - y_i)^2}; \\ \frac{dy_n}{dt} &= \frac{dA}{2\pi} \sum_{i=1}^N \frac{\zeta_i (x_n - x_i)}{(x_n - x_i)^2 + (y_n - y_i)^2},\end{aligned}\quad (2)$$

где ζ_i — постоянные, определяемые с помощью начальных условий.

Задавая область изменения n от 1 до N , можно построить замкнутую систему $2N$ обыкновенных дифференциальных уравнений ровно для $2N$ переменных — координат (x_n, y_n) N элементов жидкости. Эта система может быть решена численно, обычным способом, с помощью конечно-разностной аппроксимации производных по времени.

Некоторый интерес представляет случай двух изолированных вихрей, для которых уравнения (2) имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= -\frac{dA}{2\pi} \frac{\zeta_2 (y_1 - y_2)}{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}; \\ \frac{dy_1}{dt} &= \frac{dA}{2\pi} \frac{\zeta_2 (x_1 - x_2)}{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}; \\ \frac{dx_2}{dt} &= \frac{dA}{2\pi} \frac{\zeta_1 (y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}; \\ \frac{dy_2}{dt} &= -\frac{dA}{2\pi} \frac{\zeta_1 (x_2 - x_1)}{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2};\end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} (x_2 - x_1) &= -\frac{dA}{2\pi} \frac{(\zeta_1 + \zeta_2) (y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}; \\ \frac{d}{dt} (y_2 - y_1) &= \frac{dA}{2\pi} \frac{(\zeta_1 + \zeta_2) (x_2 - x_1)}{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.\end{aligned}$$

Умножая первое из этих уравнений на $(x_2 - x_1)$, а второе — на $(y_2 - y_1)$, получим, что

$$\frac{d}{dt} [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2] = 0.$$

Таким образом, поскольку величина $[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]$ является постоянной, зависящей только от начальных условий, то

$$\frac{d(x_2 - x_1)}{dt} = -\frac{dA}{2\pi r_0^2} (\zeta_1 + \zeta_2) (y_2 - y_1);$$

$$\frac{d(y_2 - y_1)}{dt} = \frac{dA}{2\pi r_0^2} (\zeta_1 + \zeta_2) (x_2 - x_1),$$

где r_0^2 — начальное значение $[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]$.

Окончательно, дифференцируя первое из этих уравнений и подставляя второе (или наоборот), получим

$$\frac{d^2}{dt^2} (x_2 - x_1) = - \left[\frac{dA}{2\pi r_0^2} (\zeta_1 + \zeta_2) \right]^2 (x_2 - x_1);$$

$$\frac{d^2}{dt^2} (y_2 - y_1) = - \left[\frac{dA}{2\pi r_0^2} (\zeta_1 + \zeta_2) \right]^2 (y_2 - y_1).$$

В частности, согласно этому решению, два вихря остаются на постоянном расстоянии друг от друга и вращаются относительно друг друга с постоянной скоростью, зависящей от их суммарной интенсивности и направления вращения. Как и ранее, этот точный результат можно использовать для оценки точности конечно-разностных методов.

УРАВНЕНИЯ ДЛЯ СГЛАЖЕННЫХ ПО ВРЕМЕНИ ПЕРЕМЕННЫХ

ЧАСТЬ Б

Основные уравнения сохранения количества движения, массы и энергии приближенно представляются в виде

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla u = f v - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}; \quad (1)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla v = -f u - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}; \quad (2)$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla w = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}; \quad (3)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{V} = 0; \quad (4)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \theta = \frac{\theta}{c_p T} \frac{dq}{dt}; \quad (5)$$

$$\theta = T \left(\frac{p_0}{p} \right)^k \quad \left(k = \frac{R}{c_p} \right); \quad (6)$$

$$p = R_p T. \quad (7)$$

Если величина $\frac{dq}{dt}$ известна или предсказывается, эта система уравнений является полной в том смысле, что имеется ровно столько уравнений, сколько независимых переменных (т. е. u, v, w, p, θ, T и ρ).

Эти уравнения, по-видимому, описывают поведение атмосферы до малейших деталей и могут быть использованы для прогноза будущего состояния атмосферы с такой же точностью, если только и начальное состояние известно во всех деталях.

Практическая трудность, которая никогда не будет преодолена до конца, заключается в том, что состояние атмосферы неизвестно во всех деталях и измеряется лишь в ограниченном числе отдельных пунктов, расположенных на расстоянии десятков и сотен километров друг от друга. (Для простоты предположим, что измерения производятся в пунктах, соответствующих регулярной конечно-разностной сетке.) Заметим, что переменные характеризуются пространственными флуктуациями с масштабами, намного меньшими 10 или 100 км, и с периодами, намного меньшими периодов, соответствующих масштабам в 10 или 100 км. Таким образом, мгновенное значение производной по времени в данный момент $n\Delta t$ может не соответствовать достаточно точно конечно-разностному значению, взятому по интервалу $(n-1)\Delta t$, $(n+1)\Delta t$. Схематически это показано на рис. 1, где сплошная кривая соответствует более или менее характерным мгновенным значениям скорости, температуры, давления и т. д., давая представление о мелкомасштабных флуктуациях малой амплитуды, наложенных на крупномасштабные колебания большой амплитуды. Таким образом, с помощью конечных разностей, взятых по грубой сетке, нельзя аппроксимировать мгновенные или точечные значения производных.

С другой стороны, рассмотрим скользящее сглаживание по времени мгновенных значений величин с периодом сглаживания, большим по сравнению с периодом мелкомасштабных флуктуаций и меньшим, чем период крупномасштабных колебаний. На рис. 1 такое скользящее сглаживание представлено пунктирной кривой.

Теперь мы можем заметить, что разности между данными мгновенных измерений в отдельные моменты времени $(n-1)\Delta t$ и $(n+1)\Delta t$ дают хорошее приближение производных от сглаженных переменных, так как амплитуда мелкомасштабных флуктуаций значительно меньше амплитуды крупномасштабных колебаний. Можно заключить поэтому, что конечно-разностные методы можно применять не к мгновенным значениям величин, а к сглаженным. Теперь остается получить из урав-

лений (1) — (7) новую систему уравнений, зависимые переменные в которых являются сглаженными значениями исходных переменных.

Основное допущение, которое будет принято при последующем дифференцировании, заключается в том, что для достаточно широкой области в промежутке между «большими» и «малыми» масштабами амплитуды флуктуаций должны быть малы по сравнению с амплитудами крупно- и мелкомасштабных флуктуаций. У Пановского, Ван Говена и др. это факти-

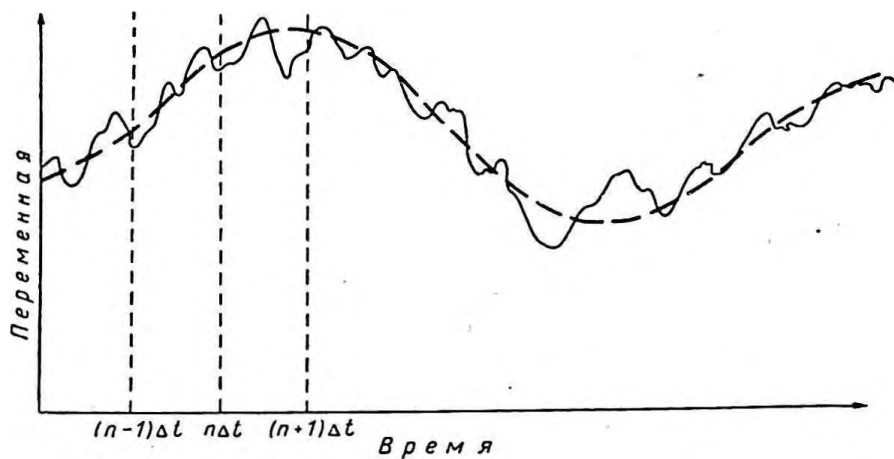


Рис. 1.

чески выполняется. Итак, можно ввести такой период t_0 , чтобы он был длинным по сравнению с периодом мелкомасштабных флуктуаций и коротким по сравнению с периодами крупномасштабных колебаний.

Определим теперь скользящее сглаживание по времени $\bar{\Phi}$ некоторой характерной мгновенной величины Φ :

$$\bar{\Phi}(x, y, z, t) = \frac{1}{2t_0} \int_{t-t_0}^{t+t_0} \Phi(x, y, z, \tau) d\tau,$$

где τ — фиктивная переменная, соответствующая времени t . Основное свойство операции сглаживания заключается в следующем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t} &= \frac{1}{2t_0} \int_{t-t_0}^{t+t_0} \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} d\tau = \frac{1}{2t_0} [\Phi(t+t_0) - \Phi(t-t_0)]; \\ \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2t_0} \int_{t-t_0}^{t+t_0} \Phi(\tau) d\tau \right] = \frac{1}{2t_0} [\Phi(t+t_0) - \Phi(t-t_0)], \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t}.$$

Введем также взвешенное по плотности среднее Φ^*

$$\Phi^* = \frac{\bar{\rho \Phi}}{\bar{\rho}}.$$

Рассмотрим теперь осреднение

$$\bar{\rho \frac{d\Phi}{dt}} = \bar{\rho \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \Phi \right)},$$

или с учетом уравнения (4)

$$\bar{\rho \frac{d\Phi}{dt}} = \bar{\rho \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \Phi \right)} + \overline{\Phi \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{V} \right)} = \frac{\partial}{\partial t} \bar{\rho \Phi} + \nabla \cdot (\bar{\rho \Phi} \mathbf{V}).$$

Таким образом, по определению,

$$\bar{\rho \frac{d\Phi}{dt}} = \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho \Phi}^*) + \nabla \cdot \overline{\rho (\Phi^* + \Phi') (\mathbf{V}^* + \mathbf{V}')}, \quad (5)$$

где штрихом обозначено отклонение от взвешенного по плотности среднего.

Правая часть уравнения (5) содержит осредненные величины типа

$$A = \overline{\rho \Phi^* \psi'}.$$

Так как Φ^* и ψ^* являются по существу постоянными в интервале t_0 , то

$$A \simeq \Phi^* \overline{\rho \psi'} = \Phi^* (\bar{\rho \psi} - \bar{\rho \psi}^*) = \Phi^* (\bar{\rho \psi} - \bar{\rho \psi}^*) \simeq 0.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \bar{\rho \frac{d\Phi}{dt}} &\simeq \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho \Phi}^*) + \nabla \cdot (\bar{\rho \Phi}^* \mathbf{V}^*) + \nabla \cdot \overline{\rho \Phi' \mathbf{V}'} = \\ &= \Phi^* \left(\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{\rho \mathbf{V}} \right) + \bar{\rho} \left(\frac{\partial \Phi^*}{\partial t} + \mathbf{V}^* \cdot \nabla \Phi^* \right) + \nabla \cdot \overline{\rho \Phi' \mathbf{V}'} \end{aligned}$$

Окончательно, осредняя уравнение (4), получим

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{\rho \mathbf{V}} = \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{\rho \mathbf{V}}^* = 0,$$

откуда

$$\bar{\rho \frac{d\Phi}{dt}} = \bar{\rho} \left(\frac{\partial \Phi^*}{\partial t} + \mathbf{V}^* \cdot \nabla \Phi^* \right) + \nabla \cdot \overline{\rho \Phi' \mathbf{V}'}. \quad (6)$$

Это другое важное свойство рассматриваемой операции сглаживания.

Умножим теперь уравнение (1) на ρ и осредним. Согласно уравнению (6),

$$\bar{\rho} \left(\frac{\partial u^*}{\partial t} + \mathbf{V}^* \cdot \nabla u^* \right) + \nabla \cdot \overline{\rho u' \mathbf{V}'} = f \bar{\rho} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x}$$

или, учитывая, что $\bar{\rho} \bar{v} = \bar{\rho} v^*$,

$$\frac{\partial u^*}{\partial t} + \mathbf{V}^* \cdot \nabla u^* + \frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \cdot \overline{\rho u' \mathbf{V}'} = f v^* - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x}. \quad (1a)$$

Два других уравнения движения записываются аналогично

$$\frac{\partial v^*}{\partial t} + \mathbf{V}^* \cdot \nabla v^* + \frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \cdot \overline{\rho v' \mathbf{V}'} = -f u^* - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y}; \quad (2a)$$

$$\frac{\partial w^*}{\partial t} + \mathbf{V}^* \cdot \nabla w^* + \frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \cdot \overline{\rho w' \mathbf{V}'} = -g - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z}. \quad (3a)$$

Уравнение неразрывности принимает вид

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{\rho} \mathbf{V}^* = 0. \quad (4a)$$

Из уравнения (5) заключаем, что

$$\frac{\partial \theta^*}{\partial t} + \mathbf{V}^* \cdot \nabla \theta^* + \frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \cdot \overline{\rho \theta' \mathbf{V}'} = \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\bar{\rho} \theta}{c_p T} \frac{dq}{dt}. \quad (5a)$$

Уравнение (7) можно переписать в виде

$$\bar{p} = R \bar{\rho} T^*. \quad (7a)$$

Уравнение (6) можно объединить с уравнением состояния:

$$\bar{\rho} \theta = \frac{1}{R} \frac{p_0^k}{p^{k-1}}$$

или, так как p — слабо изменяющаяся функция времени ($\overline{p^{1-k}} = \overline{\bar{p}^{1-k}}$),

$$\bar{\rho} \theta^* = \frac{p_0^k}{R} \overline{p^{1-k}};$$

$$\theta^* = T^* p_0^k \frac{\overline{p^{1-k}}}{p} \approx T^* \left(\frac{p_0}{p} \right)^k. \quad (6a)$$

Уравнения (1a)–(7a) являются уравнениями для сглаженных по времени переменных.

Следует отметить, что уравнения (1a) — (7a) совпадают фактически по форме с уравнениями (1) — (7), причем u^* , v^* , ω^* , $\bar{\rho}$, θ^* , $\bar{p}$, и T^* соответствуют u , v , ω , ρ , θ , p и T . Основное различие заключается в появлении членов типа $\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \overline{\rho \Phi' \mathbf{V}'}$, представляющих результирующий перенос Φ вследствие флуктуаций, масштаб которых меньше разрешающего масштаба сетевых наблюдений.

Если результирующий поток тепла и количества движения нельзя связать каким-либо образом со сглаженными переменными, то система уравнений (1a) — (7a) является незамкнутой и будущее состояние атмосферы определить нельзя. Пока не имеется общей теории турбулентности, посредством которой можно связать «турбулентные» потоки со сглаженным сдвигом ветра, сглаженной статической устойчивостью и другими крупномасштабными параметрами, но, по-видимому, такие зависимости существуют, если период сглаженных переменных намного больше периода мелкомасштабных флуктуаций.

ОПЕРАТИВНЫЕ МЕТОДЫ УСТРАНЕНИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ АППРОКСИМАЦИИ

1. Ошибки аппроксимации и их корректировка

Примером характерных дифференциальных форм фильтрованных уравнений метеорологии может служить сильно упрощенное баротропное уравнение

$$\frac{\partial \zeta^2 \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \zeta^2 \psi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \zeta^2 \psi}{\partial x} = 0. \quad (1)$$

Написанное здесь уравнение — третьего порядка и включает в себя первые и третьи производные. Заметим, однако, что каждый член содержит лапласиан, откуда следует, что при переходе к конечно-разностным соотношениям ошибки аппроксимации будут в значительной мере стремиться взаимно компенсироваться. Основное внимание следует поэтому обратить на первые производные и связанные с ними погрешности аппроксимации. Ошибка аппроксимации от конечно-разностного соотношения по времени мала, поскольку шаг по времени сильно ограничен критерием вычислительной устойчивости Куранта-Фридрихса-Левы.

Обратимся к якобиану и рассмотрим ошибку его аппроксимации. Ошибка аппроксимации, связанная с якобианом, должна быть наибольшей прежде всего за счет того, что якобиан есть малая разность больших величин. В случае баротропной модели поля функции тока и вихря близки по фазе. В бароклинных моделях, включающих якобианы от температуры и функции тока, они также стремятся быть в фазе. Если бы они были точно в фазе, оба члена якобиана были бы полностью сбалансированы. Поскольку оператор-якобиан нелинеен, то, когда он рассматривается как единое целое, ошибки его аппроксимации обычно трудно поддаются учету. Лучшее, что мы можем делать, — это корректировать каждый отдельный сомножитель. Проблема, таким образом, сводится к корректировке конечно-разностного аналога первой производной.

Обратимся к рис. 1. Первая строка дана в качестве примера и служит пояснением остальной части рисунка. На рисунке приведены весовые схемы для различных дискретных

операторов, включая конечно-разностные операторы и операторы сглаживания. Весовая схема $(\quad)_x$ обозначает обычное центрированное разностное соотношение для первой производ-

$$\begin{array}{l}
 (\quad)_x \left\{ \begin{array}{ccc} -\frac{1}{2\Delta x} & 0 & +\frac{1}{2\Delta x} \end{array} \right. \quad \text{(Отношение конечных разностей)} \\
 (\tilde{\quad})^{-x} \left\{ \begin{array}{ccc} -\frac{1}{6} & +\frac{4}{3} & -\frac{1}{6} \end{array} \right. \quad \text{(Обратное сглаживание)} \\
 (\tilde{\quad})^x \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{array} \right. \quad \text{(Сглаживание)} \\
 (\tilde{\quad})_x^y \left\{ \begin{array}{ccc} -\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2\Delta x} & 0 & +\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2\Delta x} \\ -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2\Delta x} & 0 & +\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2\Delta x} \\ -\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2\Delta x} & 0 & +\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2\Delta x} \end{array} \right. \\
 (\tilde{\quad})_y^x \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2\Delta x} & \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2\Delta x} & \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2\Delta x} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2\Delta x} & -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2\Delta x} & -\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2\Delta x} \end{array} \right. \\
 (\tilde{\quad})^{-x-y} \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{36} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{36} \\ -\frac{2}{9} & \frac{16}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{1}{36} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{36} \end{array} \right.
 \end{array}$$

Рис. 1. Весовые схемы, расположенные с соблюдением геометрической наглядности для шести дискретных операторов.

Обозначения операторов даны слева от каждой схемы. Три верхних оператора — одномерные, в данном случае в направлении оси x . Три нижних оператора — двумерные по x и y .

ной по x . Заметим, что весовая схема приведена с сохранением геометрической наглядности, так что вес точки, соответствующей наибольшему x , указан справа, вес центральной точки — в середине, а вес наименьшего — слева.

Определения, аналогичные $(\quad)_x$, $(\tilde{\quad})^{-x}$ и $(\tilde{\quad})^x$ справедливы и для операторов по y . Для сохранения геометрической наглядности изображать их следовало бы столбцами, а не рядами. На рис. 1 предполагается, что x возрастает слева направо, а y — снизу вверх. Три двумерных оператора, приведенные в виде весовых схем с соблюдением геометрической структуры, являются комбинациями трех определенных выше операторов и их аналогов по y . Приведенные схемы содержат Δx — расстояние между соседними точками разностной сетки. Предполагается, что расстояние между точками по y такое же, что и по x . Заметим, что употребление более чем одного верхнего индекса придает выражению следующий смысл:

$$(\tilde{\quad})^{-x-y} = [(\tilde{\quad})^{-x}]^{-y}.$$

Пустые круглые или квадратные скобки и т. п. оставлены для любой зависимой переменной.

Для дифференциального уравнения, приведенного в начале статьи, в Национальном метеорологическом центре (НМЦ) применяется следующий конечно-разностный аналог:

$$\zeta_t + \tilde{\psi}_{x,x}^{-x-y+y} \tilde{\zeta}_y^{-x-y+x} - \tilde{\psi}_y^{-x-y+x} \tilde{\zeta}_x^{-x-y+y} = 0, \quad (2)$$

где ζ — конечно-разностный оператор $\nabla^2 \psi$, точная запись которого не представляет здесь интереса. Конструкция этого конечно-разностного оператора рассматривается здесь с двух точек зрения — устранения погрешности аппроксимации и удобства программирования для вычислительной машины.

На рис. 2 изображено искажение за счет разностного оператора первой производной, оператора сглаживания и оператора, обратного сглаживанию (см. рис. 1). Кривая A изображает искажение, вносимое разностным оператором $(\quad)_x$, кривая B — оператором сглаживания $(\tilde{\quad})^x$, кривая C — оператором, обратным сглаживанию $(\tilde{\quad})^{-x}$. Под искажением мы понимаем отношение вычисленного значения к истинному (в одном и том же месте спектра). С помощью конечно-разностного оператора $(\quad)_x$ вычисляется первая производная искомой величины, с помощью оператора сглаживания и оператора, обратного сглаживанию, — сама эта величина, несмотря на то что последняя может быть известна в рассматриваемой точке.

Отношение $L/\Delta x$, откладываемое по оси абсцисс, есть длина волны, измеренная в единицах шага разностной сетки. Кривые A , B , C были получены путем применения дискретных опе-

раторов к функции $\cos(2\pi\Delta x/L)$, причем длина волны L рассматривалась как переменная. Искажение, найденное таким образом, не зависит от фазы и потому относится также к синусоидальной функции и к линейной комбинации синусоидальных и косинусоидальных функций.

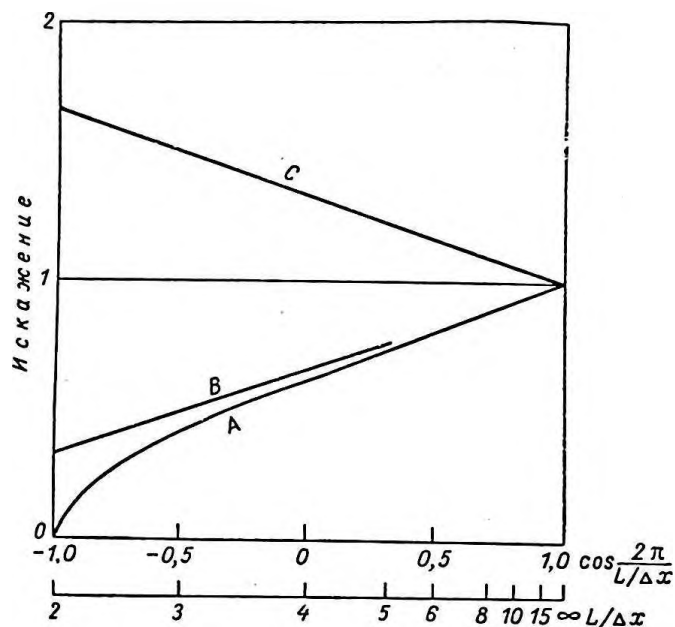


Рис. 2. Кривые искажений, даваемых тремя одномерными операторами рис. 1. Искажения определялись путем применения каждого оператора к функции

$$\begin{pmatrix} \sin \\ \cos \end{pmatrix} \frac{2\pi\Delta x}{L}.$$

Выбор $\cos(2\pi\Delta x/L)$ в качестве независимой переменной был сделан потому, что при этом графики искажений, даваемых простыми трехточечными симметричными операторами сглаживания, такими, как $(\sim)^x$ и $(\sim)^{-x}$, — прямые, пересекающиеся в точке 1,1.

Сетка значений для $L/\Delta x$ добавлена на рис. 2 и 3 потому, что сама длина волны легче поддается интерпретации в свете накопленного нами опыта, чем функция длины волны $\cos(2\pi\Delta x/L)$, которая оказывается переменной, дающей простейший, наименее детализированный график искажений сглаживающих операторов. Следует заметить, что наиболее интересные нас длины волн сосредоточены в самой правой части графиков, где приближенно $L/\Delta x > 10$.

Весьма интересно, что кривые A и B особенно близки друг к другу в правой части рис. 2. Анализ показывает, что B касается A в точке 1,1 (в крайней правой точке графиков) и когда B проходит через точку $0, \frac{2}{3}$ ($L/\Delta x=4$, искажение равно $\frac{2}{3}$), то A проходит через точку $(0, \frac{2}{\pi})$. Так как B — прямая линия, то A — почти прямая при $4 < L/\Delta x < \infty$. Это означает, что при замене производной обычным центрированным конечно-разностным соотношением $(\cdot)_x$ и при использовании сглаживающего оператора $(\tilde{\cdot})^x$ ошибка аппроксимации оказывается почти одинаковой. Это также означает, что процедура, обратная сглаживанию, корректирующая ошибку одного из способов, будет корректировать ошибку и другого способа и в такой же степени. Из того, что кривая A близка к прямой, можно далее заключить, что было бы весьма накладно прокорректировать разностную аппроксимацию первой производной сверх первой корректировки, описанной в настоящей статье.

Если дискретный оператор есть суперпозиция нескольких операторов, даваемое им искажение может быть получено перемножением ординат соответствующих кривых. На рис. 3, где воспроизведены кривые A , B и C рис. 2, кроме того, изображены искажения, даваемые двумя такими операторами $(\tilde{\cdot})_x^x$ и $(\tilde{\cdot})^{x-x}$. Они обозначены $A \times C$ и $B \times C$ соответственно. Как и следовало ожидать, кривые $A \times C$ и $B \times C$, так же как A и B , близки друг к другу при $L/\Delta x > 4$. Следует ясно представлять себе, что в то время как каждый простой оператор содержит только три точки, расположенные симметрично относительно средней, суперпозиция двух простых операторов включает пять точек, симметричных относительно центральной. Что касается двумерных операторов рис. 1, каждый из них использует матрицу из $3 \times 3 = 9$ точек, расположенных симметрично вокруг центральной. Суперпозиция двух таких операторов использует матрицу из $5 \times 5 = 25$ точек, расположенных симметрично вокруг центральной.

Из предыдущего становится понятным наш метод построения конечно-разностного уравнения, приведенного выше. Мы, по-видимому, получили бы такой же порядок учета ошибок аппроксимации, как в уравнении (2), применяя уравнение

$$\zeta_x + \tilde{\psi}_x^{-x} \tilde{\zeta}_y^{-y} - \tilde{\psi}_y^{-y} \tilde{\zeta}_x^{-x} = 0. \quad (3)$$

Существует, однако, веская причина, для того чтобы избежать прямой суперпозиции простых трехточечных операторов

(девятиточечных в двумерном случае) в один большой пятиточечный оператор (двадцатипятиточечный в двумерном случае). Причина состоит в том, что при программировании для таких суперпозиций существует больше классов граничных точек, чем для простых операторов, что ведет к большему числу задач, возникающих перед машинной, и, следовательно, к более громоздкой программе. При анализе поля в случае применения суперпозиции двух операторов машина должна распозна-

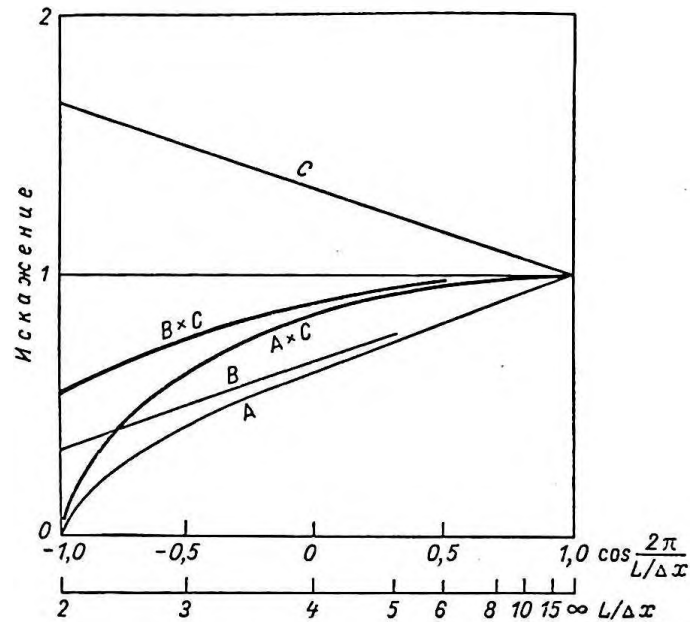


Рис. 3. Кривые $A \times C$ и $B \times C$ изображают соответственно искажения, даваемые суперпозицией конечно-разностного оператора A с оператором, обратным сглаживанию, C и оператора сглаживания B с оператором, обратным сглаживанию, C .

вать, является ли данная точка граничной, смежной с граничной или внутренней (не принадлежащей ни к одному из двух других классов). С другой стороны, при анализе поля в случае употребления простых операторов машина должна определить, является ли данная точка граничной. Желательно поэтому применять эти операторы последовательно: сначала один оператор, а затем к полученному в результате полю — другой оператор. Ввиду линейности операторов окончательный результат не зависит от порядка их применения.

Уравнение (3) приводит к четырем промежуточным полям $\tilde{\psi}^{-x}$, $\tilde{\psi}^{-y}$, $\tilde{\zeta}^{-x}$ и $\tilde{\zeta}^{-y}$. В этом состоит преимущество уравнения (2), так как при его использовании надо вычислять только два

промежуточных поля $\tilde{\psi}^{-x-y}$ и $\tilde{\zeta}^{-x-y}$. Как только эти поля получены, причем ошибки при их вычислении представлены кривой C на рис 2 и 3, применение к ним операторов $(\tilde{})_x^y$ или $(\tilde{})_y^x$ даст уточненное значение соответствующих производных. На практике универсальная подпрограмма в библиотеке стандартных подпрограмм НМЦ сначала образует поля

$$\psi' \equiv \tilde{\psi}^{-x-y}$$

и

$$\zeta' \equiv \tilde{\zeta}^{-x-y},$$

а затем образует поле

$$J \equiv \tilde{\psi}'_x \tilde{\zeta}'_y - \tilde{\psi}'_y \tilde{\zeta}'_x.$$

Можно возразить, что решение уравнения (3) требует меньше вычислений, чем решение уравнения (2), но программирование для вычислительной машины часто сопряжено с компромиссом между эффективностью использования машинной памяти, удобством программирования и экономией машинного времени. Мы находим, что учет всех факторов говорит в пользу уравнения (2) и операций, применяемых в НМЦ при его решении.

2. Контроль ошибок аппроксимации более высокого порядка

Иной подход к устранению погрешностей аппроксимации состоит в использовании усеченных рядов Тэйлора

$$\begin{aligned} f(x) = & f_i + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i (x - x_i) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_i (x - x_i)^2 + \\ & + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_i (x - x_i)^3 + \frac{1}{4!} \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\right)_i (x - x_i)^4 + \dots \end{aligned}$$

Предположим, что нам известны значения $f(x)$ в последовательности точек, расположенных на равных расстояниях друг от друга по x . Занумеруем эти точки в порядке возрастания x (0 1, 2, ..., $i-2$, $i-1$, i , $i+1$, $i+2$, ...). Возьмем теперь точку x_i . Рассмотрим одновременно две соседние точки. Ряды Тэйлора, оборванные на квадратичном члене, могут быть точно сведены к значениям f в трех точках. Формально можно записать оборванный ряд трижды с тремя парами известных

- величин $(f_{i-1}, x_{i-1}; f_i, x_i; f_{i+1}, x_{i+1})$ и затем решить совместно три уравнения с тремя неизвестными

$$f_i, \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i, \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_i$$

Здесь f_i сначала рассматривается как известное, а затем как неизвестное. Это просто означает, что одно из уравнений сводится к тождеству $f_i \equiv f_i$. В нашей формальной схеме f_i слева известно, а справа формально неизвестно. Мы делаем это для простоты схемы.

В случае $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i$ решение оказывается центрированным разностным отношением f_x . Если с целью уточнения этого соотношения мы учтем также и квадратичные члены в рядах Тэйлора, мы должны будем записать эти удлиненные ряды пять раз, включив еще две пары известных величин f_{i-2}, x_{i-2} и f_{i+2}, x_{i+2} . Совместное решение этих пяти уравнений даст нам для $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i$ в точности $\tilde{f}_x^{-x}$. Оба подхода приводят, таким образом, к одному и тому же результату.

Мы можем теперь рассмотреть корректировку высшего порядка, добавляя в ряды по два члена и добавляя по паре точек из последовательности. Если последний учтенный член ряда имеет вид

$$\frac{1}{(2n)!} \left(\frac{\partial^{2n} f}{\partial x^{2n}}\right)_i (x - x_i)^{2n},$$

то наиболее удаленной от центральной i -той точки должна быть пара $i-n, i+n$. Желая однажды получить аппроксимацию для первой производной с точностью до пятого порядка ($n=5$), мы решили для этого задачу нахождения весов различных точек в общем случае. Заметим, кстати, что численные эксперименты подтверждают высказанное нами ранее положение о том, что очень неэкономно получить значительную корректировку сверх $\tilde{f}_x^{-x}$ ($n=2$). При $n=3$ улучшение было едва заметным. Переход к $n=4$ и $n=5$ не дал никакого заметного улучшения.

Решение задачи о весах различных точек в случае произвольного n , возможно, представляет для кого-нибудь интерес. Рассмотрим последовательность учитываемых в этом случае точек

$$\begin{aligned} i-n, i-n+1, \dots, i-m, \dots, i-1, i, \\ i+1, \dots, i+m, \dots, i+n-1, i+n. \end{aligned}$$

В выражении для первой производной вес точки $i+m$ для $0 < m \leq n$ равен

$$W_{i+m,n} = \frac{(-1)^{m+1}}{m\Delta x} \times \frac{n!}{(n-m)!} \frac{n!}{(n+m)!}$$

и, конечно,

$$W_{i-m,n} = -W_{i+m,n},$$

а также

$$W_{i,n} = 0.$$

3. Результаты

На рис. 4 приведен пример, свидетельствующий об эффективности, которую может дать учет погрешностей аппроксимации. Прерывистые кривые на рис. 4 в соответствуют 24-часовому прогнозу, сделанному с использованием разностного аналога обычного якобиана

$$J(\psi, \zeta) = \psi_x \zeta_v - \psi_v \zeta_x.$$

Сплошные кривые соответствуют прогнозу с использованием якобиана, входящего в уравнение (2).

В случае больших масштабов погрешности аппроксимации малы и, как

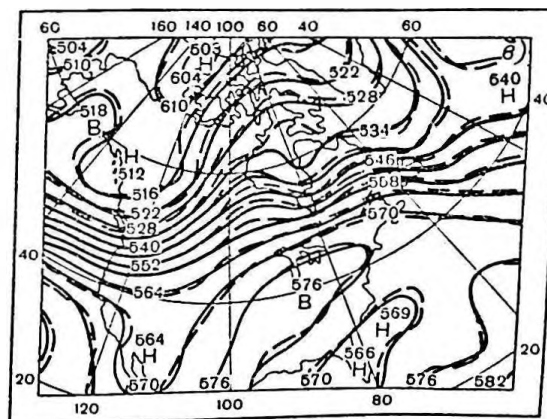
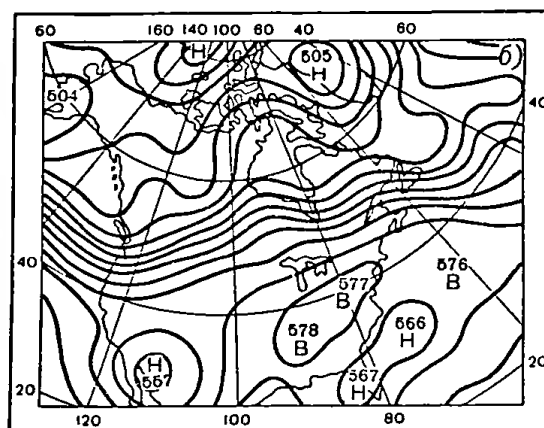
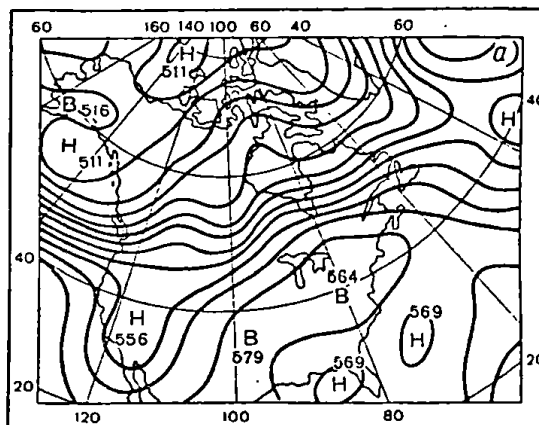


Рис. 4. Пример численного прогноза с учетом погрешностей аппроксимации и без него:

а и б — карты начального и будущего полей АТ₂₀₀; в — численный прогноз на 24 часа без учета погрешностей аппроксимации (прерывистые кривые) и с учетом (сплошные кривые).

ожидалось, их устранение не дает существенного улучшения. Наиболее заметно улучшение прогноза в ряде мелких ложбин и гребней в Канаде. При сравнении с фактической картой обнаружено, что при использовании новой аппроксимации якобнана смещение на восток гребней западнее Гудзонова залива и на Лабрадорском полуострове, а также ложбин на восточном берегу Гудзонова залива и вблизи побережья Ньюфаундленда предсказывалось точнее, чем по схеме со старой аппроксимацией якобнана.

Контроль погрешностей аппроксимации был введен в оперативную работу в НМЦ с 15 сентября 1963 г. При изучении 55 первых 36-часовых прогнозов с учетом погрешностей аппроксимации не было обнаружено никаких ошибок в перемещении ложбин внутри струйных течений. Из 136 примеров в 32 смещение было слишком быстрым, в 31 случае смещение было слишком медленным, в 73 случаях расположение ложбин было верным с точностью до двух градусов широты.

4. Заключительные замечания

Учет ошибок аппроксимации стал давать особенно заметные результаты в оперативных прогнозах НМЦ со времени внедрения трехуровневой бароклинной модели в 1962 г. Это может служить примером неожиданностей, к которым иногда приводят исследования. Программа исследований была случайной и очень недорогой как в отношении людских ресурсов, так и машинного времени.

Это говорит о том, что результаты исследований поистине непредсказуемы.

ЧИСЛЕННОЕ ПРЕДСКАЗАНИЕ ПОГОДЫ С ПОМОЩЬЮ БАРОТРОПНОЙ МОДЕЛИ

1. Введение

Основной принцип, лежащий в основе баротропной модели прогноза, — принцип сохранения абсолютного вихря скорости — впервые был сформулирован в классической работе Россби [28]. Поскольку вертикальный масштаб в атмосфере примерно на два порядка превосходит по величине масштаб интересующих нас барических систем, то можно было надеяться получить сравнительно приемлемые результаты уже в рамках двумерной модели. Очевидно, однако, что это предположение исключает возможность учета различных превращений энергии, имеющих место в реальной атмосфере.

В рамках двумерной модели суммарная кинетическая энергия является постоянной величиной, и мы можем прогнозировать только лишь перераспределение кинетической энергии. Однако это не во всех случаях оказывается существенным ограничением и упрощением. Действительно, бароклинное развитие в атмосфере обычно захватывает лишь небольшие области, а кинетическая энергия, образующаяся в течение одного-двух дней, обычно мала по сравнению с полным запасом энергии.

При выборе того уровня, который должен наилучшим образом отражать состояние всей атмосферы, мы почти интуитивно останавливаемся на уровне 500 мб, который в общем делит атмосферу на два слоя, равных по массе. В 1949 г. Чарни дал рациональное объяснение выбора этого уровня в качестве эквивалентно-баротропного.

Первые численные баротропные прогнозы были рассчитаны Чарни, Фьертофтом и Нейманом [13]. С тех пор параллельно с работами по созданию более точных моделей, учитывающих трехмерную структуру атмосферы, значительные усилия были направлены также на различные уточнения в рамках баротропной модели. Было введено уравнение баланса, которое дает более точное соотношение между полями давления и ветра по

сравнению с геострофическим приближением. Учет крупномасштабной дивергенции позволил уменьшить ошибки, связанные с фиктивным перемещением на запад длинных волн.

Можно сказать, что создание более совершенных прогностических моделей совершается в двух направлениях. Наиболее распространенный подход к этой задаче первоначально был связан с использованием фильтрованных уравнений. В этой системе уравнений акустические и гравитационные волны удалены из уравнения вихря благодаря использованию гидростатического соотношения и уравнения баланса. Большая часть применяемых ныне оперативных прогностических моделей — баротропных и бароклинных — принадлежит именно к этому типу.

Другой подход к созданию прогностических моделей предполагает возврат к исходным (примитивным) уравнениям гидродинамики, видоизмененным лишь только предположением о гидростатическом балансе. Главная трудность этого метода состоит в том, что подобные уравнения оказываются весьма чувствительными к начальным полям ветра и давления. За последние годы были приложены большие усилия к решению подобных задач, и полученные к настоящему времени на этом пути результаты оказались многообещающими.

Здесь мы ограничимся рассмотрением только лишь фильтрованных уравнений.

2. Эквивалентно-баротропная модель

Основное предположение, лежащее в основе эквивалентно-баротропной модели, состоит в том, что ветер в крупномасштабных системах мало изменяет свое направление с высотой (вне тонкого приземного слоя) и скорость ветра с высотой изменяется одинаковым образом вдоль каждой вертикали. Как показал Чарни, при таком ограничении, наложенном на бароклинную атмосферу, движение на некотором уровне в атмосфере соответствует движению в эквивалентно-баротропной атмосфере. Поэтому такой уровень называют эквивалентно-баротропным.

В приводимом здесь выводе мы следуем Чарни [12]. Другой вариант можно найти в книге Ф. Д. Томпсона о численных методах прогноза [32].

Уравнение вихря и уравнение неразрывности в переменных x, y, p имеют вид

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla (\zeta + f) + \omega \frac{\partial \zeta}{\partial p} = - (f + \zeta) \operatorname{div} \mathbf{V} + \mathbf{k} \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial p} \times \nabla \omega; \quad (2.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{V} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0, \quad (2.2)$$

где ζ — относительный вихрь; $\mathbf{V}$ — вектор горизонтальной части скорости с компонентами u и v ; ω — вертикальная скорость в p -системе; ∇ — горизонтальный оператор градиента; $\mathbf{k}$ — единичный вектор в вертикальном направлении; $f = 2\Omega \sin \varphi$ — параметр Корнолиса.

Анализ порядков величин показал, что в случае крупномасштабных движений вклады адвекции вихря в вертикальном направлении, а также членов, учитывающих вращение вихревых трубок и зависящую от относительного вихря часть вклада дивергенции, являются относительно малыми. Более того, как показали Арнассон и Кэрстенсен [5], два члена

$$\omega \frac{\partial \zeta}{\partial p} \quad \text{и} \quad \mathbf{k} \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial p} \times \nabla \omega$$

обычно бывают одного и того же знака. Поэтому сохранение в расчетах одного из них при пренебрежении другим приводит к фиктивному формированию (или исчезновению) вихря.

Ввиду названных причин при выводе уравнения для эквивалентно-баротропной модели упомянутыми тремя членами обычно пренебрегают. Однако, как будет видно из дальнейшего, необходимость в предположении о малости вкладов этих членов отпадает, коль скоро мы принимаем условие обращения в нуль вертикальной скорости в p -системе на верхней границе атмосферы и у поверхности земли. В этом случае указанные члены обращаются в нуль в соответствии с нашим основным исходным предположением относительно изменения горизонтальной составляющей скорости ветра с высотой, которое может быть выражено так:

$$\mathbf{V}(x, y, p, t) = A(p) \bar{\mathbf{V}}(x, y, t), \quad (2.3)$$

где $A(p)$ — некоторая функция, определяемая эмпирически.

Соответственно для относительного вихря получаем отсюда:

$$\zeta(x, y, p, t) = A(p) \bar{\zeta}(x, y, t). \quad (2.4)$$

Черта сверху обозначает осреднение путем интегрирования по переменной p соответствующей функции по всей толщине атмосферы (от верхней границы атмосферы до уровня моря)

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{p_0} \int_0^{p_0} \alpha dp, \quad (2.5)$$

где p_0 — давление на уровне моря; α — произвольная величина.

Применяя этот оператор к (2.3), получаем

$$\bar{\mathbf{V}} = \bar{A} \bar{\mathbf{V}} \quad \text{или} \quad \bar{A} = 1. \quad (2.6)$$

С учетом этого после подстановки выражения для скорости ветра (2.3) в уравнение вихря (2.1) и в уравнение неразрывности (2.2), получим

$$A \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial t} + A^2 \bar{\mathbf{V}} \cdot \nabla \bar{\zeta} + A \bar{\mathbf{V}} \cdot \nabla f + \frac{dA}{dp} \bar{\omega} =$$

$$= -A(A\bar{\zeta} + f) \operatorname{div} \bar{\mathbf{V}} + \frac{dA}{dp} \mathbf{k} \cdot \bar{\mathbf{V}} \times \nabla \omega; \quad (2.7)$$

$$A \operatorname{div} \bar{\mathbf{V}} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0. \quad (2.8)$$

Осредним теперь эти уравнения путем интегрирования по переменной p .

С учетом того, что, по (2.6), $\bar{A} = 1$ для уравнения неразрывности (2.8) получим

$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{V}} = -[\omega]_{p=0}^{p=p_0}.$$

Таким образом, вспоминая указанные выше краевые условия

$$\omega = 0 \quad \text{при} \quad \begin{cases} p = 0, \\ p = p_0, \end{cases} \quad (2.9)$$

находим

$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{V}} = 0.$$

Теперь мы можем на основании уравнения неразрывности (2.8) заключить, что при наших краевых условиях вертикальная скорость в p -системе ω должна быть равна нулю на всех уровнях (при всех значениях p).

Но тогда уравнение переноса вихря (2.7) может быть переписано в виде

$$A \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial t} + A^2 \bar{\mathbf{V}} \cdot \nabla \bar{\zeta} + A \bar{\mathbf{V}} \cdot \nabla f = 0. \quad (2.10)$$

После интегрирования по переменной p , получаем с учетом (2.6)

$$\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial t} + \bar{A}^2 \bar{\mathbf{V}} \cdot \nabla \bar{\zeta} + \bar{\mathbf{V}} \cdot \nabla f = 0. \quad (2.11)$$

Теперь мы должны найти тот уровень $p = p^*$, на котором

$$\bar{A}^2 = A \quad (2.12)$$

(см. рис. 1).

Очевидно, что для этого конкретного уровня p^* , где $\bar{A}^2 = A(p^*)$, уравнение вихря запишется так:

$$\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial t} + A(p^*) \bar{\mathbf{V}} \cdot \nabla \bar{\zeta} + \bar{\mathbf{V}} \cdot \nabla f = 0. \quad (2.13)$$

Умножая это на $A(p^*)$ и учитывая, что

$$V(x, y, p, t) = A(p^*) \bar{V}(x, y, t); \quad (2.14)$$

$$\zeta(x, y, p, t) = A(p^*) \bar{\zeta}(x, y, t), \quad (2.15)$$

мы можем записать (2.13) в виде

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + V \cdot \nabla \zeta + V \cdot \nabla f = 0 \quad (2.16)$$

или

$$\frac{D}{Dt}(\zeta + f) = 0. \quad (2.17)$$

Итак, мы нашли, что уравнение вихря в такой простой форме, выражающее сохранение абсолютного вихря скорости, справедливо для уровней $p = p^*$. Эти два уровня называются эквивалентно-баротропными.

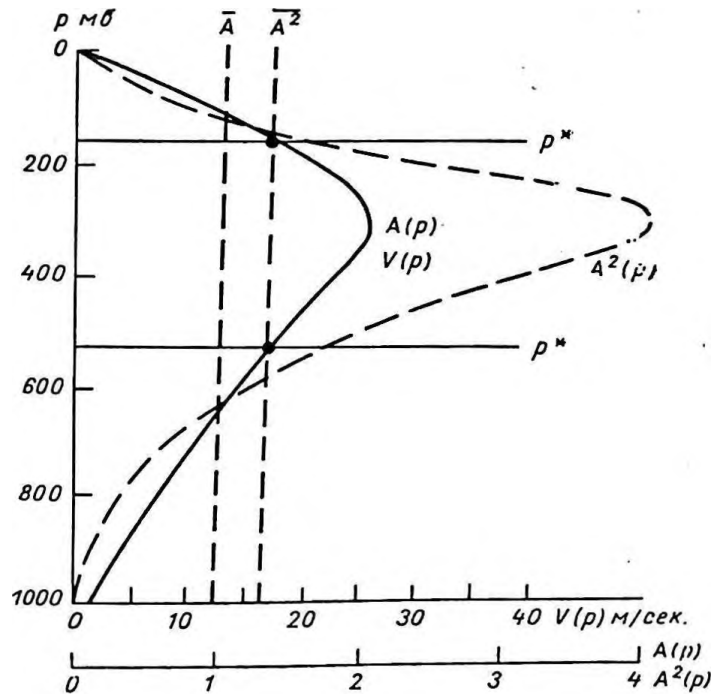


Рис. 1. К графическому определению эквивалентно-баротропного уровня p^* .

Заметим, что с точки зрения гидродинамики эквивалентно-баротропная модель атмосферы соответствует однородной несжимаемой жидкости, ограниченной сверху и снизу двумя твердыми пластинами.

Согласно Чарни [12], нижний эквивалентно-баротропный уровень находится между 500 и 600 мб. Из практических соображений таким уровнем выбирается уровень 500 мб, так как данные по этой поверхности содержатся непосредственно в аэрологических телеграммах.

Используя данные за 7-дневный период в зимнее полугодие, Таба [31] изучал изменение высоты эквивалентно-баротропного уровня по горизонтали. Некоторые полученные им результаты даны на рис. 2.

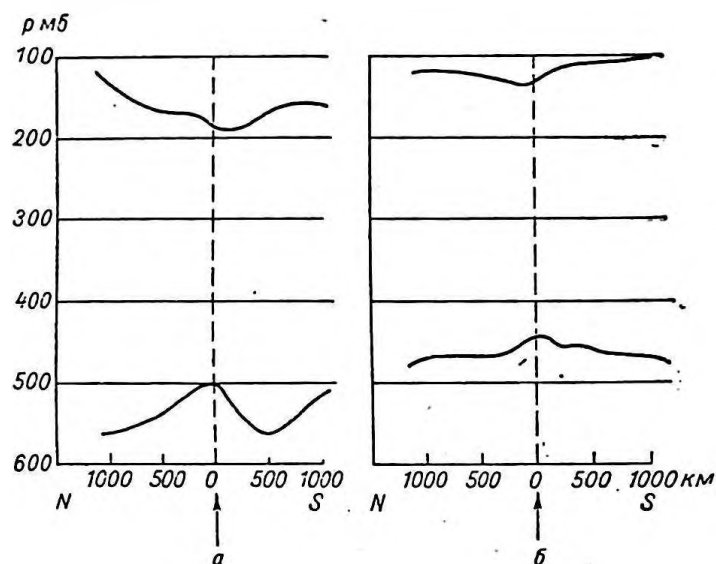


Рис. 2. Изменение высоты двух эквивалентно-баротропных уровней вблизи полярного (а) и субтропического (б) струйных течений.

В то время, когда рассчитывались первые баротропные прогнозы, имелись лишь вычислительные машины с ограниченными возможностями. Поэтому приходилось использовать малую область прогноза (содержащую лишь несколько сотен точек сетки) с границами, проходящими по метеорологически активным районам. Поэтому можно было ожидать, что расширение области прогноза приведет к снижению ошибок. Однако вместо этого возникли поля ошибок других масштабов. Они имели очень большую длину волны и смешались на запад в течение срока прогноза (Вольф, 1959). Становилось ясно, что бездивергентная баротропная модель непригодна для описания наиболее длинных волн в атмосфере. Вольф предложил эмпирический способ автоматической корректировки этих прогнозов. Он состоит в принудительной стабилизации волн большого

масштаба (масштаба полусферы) с номерами 1, 2 и 3. Так как такие волны квазистационарны, то этот метод оказался успешным. Но все же этот метод нельзя считать удовлетворительным, так как он не расширяет наши представления о физических процессах, совершающихся в реальной атмосфере.

Несомненно, что формирование этих волн связано с действием таких географических факторов, как расположение горных массивов и распределение температуры на уровне моря. Однако, как показал Крессмен [15], поведение таких волн, раз уж они возникли, может изучаться независимо от вопроса об их формировании.

Уже Россби [28] отмечал, что применение уравнения вихря к бездивергентной атмосфере не дает надлежащего объяснения взаимного приспособления полей давления и ветра. Поэтому в соответствии с идеями Россби [26—28] исследовалась дивергентная баротропная модель атмосферы.

3. Дивергентная баротропная модель

Рассмотрим две однородные несжимаемые жидкости между двумя твердыми пластинами при $Z=0$ и $Z=H$ (рис. 3). Плотность верхнего слоя ρ' меньше плотности нижнего слоя ρ , так что система статически устойчива. Пусть верхний слой неподвижен, а скорость в нижнем слое не зависит от высоты. Поверхность раздела h между двумя слоями жидкости может смещаться вверх и вниз. Однако эти вертикальные скорости считаются малыми, так что вызываемое ими движение в верхнем слое можно было бы не учитывать.

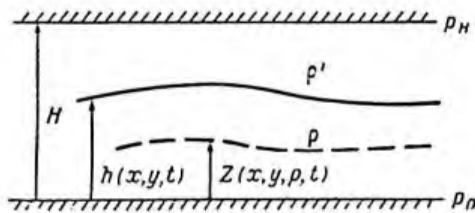


Рис. 3. Схематический вертикальный разрез дивергентной баротропной модели.

Кроме того, мы пренебрегаем вертикальными ускорениями. Тогда условие равновесия сил, действующих по вертикали, может быть выражено с помощью уравнения статики. Давление p_H на верхней границе верхнего слоя может и не удовлетворять соотношению статики в том смысле, что оно уравновешивается весом столба вышележащего воздуха. Вместо этого давление p_H следует рассматривать как давление, возникающее в результате взаимодействия между жидкостью и твердой стенкой на высоте $z=H$. Если p_0 — давление у нижней стенки, то с помощью уравнения статики имеем

$$p_0 = gh_0 + g(H-h)\rho' + p_H. \quad (3.1)$$

В общем случае давление p_H есть, несомненно, функция от x , y и t . Однако в соответствии с нашим допущением относительно движения в верхнем слое мы можем считать, что $p_H = \text{const}$.

Теперь рассмотрим некоторую изобарическую поверхность $Z(x, y, p, t)$ внутри нижнего слоя. По уравнению статики имеем

$$p_0 = g\rho Z + p. \quad (3.2)$$

Исключим p_0 из (3.1) и (3.2):

$$Z = (1 - \varepsilon)h + \varepsilon H + \frac{p_H - p}{g\rho}, \quad (3.3)$$

где $\varepsilon = \frac{\rho'}{\rho}$. Заметим, что последние два слагаемых в (3.3) можно считать постоянными.

Основными уравнениями, описывающими движение в нижнем слое, являются два уравнения движения в горизонтальной плоскости и уравнение неразрывности. С учетом сделанных допущений эти уравнения имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla u - fv = -g \frac{\partial Z}{\partial x}; \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla v + fu = -g \frac{\partial Z}{\partial y}; \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (3.6)$$

Используя эти уравнения, получим уравнение вихря и уравнение дивергенции:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla (\zeta + f) + (\zeta + f) \operatorname{div} \mathbf{V} = 0; \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot \nabla \operatorname{div} \mathbf{V} + (\operatorname{div} \mathbf{V})^2 - \\ & - 2J(u, v) - v \frac{\partial f}{\partial x} + u \frac{\partial f}{\partial y} - f\zeta + g\nabla^2 z = 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Согласно теореме Гельмгольца, мы можем выразить скорость ветра через функцию тока ψ и потенциал скорости χ , представив вектор скорости ветра $\mathbf{V}$ в виде суммы двух векторов:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_\psi + \mathbf{V}_\chi, \quad (3.9)$$

где

$$\mathbf{V}_\psi = \mathbf{k} \times \nabla \psi \quad (3.10)$$

есть бездивергентная часть скорости ветра, а

$$\mathbf{V}_\chi = \nabla \chi. \quad (3.11)$$

— безвихревая часть. Относительный вихрь и дивергенция могут быть записаны так:

$$\begin{aligned}\zeta &= \nabla^2 \psi; \\ \operatorname{div} \mathbf{V} &= \nabla^2 \chi.\end{aligned}\quad (3.12)$$

Прежде чем двигаться дальше, рассмотрим порядки величин отдельных членов в уравнениях (3.7) и (3.8).

Следуя Гамбо (1957), будем выражать порядки величин через безразмерное число Россби. С этой целью вводим в рассмотрение характерный горизонтальный масштаб L и характерную горизонтальную скорость U . Тогда число Россби, определяемое как отношение сил инерции к силе Кориолиса, может быть записано так:

$$R = \frac{U}{fL}.$$

Для значений U и L , характерных для крупномасштабных движений, число Россби мало по сравнению с единицей. Так, при

$$U = 10 \text{ м сек.}, \quad L = 10^6 \text{ м}, \quad f = 10^{-4} \text{ сек.}^{-1},$$

имеем $R = 10^{-1}$.

Результат такого анализа порядков величин представлен в уравнениях (3.13) и (3.14). Для общности в этих уравнениях сохранены также члены, возникающие от вертикальных ускорений в уравнениях движения, которыми мы уже пренебрегли. Для большей наглядности эти члены собраны в правой части уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{V}_\psi \cdot \nabla (\zeta + f) + \mathbf{V}_\chi \cdot \nabla (\zeta + f) + \zeta \operatorname{div} \mathbf{V} + f \operatorname{div} \mathbf{V} = \\ = -\omega \frac{\partial \zeta}{\partial p} + \mathbf{k} \cdot \frac{\partial \mathbf{V}_\psi}{\partial p} \times \nabla \omega + \mathbf{k} \cdot \frac{\partial \mathbf{V}_\chi}{\partial p} \times \nabla \omega;\end{aligned}\quad (3.13)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{V} + \mathbf{V}_\psi \cdot \nabla \operatorname{div} \mathbf{V} + \mathbf{V}_\chi \cdot \nabla \operatorname{div} \mathbf{V} + (\operatorname{div} \mathbf{V})^2 - \\ - 2J(u_\psi, v_\psi) - 2J(u_\chi, v_\psi) - 2J(u_\psi, v_\chi) - \\ - 2J(v_\chi, u_\chi) - \left[\frac{\partial}{\partial x} (f v_\psi) - \frac{\partial}{\partial y} (f u_\psi) \right] - \\ - \left[v_\chi \frac{\partial f}{\partial x} - u_\chi \frac{\partial f}{\partial y} \right] + g \nabla^2 Z = - \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial u_\psi}{\partial p} - \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial v_\psi}{\partial p} \right) - \\ - \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial u_\chi}{\partial p} - \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial v_\chi}{\partial p} \right) - \omega \frac{\partial}{\partial p} \operatorname{div} \mathbf{V}.\end{aligned}\quad (3.14)$$

На основе этого анализа порядков величины мы можем оценить степень пригодности сделанных до сих пор приближений. Он же показывает нам, и как можно дальше упрощать уравнения.

В уравнении вихря мы сохраним пока все члены левой части. Что же касается уравнения дивергенции, то ясно, что здесь можно ряд членов совершенно безболезненно исключить. При этом, например, если мы сохраним члены порядка $R^3=1$ и R , то придем к так называемому уравнению баланса, впервые полученному Чарни (1955 г.) и Болиным [10]. Физической основой для такого приближения является тот факт, что в атмосфере всегда происходит быстрая подстройка поля ветра к полю давления.

С учетом (3.10), (3.11) и (3.12) уравнение вихря и уравнение баланса можно записать в виде:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla\right)(\nabla^2 \psi + f) + (\nabla^2 \psi + f) \nabla^2 \chi = 0; \quad (3.15)$$

$$2 \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] + \nabla \cdot (f \nabla \psi) - g \nabla^2 Z = 0. \quad (3.16)$$

Записанное в такой форме уравнение баланса обычно называется уравнением типа Монжа-Ампера.

Далее мы рассмотрим уравнение неразрывности (3.6). Проинтегрируем это уравнение от основания слоя ($z=0$) до высоты поверхности раздела ($z=h$):

$$\int_0^h \frac{\partial w}{\partial z} dz = - \int_0^h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dz.$$

Используя предположение о независимости горизонтальной скорости ветра от высоты z и учитывая, что

$$\left. \begin{aligned} w &= 0 & \text{при } z &= 0, \\ w &= \frac{dh}{dt} & \text{при } z &= h, \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

получаем

$$\frac{dh}{dt} + h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0, \quad (3.18)$$

или с учетом (3.12)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla\right) h + h \nabla^2 \chi = 0. \quad (3.19)$$

Теперь мы имеем четыре уравнения для определения четырех зависимых переменных ψ , χ , h и Z :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla\right) (\nabla^2 \psi + f) + (\nabla^2 \psi + f) \nabla^2 \chi = 0; \quad (3.15)$$

$$2 \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] + \nabla \cdot (f \nabla \psi) - g \nabla^2 Z = 0; \quad (3.16)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla\right) h + h \nabla^2 \chi = 0; \quad (3.19)$$

$$Z = (1 - \varepsilon) h + \text{const}, \quad (3.3)$$

где

$$\mathbf{V} = \mathbf{k} \times \nabla \psi + \nabla \chi.$$

Для аналогичной системы уравнений (однослойная жидкость со свободной поверхностью, т. е. $\varepsilon=0$), Чарни (1960 г.) предложил метод численного интегрирования по времени. Однако соответствующая вычислительная процедура оказалась весьма сложной и требующей много времени. Поэтому целесообразно ввести некоторые упрощающие предположения. Как показали экспериментальные расчеты, примерно те же самые результаты могут быть получены, если сделать следующие предположения:

1) пренебречь дивергентной частью скорости ветра:

$$\mathbf{V} = \mathbf{k} \times \nabla \psi; \quad (3.20)$$

2) движение жидкости в нижнем слое считать параллельным поверхности раздела (линии тока параллельны изолиниям высоты этой поверхности):

$$\mathbf{V} \cdot \nabla h = 0; \quad (3.21)$$

3) в уравнении неразрывности величину h там, где она не входит под знак дифференцирования, заменить ее постоянным средним значением $\bar{h}$;

4) в выражении для

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{1 - \varepsilon} \frac{\partial Z}{\partial t}$$

воспользоваться геострофическим приближением

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{f}{g} \frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (3.22)$$

С учетом перечисленных предположений наша система уравнений сводится к одному прогностическому уравнению и одному диагностическому:

$$(\nabla^2 - q) \frac{\partial \psi}{\partial t} = J(\nabla^2 \psi + f, \psi); \quad (3.23)$$

$$2 \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] + \nabla \cdot (f \nabla \psi) - g \nabla^2 Z = 0, \quad (3.16)$$

где

$$q = \frac{f(\nabla^2 \psi + f)}{g \bar{h} (1 - \epsilon)}. \quad (3.24)$$

В такой форме прогностическое уравнение для баротропной модели было получено аналогичным путем Болиным (1955) и Крессменом (1958).

Крессмен аппроксимирует параметр q следующим образом:

$$q = \frac{\bar{Z} (\nabla^2 \psi + f)}{\frac{g}{f} \bar{Z} \bar{h}} \approx \frac{a}{\bar{\psi}} (\nabla^2 \psi + f), \quad (3.25)$$

где $\bar{\psi}$ — характерное среднее значение функции тока, a — постоянная,

$$a = \frac{\bar{Z}}{\bar{h} (1 - \epsilon)}. \quad (3.26)$$

Крессмен [15] определил этот коэффициент эмпирически, исследуя ошибку прогноза в зависимости от величины a . Таким путем было найдено, что оптимальное значение этого параметра равно четырем.

В практике оперативного численного прогнозирования по этой модели параметр q обычно приближенно принимается равным некоторой постоянной величине. Приближенное соотношение между q и a мы найдем, линеаризируя выражение для параметра q ,

$$q = a \frac{f}{\bar{\psi}} \approx \frac{a f^2}{g \bar{Z}}.$$

Если $f = 10^{-4}$ сек. $^{-1}$ и $\bar{Z} = 5400$ м, то

$$q = 0,75 \cdot 10^{-12} \text{ м}^{-2}.$$

При названных упрощающих предположениях данный вариант прогностического уравнения (3.23) для баротропной модели отличается от полученного ранее уравнения (2.17) только наличием параметра q , с помощью которого учитывается эффект крупномасштабной дивергенции.

4. Фазовая и групповая скорости волн в баротропной модели

Рассмотрим баротропное прогностическое уравнение

$$(\nabla^2 - q) \frac{\partial \psi}{\partial t} = J(\nabla^2 \psi + f, \psi). \quad (3.23)$$

Пусть на основной поток U наложены малые возмущения, форма которых не меняется вдоль направления север—юг. Тогда для функции тока имеем

$$\psi = -Uy + \psi'(x, t). \quad (4.1)$$

Вводя это поле ветра в (3.23) и производя линеаризацию, получаем

$$\frac{\partial^3 \psi'}{\partial t \partial x^2} + U \frac{\partial^3 \psi'}{\partial x^3} + \beta \frac{\partial \psi'}{\partial x} - q \frac{\partial \psi'}{\partial t} = 0, \quad (4.2)$$

где

$$\beta = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Будем считать, что возмущение имеет вид волны с длиной L и амплитудой A и что эти волны перемещаются на восток без изменения своей формы со скоростью c , т. е. что

$$\psi' = Ae^{ik(x-ct)}, \quad (4.3)$$

где

$$k = \frac{2\pi}{L}.$$

Для того чтобы выполнялось (4.2), фазовая скорость должна удовлетворять соотношению

$$c = \frac{Uk^2 - \beta}{k^2 + q}. \quad (4.4)$$

Групповая скорость для этих волн будет

$$c_g = \frac{Uk^2 + \beta + 2qc}{k^2 + q}. \quad (4.5)$$

На рис. 4 фазовая и групповая скорости даны в функции длины волны. При этом использованы следующие значения параметров и констант:

$$\begin{aligned} q &= 0; \quad 0,4 \cdot 10^{-12} \text{ и } 1,2 \cdot 10^{-12} \text{ м}^{-2}, \\ U &= 18 \text{ м} \cdot \text{сек.}^{-1}, \\ f &= 1,3 \cdot 10^{-4} \text{ сек.}^{-1} \text{ для } \varphi = 45^\circ; \\ \beta &= 1,62 \cdot 10^{-11} \text{ м}^{-1} \cdot \text{сек.}^{-1} \text{ для } \varphi = 45^\circ; \\ R &= 6,371 \cdot 10^6 \text{ м}; \\ g &= 9,81 \text{ м} \cdot \text{сек.}^{-2}. \end{aligned}$$

Замечаем, что для волн с длиной, меньшей чем $2\pi \sqrt{\frac{U}{\beta}}$ (здесь $c > 0$), фазовая скорость волн в дивергентной модели лишь немногим меньше скорости волн в бездивергентной мо-

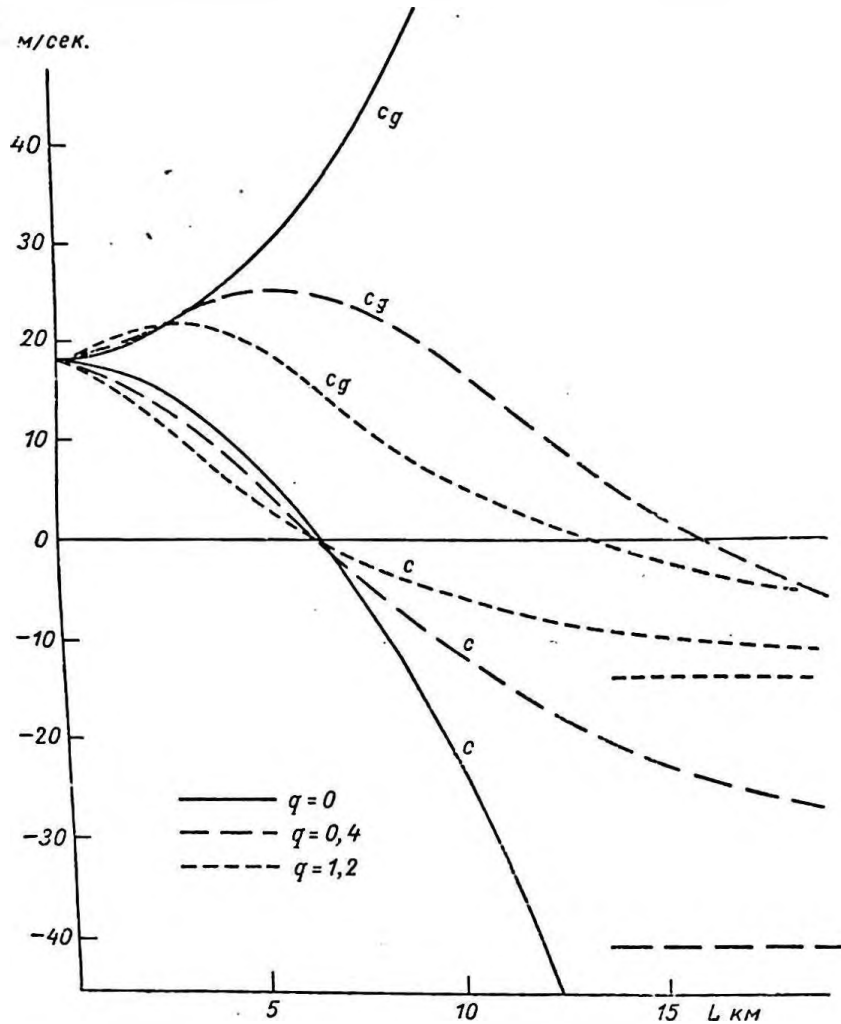


Рис. 4 Фазовая c и групповая c_g скорости как функции длины волны для дивергентной ($q=0,4 \cdot 10^{-12}$ и $q=1,2 \cdot 10^{-12}$) и бездивергентной ($q=0$) моделей.

дели. Однако для волн, более длинных, чем $2\pi \sqrt{\frac{U}{\beta}}$ (где $c < 0$), фазовая скорость в дивергентной модели оказывается значительно меньшей, чем в модели бездивергентной.

Что касается групповой скорости, то в дивергентном случае она может быть отрицательной; это означает, что энергия может распространяться и навстречу потоку.

Мы можем также найти и величину дисперсии волн, которую можно определять как разность между групповой и фазовой скоростями:

$$c_g - c = \frac{2k^2 (\beta + qU)}{(q + k^2)^2} \text{ в дивергентном случае,} \quad (4.6)$$

$$c_g - c = \frac{2\beta}{k^2} \text{ в бездивергентном случае.} \quad (4.7)$$

Эти соотношения показывают, что дисперсия волн возрастает с шириной. Мы замечаем также, что в случае бездивергентной модели дисперсия существенно больше, причем она быстро растет с длиной волны. В дивергентной модели дисперсия достигает максимума для волн некоторой определенной длины.

Е Ту-чжен (1945 г.), исследуя эволюцию во времени изолированного возмущения, пытался промоделировать поведение блокирующего гребня. Он предполагал, что в начальный момент времени в атмосфере существует невозмущенный западный поток с постоянной скоростью. Под действием тех или иных процессов, описываемых начальным состоянием, часть свободной поверхности приподнимается, т. е. в этой области происходит повышение давления. В дальнейшем изучалось развитие этой области повышенного давления.

Позднее Болин [9] с помощью соответствующих расчетов заново получил некоторые результаты Е Ту-чжена с помощью уравнения (4.2). Начальный профиль изолированной волны был задан в виде

$$Z'(x, 0) = Ae^{-\frac{x^2}{l^2}},$$

причем параметр l был выбран так, чтобы

$$Z'(\sqrt{2} \cdot 10^6, 0) = \frac{1}{2} Z'(0, 0).$$

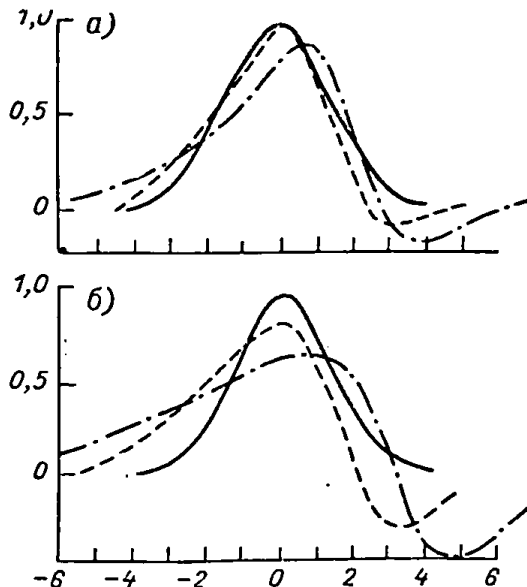


Рис. 5. Развитие изолированного волнового возмущения, наложенного на однородный основной поток, с учетом эффекта дивергенции (а) и согласно бездивергентной модели (б).

Параметр q был взят равным 10^{-12} м^{-2} , а скорость основного потока равнялась $U=15 \text{ м} \cdot \text{сек.}^{-1}$.

На рис. 5 а представлено волновое возмущение через 18 и 36 час., а на рис. 5 б — изменение этой же волны в случае бездивергентной баротропной модели ($q=0$).

5. Численное решение баротропного уравнения вихря

В этом разделе мы поясним некоторые детали того, как дается численный прогноз с помощью баротропного уравнения вихря

$$(\nabla^2 - q) \frac{\partial \psi}{\partial t} = J(\nabla^2 \psi + f, \psi). \quad (3.23)$$

До сих пор мы пользовались декартовыми координатами x, y на горизонтальной плоскости. Однако при прогнозе нам придется иметь дело с областями, сравнимыми по размеру с радиусом Земли. Поэтому мы должны учитывать кривизну земной поверхности. Наиболее простой метод учета заключается в преобразовании уравнений таким образом, чтобы они относились непосредственно к величинам, определяемым и измеряемым на карте равноугольной конформной проекции, сохраняющей углы и формы областей. Примером такой проекции, часто употребляемой в метеорологии внетропической зоны, является полярная стереографическая проекция.

Для того чтобы проделать указанное выше преобразование уравнений, мы вводим множитель увеличения m , который определим как отношение малого отрезка на карте ds к соответствующему отрезку на сфере ds_s ,

$$m = \frac{ds}{ds_s} = \frac{dx}{dx_s} = \frac{dy}{dy_s}. \quad (5.1)$$

Здесь и в дальнейшем величины с индексом s относятся к сфере, а без индекса — к карте. Через x и y обозначены декартовы координаты на плоскости карты.

С помощью (5.1) получаем, например, выражение для бездивергентной составляющей скорости ветра в виде

$$\left. \begin{aligned} u_s &= -\frac{\partial \psi}{\partial y_s} = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial y_s} = -m \frac{\partial \psi}{\partial y} = mu; \\ v_s &= \frac{\partial \psi}{\partial x_s} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x_s} = m \frac{\partial \psi}{\partial x} = mv \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

или в векторном обозначении

$$\mathbf{V}_s = \mathbf{k} \times \nabla_s \psi = m \mathbf{k} \times \nabla \psi = m \mathbf{V}. \quad (5.3)$$

С помощью этих формул получаем для якобиана:

$$\begin{aligned} J_s(\alpha, \beta) &= \frac{\partial x}{\partial x_s} \frac{\partial \tilde{y}}{\partial y_s} - \frac{\partial x}{\partial y_s} \frac{\partial \tilde{y}}{\partial x_s} = \\ &= m^2 \left(\frac{\partial x}{\partial x} \frac{\partial \tilde{y}}{\partial y} - \frac{\partial x}{\partial y} \frac{\partial \tilde{y}}{\partial x} \right) = m^2 \cdot J(\alpha, \beta). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Соотношение между относительным вихрем, измеренным на сфере, и относительным вихрем, определенным по карте, можно получить так.

Вихрь, измеренный на сфере, определим как предел отношения циркуляции вокруг бесконечно малого элемента поверхности сферы к площади этого элемента

$$\zeta_s = \lim_{\delta A_s \rightarrow 0} \frac{\oint_{L_s} V_s ds_s}{\delta A_s},$$

где L_s — замкнутая кривая, охватывающая элемент δA_s . Так как

$$\begin{aligned} V_s &= mV; \\ ds_s &= \frac{ds}{m}; \\ \delta A_s &= \frac{\delta A}{m^2}, \end{aligned} \quad (5.5)$$

то

$$\zeta_s = \lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{\oint V dS}{\frac{\delta A}{m^2}} = m^2 \zeta, \quad (5.6)$$

или

$$\zeta_s = \nabla_s^2 \psi = m^2 \nabla^2 \psi. \quad (5.7)$$

Эти формулы позволяют нам написать баротропное прогностическое уравнение применительно к величинам на плоскости карты конформной проекции в виде

$$\left(\nabla^2 - \frac{q}{m^2} \right) \frac{\partial \psi}{\partial t} = J(m^2 \nabla^2 \psi + f, \psi). \quad (5.8)$$

Для того чтобы привести это уравнение к конечно-разностной форме, мы вводим сетку точек (рис. 6) и определяем новые независимые переменные следующим образом:

$$\begin{aligned} x &= id, \quad 0 \leq i \leq I; \\ y &= jd, \quad 0 \leq j \leq K, \end{aligned} \quad (5.9)$$

где i и j — целые числа, а d — расстояние между двумя соседними точками сетки.

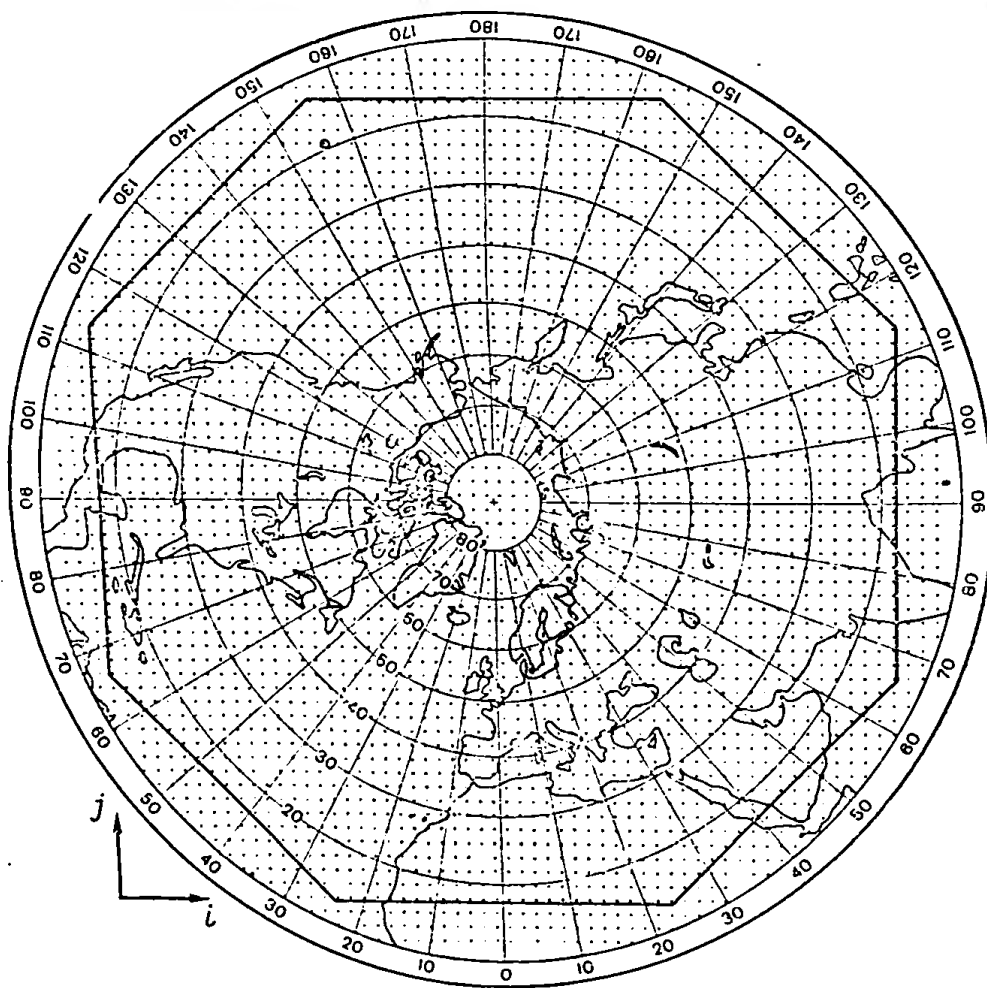


Рис. 6. Пример конечно-разностной сетки точек.

Восьмиугольная область прогноза, очерченная на этой сетке, включает 2820 точек. Карта является стереографической проекцией на плоскости, пересекающей земной шар по кругу широты 60° с. ш. Шаг сетки равен 300 км на 60° с. ш. (или 1 см на карте масштаба 1 : 30 000 000).

Для представления горизонтальных производных используем следующие конечно-разностные операторы:

$$\frac{\partial x}{\partial x} \approx \frac{x_{i+1,j} - x_{i-1,j}}{2d}; \quad (5.10)$$

$$\frac{\partial x}{\partial y} \approx \frac{x_{i,j+1} - x_{i,j-1}}{2d}; \quad (5.11)$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial x^2} \approx \frac{x_{i+1,j} + x_{i-1,j} - 2x_{ij}}{d^2}; \quad (5.12)$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} \approx \frac{x_{i,j+1} + x_{i,j-1} - 2x_{ij}}{d^2}; \quad (5.13)$$

$$\nabla^2 x \approx \frac{x_{i,j+1} + x_{i+1,j} + x_{i,j-1} + x_{i-1,j} - 4x_{ij}}{d^2} = \frac{\nabla^2 x}{d^2}; \quad (5.14)$$

$$J(\alpha, \beta) \approx \frac{x_{i+1,j} - x_{i-1,j}}{2d} \cdot \frac{y_{i,j+1} - y_{i,j-1}}{2d} - \\ - \frac{x_{i,j+1} - x_{i,j-1}}{2d} \cdot \frac{y_{i+1,j} - y_{i-1,j}}{2d} = \frac{1}{4d^2} J(\alpha, \beta). \quad (5.15)$$



Рис. 7

Приемлемая схема для интегрирования уравнения вихря по времени приводится на рис. 7. Здесь введена новая независимая переменная для времени τ , которая определена так:

$$t = \tau \cdot \Delta t,$$

где Δt — шаг по времени. Для производных по времени вводим следующие разностные операторы:

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^0 \approx \frac{\psi^{\frac{1}{2}} - \psi^0}{0.5 \Delta t}$$

— направленная вперед односторонняя разность,

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^{\frac{1}{2}} \approx \frac{\psi^1 - \psi^0}{\Delta t}$$

— центрированная разность,

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^1 \approx \frac{\psi^2 - \psi^0}{2 \Delta t}$$

— центрированная разность,

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^{\tau} \approx \frac{\psi^{\tau+1} - \psi^{\tau-1}}{2\Delta t}$$

— центрированная разность
или

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^{\tau} \approx \frac{\Delta \tau \psi}{\varepsilon \Delta t}, \text{ где } \begin{cases} \varepsilon = 0,5 & \text{для } \tau = 0, \\ \varepsilon = 1 & \text{" } \tau = 0,5, \\ \varepsilon = 2 & \text{" } \tau \geq 1. \end{cases} \quad (5.16)$$

С учетом этих формул получаем конечно-разностное баротропное прогностическое уравнение в виде, пригодном для решения на вычислительной машине:

$$\left(\nabla^2 - \frac{q}{\mu}\right) \Delta \tau \psi = \frac{\varepsilon \Delta t}{4} J(\mu \nabla^2 \psi + f, \psi), \quad (5.17)$$

где

$$\mu = \left(\frac{m}{d}\right)^2.$$

Для того чтобы проиллюстрировать принципы расчета баротропного прогноза с помощью электронной вычислительной машины, запишем прогностическое уравнение в форме

$$\left(\nabla^2 - \frac{q}{\mu}\right) \Delta \tau \psi = F^{\tau};$$

$$F^{\tau} = \frac{\varepsilon \Delta t}{4} J(\tau_i^{\tau}, \psi^{\tau});$$

$$\tau_i^{\tau} = \mu \nabla^2 \psi^{\tau} + f.$$

Основные этапы вычислительной процедуры проиллюстрируем следующим образом:

	1	2	3	4
По заданному начальному полю геопотенциала Z^0 получаем соответствующее поле функции тока, решая уравнение баланса	Z^0			
Вычисляем $\tau_i^0 = \mu \nabla^2 \psi^0 + f$	ψ^0	τ_i^0		
Вычисляем $F^0 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \Delta t \cdot J(\tau_i^0, \psi^0)$			F^0	
"Вычисляем" начальное приближение $(\Delta \tau \psi)_a=0$		$(\Delta \tau \psi)_a$		

	1	2	3	4
Решаем уравнение Гельмгольца $\left(\nabla^2 - \frac{q}{\mu}\right) \Delta^0 \psi = F^0$		$\Delta^0 \psi$		$\psi^{\frac{1}{2}}$
Экстраполируем $\psi^{\frac{1}{2}} = \psi^0 + \Delta^0 \psi$		$\frac{1}{2}$		
Вычисляем $\eta^{\frac{1}{2}} = \mu \nabla^2 \psi^{\frac{1}{2}} + f$		$\eta^{\frac{1}{2}}$		
Вычисляем $F^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \Delta J \left(\eta^{\frac{1}{2}}, \psi^{\frac{1}{2}} \right)$			$F^{\frac{1}{2}}$	
Вычисляем начальное приближение $\left(\Delta^{\frac{1}{2}} \psi \right)_a =$ $= 2 \left(\psi^{\frac{1}{2}} - \psi^0 \right)$		$\left(\Delta^{\frac{1}{2}} \psi \right)_a$		
Решаем уравнение $\left(\nabla^2 - \frac{q}{\mu} \right) \Delta^{\frac{1}{2}} \psi = F^{\frac{1}{2}}$		$\Delta^{\frac{1}{2}} \psi$		
Экстраполируем $\psi^1 = \psi^0 + \Delta^{\frac{1}{2}} \psi$				ψ^1
Вычисляем $\eta^1 = \mu \nabla^2 \psi^1 + f$		η^1		
Вычисляем $F^1 = \frac{1}{2} \Delta J (\eta^1, \psi^1)$			F^1	
Вычисляем $(\Delta^1 \psi)_a = 2 (\psi^1 - \psi^0)$		$(\Delta^1 \psi)_a$		
Решаем уравнение $\left(\nabla^2 - \frac{q}{\mu} \right) \Delta^1 \psi = F^1$		$\Delta^1 \psi$		
Экстраполируем $\psi^2 = \psi^0 + \Delta^1 \psi$			ψ^2	
Пересылаем поле (4) в (1), а поле (3) в (4)	ψ^1			ψ^2
Далее можем использовать одну и ту же вычислительную процедуру для каждого шага по времени				
$\rightarrow$	ψ^{n-1}			ψ^n
Вычисляем $\eta^n = \mu \nabla^2 \psi^n + f$		η^n		
Вычисляем $F^n = \frac{1}{2} \Delta J (\eta^n, \psi^n)$			F^n	
Вычисляем $(\Delta^n \psi)_a = 2 (\psi^n - \psi^{n-1})$		$(\Delta^n \psi)_a$		

	1	2	3	4
Решаем уравнение				
$\left(\nabla^2 - \frac{q}{f}\right)\Delta^2\psi = F^2$		$\Delta^2\psi$		
Экстраполируем $\psi^{n+1} = \psi^{n-1} + \Delta^2\psi$			ψ^{n+1}	
Пересылаем (4) в (1) и (3) в (4)	ψ^n			ψ^{n+1}
Эта процедура может быть повторена любое число раз.				
После выполнения последнего шага по времени (N) рассчитывается поле геопотенциала с помощью уравнения баланса	ψ^w			
		Z^N		

ЛИТЕРАТУРА

1. Aihara M. Time-Dependent Behaviours of Parallel Flows in a Non-Divergent Barotropic Atmosphere. Met. Soc. Jap., Ser. 2 39, No. 4, 1951.
2. Arakawa A. The Variation of General Circulation in the Barotropic Atmosphere. Met. Soc. Jap., Ser. 2 39, No. 2, 1951.
3. Arnason G. Results of 24-hr Barotropic Forecasts for the 100mb Pressure Surface. USJNWP, Techn. Mem. No. 8, 1955.
4. Arnason G. A Study of the Dynamics of a Stratified Fluid in Relation to Atmospheric Motions and Physical Weather Prediction. Tellus, 13, No. 2, 1951.
5. Arnason G. and Carstensen L. P. The Effects of Vertical Vorticity Advection and Turning of the Vortex Tubes in Hemispheric Forecasts with a Two-Level Model. Monthly Weather Review, 87, 1959.
6. Baer F. The Extended Numerical Integration of a Simple Barotropic Model. J. Met., 18, No. 3, 1951.
7. Baer F. and Platzman G. A Procedure for Numerical Integration of the Spectral Vorticity Equation. J. Met., 18, No. 3, 1951.
8. Биркган А. Ю., Любимов А. Н. Предвычисление карты АТ₇₀₀ на электронной цифровой машине „Стрела“. Изв. АН СССР, серия геофиз., № 1, 1958. (Английский перевод в „Meteorological Translations“, No. 1, 1959, Toronto).
9. Bolln B. An Improved Barotropic Model and Some Aspects of Using the Balance Equation for Three-Dimensional Flow. Tellus, 8, 1956.
10. Bolln B. Numerical Forecasting with the Barotropic Model. Tellus, 7, 1955.
11. Bolln B. and Charney J. G. Numerical Tendency Computations from the Barotropic Vorticity Equation. Tellus, 3, 1951.
12. Charney J. G. On a Physical Basis for Numerical Prediction of Large-scale Motions in the Atmosphere. J. Met., 6, 1949.
13. Charney J. G., Fjörtoft R. and Neuman J. von. Numerical Integration of the Barotropic Vorticity Equations. Tellus, 2, 1950.
14. Charney J. G. and Fliassen A. A Numerical Method for Predicting the Perturbations in the Middle-Latitude Westerlies. Tellus, 1, 1949.
15. Cressman G. P. Barotropic Divergence and Very Long Atmospheric Waves. Monthly Weather Review, Aug. 1958.

16. Cressman G. P. and Hubert W. E. A Study of Numerical Forecasting Errors. *Monthly Weather Review*, 85, 1957.
17. FjØrtoft R. On a Numerical Method of Integrating the Barotropic Vorticity Equation. *Tellus*, 4, 1952.
18. Галин М. Б. Выделение длинных волн при гидродинамическом прогнозе полей давления в средней и верхней тропосфере над северным полушарием Земли. *ДАН СССР*, т. 138, № 5, 1961.
19. Коган С. Я. О краткосрочном прогнозе полей давления в средней тропосфере при помощи линеаризованного уравнения Фридмана. *Труды Ин-та физики атмосферы АН СССР*, № 2, 1958. (Работа выполнена в 1952 г.).
20. Kubota E. S. Some Characters of the Barotropic Atmosphere with Respect to the Scale of Disturbances. *Pap. Met. Geophys.*, 12, 1962.
21. Kubota E. S., Hirose M., Kikuchi U. and Kurihara Y. Barotropic Forecasting with Use of Surface Spherical Harmonic Representations. *Pap. Met. Geophys.*, 12, 1961.
22. Magata M. Barotropic Extended-Period Forecasting by Perturbation Method. *Proc. Int. Symp. N. W. P., Tokyo*, 1960.
23. Masuda Y. On a Graphical Integration of the Barotropic Vorticity Equation and Its Application to the Numerical Weather Forecast. *J. Met. Soc. Japan*, Ser. 2, 33, 1955.
24. Немчинов С. В. Прогноз поля атмосферного давления на среднем уровне атмосферы с учетом горизонтального крупномасштабного турбулентного перемешивания. *Известия АН СССР, Серия геофизич.*, № 8, 1960.
25. Pichler H. Vorhersage von Niveauänderungen der 500mb-Fläche mittels numerischer Integration der Wellengleichung. *Geofisica Pura e Applicata*, 49, 1931.
26. Rossby C. G. On the Dispersion of Planetary Waves in a Barotropic Atmosphere. *Tellus*, 1, 1949.
27. Rossby C. G. On the Propagation of Frequencies and Energy in Certain Types of Oceanic and Atmospheric Waves. *J. Met.*, 2, No. 4, 1945.
28. Rossby C. G. Relations between Variations in the Intensity of the Zonal Circulation of the Atmosphere and the Displacements of the Semi-Permanent Centres of Action. *J. Marine Res.*, 2, 1939.
29. Shuman F. G. Predictive Consequences of Certain Physical Inconsistencies in Geostrophic Barotropic Model. *Monthly Weather Review*, July 1957.
30. Spiegler D. B. An Analysis of Barotropic Forecast Errors in Cases of Rapid Sea-Level Cyclogenesis. *Monthly Weather Review*, 88, 1960.
31. Taba H. The Horizontal and Vertical Wind Profiles of the Subtropical and Polar Jet for January 1—7, 1956, and the Variation of the Equivalent Barotropic Level. *Tellus*, 4, 1959.
32. Томпсон Ф. Д. Анализ и предсказание погоды численными методами. ИЛ, 1962.
33. Wiin-Nielsen A. On Short- and Long-term Variations in Quasi-barotropic Flow. *Monthly Weather Review*, Wash. D. C., 9 (11), Nov. 1931.
34. Wolff P. W. The Error in Numerical Forecasts due to Retrogression of Ultra-Long Waves. *Monthly Weather Review*, 86, 1958.

АГЕОСТРОФИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРОГНОЗА

1. Постановка задачи

Агеострофическим ветром (или агеострофической слагающей ветра) называется векторная разность между действительным и геострофическим ветром:

$$\mathbf{V}' = \mathbf{V} - \mathbf{V}_g, \quad (1)$$

где $\mathbf{V}'$ — агеострофический, $\mathbf{V}$ — действительный, $\mathbf{V}_g$ — геострофический ветер.

Формула (1) непригодна для вычисления агеострофической слагающей ветра, так как $\mathbf{V}$ и $\mathbf{V}_g$ примерно на порядок больше $\mathbf{V}'$ и, следовательно, $\mathbf{V}'$ в этой формуле представлено как малая разность больших величин. В силу этого для определения агеострофической слагающей ветра необходимо построить уравнения, в которые агеострофические компоненты ветра входят как слагаемые. Такие уравнения впервые были получены М. И. Юдиным, который в цикле своих работ [5—7] дал наиболее подробный анализ поставленной задачи.

Расчеты агеострофических компонент ветра следует рассматривать как следующее приближение по сравнению с квазигеострофическими моделями. Хотя, как показывают теоретические оценки, агеострофические компоненты ветра малы по сравнению с геострофическим ветром, они играют весьма важную роль в эволюции атмосферных процессов. С ними тесно связаны изменения полей давления, температуры, ветра, вертикальных движений. Последние являются одним из главных факторов, приводящих к образованию облачности и осадков. Поэтому при оценке значения агеострофического ветра неправильно было бы исходить только из того, что он представляет собой малую поправку к геострофическому ветру.

2. Уравнения для горизонтальных компонент агеострофического ветра

Возьмем в качестве исходных уравнений в системе x, y, p, t уравнения движения идеальной жидкости

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \tau \frac{\partial u}{\partial p} = -g \frac{\partial H}{\partial x} + f v, \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \tau \frac{\partial v}{\partial p} = -g \frac{\partial H}{\partial y} - f u, \quad (3)$$

уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial p} = 0, \quad (4)$$

условие адиабатичности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{f^2 m^2}{R} \cdot \frac{\tau}{p} - u \frac{\partial T}{\partial x} - v \frac{\partial T}{\partial y}, \quad (5)$$

уравнение статики

$$\frac{\partial H}{\partial p} = - \frac{R}{g} \frac{T}{p}. \quad (6)$$

Здесь

$$\tau = \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} - g \rho \omega;$$

ω — вертикальная составляющая вектора ветра; ρ — плотность воздуха; u, v — горизонтальные составляющие ветра; $m^2 = \frac{R^2 T (\gamma_a - \gamma)}{g f^2}$, R — газовая постоянная; T — температура воздуха; g — ускорение силы тяжести; f — параметр Кориолиса; γ_a — сухоадиабатический градиент температуры; γ — фактический градиент температуры; H — высота изобарической поверхности.

Представим теперь горизонтальные составляющие вектора ветра в виде

$$u = - \frac{g}{f} \frac{\partial H}{\partial y} + u'; \quad (7)$$

$$v = \frac{g}{f} \frac{\partial H}{\partial x} + v', \quad (8)$$

где $-\frac{g}{f} \frac{\partial H}{\partial y}$ и $\frac{g}{f} \frac{\partial H}{\partial x}$ — горизонтальные составляющие геострофического ветра, а u' и v' — горизонтальные компоненты агеострофического ветра.

С учетом соотношений (6), (7) и (8) уравнения (2), (3) и (5) перепишем в виде

$$f v' = - \frac{g}{f} \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial t} + A + \frac{\partial u'}{\partial t}; \quad (9)$$

$$f u' = - \frac{g}{f} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial t} - B - \frac{\partial v'}{\partial t}; \quad (10)$$

$$- \frac{g}{R} \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial t} = \frac{f^2 m^2}{R} \frac{\tau}{p^2} - \frac{M}{p}, \quad (11)$$

где

$$A = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \tau \frac{\partial u}{\partial p};$$

$$B = u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \tau \frac{\partial v}{\partial p};$$

$$M = u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y}.$$

Исключим теперь из уравнений (9) и (10) величины $\frac{\partial^2 H}{\partial y \partial t}$ и $\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial t}$. Для этого продифференцируем уравнения (9) и (10) по p , а уравнение (11) сначала по x , а затем по y . В результате получим

$$f \frac{\partial v'}{\partial p} = -\frac{g}{f} \frac{\partial^3 H}{\partial p \partial y \partial t} + \frac{\partial A}{\partial p} + \frac{\partial^2 u'}{\partial p \partial t}; \quad (12)$$

$$f \frac{\partial u'}{\partial p} = -\frac{g}{f} \frac{\partial^3 H}{\partial p \partial x \partial t} - \frac{\partial B}{\partial p} - \frac{\partial^2 v'}{\partial p \partial t}; \quad (13)$$

$$\frac{\partial^3 H}{\partial p \partial y \partial t} = -\frac{f^2 m^2}{g p^2} \frac{\partial \tau}{\partial y} + \frac{R}{g p} \frac{\partial M}{\partial y}; \quad (14)$$

$$\frac{\partial^3 H}{\partial p \partial x \partial t} = -\frac{f^2 m^2}{g p^2} \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{R}{g p} \frac{\partial M}{\partial x}. \quad (15)$$

Подставляя в уравнения (12) и (13) вместо $\frac{\partial^3 H}{\partial p \partial y \partial t}$ и $\frac{\partial^3 H}{\partial p \partial x \partial t}$ их значения из (14) и (15), получим

$$f \frac{\partial v'}{\partial p} = \frac{f m^2}{p^2} \frac{\partial \tau}{\partial y} - \frac{R}{f p} \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial p} + \frac{\partial^2 u'}{\partial p \partial t}; \quad (16)$$

$$f \frac{\partial u'}{\partial p} = \frac{f m^2}{p^2} \frac{\partial \tau}{\partial x} - \frac{R}{f p} \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial p} - \frac{\partial^2 v'}{\partial p \partial t}. \quad (17)$$

Из уравнений (16) и (17) необходимо исключить $\frac{\partial \tau}{\partial x}$ и $\frac{\partial \tau}{\partial y}$.

Подставим в уравнение неразрывности вместо u и v их значения из (7) и (8) и проинтегрируем от P до p . В результате получим

$$\int_P^p \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} \right) dp + \frac{g}{f^2} \int_P^p J(f, H) dp = -\tau + \tau_0, \quad (18)$$

где $J(f, H)$ — якобиан; τ_0 — вертикальная скорость на изобарической поверхности $P = 1000$ мб.

Введя в рассмотрение новые функции

$$\bar{u}' = \int_p^p u' dp, \quad \bar{v}' = \int_p^p v' dp, \quad (19)$$

перепишем уравнение (18) в виде

$$\frac{\partial \bar{u}'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}'}{\partial y} = -z + z_0 - K, \quad (20)$$

где

$$K = \frac{g}{f^2} \int_p^p J(f, H) dp.$$

Присоединим к уравнению (20) соотношение

$$\frac{\partial \bar{v}'}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}'}{\partial y} = \bar{\Omega}', \quad (21)$$

где $\bar{\Omega}' = \int_p^p \Omega' dp$;

$$\Omega' = \Omega - \Omega_g = \frac{1}{f} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right]. \quad (22)$$

Последнее соотношение представляет собой не что иное, как уравнение баланса.

Дифференцируя уравнение (20) по x , а уравнение (21) по y и вычитая из первого результата второй, получим

$$\frac{\partial^2 \bar{u}'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}'}{\partial y^2} = -\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z_0}{\partial x} - \frac{\partial K}{\partial x} - \frac{\partial \bar{\Omega}'}{\partial x}$$

или

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z_0}{\partial x} - \Delta \bar{u}' - \frac{\partial \bar{\Omega}'}{\partial x} - \frac{\partial K}{\partial x}. \quad (23)$$

Аналогично

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z_0}{\partial y} - \Delta \bar{v}' + \frac{\partial \bar{\Omega}'}{\partial x} - \frac{\partial K}{\partial y}, \quad (24)$$

где Δ — плоский оператор Лапласа

Подставляя в (16) и (17) вместо $\frac{\partial \tau}{\partial x}$ и $\frac{\partial \tau}{\partial y}$ их значения из (23) и (24) и принимая во внимание, что $\frac{\partial \bar{u}'}{\partial p} = \frac{\partial^2 \bar{u}'}{\partial p^2}$, $\frac{\partial \bar{v}'}{\partial p} = \frac{\partial^2 \bar{v}'}{\partial p^2}$, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{v}'}{\partial p^2} + \frac{m^2}{p^2} \Delta \bar{v}' = \frac{m^2}{p^2} \left(\frac{\partial \tau_0}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\Omega}'}{\partial x} - \frac{\partial \bar{K}}{\partial y} \right) - \\ - \frac{R}{f^2 p} \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{1}{f} \frac{\partial A}{\partial p} + \frac{1}{f} \frac{\partial^3 \bar{u}'}{\partial p^2 \partial t}; \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{u}'}{\partial p^2} + \frac{m^2}{p^2} \Delta \bar{u}' = \frac{m^2}{p^2} \left(\frac{\partial \tau_0}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\Omega}'}{\partial y} - \frac{\partial \bar{K}}{\partial x} \right) - \\ - \frac{R}{f^2 p} \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{1}{f} \frac{\partial B}{\partial p} - \frac{1}{f} \frac{\partial^3 \bar{v}'}{\partial p^2 \partial t}. \end{aligned} \quad (26)$$

В уравнениях (25) и (26) содержатся члены, содержащие производные по времени от компонент агеострофического ветра. Однако эти члены обычно на порядок меньше остальных слагаемых и поэтому в первом приближении ими можно пренебречь.

Уравнения (25) и (26) содержат вторые производные по вертикальной координате. Поэтому их необходимо дополнить граничными условиями.

Согласно определению функций $\bar{u}'$ и $\bar{v}'$,

$$\bar{u}'|_{p=p} = \bar{v}'|_{p=p} = 0.$$

В качестве второго условия возьмем следующее: так как $\tau|_{p=0}=0$, то, полагая $p=0$ в уравнениях (20) и (21), получим систему

$$\frac{\partial \bar{u}'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}'}{\partial y} = \tau_0 - \int_p^0 J(f, H) dp;$$

$$\frac{\partial \bar{v}'}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}'}{\partial y} = \int_p^0 \bar{\Omega}' dp,$$

решая которую, определим $\bar{u}'|_{p=0}$ и $\bar{v}'|_{p=0}$.

По своей структуре уравнения (25) и (26) совершенно аналогичны уравнению для вертикальной скорости, методы решения которого уже излагались. Поэтому здесь мы на них останавливаться не будем.

3. Схема численного прогноза полей температуры и ветра

После того как компоненты агеострофического ветра найдены, используя уравнения движения и условие адиабатичности, можно предвычислять значения u , v , T в следующий момент времени.

Возможно несколько путей решения этой задачи. Один из них, изложенный в работах [2, 3, 4], заключается в следующем.

Перепишем уравнения (2) и (3), предварительно несколько упростив их, в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + f v'; \quad (27)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = - \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) - f u'. \quad (28)$$

В уравнениях (27) и (28) для простоты опущены члены $\tau \frac{\partial u}{\partial p}$, $\tau \frac{\partial v}{\partial p}$, которые в обычных условиях значительно меньше остальных слагаемых.

Аналогично можно записать уравнение притока тепла (5)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{f^2 m^2}{R p} \tau - \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right). \quad (29)$$

По исходным данным u , v , u' , v' , T и τ в начальный момент времени t можно вычислить приращения

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_t, \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)_t \text{ и } \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_t.$$

После этого значения u , v и T в каждой узловой точке регулярной сетки в следующий момент времени $t + \delta t$ определяются следующим образом:

$$u(t + \delta t) = u(t) + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_t \delta t; \quad (30)$$

$$v(t + \delta t) = v(t) + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)_t \delta t; \quad (31)$$

$$T(t + \delta t) = T(t) + \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_t \delta t. \quad (32)$$

Далее процесс вычислений повторяется, т. е. по известным значениям u , v , T в момент времени $t + \delta t$ вычисляются

$$u'(t + \delta t), \quad v'(t + \delta t), \quad \tau(t + \delta t),$$

а затем по формулам (30), (31) и (32) вычисляются значения горизонтальных составляющих ветра и температуры в момент времени $t + 2\delta t$ и т. д.

Предвычисление горизонтальных составляющих ветра и температуры по изложенной выше методике требует сглаживания промежуточных результатов примерно через каждые шесть шагов по времени (шаг по времени принимался равным одному часу).

Для высоких уровней (200 и 300 мб) необходимо также сглаживать начальные поля температуры и ветра. Численные эксперименты показали, что при сглаживании неустойчивость решения в области струйных течений ликвидируется.

Другой способ предвычисления горизонтальных составляющих ветра и температуры, изложенный в работах [1, 2, 5], заключается в том, что исходные уравнения записываются в переменных Лагранжа:

$$\frac{d_h u}{dt} = f v'; \quad (33)$$

$$\frac{d_h v}{dt} = -f u'; \quad (34)$$

$$\frac{d_h T}{dt} = \frac{f^2 m^2}{R p} \tau, \quad (35)$$

где $\frac{d_h}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}$.

Будем искать решение системы уравнений (33)–(35) в окрестности выбранной для прогноза точки. Если предположить, что в течение некоторого малого промежутка времени δt значения u' , v' и τ не меняются вдоль траектории, то точное решение системы уравнений (33)–(35) запишется в виде

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, p, t_0 + \delta t) &= u(x_0, y_0, p, t_0) + f v' \delta t; \\ v(x, y, p, t_0 + \delta t) &= v(x_0, y_0, p, t_0) - f u' \delta t; \\ T(x, y, p, t_0 + \delta t) &= T(x_0, y_0, p, t_0) + \\ &\quad + \frac{f^2 m^2}{R p} \tau(x_0, y_0, p, t_0); \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + u(x_0, y_0, p, t_0) \delta t + \frac{1}{2} f v' (\delta t)^2; \\ y &= y_0 + v(x_0, y_0, p, t_0) \delta t - \frac{1}{2} f u' (\delta t)^2, \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

где x_0, y_0 — координаты воздушной частицы в начальный момент t_0 ; x, y — координаты той же частицы в следующий момент времени $t_0 + \delta t$; p — давление.

При прогнозе ветра шагами по времени мы должны, однако, определить искомые функции в момент времени $t_0 + \delta t$ в узловых точках выбранной области по значениям этих функ-

ций в начальный момент времени также в узловых точках. Другими словами, нам необходимо определить координаты x_0, y_0 точки, из которой в следующий момент времени $t_0 + \delta t$ должна сместиться частица в узловую точку. После того как координаты начальной точки траектории x_0, y_0 определены, путем интерполяции можно найти величины

$$u(x_0, y_0, p, t_0), \quad v(x_0, y_0, p, t_0), \quad T(x_0, y_0, p, t_0)$$

и по формулам (36) вычислить значения u, v, T в узловых точках в следующий момент времени.

Если для расчетов выбрана четырехугольная сетка, то координаты x_0, y_0 начальной точки траектории можно определить следующим способом, изложенным в работе [1].

Заменяя $u(x_0, y_0, p, t_0)$ и $v(x_0, y_0, p, t_0)$ в формулах (37) их значениями из (36) и полученную систему четырех алгебраических уравнений будем решать методом последовательных приближений по итерационным формулам:

$$\left. \begin{aligned} x_0^* &= x - u'^{-1}(x, y, p, t_0 + \delta t) \delta t + \frac{1}{2} f v' (\delta t)^2; \\ y_0^* &= y - v'^{-1}(x, y, p, t_0 + \delta t) \delta t - \frac{1}{2} f u' (\delta t)^2; \\ u^*(x, y, p, t_0 + \delta t) &= u(x_0^*, y_0^*, p, t_0) + f v' \delta t; \\ v^*(x, y, p, t_0 + \delta t) &= v(x_0^*, y_0^*, p, t_0) - f u' \delta t. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

В качестве значений величин u' и v' можно взять их средние арифметические значения в точках (x_0, y_0) и (x, y) в момент t_0 . Величины $u(x_0, y_0, t_0), v(x_0, y_0, t_0), u'(x_0, y_0, t_0)$ и $v'(x_0, y_0, t_0)$ внутри квадратов при каждой итерации будем определять по интерполяционной формуле

$$f(x_0, y_0, t_0) = a_0 + a_1(x_0 - x) + a_2(y_0 - y) + a_3(x_0 - x)(y_0 - y), \quad (39)$$

где коэффициенты a_0, a_1, a_2 и a_3 легко выражаются через значения функции f в узловых точках квадрата, внутри которого располагается точка (x_0, y_0) .

В качестве нулевого приближения $u^0(x, y, t_0 + \delta t)$ и $v^0(x, y, t_0 + \delta t)$ возьмем значения $u(x, y, t_0)$ и $v(x, y, t_0)$.

После того как значения u и v в узловых точках в момент $t_0 + \delta t$ с заданной точностью найдены, все вычисления повторяются вновь.

Изложенная схема численного прогноза была применена при прогнозе ветра на среднем уровне атмосферы (700 мб). В качестве исходных данных использовались начальные поля фактического ветра. Было рассчитано 11 суточных прогнозов, шаг по времени был принят равным одному часу. Среднее значение

модуля векторной разности между фактическим ($\bar{C}_\Phi$) и прогнозным ветром ($\bar{C}_\Pi$) составило

$$|\bar{C}_\Pi - \bar{C}_\Phi| = 6,9 \text{ м/сек.}, \quad \frac{|\bar{C}_\Pi - \bar{C}_\Phi|}{|\bar{C}_\Phi|} = 0,62.$$

Несколько иной метод вычисления координат начальной точки траектории (x_0, y_0) и значений $u(x_0, y_0, t_0)$, $v(x_0, y_0, t_0)$ и $\tau(x_0, y_0, t_0)$ применен в работе [5]. Координаты точек (x_0, y_0) рассчитывались по упрощенным формулам

$$x_0 = x - u(x_0, y_0, t_0) \delta t;$$

$$y_0 = y - v(x_0, y_0, t_0) \delta t.$$

Расчеты производились для треугольной сетки. Горизонтальные составляющие ветра и температура в точке (x_0, y_0) определялись по формуле

$$f(x_0, y_0) = \frac{f_A S_A + f_B S_B + f_C S_C}{S},$$

где S — площадь треугольника ABC ; S_A, S_B, S_C — площади треугольников OBC, OCA, OAB соответственно (рис. 1).

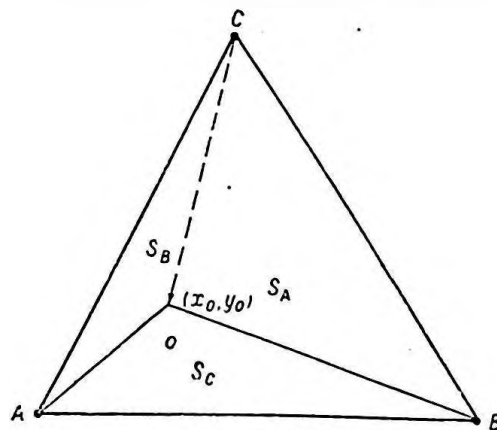


Рис. 1. Расположение точек в треугольной сетке.

В качестве исходных данных в этой схеме использовались поля геопотенциала и температуры на изобарических поверхностях 850, 500, 300 и 200 мб.

В табл. 1 приведены оценки оправдываемости суточных прогнозов по первому варианту схемы (уравнения записываются в форме Эйлера) и по второму (уравнения записываются в форме Лагранжа), заимствованные нами из работы [2]. Данные табл. 1 показывают, что средние ошибки предвычисления по схеме

в переменных Лагранжа для всех уровней значительно уменьшились по сравнению со схемой в переменных Эйлера.

Описанный метод прогноза является более трудоемким, чем метод прогноза поля геопотенциала в квазигеострофическом приближении. Характерной особенностью этого метода является то, что он дает возможность прогнозировать траектории воздушных частиц, а следовательно, определять индивидуальные изменения метеорологических элементов. Опыт оперативной и научно-исследовательской работы показывает, что качество

Таблица 1

	Изобарические поверхности, мб							
	850	500	300	200	850	500	300	200
	Переменные Эйлера				Переменные Лагранжа			
v_{ϕ}	9,6	16,6	23,9	23,7	—	—	—	—
α	0,69	0,63	0,79	0,89	0,65	0,56	0,62	0,65
$\delta_{\phi}T$	2,7	2,8	2,6	3,6	—	—	—	—
δ_T	2,0	2,1	3,0	3,8	1,9	1,8	2,2	3,4
R_T	0,72	0,64	0,45	0,52	0,74	0,74	0,58	0,63

Примечание. v_{ϕ} — средняя по модулю фактическая скорость геострофического ветра, α — отношение средней квадратической векторной ошибки предвычисления ветра к среднему значению фактической скорости; $\delta_{\phi}T$ — среднее абсолютное значение фактического изменения температуры; δ_T — средняя абсолютная ошибка предвычисления температуры. R_T — коэффициент корреляции между предвычисленными и фактическими значениями температуры.

диагноза и прогноза синоптического положения и метеорологических элементов существенным образом зависит от того, насколько точно установлен путь движения воздуха. Синоптики уже давно приняли на вооружение метод траекторий. Он как бы является методической основой синоптических прогнозов.

Таким образом, использование агеострофических моделей позволяет включить в методику предвычисления метеорологических полей приемы, применяемые в синоптической метеорологии и проверенные на многолетнем опыте.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бурцев А. И., Ветлов И. П. Схема численного прогноза ветра в свободной атмосфере. Метеорология и гидрология, № 11, 1962.
2. Пятыгина К. В. Агеострофическая модель прогноза полей метеозlementов на большом количестве уровней. Труды симпозиума по численным методам прогноза погоды. Москва, 24—29 июня 1963 г. Гидрометеониздат, Л., 1964.
3. Пятыгина К. В. Расчетная схема предвычисления полей ветра и температуры в тропосфере и нижней стратосфере. Труды ГГО, вып. 151, 1964.
4. Ромов А. И., Фишман Ю. С. Агеострофические отклонения и их учет в численном прогнозе ветра. Труды симпозиума по численным методам прогноза погоды. Москва, 24—29 июня 1963 г. Гидрометеониздат, Л., 1964.
5. Юдин М. И. Предвычисление поля ветра и связанных с ним метеорологических элементов. ДАН СССР, 112, № 1, 1957.
6. Юдин М. И. Полная система уравнений для определения агеострофического ветра и вертикальных движений. Сб. «Материалы совещания координационной комиссии», Гидрометеониздат, Л., 1961.
7. Юдин М. И. Новые методы и проблемы краткосрочного прогноза погоды. Гидрометеониздат, Л., 1963.

Е. К. НАЙТИНГ

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ЗАДАЧА ЧИСЛЕННОГО ПРОГНОЗА

Введение

В самых первых опытах по применению электронных вычислительных машин для численного прогноза полей давления синоптических масштабов использовалась баротропная модель атмосферы. При этом прогноз давался только для одного, среднего уровня атмосферы. Однако вскоре после этого многими авторами были предложены новые модели, учитывавшие различие в горизонтальной структуре поля давления на разных уровнях. В отличие от предыдущих, эти модели учитывали бароклинные эффекты, существенные в областях с большими градиентами температуры. Большинство моделей имело много общих черт. Прогноз давался уже не для одного, а для нескольких уровней. Особенно важным было то обстоятельство, что появилась возможность получать прогноз поля давления для нижней части тропосферы.

Дальнейшие исследования были связаны с испытанием прогностических уравнений на большом числе случаев с целью выяснения пригодности соответствующих моделей для прогноза при различных синоптических ситуациях. Многие из моделей испытывались в ежедневной практике в течение длительного времени.

Несмотря на большое разнообразие предположений, которые приводят к уравнениям модели, и методов численного решения этих уравнений, все прогностические модели, использующие уравнения вихря, неизменно сводятся к решению сходных дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа по отношению к тенденциям.

В настоящих лекциях была предпринята попытка на примере нескольких простых моделей, над которыми мне самому приходилось работать, указать лишь основные принципы построения прогностических уравнений. При этом предполагается известными конечно-разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных и тот вид гра-

нических условий, при которых решение может быть выполнено. В заключение очень кратко будет дано представление о методе попеременных направлений для численного решения дифференциальных уравнений.

Основные предпосылки

Приближенные уравнения термодинамики атмосферы в квазистатическом приближении в переменных x, y, p, t имеют вид: уравнения движения

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \omega \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial p} + f \mathbf{k} \times \mathbf{V} + g \nabla z = 0, \quad (1)$$

уравнение термодинамики

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla T + \omega \left(\frac{\partial T}{\partial p} - \frac{kT}{p} \right) = S_T, \quad (2)$$

уравнение неразрывности

$$\nabla \cdot \mathbf{V} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0, \quad (3)$$

уравнение статики

$$\frac{\partial z}{\partial p} = -\frac{RT}{gp}. \quad (4)$$

Здесь $\mathbf{V}$ — вектор горизонтальной скорости с компонентами u, v ; $\omega = \frac{dp}{dt}$ — аналог вертикальной скорости в координатах x, y, p ; $f = 2\Omega \sin \varphi$, где Ω — угловая скорость вращения Земли, а φ — широта места; g — ускорение силы тяжести; z — высота изобарической поверхности; T — температура; $k = \frac{R}{c_p}$, причем R — газовая постоянная, c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении; S_T — скорость изменения температуры под действием притока тепла от внешних источников. Незвестными в этих уравнениях являются: u, v (две компоненты вектора $\mathbf{V}$), ω, z и T . Все остальные величины считаются заданными. Имеем пять скалярных уравнений для пяти неизвестных. Эти уравнения гиперболического типа, и поэтому мы можем искать их решение, позволяющее по начальным данным дать прогноз для любого будущего (или прошедшего) момента времени.

Для описания баротропной среды (или эквивалентно-баротропной атмосферы) непосредственно используются только два из выписанных уравнений: (1) и (3).

Из уравнения (1) получается уравнение вихря скорости (вернее, его вертикальной компоненты ζ):

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla (\zeta + f) + \omega \frac{\partial \zeta}{\partial p} + (\zeta + f) \nabla \cdot \mathbf{V} + \mathbf{k} \cdot \nabla \omega \times \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial p} = 0. \quad (5)$$

Уравнение для эквивалентно-баротропной атмосферы является упрощенным вариантом этого уравнения:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla (\zeta + f) = -(\zeta + f) \nabla \cdot \mathbf{V} = (\zeta + f) \frac{\partial \omega}{\partial p}, \quad (6)$$

причем здесь использовано уравнение (3). Обычно члены правой части уравнения (6) аппроксимируются так, чтобы учесть влияние орографии и приземного трения. Заметим, что уравнение (6) справедливо не только для описания движения в атмосфере. Оно пригодно для описания любого движения жидкости, если для этого движения справедливо уравнение (1). В частности, оно может быть применено для описания движения воды на вращающейся Земле. Как уже было указано, уравнение (6) принимается справедливым для среднего уровня атмосферы. Оно может быть использовано для предвычисления высот изобарической поверхности среднего уровня, если в нем скорость ветра выразить с помощью геострофического соотношения

$$\mathbf{V} = \frac{g}{f} \mathbf{k} \times \nabla z. \quad (7)$$

Тогда уравнение (6) принимает вид

$$\nabla^2 \frac{\partial z}{\partial t} + J\left(z, \frac{g}{f} \nabla^2 z + f\right) = \frac{fE}{g}, \quad (8)$$

где член с E учитывает эффект дивергенции.

Как уравнение (8), так и уточненные варианты этого уравнения справедливы для среднего уровня благодаря тому, что именно для этого уровня член правой части уравнения (6), который надо тем или иным способом определять, оказывается малым по сравнению с остальными слагаемыми этого уравнения. Для других уровней атмосферы этот член имеет большее значение и поэтому должен учитываться более строгим образом.

Более содержательное с физической точки зрения объяснение роли данного фактора состоит в следующем. Как известно, атмосфера есть сжимаемая среда, в которой имеют место вертикальные движения, которыми обеспечивается взаимосвязь потоков на разных уровнях. Как известно, эти вертикальные движения играют весьма существенную роль при изменении

температуры, при формировании осадков над большими территориями и при развитии атмосферных возмущений синоптического масштаба. Поэтому, исключая из рассмотрения эти вертикальные движения, мы лишаемся возможности учитывать взаимодействие между различными слоями атмосферы и, в частности, не сможем учесть работу, совершаемую для подъема или опускания частиц воздуха. Иными словами, до тех пор пока мы не привлекаем уравнение термодинамики и уравнение состояния, мы никаким образом не фиксируем, что изучаемая нами среда есть атмосфера.

Уравнение термодинамики (2) допускает весьма простую интерпретацию. Оно выражает связь между изменением температуры в частице воздуха и ее вертикальными перемещениями, а также притоком тепла от внешних источников.

Для удобства оно записано с использованием локальной производной, при такой записи легко проследить, что изменение температуры в некоторой точке на поверхности Земли или на некоторой изобарической поверхности обусловлено горизонтальными и вертикальными движениями (включая нагревание или охлаждение вследствие сжатия или расширения воздуха), а также местным нагреванием от внешних источников. Это локальное нагревание обычно предполагается малым, так что движение считается адиабатическим.

Уравнение (4) есть уравнение статики, записанное с учетом уравнения состояния. Это уравнение выражает тот физический факт, что разность давлений на двух уровнях обусловлена весом столба воздуха, заключенного между этими уровнями, а давление в произвольной точке обусловлено весом столба вышележащего воздуха. Термодинамические параметры R , c_p , S_T определяются свойствами той среды, для которой записаны уравнения. Мы должны выбрать значения этих параметров, отвечающие атмосфере Земли. Если объединить уравнения (2) и (4), приходим к другой, весьма удобной форме уравнения термодинамики. Именно, подставляя значение T из (4) в уравнение (2), имеем

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla\right) \left(-\frac{gp}{R} \frac{\partial z}{\partial p}\right) + \omega \left(\frac{\partial}{\partial p} - \frac{k}{p}\right) \left(-\frac{gp}{R} \frac{\partial z}{\partial p}\right) = S_T \quad (9)$$

или

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla\right) \frac{\partial z}{\partial p} + \frac{\omega R}{gp} \left(\frac{\partial}{\partial p} - \frac{k}{p}\right) \left(\frac{gp}{R} \frac{\partial z}{\partial p}\right) = -\frac{RS_T}{gp}. \quad (10)$$

Интегрируя далее между уровнями p_0 и p_1 , получаем

$$\frac{\partial z'}{\partial t} + \bar{\mathbf{V}} \cdot \nabla z' + \Gamma \bar{\omega} = -S_T^*, \quad (11)$$

где z' — толщина слоя между уровнями p_0 и p_1 ; $\bar{V}$ и $\bar{\omega}$ — суть некоторые осредненные значения V и ω в рассматриваемом слое, а S_T^* — значение интеграла, появляющегося в правой части уравнения.

Это уравнение имеет следующую интерпретацию. Подобно тому как уравнение (2) описывает факторы, обуславливающие изменение температуры, уравнение (11) описывает зависимость

изменения средней температуры столба воздуха от адвекции в поле осредненного по высоте ветра и от нагревания (или охлаждения), обусловленного как вертикальными движениями, так и действием внешних источников тепла.

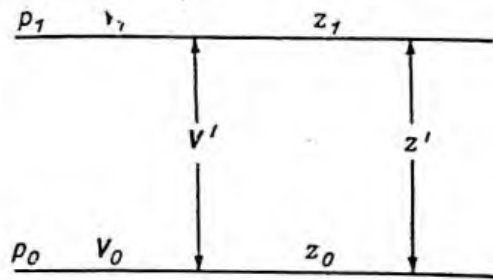


Рис. 1. Обозначения для слоя атмосферы.

Приведем пример построения уравнения (11) для некоторого заданного слоя. Для этого рассмотрим слой атмосферы, заключен-

ный между изобарическими поверхностями p_0 и p_1 , в пределах которого параметр устойчивости $\sigma_0 = \frac{\partial T}{\partial p} - \frac{kT}{p}$ есть величина постоянная, а ветер является геострофическим и линейно изменяется по вертикали с давлением. Этот слой представлен в виде диаграммы на рис. 1.

На уровне p имеем

$$V = V_0 + \frac{p_0 - p}{p_0 - p_1} V',$$

$$\nabla \cdot V = \nabla \cdot V_0 + \frac{p_0 - p}{p_0 - p_1} \nabla \cdot V' = - \frac{\partial \omega}{\partial p},$$

отсюда, в частности, следует, что ω должно изменяться с давлением по квадратичному закону, т. е.

$$\omega = A + Bp + Cp^2,$$

где A , B , C можно легко выразить через $\nabla \cdot V_0$ и т. д.

Поскольку ветер предполагается геострофическим, мы также должны иметь

$$\nabla z = \nabla z_0 + \frac{p_0 - p}{p_0 - p_1} \nabla z'.$$

Проинтегрированное уравнение термодинамики имеет вид

$$\int_{p_0}^{p_1} \left[\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial p} + V \cdot \nabla \frac{\partial z}{\partial p} + \frac{R\tau_0}{g} \frac{\omega}{p} \right] dp = 0,$$

(мы предположили также, что движение адиабатическое).

Первый член после интегрирования дает $\frac{\partial z'}{\partial t}$. Второй член может быть проинтегрирован, поскольку

$$\nabla \frac{\partial z}{\partial p} = - \frac{\nabla z'}{p_0 - p_1}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \int_{p_0}^{p_1} \mathbf{V} \cdot \nabla \frac{\partial z}{\partial p} dp &= - \int_{p_0}^{p_1} \left[\mathbf{V}_0 + \frac{p_0 - p}{p_0 - p_1} \mathbf{V}' \right] \cdot \frac{\nabla z'}{p_0 - p_1} dp = \\ &= - \int_{p_0}^{p_1} \frac{\mathbf{V}_0 \cdot \nabla z'}{p_0 - p_1} dp = \mathbf{V}_0 \cdot \nabla z', \end{aligned}$$

поскольку ясно, что $\mathbf{V}' \cdot \nabla z' = 0$, если ветер геострофический.

Третий интеграл может быть легко определен, и мы получаем уравнение термодинамики, проинтегрированное по p , в виде

$$\frac{\partial z'}{\partial t} + \mathbf{V}_0 \cdot \nabla z' + A \log \frac{p_1}{p_0} + B(p_1 - p_0) + \frac{1}{2} C(p_1^2 - p_0^2) = 0.$$

Простая модель бароклининой атмосферы

Теперь мы рассмотрим весьма простую двухуровневую модель атмосферы (рис. 2), которая позволит нам уяснить технику использования уравнения термодинамики.

На рис. 2 представлена модель атмосферы, простирающейся от изобарической поверхности p_0 , которая расположена вблизи поверхности земли, до изобарической поверхности p_4 вблизи верхней границы атмосферы. Каждая переменная снабжена индексом, указывающим тот уровень, к которому она относится. Так z_3 — это

высота изобарической поверхности p_3 ; Δp — расстояние (по давлению) между уровнями p_2 и p_4 . Промежуточные уровни между p_0 и p_4 выбраны так, что $p_0 - p_1 = p_1 - p_2$ и т. д. Тогда в качестве p_0, p_1, p_2, p_3 и p_4 мы можем принять изобарические поверхности, отвечающие уровням 1000, 750, 500, 250 и 0 мб.

p_4	$\omega = 0$	0 мб
p_3	V_3	ζ_3 z_3
p_2	V_2	ω_2 500 мб
p_1	V_1	ζ_1 z_1
p_0	$\omega = 0$	1000 мб

Рис. 2. Схема атмосферной модели.

Мы будем рассматривать два слоя жидкости — один между поверхностями p_0 и p_2 , а второй между p_2 и p_4 . Движение каждого слоя пусть будет представлено движением на уровнях p_1 и p_3 соответственно, подобно тому как движение баротропной жидкости описывается движением на ее среднем уровне. Предполагается также, что отсутствует значительный поток воздуха через нижнюю и верхнюю изобарические поверхности, т. е. $\omega_0 = \omega_4 = 0$. Вертикальная скорость на среднем уровне p_2 есть

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)_{p=p_2} = \omega_2. \quad (12)$$

Отсюда для верхнего и нижнего слоя атмосферы производная $\frac{\partial \omega}{\partial p}$ будет иметь порядок $\pm \frac{\omega_2}{\Delta p}$ соответственно.

Запишем уравнение вихря для верхнего и нижнего слоев

$$\frac{\partial \zeta_2}{\partial t} + \mathbf{V}_2 \cdot \nabla (\zeta_2 + f) = \frac{f_0 \omega_2}{\Delta p}, \quad (13)$$

$$\frac{\partial \zeta_1}{\partial t} + \mathbf{V}_1 \cdot \nabla (\zeta_1 + f) = -\frac{f_0 \omega_2}{\Delta p}. \quad (14)$$

Здесь величину $(\zeta + f)$, поскольку она входит как коэффициент, мы приближенно заменили постоянным средним значением.

Эти два уравнения, относящиеся к верхнему и нижнему слоям, связаны между собой посредством вертикальной скорости ω_2 . Они позволяют установить условие непрерывности потока в обоих слоях.

Из опыта и наблюдений мы знаем, что разность скоростей на двух уровнях (относительный поток) определяется приближенно термическим ветром, который зависит от горизонтального градиента относительной топографии. Но вертикальные движения изменяют распределение температуры, а следовательно, относительную топографию и ее градиенты. Поэтому они определяют и относительный поток. Связь между вертикальной скоростью и временным изменением относительной топографии дается термодинамическим уравнением, записанным в интегральной форме. Это уравнение устанавливает связь изменений толщины слоя с горизонтальной адвекцией и вертикальными движениями, определяемыми гидродинамическими уравнениями.

Запишем уравнение термодинамики для слоя, заключенного между уровнями p_1 и p_3 .

$$\frac{\partial}{\partial t} (z_3 - z_1) + \mathbf{V}_2 \cdot \nabla (z_3 - z_1) + \sigma \omega_2 = 0. \quad (15)$$

Здесь мы допустили, что величина $\frac{\partial T}{\partial p} - \frac{kT}{p}$ постоянна и что ω линейно изменяется в обоих рассматриваемых нами слоях, т. е. в слое от p_0 до p_2 и от p_2 до p_4 . Теперь мы воспользуемся геострофическим приближением, так что будем иметь дело с движениями, характерный масштаб которых 1000 км и более. Следовательно, будем считать, что на каждом уровне $\mathbf{V} = -gf^{-1}\mathbf{k} \times \nabla z$ и что $2\mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_3$. Тогда, пренебрегая некоторыми малыми членами, учитывающими переменность параметра Кориолиса f , получаем следующие дифференциальные уравнения для нашей модели:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \frac{\partial z_3}{\partial t} + J\left(z_3, \frac{g\nabla^2 z_3}{f} + f\right) &= \frac{ff_0\omega_2}{g\Delta p}; \\ \nabla^2 \frac{\partial z_1}{\partial t} + J\left(z_1, \frac{g\nabla^2 z_1}{f} + f\right) &= -\frac{ff_0\omega_2}{g\Delta p}; \\ \frac{\partial}{\partial t}(z_3 - z_1) + \frac{g}{f} J\left(\frac{z_3 + z_1}{2}, z_3 - z_1\right) + \sigma\omega_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Давайте сначала посмотрим, описывают ли уравнения (16) те движения, которые мы наблюдаем в реальной атмосфере, и, в частности, выясним, могут ли они описать возможный рост малого возмущения. Для простоты мы будем считать, что осредненные потоки в верхнем и нижнем слоях атмосферы зональны и имеют скорости U_1 и U_3 вдоль оси X , и рассмотрим возмущения потоков вдоль этого направления.

Прежде всего мы должны рассчитать значение σ в уравнении термодинамики. Мы имеем

$$\begin{aligned} \sigma\omega_2 &= -\frac{Rz_0}{g} \int_{750}^{250} \omega \frac{dp}{p} = \\ &= -\frac{Rz_0}{g} \omega_2 \left\{ \int_{750}^{500} \frac{1000-p}{500} \frac{dp}{p} + \int_{500}^{250} \frac{p}{500} \frac{dp}{p} \right\}; \\ \sigma &= -\frac{Rz_0}{g} [2 \log p]_{750}^{500} = \frac{2Rz_0}{g} \log \frac{3}{2} = 0,8z_0 \frac{R}{g}. \end{aligned}$$

Примем z_1 и z_3 в виде

$$\begin{aligned} z_3 &= -\frac{f}{g} U_3 y + A_3 \exp ik_3 (x - c_3 t); \\ z_1 &= -\frac{f}{g} U_1 y + A_1 \exp ik_1 (x - c_1 t), \end{aligned}$$

так что $\nabla^2 z_3 = -k_3^2 A_3 \exp ik_3 (x - c_3 t)$ и т. д.

Тогда из первых двух уравнений получим

$$ik_3ck_3^2A_3 \exp ik_3(x - c_3t) - A_3U_3ik_3k_3^2 \exp ik_3(x - c_3t) + \\ + \beta ik_3A_3 \exp ik_3(x - c_3t) = f^2\omega_2/g\Delta p.$$

Для k_1 , c_1 получится подобное же уравнение, и мы видим, что

$$k_3 = k_1 = k, \quad c_3 = c_1 = c$$

и

$$ikA_3 \exp ik(x - ct) \{k^2(c - U_3) + \beta\} = \frac{f^2\omega_2}{g\Delta p};$$

$$ikA_1 \exp ik(x - ct) \{k^2(c - U_1) + \beta\} = -\frac{f^2\omega_2}{g\Delta p}.$$

Третье уравнение дает

$$\left[-ikc(A_3 - A_1) + \frac{g}{f} \left\{ -\frac{f}{g} U_3 ikA_1 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{f}{g} U_1 ikA_3 \right\} \right] \exp ik(x - ct) = -\omega_2,$$

и, исключая A_1 , A_3 , ω_2 , мы получим

$$\begin{vmatrix} k^2(c - U_1) + \beta & 0 & -a^2 \\ 0 & k^2(c - U_3) + \beta & a^2 \\ c - U_3 & -(c - U_1) & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\text{где } a^2 = -\frac{f^2}{g\Delta p}.$$

Это уравнение является квадратным относительно c , причем c может быть комплексным. Если c не является действительным числом, то малое возмущение будет расти.

Пусть k очень мало, тогда

$$\begin{vmatrix} \beta & 0 & -a^2 \\ 0 & \beta & a^2 \\ c - U_3 & -(c - U_1) & 1 \end{vmatrix} = 0 = \beta^2 + a^2\beta(2c - U_1 - U_3)$$

или

$$c = \frac{U_1 + U_3}{2} - \frac{\beta}{2a^2},$$

и, следовательно, c — действительное число.

Если k велико, то

$$\begin{vmatrix} k^2(c - U_1) & 0 & -\alpha^2 \\ 0 & k^2(c - U_3) & \alpha^2 \\ c - U_3 & -(c - U_1) & 1 \end{vmatrix} = 0 = k^4(c - U_1)(c - U_3) + \\ + \alpha^2 k^2 [(c - U_1)^2 + (c - U_3)^2];$$

так что

$$\frac{c - U_1}{c - U_3} = -\frac{k^2}{2\alpha^2} \pm \sqrt{\frac{k^4}{4\alpha^4} - 1}$$

и c — действительное число.

Таким образом, когда k принимает большие или малые значения, c — действительное число и колебания не нарастают. Теперь пусть

$$c = \frac{U_1 - U_3}{2} + \gamma, \quad \frac{U_3 - U_1}{2} = U^*.$$

Детерминант имеет вид

$$\begin{vmatrix} k^2 U^* + \beta + k^2 \gamma & 0 & -\alpha^2 \\ 0 & -k^2 U^{*2} + \beta + k^2 \gamma & \alpha^2 \\ -U^* + \gamma & -U^* - \gamma & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Последний легко приводится к виду

$$\begin{vmatrix} (k^2 + \alpha^2) \gamma + \beta + (k^2 - \alpha^2) U^* & -\alpha^2 (U^* + \gamma) \\ -\alpha^2 (\gamma - U^*) & (k^2 + \alpha^2) \gamma + \beta - (k^2 - \alpha^2) U^* \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\{(k^2 + \alpha^2) \gamma^2 + \beta\}^2 - (k^2 - \alpha^2)^2 U^{*2} = \alpha^4 (\gamma^2 - U^{*2}),$$

т. е.

$$(k^4 + 2k^2 \alpha^2) \gamma^2 + 2\beta(k^2 + \alpha^2) \gamma + \beta^2 - U^{*2} k^2 (k^2 - 2\alpha^2) = 0.$$

Корни этого уравнения являются действительными, если

$$\beta^2 (k^2 + \alpha^2)^2 - \{\beta^2 - U^{*2} k^2 (k^2 - 2\alpha^2)\} \{k^4 + 2k^2 \alpha^2\} \geq 0$$

или

$$\beta^2 \alpha^4 + U^{*2} \{k^8 - 4\alpha^4 k^4\} \geq 0.$$

Экстремальные значения k , таким образом, находятся из следующего выражения:

$$k^4 = 2\alpha^4 \pm \sqrt{4\alpha^8 - \frac{\alpha^4 \gamma^2}{U^{*2}}} = 2\alpha^4 \left\{ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{4\alpha^4 U^{*2}}} \right\}.$$

Скорость роста возмущения максимальна тогда, когда минимая часть c очень велика, т. е. когда $4\alpha^4 k^4 - k^8 = \max$, иными словами, когда $k^4 = 2\alpha^4$.

Поясним теперь полученные результаты. Пусть

$$f \approx 10^{-4} \text{ сек.}^{-1}, \quad \beta \approx 1,5 \cdot 10^{-13} \text{ см}^{-1} \text{ сек.}^{-1},$$

$$\sigma_0 \approx \frac{25^\circ \text{ C}}{500 \text{ мб}}, \quad \sigma_0 \Delta p \approx 25^\circ \text{ C},$$

$$\alpha^2 = \frac{f^2}{\varepsilon g \Delta p} = \frac{f^2}{0,8 \varepsilon_0 R \Delta p} = \frac{10^{-8}}{0,8 \times 25 \times 2,8 \cdot 10^6} = 1,5 \cdot 10^{-16} \text{ см}^2.$$

Экстремальные значения k , как мы знаем, даются выражением

$$k^1 = 2x^4 \left\{ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{\beta^2}{4x^4 U^{*2}}} \right\}.$$

Положим здесь $U^* = 10 \text{ м} \cdot \text{сек.}^{-1} = 10^3 \text{ см} \cdot \text{сек.}^{-1}$. Тогда

$$\frac{\beta^2}{4x^4 U^{*2}} = \frac{(1,5)^2 \times 10^{-26}}{(1,5)^2 \times 10^{-32} \times 10^6} \approx 1;$$

$$k^1 = 2x^4 \left\{ 1 \pm \sqrt{\frac{3}{4}} \right\} = 2x^4 \{1,866 \text{ или } 0,134\};$$

$$k = \alpha \{1,4 \text{ или } 0,7\}.$$

Так что длина волны $\frac{2\pi}{k}$ будет равна $\frac{2\pi}{\alpha} \{0,7 \text{ или } 1,4\} = 4,2 \times 10^8 \{1 \text{ или } 2\} = 3000 \text{ км} - 6000 \text{ км}$. Для больших значений U^*

$$k^1 = 2x^4 \left\{ 2 \text{ или } \frac{\beta^2}{8x^4 U^{*2}} \right\}, \quad k = \left\{ 1,2x \text{ или } \sqrt{\frac{\beta^2}{2U^*}} \right\},$$

$$L = \frac{2\pi}{1,2x} = 4 \times 10^8 \text{ см} = 4000 \text{ км или } L = \frac{2\pi \sqrt{U^*}}{\sqrt{\frac{\beta^2}{2}}} \approx 10^7 \sqrt{U^*}.$$

Следовательно, максимальная скорость роста возникает тогда, когда длина волны близка к минимальному значению. Таким образом, можно ожидать, что волны длиной около 4000 км будут расти.

Вернемся к уравнениям (16). Это система трех уравнений с тремя неизвестными $\frac{\partial z_1}{\partial t}$, $\frac{\partial z_2}{\partial t}$ и ω_2 . Для численного решения указанных уравнений мы можем применять способ, близкий к тому, с помощью которого решается уравнение баротропной модели.

С этой целью перепишем наши уравнения, введя две новые переменные

$$\bar{z} = \frac{z_2 + z_1}{2}, \quad z' = z_2 - z_1,$$

где $\bar{z}$ — среднее значение абсолютной топографии, а z' — относительная топография. Заметим также, что для любых функций имеют место следующие тождества:

$$\begin{aligned} 2 \{J(\alpha, \beta) + J(\gamma, \delta)\} &= J(\alpha + \gamma, \beta + \delta) + J(\alpha - \gamma, \beta - \delta); \\ 2 \{J(\alpha, \beta) - J(\gamma, \delta)\} &= J(\alpha + \gamma, \beta - \delta) + J(\alpha - \gamma, \beta + \delta). \end{aligned}$$

Тогда, складывая два первых уравнения (16), имеем

$$\begin{aligned} \nabla^2 \frac{\partial}{\partial t} (z_3 + z_1) &= -J(z_3, \eta_3) - J(z_1, \eta_1) = \\ &= -\frac{1}{2} \{J(z_3 + z_1, \eta_3 + \eta_1) + J(z_3 - z_1, \eta_3 - \eta_1)\} \end{aligned}$$

или

$$\nabla^2 \frac{\partial \bar{z}}{\partial t} = -J\left(\bar{z}, \frac{g}{f} \nabla^2 \bar{z} + f\right) - \frac{1}{4} J\left(z', \frac{g}{f} \nabla^2 z'\right).$$

Полученное уравнение есть уравнение Пуассона относительно функции $\frac{\partial \bar{z}}{\partial t}$. Оно сходно с соответствующим уравнением баротропной модели и отличается от него лишь последним членом, описывающим эффект введенных нами в рассмотрение термодинамических свойств жидкости.

Составляя разность первых двух уравнений (16)

$$\nabla^2 \frac{\partial z'}{\partial t} + J\left(\bar{z}, \frac{g \nabla^2 z'}{f}\right) + J\left(z', \frac{g}{f} \nabla^2 \bar{z} + f\right) = \frac{2ff_0\omega_2}{g\Delta p}$$

и исключая отсюда ω_2 с помощью уравнения термодинамики, получим

$$\begin{aligned} \nabla^2 \frac{\partial z'}{\partial t} + \frac{2ff_0}{g\sigma_0\Delta p} \frac{\partial z'}{\partial t} &= -J\left(\bar{z}, \frac{g \nabla^2 z'}{f}\right) - \\ &- J\left(z', \frac{g \nabla^2 \bar{z}}{f} + f\right) - \frac{2f}{\sigma_0} J(\bar{z}, z'). \end{aligned}$$

Данное уравнение является уравнением Гельмгольца. Оно может быть решено теми же методами, которые применяются для решения уравнения Пуассона.

Исходными данными, необходимыми для решения системы уравнений (16) и, следовательно, для получения прогноза, являются величины $\bar{z} = \frac{1}{2}(z_3 + z_1)$ и $z' = z_3 - z_1$. Если эти величины в начальный момент известны во всех точках сетки, то с помощью конечных разностей можно вычислить значения всех членов, не содержащих производные по времени. Далее, ре-

шив уравнения Пуассона и Гельмгольца, можем определить $\frac{\partial \bar{z}}{\partial t}$ и $\frac{\partial z'}{\partial t}$ во всех точках сетки, а затем рассчитать $\bar{z}$ и z' в следующий момент τ по соотношению:

$$H(\tau) = H(0) + \tau \frac{\partial H}{\partial t}, \quad \text{где } H = \bar{z}, z'. \quad (17)$$

Повторяя теперь описанную процедуру, можем найти значения $\frac{\partial \bar{z}}{\partial t}$, $\frac{\partial z'}{\partial t}$ в момент τ и, следовательно, рассчитать $\bar{z}$ и z' в момент 2τ по формуле

$$H(\overline{n+1}\tau) = H(\overline{n-1}\tau) + 2\tau \left(\frac{\partial H}{\partial t} \right)_{n\tau}. \quad (18)$$

Так будут определены значения $\bar{z}$ и z' (а также значения вертикальной скорости ω_2) во всех точках сетки для некоторого заданного момента.

Двухуровневая модель, используемая в численных прогнозах

Эта простая разностная модель обладает всеми характерными чертами пространственных моделей, используемых в практике численного прогноза, и описывает наиболее существенные особенности самого движения жидкости.

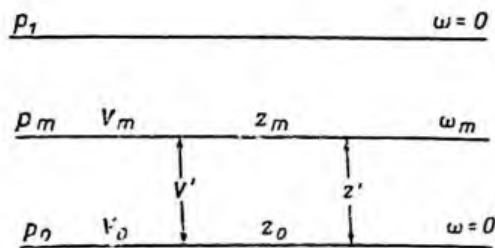


Рис. 3. Модель атмосферы по Сою-ру — Бушби.

Относительное движение (разность скоростей) между соседними слоями вызывает вертикальные движения, которые приводят к вертикальному переносу количества движения. Относительное движение зависит от толщины слоя z' , которая в свою очередь изменяется

под действием вертикальных токов. Это типичный пример эффекта обратной связи, который можно проследить на данной модели.

Ясно, что те же самые рассуждения можно применить и для построения моделей, использующих большее число слоев.

Теперь рассмотрим двухуровневую модель атмосферы, более реальную с физической точки зрения, чем рассмотренная выше. Такой моделью является, например, модель Союера и Бушби (1953). Схематически она представлена на рис. 3. В этой модели приняты следующие допущения: вертикальный

профиль скорости ветра (сдвиг ветра) в пределах тропосферы есть линейная функция давления; поток воздуха через уровни 1000 и 200 мб (т. е. вблизи поверхности земли и вблизи тропопаузы) мал, так что на этих уровнях ω исчезает. Оба эти предположения в статистическом смысле подтверждаются наблюдениями в средних широтах. Предполагается также, что параметр статической устойчивости $\frac{\partial T}{\partial p} - \frac{kT}{p}$ равен постоянной величине $-22^\circ \text{C}/500 \text{ мб}$. Эта цифра получена по данным большого числа подъемов над океанами и над сушей для различных сезонов.

Основная схема построения уравнений модели та же, что и в предыдущем случае: получить уравнения для среднего движения, а относительное движение в слое воздуха между уровнями 500 и 1000 мб связать с термодинамикой этого слоя.

Для удобства в качестве вертикальной координаты выберем величину α ,

$$\alpha = - \frac{2p - (p_0 + p_1)}{p_0 - p_1}, \quad (19)$$

так что α изменяется от -1 (при $p=p_0$) до $+1$ (при $p=p_1$).

Тогда

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_m + \alpha \mathbf{V}'; \quad (20)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \nabla \cdot \mathbf{V}_m + \alpha \nabla \cdot \mathbf{V}' = - \frac{\partial \omega}{\partial p}. \quad (21)$$

Интегрирование дает

$$\omega = \omega_m (1 - \alpha^2), \quad (22)$$

вместе с тем

$$\nabla \cdot \mathbf{V}_m = 0$$

и

$$\zeta = \zeta_m + \alpha \zeta'. \quad (23)$$

Поэтому уравнение вихря, если пренебречь малым членом $\mathbf{k} \cdot \nabla \omega \times \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial p}$, имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (\zeta_m + \alpha \zeta') + (\mathbf{V}_m + \alpha \mathbf{V}') \cdot \nabla (\zeta_m + \alpha \zeta') + \\ & + \omega_m (1 - \alpha^2) \frac{\partial (\zeta_m + \alpha \zeta')}{\partial p} = (\zeta_m + \alpha \zeta') \omega_m \frac{\partial}{\partial p} (1 - \alpha^2). \end{aligned} \quad (24)$$

Для того чтобы получить уравнения для осредненного по вертикали движения, проинтегрируем это уравнение по переменной p от $\alpha = -1$ до $\alpha = +1$. Имеем

$$\frac{\partial \zeta_m}{\partial t} + \mathbf{V}_m \cdot \nabla (\zeta_m + f) + \frac{1}{3} \mathbf{V}' \cdot \nabla \zeta' = - \frac{8\omega_m \zeta'}{3(p_0 - p_1)}. \quad (25)$$

Уравнение для относительного движения построим путем вычитания уравнения вихря для уровня 1000 мб из уравнения вихря для 200 мб:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\zeta_m + \zeta') + (\mathbf{V}_m + \mathbf{V}') \cdot \nabla (\zeta_m + \zeta' + f) &= \frac{2\omega_m (\zeta_m + \zeta' + f)}{p_0 - p_1}; \\ \frac{\partial}{\partial t} (\zeta_m - \zeta') + (\mathbf{V}_m - \mathbf{V}') \cdot \nabla (\zeta_m - \zeta' + f) &= \frac{-2\omega_m (\zeta_m + \zeta' + f)}{p_0 - p_1}, \end{aligned} \quad (26)$$

откуда

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial t} + \mathbf{V}_m \cdot \nabla \zeta' + \mathbf{V}' \cdot \nabla (\zeta_m + f) = \frac{4(\zeta_m + f)\omega_m}{p_0 - p_1}. \quad (27)$$

Наконец запишем уравнение термодинамики для слоя, расположенного между уровнями 1000 и 500 мб, предполагая, что движение адиабатическое:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z'}{\partial t} + \mathbf{V}_m \cdot \nabla z' + \frac{\omega_m R \Gamma}{g} \int_{-1}^0 \frac{(1-x^2)}{p} \frac{dp}{dz} dz \\ \text{или} \\ \frac{\partial z'}{\partial t} + \mathbf{V}_m \cdot \nabla z' = A \omega_m, \end{aligned} \quad (28)$$

где

$$A = \frac{R \Gamma}{g} \left\{ \frac{1}{2} \frac{p_0 + 3p_1}{p_0 - p_1} - \frac{4p_0 p_1}{(p_0 - p_1)^2} \log \frac{2p_0}{p_0 + p_1} \right\}.$$

Скорость ветра и вихрь скорости найдем из геострофического соотношения

$$\mathbf{V} = \frac{g}{f} \mathbf{k} \times \nabla z$$

и получим три уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial z'}{\partial t} + \frac{g}{f} J(z_m, z') &= A \omega_m; \\ \nabla^2 \frac{\partial z'}{\partial t} + J\left(z_m, \frac{g}{f} \nabla^2 z'\right) + J\left(z', \frac{g}{f} \nabla^2 z_m + f\right) &= \\ &= \frac{4\omega_m \left(\nabla^2 z_m + \frac{f^2}{g} \right)}{p_0 - p_1}; \\ \nabla^2 \frac{\partial z_m}{\partial t} + J\left(z_m, \frac{g}{f} \nabla^2 z_m + f\right) + \frac{1}{3} J\left(z', \frac{g}{f} \nabla^2 z'\right) &= \\ &= \frac{8\omega_m \nabla^2 z'}{3(p_0 - p_1)}. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Уравнения (29) очень похожи на те, которые мы вывели для простой двухуровневой модели.

Для того чтобы решить уравнения (29), исключим ω_m и получим уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \frac{\partial z'}{\partial t} - \frac{4 \left(\nabla^2 z_m + \frac{f^2}{g} \right)}{A(p_0 - p_1)} \frac{\partial z'}{\partial t} &= -J \left(z_m, \frac{g}{f} \nabla^2 z' \right) - \\ &- J \left(z', \frac{g}{f} \nabla^2 z_m + f \right) + \frac{4 \left(\nabla^2 z_m + \frac{f^2}{g} \right)}{A(p_0 - p_1)} J(z_m, z'); \\ \nabla^2 \frac{\partial z_m}{\partial t} &= -J \left(z_m, \frac{g}{f} \nabla^2 z_m + f \right) - \frac{1}{3} J \left(z', \frac{g}{f} \nabla^2 z' \right) + \\ &+ \frac{8 \nabla^2 z'}{3A(p_0 - p_1)} \left\{ \frac{\partial z'}{\partial t} + \frac{g}{f} J(z_m, z') \right\}; \\ \omega_m &= \frac{\frac{\partial z'}{\partial t} + \frac{g}{f} J(z_m, z')}{A}. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Если величины z' и z_m для некоторого момента известны, то значения правой части первого из выписанных уравнений можно легко рассчитать. Тогда это уравнение по отношению к $\frac{\partial z'}{\partial t}$ есть уравнение Гельмгольца, и оно может быть решено, если заданы соответствующие граничные условия. После нахождения $\frac{\partial z'}{\partial t}$ во всех точках сетки можно будет рассчитать значение правой части второго уравнения и затем решить его как уравнение Пуассона относительно $\frac{\partial z_m}{\partial t}$. Далее мы можем обычным путем найти значения z' и z_m во всех точках сетки для следующего момента и, повторяя все расчеты необходимое число раз, получить прогноз.

«Параметры увеличения» карты

Уравнения (30) описывают движение на сфере. До сих пор мы не заботились о том, чтобы выводимые нами уравнения соответствовали какому-либо конкретному виду карт, из числа применяемых в синоптической практике, например, таких, как стереографическая и конформная (равноугольная) проекции Ламберта. Конформные проекции обладают тем свойством, что некоторые дифференциальные операторы являются для них инвариантами; к числу таких операторов относятся следующие:

$$\begin{aligned} \nabla_s \psi &\rightarrow m \nabla_m \psi; \\ \nabla_s \cdot V &\rightarrow m^2 \nabla_m \cdot \frac{V}{m}; \\ \nabla_s \times V &\rightarrow m^2 \nabla_m \times \frac{V}{m}. \end{aligned}$$

Здесь символами ∇_s и ∇_m обозначены операторы на сфере и на проекции соответственно; m — «параметр увеличения» карты, определяемый как отношение некоторого малого расстояния на карте к соответствующему ему расстоянию на сфере. В дальнейшем мы будем использовать уравнения, модифицированные применительно к той или иной проекции. Поэтому мы заменим все уравнения модели, которые, как подразумевалось, описывали движение на сферической поверхности, уравнениями, описывающими движение в плоскости проекции.

Из записанных выше выражений можно легко видеть, что

$$\nabla_s^2 \dot{\psi} = \nabla_s \cdot \nabla_s \dot{\psi} \rightarrow m^2 \nabla_m \cdot \frac{1}{m} m \nabla_m \dot{\psi} = m^2 \nabla_m^2 \dot{\psi};$$

$$J_s(\alpha, \beta) = \mathbf{k}_m \cdot \nabla_s \alpha \times \nabla_s \beta \rightarrow m^2 \mathbf{k}_m \cdot \nabla_m \alpha \times \nabla_m \beta = m^2 J_m(\alpha, \beta).$$

Следовательно, мы можем модифицировать уравнения (30), записав их для движений в плоскости проекции:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \frac{\partial z'}{\partial t} - \frac{4 \left(\nabla^2 z_m + \frac{f^2}{gm^2} \right)}{A(p_0 - p_1)} \frac{\partial z'}{\partial t} &= -J \left(z_m, \frac{m^2 g}{f} \nabla^2 z' \right) - \\ &- J \left(z', \frac{m^2 g}{f} \nabla^2 z_m + f \right) + \frac{4 \left(m^2 \nabla^2 z_m + \frac{f^2}{g} \right) J(z_m, z')}{A(p_0 - p_1)}; \\ \nabla^2 \frac{\partial z_m}{\partial t} &= -J \left(z_m, \frac{m^2 g}{f} \nabla^2 z_m + f \right) - \frac{1}{3} J \left(z', \frac{m^2 g}{f} \nabla^2 z' \right) + \\ &+ \frac{8 \nabla^2 z' \left\{ \frac{\partial z'}{\partial t} + \frac{m^2 g}{f} J(z_m, z') \right\}}{3A(p_0 - p_1)}; \\ \omega_m &= \frac{\frac{\partial z'}{\partial t} + \frac{m^2 g}{f} J(z_m, z')}{A}. \end{aligned} \right\} (30^*)$$

Здесь все обозначения должны быть снабжены индексом m , однако он опускается, поскольку ясность от этого не страдает.

Может показаться удивительным, почему предпочитают использовать систему координат, заданную на спроектированной поверхности, а не на самой сфере. Дело в том, что при использовании уравнений в сферической системе координат очень трудно описать движение у полюса, где западный перенос исчезает и возникает разрыв меридиональной компоненты скорости. Однако еще более весомым является тот факт, что конечно-разностные аналоги наших уравнений, записанные в сферических координатах, сложнее, чем соответствующие выражения на плоскости, а поэтому для их решения требуется больше машинного времени. Наконец, неудобным является и

то, что в простейшей сетке, привязанной к сферическим координатам, узлы у полюса сближаются.

Чаще всего в метеорологии используются следующие три проекции карт: стереографическая, коническая равноугольная (ортоморфная) и проекция Меркатора.

Для того чтобы записать уравнения в той или иной проекции, необходимо вычислить m для каждой из них.

На стереографической проекции точка Q' соответствует точке Q (рис. 4). Если $pQ' = r$, то $r = 2a \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$;

$$dr = \sec^2 \frac{\theta}{2} a d\theta = \sec^2 \frac{\theta}{2} ds,$$

где ds — расстояние на сфере, соответствующее отрезку dr на плоскости. Отсюда

$$m = \sec^2 \frac{\theta}{2} = \frac{2}{1 + \cos \theta} = \frac{2}{1 + \sin \Phi}.$$

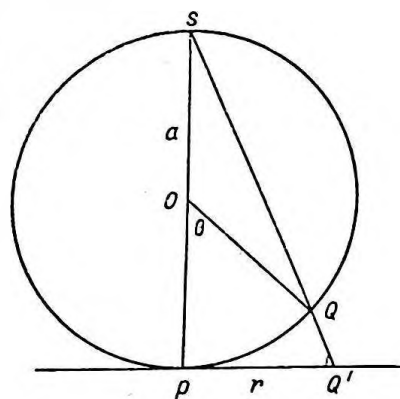


Рис. 4. Схема построения стереографической проекции.

Рассмотрим проекцию, такую, что точка (r, λ) на плоскости соответствует точке (a, θ, λ) на сфере.

Если проекция такова, что круг широты на сфере отображается на полную окружность в плоскости карты, то соотношения

$$ma \sin \theta = r, \quad ma d\theta = dr$$

определяют параметр m вдоль кругов широты и долготы соответственно.

Исключая a, m , имеем после интегрирования $r = c \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$.

Допустим, что мы потребовали, чтобы $m = 1$ при $\theta = \theta_0$. Тогда на этой широте

$$r = c \operatorname{tg} \frac{\theta_0}{2} = a \sin \theta_0, \quad \frac{c}{a} = \frac{\sin \theta_0}{\operatorname{tg} \frac{\theta_0}{2}}.$$

Далее

$$m = \frac{r}{a \sin \theta} = \frac{c \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{a \sin \theta} = \frac{\sin \theta_0 \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\theta_0}{2} \sin \theta} = \frac{\cos^2 \frac{\theta_0}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{1 + \cos \theta_0}{1 + \cos \theta}.$$

В частности, если $\theta_0 = 0$, то

$$m = \frac{2}{1 + \cos \theta},$$

т. е. в этом случае мы имеем стереографическую проекцию, являющуюся единственной равноугольной проекцией, которая изображает сферу в виде бесконечной плоскости.

Если круг широты на сфере при отображении на плоскость карты переходит не в полную окружность, а в n -ю часть окружности (дуги), то

$$ma \sin \theta = nr,$$

$$ma d\theta = dr,$$

$$r = c \operatorname{tg}^n \frac{\theta}{2}.$$

Если $m=1$ при $\theta=\theta_0$ и $\theta=\theta_1$, то

$$\frac{a \sin \theta_0}{n} = c \operatorname{tg}^n \frac{\theta_0}{2}, \quad \frac{a \sin \theta_1}{n} = c \operatorname{tg}^n \frac{\theta_1}{2}$$

или

$$\frac{\sin \theta_0}{\sin \theta_1} = \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{\theta_0}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\theta_1}{2}} \right)^n.$$

Это выражение определяет показатель n . Далее,

$$m = \frac{nr}{a \sin \theta} = \frac{nc \operatorname{tg}^n \frac{\theta}{2}}{a \sin \theta} = \frac{\operatorname{tg}^n \frac{\theta}{2}}{\sin \theta} \frac{\sin \theta_0}{\operatorname{tg}^n \frac{\theta_0}{2}}.$$

Ясно, что рассматриваемый случай соответствует конической равноугольной проекции, которая сечет сферу по кругам широты Φ_0 и Φ_1 .

Когда $\theta=\theta_0$, мы имеем на этой широте

$$a \sin \theta_0 = nr;$$

$$a \operatorname{tg} \theta_0 = r,$$

так что

$$n = \cos \theta_0;$$

$$m = \frac{\sin \theta_0 \operatorname{tg}^n \frac{\theta}{2}}{\operatorname{tg}^n \frac{\theta_0}{2} \sin \theta}.$$

Наконец, когда $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, мы имеем меркаторскую проекцию и

$$m = \frac{1}{\sin \theta} = \sec \Phi.$$

Все конформные проекции представляют собой конформные преобразования стереографической проекции. Если точка z

лежит в плоскости стереографической проекции, а точка ω — в плоскости конической равноугольной проекции, то

$$\omega = Az^n.$$

Решение уравнений для двухуровневой модели

Рассмотрим теперь более подробно двухуровневую модель. С помощью уравнений (30*) можно выполнить расчеты на плоскости, являющейся проекцией сферической поверхности, с учетом параметра увеличения карты. Эти уравнения можно записать в виде

$$\begin{aligned} \nabla^2 \frac{\partial z'}{\partial t} - \lambda \frac{\partial z'}{\partial t} &= F; \\ \nabla^2 \frac{\partial z_m}{\partial t} - \mu \frac{\partial z_m}{\partial t} &= G, \end{aligned} \quad (31)$$

где λ , μ , F , G — известные функции z_m и z' . Для того чтобы приступить к расчетам, мы должны знать z_m и z' по всей области, для которой должен быть выдан прогноз. Следовательно, нашими исходными данными должны быть проанализированные карты z_m и z' . Аэрологические наблюдения производятся в 00 час. и 12 час. среднего гринвичского времени (GMT), т. е. в 03 и 15 час. московского времени. Предположим, что мы хотим дать прогноз, исходя из наблюдений, сделанных в 00 час. GMT. Тогда мы должны прежде всего проанализировать высотные карты за 00 час. GMT для того, чтобы получить распределение абсолютных (z_m) и относительных (z') высот барической топографии в пределах района, по которому дается прогноз. В нашей модели z_m — высота изобарической поверхности $p_m = 600$ мб, а z' — толщина слоя между поверхностями 1000 и 600 мб. Однако практически мы не располагаем данными о высоте изобарической поверхности 600 мб. Поэтому мы воспользуемся данными о высотах поверхностей 1000 и 500 мб. Если z_0 и z_5 — высоты изобарических поверхностей 1000 и 500 мб, то в качестве z_m мы возьмем величину $z_m = z_0 + \frac{4}{5}(z_5 - z_0)$, а в качестве z' величину $z' = \frac{4}{5}(z_5 - z_0)$. Эта аппроксимация, конечно, груба для значений самих высот барической топографии, но вполне приемлема для их градиентов, которые собственно и фигурируют в уравнениях.

Уравнения (31) решаются относительно $\frac{\partial z'}{\partial t}$ и $\frac{\partial z_m}{\partial t}$ конечно-разностными или интегральными методами с обычной разбивкой всего интервала времени на шаги. В результате находят значения z' и z_m во всей рассматриваемой области для последовательных моментов времени, а в конечном счете — прогностические значения, скажем, на 24 часа вперед. Далее по полученным прогностическим значениям z' и z_m рассчиты-

ваем величины z_5 и z_0 , используя при этом приведенные выше соотношения. Таким образом получается прогноз высот поверхностей 500 и 1000 мб. Далее по значениям высот поверхности 1000 мб однозначно определяется давление на уровне моря. Итак, в качестве исходных данных для прогноза можно использовать значения высоты поверхности 500 мб и давление на уровне моря (которое связано с высотой поверхности 1000 мб).

В данной модели учтена вертикальная структура нижней части тропосферы и лишь косвенно — структура остальной (верхней) части тропосферы. Именно, принимается, что обе указанные части тропосферы обладают подобной вертикальной структурой. Во всяком случае, реальные данные, относящиеся к высоким уровням атмосферы, здесь не используются. Прогноз получается только для нижней части тропосферы. Однако формально модель может быть использована и для прогноза в верхней части тропосферы (так как структура этих слоев косвенно учтена в данной модели). Поскольку, однако, данные по верхней тропосфере в модели не используются, то соответствующие прогнозы вряд ли могут быть удовлетворительными. Поэтому целесообразно дальнейшее развитие модели, направленное на учет процессов в верхней части тропосферы. Это, в частности, необходимо для того, чтобы иметь возможность давать прогноз высоты поверхности 200 мб; прогнозы на этом уровне весьма важны для метеорологического обеспечения авиации. Кроме того, такая модель позволит учесть реально существующее взаимное влияние процессов в верхних и нижних слоях тропосферы.

Уравнения (31) являются типичными для всех двухуровневых моделей. Отдельные модели могут различаться лишь значением параметров λ , μ , F , G . В уравнениях всегда должны быть члены с $\nabla^2 \frac{\partial z_m}{\partial t}$ и $\nabla^2 \frac{\partial z'}{\partial t}$, если используется уравнение вихря в геострофическом приближении.

Весьма существенным является то, что в рамках любой двухуровневой модели термодинамика не может быть учтена с достаточной точностью. Это обстоятельство связано с тем, что в двухуровневых моделях рассматривается только один слой, заключенный между изобарическими поверхностями. Это в свою очередь дает нам возможность использовать только один параметр ω_m для описания изменения вертикальной скорости с высотой. Иными словами, вертикальная скорость может быть представлена в виде $\omega = \omega_m f(p)$, но не может быть аппроксимирована так: $\omega = \omega_1 f_1(p) + \omega_2 f_2(p)$. В уравнение термодинамики вертикальная скорость входит линейно, и поэтому при исключении последней с помощью этого уравнения всегда появляется член с $\frac{\partial z'}{\partial t}$.

Предположим, что мы хотим построить модель атмосферы, состоящей из двух слоев и, следовательно, из трех поверхностей, ограничивающих эти слои.

Обозначим толщины двух слоев (их относительную топографию) через z' и z'' , а среднюю высоту абсолютной барической топографии через z_m . Тогда из уравнений движения получим уравнения, содержащие $\nabla^2 \frac{\partial z'}{\partial t}$, $\nabla^2 \frac{\partial z''}{\partial t}$, $\nabla^2 \frac{\partial z_m}{\partial t}$.

Термодинамические соотношения для двух слоев дадут связь $\frac{\partial z'}{\partial t}$ и $\frac{\partial z''}{\partial t}$ с величинами ω' и ω'' , т. е. с параметрами, определяющими вертикальные скорости в этих двух слоях.

Исключая ω' , ω'' , получим

$$\begin{aligned}\nabla^2 \frac{\partial z'}{\partial t} + A \frac{\partial z'}{\partial t} + B \frac{\partial z''}{\partial t} + C &= 0; \\ \nabla^2 \frac{\partial z''}{\partial t} + E \frac{\partial z'}{\partial t} + F \frac{\partial z''}{\partial t} + G &= 0; \\ \nabla^2 \frac{\partial z_m}{\partial t} + L \frac{\partial z'}{\partial t} + M \frac{\partial z''}{\partial t} + N &= 0,\end{aligned}$$

где $A, B, C, E, F, G, L, M, N$ — известные функции z_m, z' и z'' (т. е. суммы якобианов типа $J(z'', \frac{g}{f} \nabla^2 z'')$).

Использование функции тока

При работе с баротропной моделью обнаружилось, что использование функции тока для определения горизонтальных составляющих ветра ведет к улучшению прогнозов. Если ввести функцию тока, получим

$$\mathbf{V} = \mathbf{k} \times \nabla \psi, \quad \zeta = \nabla^2 \psi, \quad \mathbf{V} \cdot \nabla \dots = J(\psi, \dots). \quad (32)$$

Тогда из уравнений (25), (27) и (28) имеем

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \frac{\partial \psi_m}{\partial t} + J(\psi_m, \nabla^2 \psi_m + f) + \\ + \frac{1}{3} J(\psi', \nabla^2 \psi') &= \frac{8\omega_m \nabla^2 \psi'}{3(p_0 - p_1)}; \\ \nabla^2 \frac{\partial \psi'}{\partial t} + J(\psi_m, \nabla^2 \psi') + J(\psi', \nabla^2 \psi_m + f) &= \\ &= \frac{4\omega_m (\nabla^2 \psi_m + f)}{p_0 - p_1}; \\ \frac{\partial z'}{\partial t} + J(\psi, z') &= A\omega_m. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Уравнения (33) содержат четыре неизвестные функции $\frac{\partial \psi_m}{\partial t}$, $\frac{\partial \psi'}{\partial t}$, $\frac{\partial z'}{\partial t}$ и ω_m . Поэтому нам необходимо дополнительное соотношение, связывающее между собой величины z' , ψ_m и ψ' . Существуют различные способы установления таких соотношений. Можно, например, воспользоваться тем, что вертикальный сдвиг ветра приближенно равен геострофическому термическому ветру:

$$V' = k \times \nabla \psi' \approx \frac{g}{f} k \times \nabla z' \approx \frac{g}{f} k \times \nabla z'$$

или

$$\psi' \sim \frac{gz'}{f}. \quad (34)$$

Поскольку

$$V' = \frac{g}{f} k \times \nabla z', \quad V_m = k \times \nabla \psi_m,$$

уравнения (25), (27) и (28) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \frac{\partial \psi_m}{\partial t} + J(\psi_m, \nabla^2 \psi_m + f) + \frac{g}{f} J(z', \frac{g}{f} \nabla^2 z' + f) &= \\ &= \frac{8\omega_m g \nabla^2 z'}{3f(p_0 - p_1)}; \\ \nabla^2 \frac{\partial z'}{\partial t} + \frac{f}{g} J(\psi_m, \frac{g}{f} \nabla^2 z') + J(z', \nabla^2 \psi_m + f) &= \\ &= \frac{4\omega_m (\nabla^2 \psi_m + f)}{p_0 - p_1}; \\ \frac{\partial z'}{\partial t} + J(\psi_m, z') &= A\omega_m. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Эти уравнения очень похожи на те, которые были получены в модели Сойера — Бушби. Для того чтобы начать расчеты, мы должны знать z' и ψ_m . При этом z' известно из наблюдений, а ψ_m получается из уравнения баланса

$$2 \left\{ \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \psi_m}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} + \nabla \cdot f \nabla \psi_m = g \nabla^2 z_m. \quad (36)$$

Окончательный прогноз содержит новые значения ψ_m и z' ; по значениям ψ_m значения z_m находятся с помощью уравнения (36), которое является уравнением Пуассона относительно z_m , если только функция ψ_m известна.

Трехуровневая модель атмосферы

Рассмотрим теперь трехуровневую модель, которая является естественным развитием двухуровневой модели Сойера — Бушби.

Задача заключается в том, чтобы отказаться от предположения о подобии в структуре атмосферы выше и ниже уровня p_m . Таким образом, сдвиг ветра в верхнем слое теперь принимается равным V'' , а не V' ; параметр устойчивости в верхнем слое теперь будет σ'' и т. д. (рис. 5).

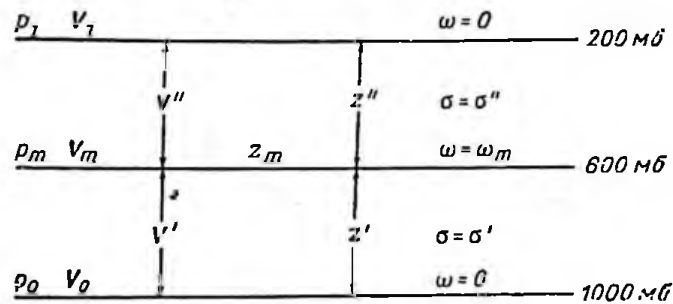


Рис. 5. Трехуровневая модель атмосферы.

Используя введенную выше величину

$$\alpha = \frac{2p - (p_1 + p_0)}{p_0 - p_1},$$

имеем

$$\begin{aligned} V &= V_m + \alpha V', & -1 \leq \alpha \leq 0; \\ V &= V_m + \alpha V'', & 0 \leq \alpha \leq 1, \end{aligned} \quad (37)$$

а отсюда, обозначая

$$\nabla \cdot V = D,$$

имеем

$$\begin{aligned} D &= D_m + \alpha D', & \zeta &= \zeta_m + \alpha \zeta', & -1 \leq \alpha \leq 0; \\ D &= D_m + \alpha D'', & \zeta &= \zeta_m + \alpha \zeta'', & 0 \leq \alpha \leq 1. \end{aligned} \quad (38)$$

Мы можем проинтегрировать эти уравнения для того, чтобы получить ω . Временно предположим, что $\omega = 0$ на уровнях $p = p_0$ и $p = p_1$.

Если ω_U и ω_L — вертикальные скорости в верхнем и нижнем слоях, то $\omega_U = -a + ba + (a-b)\alpha^2$ (обращается в нуль при $\alpha = 1$); $\omega_L = -c + da + (c+d)\alpha^2$ (обращается в нуль при $\alpha = -1$).

Кроме того, при $\alpha = 0$ имеем

$$\omega_U = \omega_L, \quad \frac{\partial \omega_U}{\partial x} = \frac{\partial \omega_L}{\partial x}.$$

Таким образом, профиль вертикальной скорости будет иметь вид

$$\begin{aligned}\omega &= -a + bx + (a+b)x^2, & -1 \leq x \leq 0, \\ \omega &= -a + bx + (a-b)x^2, & 0 \leq x \leq 1.\end{aligned}\quad (39)$$

Общий вид уравнения вихря предполагается следующим:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla (\zeta + f) + \omega \frac{\partial \zeta}{\partial p} = (\zeta + f) \frac{\partial \omega}{\partial p}. \quad (40)$$

Основная идея заключается в получении уравнений, подобных тем, которые использовались в двухуровневой модели. Осредненное (по вертикали) уравнение вихря получим интегрированием уравнения (40) в слое от p_0 до p_1 . Два уравнения вихря для относительного движения получим для верхнего и нижнего слоев (путем вычитания уравнения вихря для уровня p_m из соответствующего уравнения для уровня p_1 и т. д.). Наконец, два уравнения термодинамики получим для двух слоев с разными термическими характеристиками.

Осредненное по вертикали уравнение вихря получим, интегрируя уравнение (40) по α от $\alpha = -1$ до $\alpha = +1$; при этом вспомним, что

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_m + \alpha \mathbf{V}'$$

в нижнем слое (т. е. при $-1 \leq \alpha \leq 0$) и

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_m + \alpha \mathbf{V}''$$

в верхнем слое (т. е. при $0 \leq \alpha \leq 1$).

Таким образом,

$$\begin{aligned}& \int_{-1}^0 \left[\frac{\partial}{\partial t} (\zeta_m + \alpha \zeta') + (\mathbf{V}_m + \alpha \mathbf{V}') \cdot \nabla (\zeta_m + \alpha \zeta' + f) + \right. \\& + \{-a + bx + (a+b)x^2\} \zeta' \frac{dx}{dp} - (\zeta_m + \alpha \zeta' + f) \times \\& \times \{b + 2(a+b)x\} \frac{dp}{dx} \Big] dx + \int_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial t} (\zeta_m + \alpha \zeta'') + \right. \\& + (\mathbf{V}_m + \alpha \mathbf{V}'') \cdot \nabla (\zeta_m + \alpha \zeta'' + f) + \\& + \{-a + bx + (a-b)x^2\} \zeta'' \frac{dx}{dp} - \\& \left. - (\zeta_m + \alpha \zeta'' + f) \{b + 2(a-b)x\} \frac{dp}{dx} \right] dx = 0.\end{aligned}$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \zeta_m + \frac{\zeta'' - \zeta'}{4} \right\} + V_m \cdot \nabla \left\{ \zeta_m + \frac{\zeta'' - \zeta'}{4} + f \right\} + \frac{V'' - V'}{4} \cdot \nabla (\zeta_m + f) + \\ + \frac{1}{6} \{ V' \cdot \nabla \zeta' + V'' \cdot \nabla \zeta'' \} + \frac{4a(\zeta' + \zeta'') + b(\zeta' - \zeta'')}{3(p_0 - p_1)} = 0. \quad (41)$$

Уравнения вихря для трех уровней имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial t} (\zeta_m + \zeta'') + (V_m + V'') \cdot \nabla (\zeta_m + \zeta'' + f) = \\ = (\zeta_m + \zeta'' + f) (2a - b) \frac{dz}{dp}; \quad (42)$$

$$\frac{\partial \zeta_m}{\partial t} + V_m \cdot \nabla (\zeta_m + f) - a \zeta'' \frac{dz}{dp} = (\zeta_m + f) b \frac{dz}{dp}; \quad (43)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\zeta_m - \zeta') + (V_m - V') \cdot \nabla (\zeta_m - \zeta' + f) = \\ = -(\zeta_m - \zeta' + f) (2a + b) \frac{dz}{dp}. \quad (44)$$

После вычитания получим

$$\frac{\partial \zeta''}{\partial t} + V_m \cdot \nabla \zeta'' + V'' \cdot \nabla (\zeta_m + f) = -\frac{2(a-b)}{p_0 - p_1} \{ 2(\zeta_m + f) + \zeta'' \}; \quad (45)$$

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial t} + V_m \cdot \nabla \zeta' + V' \cdot \nabla (\zeta_m + f) = -\frac{2(a+b)}{p_0 - p_1} \{ 2(\zeta_m - f) - \zeta' \}. \quad (46)$$

Уравнения термодинамики для двух уровней имеют вид

$$\frac{\partial z''}{\partial t} + V_m \cdot \nabla z'' + \frac{R}{g} \int_{p_m}^{p_1} \frac{\sigma'' \omega}{p} dp = Q''; \\ \frac{\partial z'}{\partial t} + V_m \cdot \nabla z' + \frac{R}{g} \int_{p_0}^{p_m} \frac{\sigma' \omega}{p} dp = Q', \quad (47)$$

где Q' и Q'' — скорости изменения толщин слоев (т. е. относительной топографии) вследствие нагревания от внешних источников. Подставляя в уравнения (47) значения ω по формулам (39), получим

$$\frac{\partial z'}{\partial t} + V_m \cdot \nabla z' = Aa + Bb + Q'; \quad (48)$$

$$\frac{\partial z''}{\partial t} + V_m \cdot \nabla z'' = Ca + Db, \quad (49)$$

где A , B , C , D — довольно сложного вида константы, например,

$$A = \frac{R\gamma'}{2g(p_0 - p_1)^2} \left\{ 8p_0 p_1 \log \frac{p_0 + p_1}{2p_0} + (p_1 + 3p_0)(p_0 - p_1) \right\}.$$

Легко видеть, что уравнения (48) и (49) имеют как раз тот вид, который нам нужен. Величина Q' в правой части сохранена, так как имеется возможность с помощью некоторых эмпирических соотношений учесть влияние притока тепла к атмосфере во время прохождения воздуха над более теплым морем. Предполагается, что большая часть этого тепла остается в нижнем слое атмосферы.

Уравнения (48) и (49) можно рассматривать как систему для нахождения величин a и b . Получаемые таким путем значения a и b , являющиеся линейными функциями относительно $\frac{\partial z'}{\partial t}$ и $\frac{\partial z''}{\partial t}$, можно далее подставить в уравнения (41), (45) и (46). Приводить алгебраические выкладки было бы утомительным, но очевидным результатом является то, что правые части этих трех уравнений заменяются теперь членами, линейными относительно $\frac{\partial z'}{\partial t}$ и $\frac{\partial z''}{\partial t}$.

Теперь мы должны определить, как поле скорости связано с полем давления. Здесь возможно несколько вариантов. Мы определим скорость ветра, входящую в выражения для адвекции и для вихря (это единственные выражения, где в уравнениях появляется скорость ветра), следующим образом:

$$\mathbf{V}' = \frac{g}{f} \mathbf{k} \times \nabla z', \quad \mathbf{V}'' = \frac{g}{f} \mathbf{k} \times \nabla z'', \quad \mathbf{V}_m = \mathbf{k} \times \nabla \psi_m, \quad (50)$$

где ψ_m находится из уравнения баланса. Здесь первые два соотношения устанавливают, что сдвиг ветра эквивалентен термическому ветру и, таким образом, вычисляется по полю относительной топографии. Третье соотношение определяет связь между скоростью ветра на среднем уровне и функцией тока. Заметим, что из этого соотношения вовсе не следует, что ветер на данном уровне бездивергентен, так как далее дивергенция вычисляется не по полю ветра $\mathbf{V}_m$, а из уравнения неразрывности. Учитывая соотношения (50) и подставляя значения a и b , приводим уравнение (45) к виду

$$\begin{aligned} \frac{g}{f} \nabla^2 \frac{\partial z''}{\partial t} + J\left(\psi_m, \frac{g}{f} \nabla^2 z''\right) + \frac{g}{f} J(z'', \nabla^2 \psi_m + f) = \\ = A_1 \frac{\partial z'}{\partial t} + A_2 \frac{\partial z''}{\partial t} + A_3, \end{aligned}$$

где A_1 , A_2 и A_3 — известные функции от z' , z'' и ψ_m . Мы можем переписать уравнение, как и подобное же уравнение, полученное из уравнения (46), в виде

$$\begin{aligned}\nabla^2 \frac{\partial z'}{\partial t} + E \frac{\partial z'}{\partial t} + F \frac{\partial z''}{\partial t} + G &= 0; \\ \nabla^2 \frac{\partial z''}{\partial t} + L \frac{\partial z'}{\partial t} + M \frac{\partial z''}{\partial t} + N &= 0,\end{aligned}\quad (51)$$

где E , F , G , L , M и N — функции координат и величин z' , z'' и ψ_m . Уравнения (51) образуют систему, состоящую из уравнений Гельмгольца, решение которой дает величины $\frac{\partial z'}{\partial t}$, $\frac{\partial z''}{\partial t}$.

Уравнение (41) с учетом (50) принимает вид

$$\nabla^2 \frac{\partial \psi_m}{\partial t} + P \frac{\partial z'}{\partial t} + Q \frac{\partial z''}{\partial t} + R = 0. \quad (52)$$

Это уравнение Пуассона, если $\frac{\partial z'}{\partial t}$ и $\frac{\partial z''}{\partial t}$ уже найдены.

Уравнения (51) и (52) являются прогностическими уравнениями. Практически принимаем, что $p_0 = 1000$ мб, $p_1 = 200$ мб и $p_m = 600$ мб. Начальными данными для прогноза являются значения высот указанных трех изобарических поверхностей в точках сетки. Прежде всего определяется поле функции тока ψ_m по значениям z_m . Для этого используется уравнение баланса (36), для решения которого имеются хорошо известные методы. Далее вычисляются величины E , F , G , ..., R , являющиеся несложными функциями от значений функции тока и геопотенциала в узлах сетки. Одновременное решение двух уравнений Гельмгольца (51) позволяет определить значения $\frac{\partial z'}{\partial t}$ и $\frac{\partial z''}{\partial t}$ во всех точках сетки. Затем эти значения подставляются в уравнение (52), решение которого позволяет получить значения $\frac{\partial \psi_m}{\partial t}$ в точках сетки. Найденные тенденции используются для получения новых значений z' , z'' и ψ_m с помощью (17) и (18), после чего вся процедура может быть повторена необходимое число раз.

Введение граничных эффектов

Рассмотрим теперь вопрос о том, как изменятся эти уравнения, если существует дополнительная вертикальная скорость, связанная с некоторыми вынужденными движениями, причем на поверхности земли эта скорость имеет значение ω_0 , а с высотой (с давлением) меняется по заранее известному закону. Предполагается, что эта дополнительная вертикальная ско-

рость не столь велика, чтобы влиять на характер изменения горизонтальной скорости ветра с высотой. Определим, как в этом случае изменятся уравнения для модели Сойера — Бушби. Запишем

$$\omega = \omega_m (1 - \alpha^2) + \omega_0 F(\alpha) \quad (53)$$

и для наглядности положим

$$\begin{aligned} F(\alpha) &= -\alpha, & -1 \leq \alpha \leq 0, \\ F(\alpha) &= 0, & 0 \leq \alpha \leq 1. \end{aligned} \quad (54)$$

Уравнение вихря принимает вид (считаем, что $\zeta = \zeta_m + \alpha\zeta'$ и т. д.)

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla (\zeta + f) + \omega \frac{\partial \zeta}{\partial p} - (\zeta + f) \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0. \quad (6)$$

Вспоминая, что уравнение для осредненного движения было получено путем интегрирования по вертикали, замечаем, что при этом дополнительно появляются следующие члены:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \omega_0 \int_{-1}^{+1} \left\{ F(\alpha) \frac{\partial}{\partial p} (\zeta_m + \alpha\zeta') - \right. \\ & \left. - (\zeta_m + \alpha\zeta' + f) \frac{\partial F(\alpha)}{\partial p} \right\} d\alpha = \frac{1}{2} \omega_0 \times \frac{-2}{p_0 - p_1} \times \\ & \times \int_{-1}^0 \{-\alpha\zeta' + \zeta_m + f + \alpha\zeta'\} d\alpha = \frac{\omega_0 (\zeta_m + f)}{p_0 - p_1}. \end{aligned}$$

Уравнения вихря для верхней и нижней границ в этой модели будут иметь вид

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (\zeta_m + \alpha\zeta') + (\mathbf{V}_m + \alpha\mathbf{V}') \cdot \nabla (\zeta_m + \alpha\zeta' + f) + \\ & + \omega \frac{\partial}{\partial p} (\zeta_m + \alpha\zeta' + f) - (\zeta_m + \alpha\zeta' + f) \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \end{aligned}$$

при $\alpha = \pm 1$ соответственно. Уравнение для $\alpha = +1$ не изменяется, а уравнение для $\alpha = -1$ приобретает дополнительные члены

$$\{\omega_0 \zeta' + (\zeta_m + f - \zeta') \omega_0\} \times \frac{-2}{(p_0 - p_1)} = -\frac{2\omega_0 (\zeta_m + f)}{p_0 - p_1}.$$

Отсюда получаем, что уравнение вихря для относительных движений будет содержать в своей левой части дополнительный член

$$\frac{\omega_0 (\zeta_m + f)}{p_0 - p_1}.$$

Уравнение для относительной топографии имеет вид

$$\frac{\partial z'}{\partial t} + V_m \cdot \nabla z' + \frac{Rz}{g} \int_{-1}^0 \frac{\omega}{p} dz$$

и содержит дополнительный член

$$\frac{Rz}{g} \int_{-1}^0 - \frac{\omega_0 z dz}{p},$$

который обозначим через $-B\omega_0$.

Тогда уравнения модели будут иметь следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial z'}{\partial t} + V_m \cdot \nabla z' &= A\omega_m + B\omega_0; \\ \nabla^2 \frac{\partial z'}{\partial t} + J\left(z_m, \frac{g}{f} \nabla^2 z'\right) + J\left(z', \frac{g}{f} \nabla^2 z_m + f\right) &= \\ &= \frac{(4\omega_m - 2\omega_0)(z_m + f)}{p_0 - p_1}; \\ \nabla^2 \frac{\partial z_m}{\partial t} + J\left(z_m, \frac{g}{f} \nabla^2 z_m + f\right) + \frac{1}{3} J\left(z', \frac{g}{f} \nabla^2 z'\right) &= \\ &= -\frac{8\omega_m}{3(p_0 - p_1)} - \frac{\omega_0(z_m + f)}{p_0 - p_1}. \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

При условии, что в пределах области прогноза величина ω_0 известна в каждой точке земной поверхности, эта система решается точно так же, как и уравнения (29); новых вычислительных проблем здесь не возникает.

Рассмотрим теперь вынужденный поток воздуха, связанный с особенностями топографии. Предположим, что H представляет собой высоту рельефа земной поверхности, причем поток обтекает препятствие, следуя его очертаниям. Тогда, если V_H — горизонтальная скорость ветра на уровне H , то существует вынужденная вертикальная скорость, которая выражается так:

$$\omega = V_H \cdot \nabla H. \quad (56)$$

Предполагая, что высоты H невелики, мы можем приближенно записать вертикальную скорость на нижней изобарической поверхности нашей модели в виде

$$\omega_0 = -g_0 V_0 \cdot \nabla H. \quad (57)$$

Поскольку величина V_0 известна как один из результатов вычислений, а ∇H также известно, то величина ω_0 определена во всех точках. Конечно, здесь было сделано множество предположений, справедливость которых может быть подвергнута сомнению (если они вообще законны). Наилучшей проверкой справедливости этих предположений является рассмотрение того влияния, которое они оказывают на результаты прогноза.

Рассмотрим теперь влияние трения у поверхности земли на движение в свободной атмосфере. Обычно трение приводит к отклонению потока воздуха от направления изобар, так что в нижних слоях тропосферы скорость ветра приобретает дополнительную составляющую, направленную поперек изобар в сторону низкого давления. Эта дополнительная составляющая скорости ветра приводит к появлению вынужденной вертикальной скорости на верхней границе слоя трения. Наиболее просто это можно видеть из следующего рассмотрения. Пусть пограничный слой расположен ниже уровня p_0 . Скорость ветра внутри слоя трения может быть выражена через скорость ветра V_0 на верхней границе этого слоя соотношением

$$V = \alpha \cos \beta V_0 + \alpha \sin \beta k \times V_0, \quad (58)$$

т. е. вектор ветра V представляет собой вектор V_0 , умноженный на α и повернутый на угол β .

Тогда

$$\begin{aligned} \nabla \cdot V &= \alpha \cos \beta \nabla \cdot V_0 + V_0 \cdot \nabla (\alpha \cos \beta) + \\ &+ \alpha \sin \beta \nabla \cdot k \times V_0 + k \cdot \nabla (\alpha \sin \beta) \times V_0. \end{aligned} \quad (59)$$

Интегрируя обе части этого равенства по всей толщине пограничного слоя (т. е. снизу вверх до уровня p_0), получим

$$\omega_0 = A \nabla \cdot V_0 + V_0 \cdot \nabla A + B \zeta_0 + k \cdot \nabla B \times V_0, \quad (60)$$

где

$$A = \int_{p_0}^p \alpha \cos \beta dp, \quad B = \int_{p_0}^p \alpha \sin \beta dp.$$

Параметры α и β определяются методами теории турбулентности, V_0 предсказывается прогностической моделью и, следовательно, величина ω_0 может быть вычислена. Здесь ∇A и ∇B представляют собой горизонтальные градиенты силы трения, зависящие от свойств подстилающей поверхности. Эти градиенты малы везде, за исключением береговых линий. Основным членом является $B \zeta_0$.

Мы изложили лишь основные принципы расчета вынужденной вертикальной скорости. В действительности расчет этих скоростей производится на основе более сложной теории. Для определения оптимальных значений параметров был проведен ряд экспериментов. Исследовалось также изменение вынужден-

ной вертикальной скорости с высотой. Учет влияния орографии и приземного трения был с успехом осуществлен в рамках трехуровневных моделей.

Численное решение задачи

До сих пор мы ограничивались выводом дифференциальных уравнений, почти ничего не говоря о способах их решения, разве только упоминая, что они должны быть решены в точках дискретной сетки.

Применение уравнения вихря в прогностических моделях обычно приводит к дифференциальным уравнениям Пуассона $\nabla^2 u = F$ и Гельмгольца $\nabla^2 u + qu = F$.

Имеются различные методы решения этих уравнений. Поскольку данные уравнения линейны, они могут быть решены методом функций Грина. В этом разделе мы рассмотрим один из простейших применяемых на практике разностных методов решения следующих уравнений:

$$2(\psi_{xx}\psi_{yy} - \psi_{xy}^2) + \tau \cdot f \nabla^2 \psi = g \nabla^2 z; \quad (36)$$

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \frac{\partial z'}{\partial t} + E \frac{\partial z'}{\partial t} + F \frac{\partial z''}{\partial t} + G &= 0; \\ \nabla^2 \frac{\partial z''}{\partial t} + L \frac{\partial z'}{\partial t} + M \frac{\partial z''}{\partial t} + N &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

$$\nabla^2 \frac{\partial \psi}{\partial t} + P \frac{\partial z'}{\partial t} + Q \frac{\partial z''}{\partial t} + R = 0. \quad (52)$$

Расчеты ведутся в точках сетки с шагом h ; часть этой сетки дана на рис. 6, где указана принятая нумерация точек. Приписывая некоторую величину точке 0, мы в действительности будем иметь в виду эту же величину, осредненную по окружающему данную точку квадрату со стороной h и по интервалу времени τ , равному шагу по времени. Понятно, что при этом шаг по времени τ не должен быть настолько большим, чтобы за время τ частица воздуха могла бы пересечь этот квадрат. Следовательно, максимальная скорость V должна быть связана следующим соотношением с величиной шага по времени и шагом сетки:

$$V\tau \leq \sqrt{2}h.$$

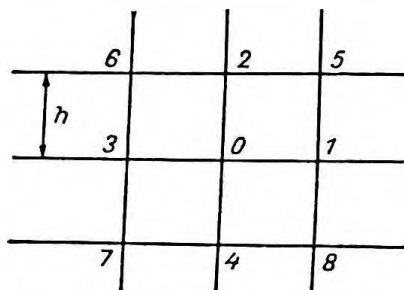


Рис. 6. Нумерация точек квадратной сетки.

При расчете величины E (и других коэффициентов) в уравнениях (51) и (52) будем использовать приближенное представление для производных:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\Phi_1 - \Phi_3}{2h}, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{\Phi_1 + \Phi_3 - 2\Phi_0}{h^2};$$

$$J(x, y) = \frac{(x_1 - x_3)(y_2 - y_4) - (y_1 - y_3)(x_2 - x_4)}{4h^2}.$$

В ряде случаев применяются и более сложные представления.

Для численного решения дифференциальных уравнений необходимы методы, обеспечивающие достаточную быстроту счета и сходимость численного решения к точному. Быстрота счета особенно важна для оперативных прогнозов. Методы решения, наиболее пригодные при использовании машин, могут и не быть наилучшими также и при других средствах вычислений. Ниже мы будем рассматривать методы, оказавшиеся удобными для расчетов с помощью машин, использовавшихся нами на практике.

Наши исследования показали, что методы попеременных направлений с имплицитными разностями (ПНИ) весьма удобны для решения дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа (а также уравнений других типов). Этот метод мы поясним на примере численного решения типичного уравнения Гельмгольца.

$$-u_{xx} - u_{yy} + Gu = S(x, y), \quad G \geq 0. \quad (61)$$

Запишем это уравнение для некоторой точки сетки (см. рис. 6) в виде

$$[-u_3 + 2u_0 - u_1] + [-u_2 + 2u_0 - u_4] + cu = h^2 S, \quad (62)$$

где

$$c = Gh^2.$$

Идея метода ПНИ состоит в том, чтобы решать уравнение, производя обсчет точек сначала вдоль строк сетки, а затем вдоль столбцов, многократно повторяя эту процедуру по схеме:

$$\begin{aligned} & [-u_3 + (2 + \frac{c}{2} + r)u_0 - u_1]_{2n+1} = \\ & = [u_2 - (2 + \frac{c}{2} - r)u_0 + u_4]_{2n} + h^2 S; \end{aligned} \quad (63)$$

$$\begin{aligned} & [-u_2 + (2 + \frac{c}{2} + r)u_0 - u_4]_{2n+2} = \\ & = [u_3 - (2 + \frac{c}{2} - r)u_0 + u_1]_{2n+1} + h^2 S, \end{aligned} \quad (64)$$

где n — номер итерации.

Численное решение уравнений (63) и (64) на машине весьма просто и требует мало времени. Пусть во всех точках сетки имеем нулевое приближение для решения ($n=0$). Тогда, производя с помощью (63) расчеты для последовательно расположенных точек каждой строки, получаем решение в первом приближении во всех точках сетки. Затем с помощью (64) получаем второе приближение путем обхода последовательно расположенных точек каждого из столбцов. Далее с помощью (63) получаем третье приближение и т. д. Параметр r в (63) и (64) выбирается таким, чтобы обеспечивалась наиболее быстрая сходимость. Уравнения (63) и (64) записаны в предположении, что r является величиной постоянной, однако практически этот параметр выбирается изменяющимся от итерации к итерации (так что его следует обозначать r_{2n}), и основная трудность состоит в оптимальном выборе r . Существует алгоритм для определения оптимальных значений r в зависимости от размеров сетки, а также от особенностей решаемого уравнения. Практически при решении уравнений Пуассона для сетки, содержащей 40×30 точек, мы используем восемь последовательных значений r .

Теперь рассмотрим решение уравнения баланса (36), которое перепишем так:

$$\nabla^2 \psi + \alpha^2 f = [(\nabla^2 \psi)^2 + \alpha^4 f^2 + 4\alpha^2 (\psi_{xx}^2 - \psi_{xx}\psi_{yy}) + 2\alpha^2 (g\nabla^2 z - \nabla \psi \cdot \nabla f)]^{\frac{1}{2}}, \quad (65)$$

где α — любое число. Здесь искомой величиной является функция тока ψ .

Записывая это уравнение в конечных разностях с использованием типичного расположения точек (рис. 6), замечаем, что значение ψ_0 будет присутствовать в обеих частях уравнения.

Подставляя в правую часть (65) некоторое заданное приближение для ψ , мы приходим к уравнению Пуассона для определения ψ в следующем приближении. Это уравнение может быть решено методом ПНИ. Затем с учетом полученного приближения для ψ заново рассчитывается правая часть уравнения (65) и т. д. Поскольку, однако, извлечение квадратного корня — весьма длительная процедура, для сокращения времени счета значение правой части (65) сохраняется неизменным на протяжении восьми последовательных итераций и только потом пересчитывается с учетом новых значений ψ . Так решается уравнение (36) для определения начального значения функции тока ψ по полю геопотенциала z .

Это же уравнение используется и для расчета поля геопотенциала по прогнозированным значениям функции тока. Но

тогда это обычное уравнение Пуассона, которое решается без труда.

Укажем еще способ численного решения системы уравнений (51), содержащей два уравнения Гельмгольца. Обозначая

$$Z' = \frac{\partial z'}{\partial t}; \quad Z'' = \frac{\partial z''}{\partial t},$$

запишем (51) с помощью простых конечных разностей:

$$(h^2 E - 4) Z'_0 + h^2 F Z'_0 + h^2 G + Z'_1 + Z'_2 + Z'_3 + Z'_4 = 0;$$

$$h^2 L Z'_0 + (h^2 M - 4) Z''_0 + h^2 N + Z''_1 + Z''_2 + Z''_3 + Z''_4 = 0.$$

Эти уравнения позволяют записать явные выражения для Z'_0 и Z''_0 через значения Z' и Z'' в окружающих точках сетки, и тогда численное решение легко получается обычным методом Либмана.

После того как $\frac{\partial z'}{\partial t}$ и $\frac{\partial z''}{\partial t}$ определены, они подставляются в уравнение (52), которое тогда становится уравнением Пуассона относительно $\frac{\partial \psi}{\partial t}$. Уравнение решается методом ПНИ.

В. П. САДОВОВ

**НЕКОТОРЫЕ КВАЗИГЕОСТРОФИЧЕСКИЕ
И КВАЗИСОЛЕНОИДАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ ПРОГНОЗА.
УЧЕТ ОРОГРАФИИ, ТРЕНИЯ И ИСТОЧНИКОВ ТЕПЛА
В ПРОГНОСТИЧЕСКИХ СХЕМАХ**

1. Политропная модель. Работа И. А. Кибеля, 1940 г.

Политропные модели являются наиболее простыми с физической точки зрения. И вполне понятно, что первые численные модели прогноза метеорологических элементов в бароклинной атмосфере были политропными. Еще в 1940 г. И. А. Кибелем была разработана численная схема прогноза, в которой для политропной атмосферы были заложены все основные черты, свойственные современным квазигеострофическим моделям.

При получении прогностических формул И. А. Кибелем была применена процедура последовательных приближений. Идея этой процедуры подсказывалась синоптической практикой. Известный факт близости направления вектора ветра и направления касательной к изогипсе на высотных картах говорит о том, что существует главный квазистационарный процесс в атмосфере. На этот главный процесс накладываются более мелкие, нестационарные процессы, порождающие в совокупности многообразие атмосферных явлений. Учитывая этот факт и принимая во внимание порядок величины членов в уравнениях движения, Кибель пришел к выводу, что в качестве первого приближения следует рассматривать геострофические соотношения.

Эти соотношения используются при описании процессов в свободной атмосфере. Нижней границей рассматриваемой области будет верхняя граница пограничного слоя. Процессы в пограничном слое могут рассматриваться независимо от процессов в свободной атмосфере. Эта идея обобщения метода пограничного слоя, используемого в аэродинамике, послужила основой для многих исследований по взаимодействию пограничного слоя со свободной атмосферой.

И. А. Кибель пренебрег влиянием пограничного слоя на свободную атмосферу и радиационными процессами во всей атмо-

сфере, в том числе и вне пограничного слоя. Таким образом, в методе Кибеля сделаны допущения, обычно принимаемые в современных адиабатических моделях атмосферы.

Вернемся к геострофическим соотношениям, которые в указанной теории брались в качестве первого приближения. Геострофические соотношения позволяют установить связь поля ветра с полем давления и исключить в уравнениях гидродинамики ветер, заменив его давлением. Это тем более удобно, что ветер в природе измеряется с невысокой точностью и его использование в расчетных формулах может приводить к большим ошибкам.

Итак, рассмотрим следующую систему уравнений: уравнения движения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f v; \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - f u; \quad (2)$$

уравнение статики

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g; \quad (3)$$

уравнение притока тепла

$$\begin{aligned} & \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} - \\ & - \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{T}{p} \left(\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 0; \end{aligned} \quad (4)$$

уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0; \quad (5)$$

уравнение состояния

$$p = \rho R T.$$

И. А. Кибель рассматривал атмосферу от уровня земли (точнее, от верхней границы пограничного слоя) до высоты тропопаузы. На уровне тропопаузы ставилось условие свободной поверхности, т. е. предполагалось, что тропопауза все время состоит из одних и тех же частиц.

Если высоту тропопаузы обозначить через h , то уравнение притока тепла на этом уровне запишется следующим образом:

$$\frac{\partial T_h}{\partial t} + u_h \frac{\partial T_h}{\partial x} + v_h \frac{\partial T_h}{\partial y} = 0. \quad (6)$$

Это уравнение получается, если положить в (4) $\frac{dp_h}{dt} = 0$ и отбросить слагаемое $w \frac{\partial T_h}{\partial z}$ в виду малости вертикального градиента температуры на уровне тропопаузы.

Мы уже отмечали, что рассматриваемая задача решается методом последовательных приближений. Суть его заключается в том, что скорости u и v заменяются на

$$u = u_g + u', \quad v = v_g + v',$$

где

$$u_g = -\frac{1}{f} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad v_g = \frac{1}{f} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (7)$$

— составляющие геострофического ветра, принимаемые в качестве первого приближения, а

$$\begin{aligned} u' = & -\frac{1}{f} \left[\frac{\partial (v_g + v')}{\partial t} + (u_g + u') \frac{\partial (v_g + v')}{\partial x} + \right. \\ & \left. + (v_g + v') \frac{\partial (v_g + v')}{\partial y} \right]; \\ v' = & \frac{1}{f} \left[\frac{\partial (u_g + u')}{\partial t} + (u_g + u') \frac{\partial (u_g + u')}{\partial x} + \right. \\ & \left. + (v_g + v') \frac{\partial (u_g + u')}{\partial y} \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Система уравнений (8) вместе с соотношениями (7) позволяет в принципе найти u' и v' с помощью метода последовательных приближений.

И. А. Кибель рассмотрел и второе приближение, полагая u' и v' в правых частях (8), равными нулю, т. е.

$$\begin{aligned} u' = & -\frac{1}{f} \left(\frac{\partial v_g}{\partial t} + u_g \frac{\partial v_g}{\partial x} + v_g \frac{\partial v_g}{\partial y} \right), \\ v' = & \frac{1}{f} \left(\frac{\partial u_g}{\partial t} + u_g \frac{\partial u_g}{\partial x} + v_g \frac{\partial u_g}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Вертикальная компонента скорости при этом найдется из уравнения неразрывности

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial p u}{\partial x} - \frac{\partial p v}{\partial y}.$$

Интегрируем это уравнение от нуля до некоторой высоты z

$$\omega = -\frac{1}{\rho} \int_0^z \frac{\partial \rho}{\partial t} dz' + \omega', \quad (10)$$

где

$$\omega' = -\frac{1}{\rho} \int_0^z \rho \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} \right) dz'.$$

Здесь мы пренебрегли логарифмической производной от ρ по x и y , а также членом, содержащим $\partial f / \partial y$.

Рассмотрим интеграл

$$-\frac{1}{\rho} \int_0^z \frac{\partial \rho}{\partial t} dz' = \frac{RT}{gp} \int_{p_0}^p \frac{\partial}{\partial t} dp = \frac{RT}{gp} \left(\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial p_0}{\partial t} \right).$$

Возьмем далее барометрическую формулу

$$p = p_0 \exp \left(-\frac{g}{R} \int_0^z \frac{dz'}{T} \right), \quad (11)$$

получающуюся из (3) с учетом уравнения состояния. В итоге получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \int_0^z \frac{\partial \rho}{\partial t} dz' &= \frac{RT}{gp} \left[\frac{\partial p_0}{\partial t} \exp \left(-\frac{g}{R} \int_0^z \frac{dz'}{T} \right) - \frac{\partial p_0}{\partial t} \right] + \\ &+ T \int_0^z \frac{1}{T^2} \frac{\partial T}{\partial t} dz' = \frac{RT}{g} \left(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p} \right) \frac{\partial p_0}{\partial t} + T \int_0^z \frac{1}{T^2} \frac{\partial T}{\partial t} dz'. \end{aligned}$$

Подставляем этот результат в формулу для ω . Получаем

$$\omega = \frac{RT}{g} \left(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p} \right) \frac{\partial p_0}{\partial t} + T \int_0^z \frac{1}{T^2} \frac{\partial T}{\partial t} dz' + \omega'. \quad (12)$$

Обратимся теперь к уравнению притока тепла, которое перепишем следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{z-1}{z} \frac{T}{p} \frac{\partial p}{\partial t} + u \left(\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{z-1}{z} \frac{T}{p} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \\ + v \left(\frac{\partial T}{\partial y} - \frac{z-1}{z} \frac{T}{p} \frac{\partial p}{\partial y} \right) + (\gamma_a - \gamma) \omega = 0, \end{aligned}$$

где $\gamma_a = \frac{z-1}{z} \frac{g}{R}$ — сухоадиабатический градиент температуры, а $\gamma = -\frac{\partial T}{\partial z}$.

Подставим в (13) выражения для u , v и w . В результате получим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{z-1}{z} \frac{T}{p} \frac{\partial p}{\partial t} + \\ & + (\gamma_a - \gamma) \left[\frac{RT}{g} \left(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p} \right) \frac{\partial p_0}{\partial t} + T \int_0^z \frac{1}{T^2} \frac{\partial T}{\partial t} dz' \right] + \\ & + u_g \frac{\partial T}{\partial x} + v_g \frac{\partial T}{\partial y} + u' \left(\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{z-1}{z} \frac{T}{p} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \\ & + v' \left(\frac{\partial T}{\partial y} - \frac{z-1}{z} \frac{T}{p} \frac{\partial p}{\partial y} \right) + (\gamma_a - \gamma) w = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Слагаемые, содержащие производные по времени, можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial z} T \int_0^z \frac{1}{T^2} \frac{\partial T}{\partial t} dz' + (\gamma_a - \gamma) \frac{RT}{g} \left(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p} \right) \frac{\partial p_0}{\partial t} + \\ & + \gamma_a T \int_0^z \frac{1}{T^2} \frac{\partial T}{\partial t} dz' - \frac{z-1}{z} \frac{T}{p} \frac{\partial p}{\partial t} = T \frac{\partial}{\partial z} \left(T \int_0^z \frac{1}{T^2} \frac{\partial T}{\partial t} dz' \right) + \\ & + (\gamma_a - \gamma) \frac{RT}{g} \left(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p} \right) \frac{\partial p_0}{\partial t} + \gamma_a T \int_0^z \frac{1}{T^2} \frac{\partial T}{\partial t} dz' - \\ & - \frac{z-1}{z} \frac{T}{p} \left(\frac{\partial p_0}{\partial t} \frac{p}{p_0} + p \frac{g}{R} \int_0^z \frac{1}{T^2} \frac{\partial T}{\partial t} dz' \right) = \\ & = T \frac{\partial}{\partial z} \left(T \int_0^z \frac{1}{T^2} \frac{\partial T}{\partial t} dz' \right) - \frac{RT}{gp_0} \left[\gamma_a \frac{p_0}{p} - \gamma \left(\frac{p_0}{p} - 1 \right) \right] \frac{\partial p_0}{\partial t}. \end{aligned}$$

Тогда уравнение притока тепла запишется и будет иметь вид

$$\begin{aligned} & T \frac{\partial}{\partial z} \left(T \int_0^z \frac{1}{T^2} \frac{\partial T}{\partial t} dz' \right) - \frac{RT}{gp_0} \left[\gamma_a \frac{p_0}{p} - \gamma \left(\frac{p_0}{p} - 1 \right) \right] \frac{\partial p_0}{\partial t} + \\ & + u_g \frac{\partial T}{\partial x} + v_g \frac{\partial T}{\partial y} + u' \left(\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{z-1}{z} \frac{T}{p} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \\ & + v' \left(\frac{\partial T}{\partial y} - \frac{z-1}{z} \frac{T}{p} \frac{\partial p}{\partial y} \right) + (\gamma_a - \gamma) w' = 0. \end{aligned}$$

Разделим все уравнение на T и проинтегрируем по z от нуля до h . Получим

$$\begin{aligned} T_h \int_0^h \frac{1}{T^2} \frac{\partial T}{\partial t} dz' - \frac{R}{g p_0} \frac{\partial p_0}{\partial t} \int_0^h \left[\gamma_a \frac{p_0}{p} - \gamma \left(\frac{p_0}{p} - 1 \right) \right] dz' + \\ + \int_0^h \frac{1}{T} \left(u_g \frac{\partial T}{\partial x} + v_g \frac{\partial T}{\partial y} \right) dz' + \int_0^h \left[u' \left(\frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{z-1}{z} \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \right. \\ \left. + v' \left(\frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{z-1}{z} \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial y} \right) \right] dz' + \int_0^h (\gamma_a - \gamma) \frac{w'}{T} dz = 0. \quad (14) \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили два основных соотношения: уравнение (14) и так называемое условие на тропопаузе

$$\frac{\partial T_h}{\partial t} + \left(u_g \frac{\partial T}{\partial x} + v_g \frac{\partial T}{\partial y} \right)_h = 0,$$

в которых содержатся неизвестные функции — давление и температура. Считая атмосферу политропной, можно связать эти два уравнения, используя следующие соотношения:

$$p = p_0 \left(1 - \frac{\gamma z}{T_0} \right)^{\frac{g}{R\gamma}}, \quad T = T_0 \left(1 - \frac{\gamma z}{T_0} \right), \\ \gamma = \text{const.}$$

Это дает возможность выразить все функции через их значения при $z=0$.

При этом получим

$$\frac{\partial T}{\partial s} = \frac{\partial T_0}{\partial s}, \quad \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial s} = \frac{1}{p_0} \frac{\partial p_0}{\partial s} + \frac{g z}{R T T_0} \frac{\partial T_0}{\partial s} \quad (s = x, y, t),$$

$$u_g = - (a - a' z) \frac{\partial p_0}{\partial y} - b z \frac{\partial T_0}{\partial y},$$

$$v_g = (a - a' z) \frac{\partial p_0}{\partial x} + b z \frac{\partial T_0}{\partial x}.$$

Подставим теперь значения u_g, v_g в выражение для u' и v' . Получим

$$\begin{aligned} u' = - \frac{a - a' z}{f} \frac{\partial^2 p_0}{\partial x \partial t} - \frac{b z}{f} \frac{\partial^2 T_0}{\partial x \partial t} + M_1 \left[J \left(\frac{\partial T_0}{\partial x}, p_0 \right) + \right. \\ \left. + J \left(\frac{\partial p_0}{\partial x}, T_0 \right) \right] + M_2 J \left(\frac{\partial p_0}{\partial x}, p_0 \right) + M_3 J \left(\frac{\partial T_0}{\partial x}, p_0 \right), \end{aligned}$$

$$v' = - \frac{a - a'z}{f} \frac{\partial^2 p_0}{\partial y \partial t} - \frac{bz}{f} \frac{\partial^2 T_0}{\partial y \partial t} + M_1 \left[J \left(\frac{\partial T_0}{\partial y}, p_0 \right) + \right. \\ \left. + J \left(\frac{\partial p_0}{\partial y}, T_0 \right) \right] + M_2 J \left(\frac{\partial p_0}{\partial y}, p_0 \right) + M_3 J \left(\frac{\partial T_0}{\partial y}, p_0 \right),$$

где

$$J(A, B) = \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial B}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial B}{\partial x}.$$

Наконец,

$$w' = - \frac{1}{\rho} \int_0^z \rho \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} \right) dz' = \\ = \left[\frac{1}{\rho f} \int_0^z \rho (a - a'z') dz' \right] \Delta \frac{\partial p_0}{\partial t} + \left(\frac{1}{\rho f} \int_0^z \rho bz' dz' \right) \Delta \frac{\partial T_0}{\partial t} + \\ + \frac{1}{\rho} \left(\int_0^z \rho M_1 dz' \right) [J(p_0, \Delta T_0) + J(T_0, \Delta p_0)] + \\ + \left(\frac{1}{\rho} \int_0^z \rho M_2 dz' \right) J(p_0, \Delta p_0) + \left(\frac{1}{\rho} \int_0^z \rho M_3 dz' \right) J(T_0, \Delta T_0).$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$a = \frac{RT_0}{fp_0}; \quad a' = \frac{R\gamma}{fp_0}; \quad b = \frac{g}{fT_0}; \quad M_1 = \frac{bz(a - a'z)}{f}; \\ M_2 = \frac{(a - a'z)^2}{f}; \quad M_3 = \frac{b^2 z^2}{f}; \quad a - a'z = \frac{RT_0}{fp_0} \left(1 - \frac{\gamma z}{T_0} \right).$$

Используя вышеприведенные соотношения, перепишем условие на тропопаузе

$$\frac{\partial T_0}{\partial t} + \zeta^* J(p_0, T_0) + u'_h \frac{\partial T_0}{\partial x} + v'_h \frac{\partial T_0}{\partial y} = 0,$$

где

$$\zeta^* = \frac{RT_h}{fp_0}. \quad (15)$$

Обратимся теперь к уравнению притока тепла, проинтегрированному по z . В нем можно выполнить некоторые квадратуры:

$$1. \quad T_h \int_0^h \frac{\partial T}{\partial t} \frac{dz'}{(T_0 - \gamma z')^2} = T_h \frac{\partial T_0}{\partial t} \int_0^h \frac{dz'}{(T_0 - \gamma z')^2} = \\ = \frac{\partial T_0}{\partial t} \frac{T_h}{\gamma} \left(\frac{1}{T_h} - \frac{1}{T_0} \right) = \frac{h}{T_0} \frac{\partial T_0}{\partial t}.$$

$$2. \quad \int_0^h \left(u_g \frac{\partial T}{\partial x} + v_g \frac{\partial T}{\partial y} \right) \frac{dz'}{T_0 - \gamma z'} = \\ = J(p_0, T_0) \int_0^h \frac{a - a' z'}{T_0 - \gamma z'} dz' = \frac{Rh}{f p_0} J(p_0, T_0).$$

$$3. \quad \int_0^h \left[u' \left(\frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{z-1}{z} \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + v' \left(\frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial y} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{z-1}{z} \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial y} \right) \right] dz' = \int_0^h \left(\frac{u'}{T} \frac{\partial T_0}{\partial x} + \frac{v'}{T} \frac{\partial T_0}{\partial y} \right) dz' - \\ - \frac{z-1}{z} \int_0^h \left[u' \left(\frac{1}{p_0} \frac{\partial p_0}{\partial x} + \frac{g z'}{R T T_0} \frac{\partial T_0}{\partial x} \right) + v' \left(\frac{1}{p_0} \frac{\partial p_0}{\partial y} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{g z}{R T T_0} \frac{\partial T_0}{\partial y} \right) \right] dz' = \frac{1}{T_0} \int_0^h (T_0 - \gamma_a z') \left(\frac{u'}{T} \frac{\partial T_0}{\partial x} + \right. \\ \left. + \frac{v'}{T} \frac{\partial T_0}{\partial y} \right) dz' - \frac{z-1}{z} \int_0^h \left(\frac{u'}{p_0} \frac{\partial p_0}{\partial x} + \frac{v'}{p_0} \frac{\partial p_0}{\partial y} \right) dz'.$$

Обозначим через m следующий интеграл

$$m = \frac{1}{h} \int_0^h \left[\frac{p_0}{p} - \frac{\gamma_a}{\gamma} \left(\frac{p_0}{p} - 1 \right) \right] dz.$$

Подставим все это во второе основное прогностическое соотношение. Мы придем к выражению следующего вида:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_0}{\partial t} - \frac{\gamma_a m}{g p_0} \frac{\partial p_0}{\partial t} + \frac{R T_0}{f p_0} J(p_0, T_0) + \frac{T_0}{h} \int_0^h \frac{\gamma_a - \gamma}{T} w' dz' + \\ + \frac{1}{h} \int_0^h \left[(T_0 - \gamma_a z') \left(\frac{u'}{T} \frac{\partial T_0}{\partial x} + \frac{v'}{T} \frac{\partial T_0}{\partial y} \right) - \right. \\ \left. - \frac{z-1}{z} \frac{T_0}{p_0} \left(u' \frac{\partial p_0}{\partial x} + v' \frac{\partial p_0}{\partial y} \right) \right] dz' = 0. \end{aligned}$$

Подставим в это уравнение вместо u' , v' , w' их значения через производные от p_0 и T_0 . В результате получим уравнение следующей структуры:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_0}{\partial t} - \frac{\gamma_a m}{g p_0} \frac{\partial p_0}{\partial t} - k_1 \frac{\partial^2 p_0}{\partial x \partial t} - k_2 \frac{\partial^2 p_0}{\partial y \partial t} - k_3 \frac{\partial^2 T_0}{\partial x \partial t} - \\ - k_4 \frac{\partial^2 T_0}{\partial y \partial t} - k_5 \Delta \frac{\partial p_0}{\partial t} - k_6 \Delta \frac{\partial T_0}{\partial t} = - \frac{R T_0}{f p_0} J(p_0, T_0) - \\ - k_7 [J(p_0, \Delta T_0) + J(T_0, \Delta p_0)] + k_8 J(p_0, \Delta p_0) + \\ + k_9 J(T_0, \Delta T_0) - k_{10} \left\{ \left[J\left(\frac{\partial T_0}{\partial x}, p_0\right) + J\left(\frac{\partial p_0}{\partial x}, T_0\right) \right] \left(\frac{\partial T_0}{\partial x} - b \frac{\partial p_0}{\partial x} \right) + \right. \\ \left. + \left[J\left(\frac{\partial T_0}{\partial y}, p_0\right) + J\left(\frac{\partial p_0}{\partial y}, T_0\right) \right] \left(\frac{\partial T_0}{\partial y} - b \frac{\partial p_0}{\partial y} \right) \right\} - \\ - k_{11} \left\{ J\left(\frac{\partial p_0}{\partial x}, p_0\right) \left(\frac{\partial T_0}{\partial x} - b \frac{\partial p_0}{\partial x} \right) + J\left(\frac{\partial p_0}{\partial y}, p_0\right) \left(\frac{\partial T_0}{\partial y} - b \frac{\partial p_0}{\partial y} \right) \right\} - \\ - k_{12} \left\{ J\left(\frac{\partial T_0}{\partial x}, p_0\right) \left(\frac{\partial T_0}{\partial x} - b \frac{\partial p_0}{\partial x} \right) + \right. \\ \left. + J\left(\frac{\partial T_0}{\partial y}, p_0\right) \left(\frac{\partial T_0}{\partial y} - b \frac{\partial p_0}{\partial y} \right) \right\}, \quad (16) \end{aligned}$$

где b — параметр.

Продельвая аналогичные подстановки в уравнении, описывающем условие на тропопаузе, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_0}{\partial t} - \frac{RT_0}{f^2 p_0} \left(\frac{\partial T_0}{\partial x} \frac{\partial^2 p_0}{\partial x \partial t} + \frac{\partial T_0}{\partial y} \frac{\partial^2 p_0}{\partial y \partial t} \right) - \beta^* J(p_0, T_0) - \\ - M_1 \left\{ \left[J \left(\frac{\partial T_0}{\partial x}, p_0 \right) + J \left(\frac{\partial p_0}{\partial x}, T_0 \right) \right] \frac{\partial T_0}{\partial x} + \left[J \left(\frac{\partial T_0}{\partial y}, p_0 \right) + J \left(\frac{\partial p_0}{\partial y}, T_0 \right) \right] \frac{\partial T_0}{\partial y} \right\} - \\ - M_2 \left[J \left(\frac{\partial p_0}{\partial x}, p_0 \right) \frac{\partial T_0}{\partial x} + J \left(\frac{\partial p_0}{\partial y}, p_0 \right) \frac{\partial T_0}{\partial y} \right] - \\ - M_3 \left[J \left(\frac{\partial T_0}{\partial x}, p_0 \right) \frac{\partial T_0}{\partial x} + J \left(\frac{\partial T_0}{\partial y}, p_0 \right) \frac{\partial T_0}{\partial y} \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

Таким образом, мы имеем систему двух уравнений, которые в принципе можно разрешить относительно производных по времени. Знание последних позволяет проэкстраполировать значение функции на некоторый период времени δt и тем самым последовательно осуществлять прогноз на заданный срок.

Приведенная система уравнений оказалась довольно сложной. В нее входят первые и вторые производные по x, y от производных по времени и производные третьего порядка по горизонтальным координатам. Сложность полученной системы наложила свой отпечаток на методику ее решения. Следует иметь в виду, что в тот период не было электронных вычислительных машин и решение системы было связано с большими трудностями. Метод последовательных приближений, предложенный И. А. Кибелем, был в то время единственным способом, позволившим решить эту систему.

Как уже говорилось, первое приближение соответствует геострофическому движению и описывает основное состояние атмосферы. В этом последнем смысле первое приближение является особенно важным для описания адвективных изменений давления и температуры. Первое приближение сыграло выдающуюся роль в развитии синоптической практики, позволив теоретически объяснить многие процессы, бывшие до этого непонятными.

Итак, рассмотрим первое приближение. Отбросим в полученных выражениях члены, описывающие отклонения скорости ветра от геострофического. Тогда получим два уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_0}{\partial t} = \beta^* J(T_0, p_0), \\ \frac{\partial T_0}{\partial t} - \frac{\gamma_{am}}{g p_0} \frac{\partial p_0}{\partial t} = - \frac{RT_0}{f p_0} J(p_0, T_0). \end{aligned} \quad (18)$$

Исключим изменения температуры из второго уравнения, тогда

$$\frac{\partial p_0}{\partial t} = -\alpha^* J(T_0, p_0), \quad (19)$$

где

$$\alpha^* = \frac{g}{\gamma_a m f} \left(1 - \frac{T_h}{T_0}\right).$$

Полученные формулы определяют изменения давления и температуры в зависимости от геострофической адвекции температуры $J(T_0, p_0)$. Положительная адвекция приводит к росту температуры и к падению давления, а отрицательная адвекция, наоборот.

Легко заметить, что линейная комбинация

$$\theta = \alpha^* T_0 + \beta^* p_0$$

не изменяется со временем. Действительно,

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \alpha^* \frac{\partial T_0}{\partial t} + \beta^* \frac{\partial p_0}{\partial t} = \alpha^* \beta^* J(T_0, p_0) - \beta^* \alpha^* J(T_0, p_0) = 0.$$

Следовательно, согласно первому приближению, поле θ не будет изменяться со временем.

Теперь формулы (18) и (19) можно переписать, используя соотношения

$$\begin{aligned} J(p_0, \theta) &= J(p_0, \alpha^* T_0 + \beta^* p_0) = \alpha^* J(p_0, T_0) + \\ &+ \beta^* J(p_0, p_0) = -\alpha^* J(T_0, p_0); \end{aligned}$$

аналогично

$$J(T_0, \theta) = \beta^* J(T_0, p_0).$$

Таким образом,

$$\frac{\partial T_0}{\partial t} = J(T_0, \theta); \quad \frac{\partial p_0}{\partial t} = J(p_0, \theta). \quad (20)$$

Якобиан $J(A, \theta)$, как известно, выражает перенос функции A вдоль касательной к вектору скорости, которая определяется как

$$c = \sqrt{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)^2} = \frac{\partial \theta}{\partial n},$$

где n — направление градиента θ ; иными словами, изменения давления или температуры могут быть рассчитаны путем переноса поля p_0 или T_0 со скоростью $c = \frac{\partial \theta}{\partial n}$ при движении вдоль θ так, чтобы большие значения θ всегда оставались справа.

Как вычислять поля θ ? Н. П. Бызов и Ф. И. Извеков показали, что конфигурация изолиний θ близка к конфигурации высотных изогипс. Для их совпадения необходимо, чтобы угловые коэффициенты $\frac{dy}{dx}$ у обоих полей совпадали, т. е. выполнялось отношение

$$\frac{\frac{\partial \theta}{\partial x}}{\frac{\partial \theta}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial p}{\partial x}}{\frac{\partial p}{\partial y}}. \quad (21)$$

Из определения θ можно получить

$$\frac{\partial \theta}{\partial s} = \beta^* \frac{\partial p_0}{\partial s} + \alpha^* \frac{\partial T_0}{\partial s},$$

где $s=x, y$. Используем также уже рассмотренное соотношение

$$\frac{\partial p}{\partial s} = \frac{p}{p_0} \frac{\partial p_0}{\partial s} + \frac{gzp}{RTT_0} \frac{\partial T_0}{\partial s}.$$

Очевидно, что условие (21) будет выполняться, если коэффициенты при одинаковых членах двух приведенных соотношений будут пропорциональными, т. е.

$$\beta^* : \frac{p}{p_0} = \alpha^* : \frac{gzp}{RTT_0}.$$

Отсюда мы найдем высоту z , на которой конфигурации изолиний θ и высотных изобар совпадают:

$$z = \frac{\alpha^*}{\beta^*} \frac{T}{g p_0} = \frac{\alpha^*}{\beta^* g p_0} (T_0 - \alpha z),$$

откуда

$$z = \frac{\frac{\alpha^* T_0}{p_0 g \beta^*}}{1 + \frac{\alpha^* \gamma}{\beta^* g p_0}},$$

или, если подставить значения α^* и β^* ,

$$z = \frac{\gamma h}{\gamma_a m} \frac{T_0}{T_h} \frac{1}{1 + \frac{\gamma}{\gamma_a} \frac{\gamma h}{m T_h}}.$$

Вычислим эту высоту. Возьмем $\gamma=6$ град/км, $\gamma_a=10$ град/км, $T_0=280^\circ \text{ K}$, $T_h=220^\circ \text{ K}$, $m=1,2$, $h=10$ км. Тогда

$$z = \frac{6 \cdot 10}{10 \cdot 1,2} \cdot \frac{280}{220} \cdot \frac{1}{1 + \frac{6}{10} \cdot \frac{6 \cdot 10}{1,2 \cdot 220}} \approx 5,6 \text{ км.}$$

Таким образом, высота этого уровня совпадает с высотой уровня 500 мб. Другими словами, вместо полей θ можно пользоваться полями изобар на высоте 5,6 км или, что приблизительно то же самое, полями изогипс поверхности 500 мб. Этот уровень называется уровнем ведущего потока.

Из формул первого приближения вытекает еще одно важное следствие. Было установлено, что адвективные изменения давления характеризуются тем, что на некоторой высоте они обращаются в нуль и даже меняют знак. Уровень, на котором адвективные изменения давления обращаются в нуль, совпадает с уровнем ведущего потока. Действительно, так как

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{p}{p_0} \frac{\partial p_0}{\partial t} + \frac{gzp}{RTT_0} \frac{\partial T_0}{\partial t},$$

то, подставляя значения $\frac{\partial p_0}{\partial t}$ и $\frac{\partial T_0}{\partial t}$, получим

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \left(-\alpha^* \frac{p}{p_0} + \frac{gzp^*}{RTT_0} \beta^* \right) J(T_0, p_0).$$

Мы видим, что множитель перед якобианом обращается в нуль там, где

$$z^* = \frac{\alpha^*}{\beta^*} \frac{RTT_0}{gp_0},$$

т. е. z^* есть высота ведущего потока.

Обратим внимание на еще одно важное следствие, вытекающее из формул первого приближения. Продифференцируем уравнение для давления по t , тогда

$$\frac{\partial^2 p_0}{\partial t^2} = J\left(\frac{\partial p_0}{\partial t}, \theta\right) + J\left(p_0, \frac{\partial \theta}{\partial t}\right) = J\left(\frac{\partial p_0}{\partial t}, \theta\right),$$

так как $\frac{\partial \theta}{\partial t} = 0$. Отсюда следует, что барическая тенденция наземного поля также переносится вдоль линий $\theta = \text{const}$.

Итак, мы рассмотрели первое приближение решения системы уравнений (16) и (17). Полученные соотношения являются не очень точными. Так изменения температуры определяются только горизонтальным переносом (вертикальные движения не учитываются). Давление в первом приближении также переносится без изменений, т. е. эволюция барических образований при этом отсутствует.

Второе приближение метода И. А. Кибеля можно получить следующим образом. Производные по x и y от производных по времени опускаются. Временные производные от температуры

исключаются и полученное уравнение для изменения давления принимает вид (после пренебрежения малыми слагаемыми)

$$\frac{\partial p_0}{\partial t} - \omega_1^2 \Delta \frac{\partial p_0}{\partial t} = -\alpha^* J(T_0, p_0) + A + \omega_2 \Delta J(T_0, p_0) + \\ + \omega_3 [J(p_0, \Delta T_0) + J(T_0, \Delta p_0)] + \omega_4 J(p_0, \Delta p_0) + \omega_5 J(T_0, \Delta T_0),$$

где

$$A = k \left[J \left(T_0, \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x} \right) \frac{\partial T_0}{\partial x} + J \left(T_0, \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial y} \right) \frac{\partial T_0}{\partial y} \right],$$

$$k = \frac{g^2 h}{2 \gamma_a m T_0 f^3},$$

$$\tilde{\theta} = b_1 T_0 + p_0,$$

b_1 — постоянный множитель,

$$\omega_1^2 = \frac{g^2 (\gamma_a - \gamma) T_0}{\gamma_a m h f^2 \gamma \left(\frac{g}{R \gamma} - 1 \right) \rho_0} \int_0^h \left(1 - \frac{\gamma}{T_0} z \right) \left(\frac{\rho}{\rho_h} - 1 \right) dz.$$

Другие коэффициенты выписывать не будем. Так как в по-литропной атмосфере плотность представляется формулой

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{\gamma}{T_0} z \right)^{\frac{g}{R \gamma} - 1},$$

то, подставляя и вычисляя интеграл, в конечном результате получим, если отбросить малые слагаемые,

$$\omega_1^2 = \frac{\rho_0}{\rho_h} \left(1 - \frac{\gamma}{\gamma_a} \right) \frac{g h}{2 m f^2},$$

причем ω_1 имеет размерность длины и определяет характерный линейный масштаб движения. Для широты 60° и $h = 10$ км эта величина составляет 1500 км.

Таким образом, мы получили относительно производной по времени уравнение Гельмгольца. Сейчас мы знаем, как решаются соответствующие уравнения численно. Однако в то время таких возможностей не было ввиду отсутствия вычислительных машин. Поэтому весь вычислительный процесс сводился к последовательным приближениям, т. е. в этом уравнении слагаемое $\Delta \frac{\partial p_0}{\partial t}$ заменялось, согласно первому приближению, выражением

$$-\alpha^* \Delta J(T_0, p_0),$$

а затем находилось второе приближение для изменения давления. Этот процесс можно было продолжить, т. е. вычисленное значение $\frac{\partial p_0}{\partial t}$ вновь подставить в слагаемое $\Delta \frac{\partial p_0}{\partial t}$ и получить следующее приближение.

По приведенным формулам было сделано много расчетов, на основании которых были выявлены прогностические возможности этой схемы. Естественно, что в силу своего несовершенства она не смогла удовлетворить требованиям практики. Основные ее недостатки: сравнительно простая стилизация вертикальной структуры атмосферы (политропность), использование довольно грубого условия на тропопаузе, что вместе с предыдущим условием привело вообще к пренебрежению роли вертикальных движений в изменении температуры, несовершенная техника решения задачи.

Несмотря на все это, работа И. А. Кибеля положила начало большому циклу исследований по численным прогнозам. Он показал, как можно обрабатывать уравнения гидромеханики, выделяя только то, что свойственно атмосферным процессам и отбрасывая несущественное с метеорологической точки зрения.

2. Разложение по малому параметру

Реализация подхода к решению прогностических задач, примененная в 1940 г. И. А. Кибелем, становится особенно наглядной благодаря применению метода разложения по малому параметру. Мы изложим его применительно к системе уравнений гидродинамики, записанных в p -системе координат.

Имеем следующую систему уравнений:

$$\frac{du}{dt} + \frac{\tau}{P} \frac{\partial u}{\partial \tau} - f v = -g \frac{\partial H}{\partial x},$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{\tau}{P} \frac{\partial v}{\partial \tau} + f u = -g \frac{\partial H}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{P} \frac{\partial \tau}{\partial \tau} = 0,$$

$$\frac{dT}{dt} - \frac{\gamma_a - 1}{Pg} RT \frac{\tau}{\tau} = 0,$$

$$T = -\frac{g}{R} \tau \frac{\partial H}{\partial \tau}.$$

Обозначения здесь общеприняты.

Введем в рассмотрение безразмерные величины, которые будем отмечать чертой.

$$x = L\bar{x}, \quad y = L\bar{y}, \quad t = \frac{L}{U}\bar{t}, \quad u = U\bar{u},$$

$$v = U\bar{v}, \quad \tau = \frac{U^2 P}{fL^2}\bar{\tau}, \quad H = \frac{U^2 fL}{gU}\bar{H},$$

$$T = \frac{\gamma_a - \gamma}{g} R\bar{T} \cdot \bar{T},$$

где $\bar{T}$ — средняя температура атмосферы. Вводя указанные соотношения в систему уравнений, получим

$$\varepsilon \frac{d\bar{u}}{d\bar{t}} + \varepsilon^2 \bar{\tau} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{\tau}} - \bar{v} = - \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{x}},$$

$$\varepsilon \frac{d\bar{v}}{d\bar{t}} + \varepsilon^2 \bar{\tau} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{\tau}} + \bar{u} = - \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{y}},$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} + \varepsilon \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial \bar{\tau}} = 0,$$

$$\frac{d\bar{T}}{d\bar{t}} - \varepsilon \frac{\bar{\tau}}{\bar{\tau}} = 0,$$

$$\bar{T} = - \frac{\varepsilon}{m_1^2} \bar{\tau} \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{\tau}},$$

где $\varepsilon = \frac{U}{Lf}$ — безразмерный параметр,

$$m_1^2 = \frac{\gamma_a - \gamma}{gf^2} \frac{R^2 \bar{T}}{L^2}.$$

Мы будем рассматривать крупномасштабные атмосферные процессы, характеризующиеся следующими параметрами:

1) характерным линейным масштабом

$$L = 10^6 \text{ м};$$

2) горизонтальной скоростью

$$U = 10 \text{ м/сек.};$$

3) вертикальным градиентом температуры

$$\gamma = 0,7 \cdot 10^{-2} \text{ град/м};$$

4) средним параметром Кориолиса

$$f = 10^{-4} \text{ 1/сек.}$$

При этих значениях параметров мы получим следующие характерные значения для вариаций изменений метеорологических элементов:

$$\delta \bar{H} = \frac{L f U}{g} = 10^2 \text{ м};$$

$$\delta \bar{\tau} = \frac{U^2 P}{f L^2} = 10 \text{ мб/сутки};$$

$$\delta \bar{T} = \frac{\gamma_a - \gamma}{g} R \bar{T} = 20 \text{ град.}$$

Таким образом, принятые параметры атмосферы дают изменения, близкие к реальным. Кроме того, мы имеем

$$\delta \bar{t} = \frac{L}{U} = 10^5 \text{ сек.},$$

$$m_1^2 \approx 0,5,$$

$$\varepsilon = 10^{-1}.$$

Учитывая малость параметра ε , будем искать решения, разлагая искомые функции $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{\tau}$, $\bar{H}$ и $\bar{T}$ в ряды по степеням ε :

$$\bar{u} = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots,$$

$$\bar{v} = v_0 + \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \dots,$$

$$\bar{\tau} = \tau_0 + \varepsilon \tau_1 + \varepsilon^2 \tau_2 + \dots,$$

$$\bar{H} = H_0 + \varepsilon H_1 + \varepsilon^2 H_2 + \dots,$$

$$\bar{T} = T_0 + \varepsilon T_1 + \varepsilon^2 T_2 + \dots$$

В уравнении притока тепла мы, как обычно, исключим температуру с помощью последнего уравнения системы. Формальное применение метода разложения по малому параметру ε приводит к решению следующих систем уравнений (знак черты у переменных для простоты опускаем):

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= -\frac{\partial H_0}{\partial y}, \quad v_0 = \frac{\partial H_0}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} = 0, \\ \zeta^2 \left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial \tau^2 \partial t} + u_0 \frac{\partial^2 H_0}{\partial x \partial \tau^2} + v_0 \frac{\partial^2 H_0}{\partial y \partial \tau^2} \right) + \tau_0 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (0)$$

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= -\frac{\partial H_1}{\partial y} - \frac{\partial v_0}{\partial t} - u_0 \frac{\partial v_0}{\partial x} - v_0 \frac{\partial v_0}{\partial y}, \\ v_1 &= \frac{\partial H_1}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_0}{\partial y}, \\ \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial \tau_0}{\partial \zeta} &= 0, \\ \frac{\zeta^2}{m^2} \left(\frac{\partial^2 H_1}{\partial \zeta \partial t} + u_0 \frac{\partial^2 H_1}{\partial x \partial \zeta} + v_0 \frac{\partial^2 H_1}{\partial y \partial \zeta} + u_1 \frac{\partial^2 H_0}{\partial \zeta \partial x} + v_1 \frac{\partial^2 H_0}{\partial \zeta \partial y} \right) + \tau_1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} u_2 &= -\frac{\partial H_2}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial t} - u_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} - v_0 \frac{\partial v_1}{\partial y} - \\ &\quad - u_1 \frac{\partial v_0}{\partial x} - v_1 \frac{\partial v_0}{\partial y} - \tau_0 \frac{\partial v_0}{\partial \zeta}, \\ v_2 &= \frac{\partial H_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_1}{\partial y} + \\ &\quad + u_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_0}{\partial y} + \tau_0 \frac{\partial u_0}{\partial \zeta}, \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial \tau_1}{\partial \zeta} &= 0, \\ \frac{\zeta^2}{m_1^2} \left(\frac{\partial^2 H_2}{\partial \zeta \partial t} + u_0 \frac{\partial^2 H_2}{\partial x \partial \zeta} + v_0 \frac{\partial^2 H_2}{\partial y \partial \zeta} + u_1 \frac{\partial^2 H_1}{\partial x \partial \zeta} + \right. \\ &\quad \left. + v_1 \frac{\partial^2 H_1}{\partial y \partial \zeta} + u_2 \frac{\partial^2 H_0}{\partial x \partial \zeta} + v_2 \frac{\partial^2 H_0}{\partial y \partial \zeta} \right) + \tau_2 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

И, наконец, для n -го члена разложения получим систему

$$\begin{aligned} u_n &= -\frac{\partial H_n}{\partial y} - \frac{\partial v_{n-1}}{\partial t} - \sum_{k=0}^{n-1} F_{k, n-k-1}^{(v)}, \\ v_n &= \frac{\partial H_n}{\partial x} + \frac{\partial u_{n-1}}{\partial t} + \sum_{k=0}^{n-1} F_{k, n-k-1}^{(u)}, \\ \frac{\partial u_n}{\partial x} + \frac{\partial v_n}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{n-1}}{\partial \zeta} &= 0, \\ \frac{\zeta^2}{m_1^2} \left(\frac{\partial^2 H_n}{\partial \zeta \partial t} + \sum_{k=0}^n \left(u_k \frac{\partial^2 H_{n-k}}{\partial x \partial \zeta} + v_k \frac{\partial^2 H_{n-k}}{\partial y \partial \zeta} \right) \right) + \tau_n &= 0, \end{aligned}$$

$$\left(F_{k, n-k}^{(A)} = u_k \frac{\partial A_{n-k}}{\partial x} + v_k \frac{\partial A_{n-k}}{\partial y} + \tau_k \frac{\partial A_{n-k-1}}{\partial z} \right);$$

$$u_{-1} = v_{-1} = H_{-1} = \tau_{-1} = 0.$$

Проведем предварительный анализ полученной рекуррентной системы уравнений. Во-первых, как будет показано ниже, они в принципе позволяют последовательно определить все коэффициенты рядов и, во-вторых, из системы для первых членов разложения следует, что этот метод применим при условии, что в формулах для u_0 и v_0 параметр Кориолиса является постоянной величиной, ибо в противном случае не будет удовлетворено уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} = 0.$$

Поэтому мы сразу априори положили $f = \text{const}$. В последующих членах разложения учет переменности параметра Кориолиса не дает возможности замкнуть систему уравнений. В связи с этим приходится потребовать, чтобы всегда для всех u_n , v_n параметр Кориолиса был постоянным.

Построим уравнения для коэффициентов разложения H . Дифференцируя первое уравнение по x , а второе по y и складывая, получим

$$D_n = \frac{\partial u_n}{\partial x} + \frac{\partial v_n}{\partial y} = -\frac{\partial \Omega_{n-1}}{\partial t} - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\partial}{\partial x} F_{k, n-k-1}^{(v)} - \frac{\partial}{\partial y} F_{k, n-k-1}^{(u)} \right),$$

$$\Omega_n = \frac{\partial v_n}{\partial x} - \frac{\partial u_n}{\partial y}.$$

Кроме того, для $n=1$, произведя операцию вихря над левой частью первых двух уравнений, получим

$$\Omega_{n-1} = \Delta H_{n-1} + \frac{\partial D_{n-2}}{\partial t} + \sum_{k=0}^{n-2} \left(\frac{\partial}{\partial x} F_{k, n-k-2}^{(u)} + \frac{\partial}{\partial y} F_{k, n-k-2}^{(v)} \right).$$

Подставим теперь в уравнение неразрывности первое уравнение и в нем исключим Ω_{n-1} с помощью второго. Затем τ_{n-1} из уравнения неразрывности исключим, привлекая уравнение

притока тепла. В итоге мы получили уравнение следующей структуры:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\tau}{m_1^2} \frac{\partial^2 H_{n-1}}{\partial \tau \partial t} + \Delta \frac{\partial H_{n-1}}{\partial t} \equiv L \left(\frac{\partial H_{n-1}}{\partial t} \right) = \\ & = - \sum_{k=0}^{n-1} \left(F_{k, n-k-1}^{(\Omega)} + D_k \Omega_{n-k-1} + \frac{\partial \tau_k}{\partial x} \frac{\partial v_{n-k-2}}{\partial \tau} - \right. \\ & \left. - \frac{\partial \tau_k}{\partial y} \frac{\partial u_{n-k-2}}{\partial \tau} \right) - \frac{\partial^2 D_{n-2}}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial t} \sum_{k=0}^{n-2} \left[\frac{\partial}{\partial x} F_{k, n-k-2}^{(u)} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial y} F_{k, n-k-2}^{(v)} \right] - \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\tau^2}{m_1^2} \sum_{k=0}^{n-1} \left(u_k \frac{\partial^2 H_{n-k-1}}{\partial x \partial \tau} + \right. \\ & \left. + v_k \frac{\partial^2 H_{n-k-1}}{\partial y \partial \tau} \right). \end{aligned}$$

Выпишем уравнения для первых трех членов ряда:

$$\begin{aligned} L \left(\frac{\partial H_0}{\partial t} \right) &= -J(H_0, \Delta H_0) - \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\tau^2}{m_1^2} J \left(H_0, \frac{\partial H_0}{\partial \tau} \right); \\ L \left(\frac{\partial H_1}{\partial t} \right) &= -J(H_0, \Omega_1) - u_1 \frac{\partial \Delta H_0}{\partial x} - v_1 \frac{\partial \Delta H_0}{\partial y} - \\ &- \tau_0 \frac{\partial \Delta H_0}{\partial \tau} - D_1 \Omega_0 - \frac{\partial \tau_0}{\partial x} \frac{\partial^2 H_0}{\partial x \partial \tau} - \frac{\partial \tau_0}{\partial y} \frac{\partial^2 H_0}{\partial y \partial \tau} - \\ &- \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial}{\partial y} J \left(H_0, \frac{\partial H_0}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} J \left(H_0, \frac{\partial H_0}{\partial y} \right) \right] - \\ &- \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\tau^2}{m_1^2} \left[J \left(H_0, \frac{\partial H_1}{\partial \tau} \right) + u_1 \frac{\partial^2 H_0}{\partial x \partial \tau} + v_1 \frac{\partial^2 H_0}{\partial y \partial \tau} \right]; \\ L \left(\frac{\partial H_2}{\partial t} \right) &= -J(H_0, \Omega_2) - F_{1,1}^{(\Omega)} - F_{2,0}^{(\Omega)} - \tau_0 \frac{\partial \Omega_1}{\partial \tau} - \\ &- D_1 \Omega_1 - D_2 \Delta H_0 - \frac{\partial \tau_1}{\partial x} \frac{\partial v_1}{\partial \tau} + \frac{\partial \tau_0}{\partial y} \frac{\partial u_1}{\partial \tau} - \frac{\partial \tau_1}{\partial x} \frac{\partial^2 H_0}{\partial x \partial \tau} - \\ &- \frac{\partial \tau_1}{\partial y} \frac{\partial^2 H_0}{\partial y \partial \tau} - \frac{\partial^2 D_1}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial}{\partial x} (F_{0,1}^{(u)} + F_{1,0}^{(u)}) + \right. \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} (F_{0,1}^{(v)} + F_{1,0}^{(v)}) \left. \right] - \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\tau^2}{m_1^2} \left[J \left(H_0, \frac{\partial H_2}{\partial \tau} \right) + \right. \\ &+ u_1 \frac{\partial^2 H_1}{\partial x \partial \tau} + v_1 \frac{\partial^2 H_1}{\partial y \partial \tau} + u_2 \frac{\partial^2 H_0}{\partial x \partial \tau} + v_2 \frac{\partial^2 H_0}{\partial y \partial \tau} \left. \right]. \end{aligned}$$

Для того чтобы можно было решить уравнение, необходимо, чтобы правая часть этих уравнений была определена. Поясним возможность определения правых частей. Во-первых, туда входят u_1, v_1, u_2, v_2 , которые можно определить из первых двух уравнений рекуррентной системы

$$u_1 = -\frac{\partial H_1}{\partial y} - \frac{\partial^2 H_0}{\partial x \partial t} - J\left(H_0, \frac{\partial H_0}{\partial x}\right),$$

$$v_1 = \frac{\partial H_1}{\partial x} - \frac{\partial^2 H_0}{\partial y \partial t} - J\left(H_0, \frac{\partial H_0}{\partial y}\right),$$

$$u_2 = -\frac{\partial H_2}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial t} - J(H_0, v_1) - u_1 \frac{\partial^2 H_0}{\partial x^2} - v_1 \frac{\partial^2 H_0}{\partial x \partial y} - \tau_0 \frac{\partial^2 H_0}{\partial x \partial \tau^2},$$

$$v_2 = \frac{\partial H_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial t} + J(H_0, u_1) + u_1 \frac{\partial^2 H_0}{\partial x \partial y} + v_1 \frac{\partial^2 H_0}{\partial y^2} + \tau_0 \frac{\partial^2 H_0}{\partial y \partial \tau^2}.$$

Мы видим, что в формулы для u_2, v_2 входят производные $\partial u_1/\partial t$ и $\partial v_1/\partial t$. Если в эти производные подставить значения u_1 и v_1 , то в окончательные формулы войдут первые и вторые производные от H_0 . Следовательно, для определенности мы должны ввести в рассмотрение уравнение

$$L\left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial t^2}\right) = -J\left(\frac{\partial H_0}{\partial t}, \Delta H_0\right) - J\left(H_0, \Delta \frac{\partial H_0}{\partial t}\right) - \\ - \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\tau^2}{m_1^2} \left[J\left(\frac{\partial H_0}{\partial t}, \frac{\partial H_0}{\partial \tau}\right) + J\left(H_0, \frac{\partial^2 H_0}{\partial t \partial \tau}\right) \right].$$

Но, кроме того, следует вычислить член $\frac{\partial^2 D_1}{\partial t^2}$. Очевидно, что после подстановки выражений для u_1 и v_1 в этом члене появятся производные по времени третьего порядка от H_0 . Таким образом, нам необходимо добавить еще уравнение

$$L\left(\frac{\partial^3 H_0}{\partial t^3}\right) = -J\left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial t^2}, \Delta H_0\right) - J\left(\frac{\partial H_0}{\partial t}, \Delta \frac{\partial H_0}{\partial t}\right) - \\ - J\left(H_0, \Delta \frac{\partial^2 H_0}{\partial t^2}\right) - \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\tau^2}{m_1^2} \left[J\left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial t^2}, \frac{\partial H_0}{\partial \tau}\right) + \right. \\ \left. + J\left(\frac{\partial H_0}{\partial t}, \frac{\partial^2 H_0}{\partial \tau \partial t}\right) + J\left(H_0, \frac{\partial^3 H_0}{\partial \tau \partial t^2}\right) \right].$$

Если бы мы захотели учесть дальнейшие члены разложения, то нам необходимо было бы находить последующие производные, аналогично

$$L\left(\frac{\partial^n H_0}{\partial t^n}\right) = -\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} \left\{ J(H_0, \Delta H_0) + \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\tau^2}{m_1^2} J\left(H_0, \frac{\partial H_0}{\partial \tau}\right) \right\}.$$

Кроме того, следует определить τ_0 . Величина τ_0 определяется из уравнения неразрывности путем интегрирования его по ζ от нуля до ζ с использованием краевого условия

$$\tau_0 = \tau_1 = \tau_2 = \dots = 0 \quad \text{при} \quad \zeta = 0.$$

Таким образом,

$$\tau_0 = - \int_0^\zeta D_1 d\zeta' = - \int_0^\zeta \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) d\zeta',$$

и вообще

$$\tau_{n-1} = - \int_0^\zeta \left(\frac{\partial u_n}{\partial x} + \frac{\partial v_n}{\partial y} \right) d\zeta'.$$

Так как τ_0 появляется только во втором члене разложения, то, следовательно, эта величина всегда будет определяться по уже известным значениям u_n , v_n . Без особого труда можно было бы построить также дифференциальное уравнение для определения τ_n , исключая из системы уравнений временные производные от H_n .

Действительно, с помощью уравнения вихря и уравнения дивергенции можно исключить дивергенцию и вихрь из уравнения неразрывности. Тогда получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{n-1}}{\partial \zeta} - \frac{\partial \Delta H_{n-1}}{\partial t} &= \frac{\partial^2 D_{n-2}}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial t} \sum_{k=0}^{n-2} \left[\frac{\partial}{\partial x} F_{k, n-k-2}^{(u)} + \right. \\ &\left. + \frac{\partial}{\partial y} F_{k, n-k-2}^{(v)} \right] + \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{\partial}{\partial x} F_{k, n-k-1}^{(v)} - \frac{\partial}{\partial y} F_{k, n-k-1}^{(u)} \right]. \end{aligned}$$

Кроме того, уравнение притока тепла дает

$$\tau_{n-1} + \frac{\zeta^2}{m_1^2} \frac{\partial^2 H_{n-1}}{\partial \zeta \partial t} = - \frac{1}{m_1^2} \sum_{k=0}^{n-1} \left(u_k \frac{\partial^2 H_{n-k-1}}{\partial \zeta \partial x} + v_k \frac{\partial^2 H_{n-k-1}}{\partial \zeta \partial y} \right).$$

Исключим теперь в левой части H_{n-1} , считая $m_1^2 = \text{const}$. Для этого продифференцируем первое уравнение по ζ и затем умножим на ζ^2/m_1^2 , а от второго уравнения возьмем оператор Лапласа и сложим полученные выражения. В результате мы

придем к уравнению, левая часть которого будет содержать эллиптический оператор, аналогичный оператору L ,

$$L_1(\tau_{n-1}) \equiv \frac{\tau^2}{m_1^2} \frac{\partial^2 \tau_{n-1}}{\partial \tau^2} - \Delta \tau_{n-1} = -\frac{1}{m^2} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta \left(u_k \frac{\partial^2 H_{n-k-1}}{\partial x \partial \tau} + \right. \\ \left. + v_k \frac{\partial^2 H_{n-k-1}}{\partial y \partial \tau} \right) + \frac{\tau^2}{m_1^2} \frac{\partial^3 D_{n-2}}{\partial \tau \partial t^2} - \frac{\tau^2}{m_1^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau \partial t} \sum_{k=0}^{n-2} \left(\frac{\partial}{\partial x} F_{k, n-k-2}^{(u)} + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial y} F_{k, n-k-2}^{(v)} \right) - \frac{\tau^2}{m_1^2} \frac{\partial}{\partial \tau} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\partial}{\partial x} F_{k, n-k-1}^{(v)} - \frac{\partial}{\partial y} F_{k, n-k-1}^{(u)} \right).$$

Проанализируем полученные результаты. Первый член разложения дает нам уравнение, обычно получающееся в так называемом квазигеострофическом приближении при $f = \text{const}$. Последующие члены разложения, естественно, дают дополнительные эффекты за счет отклонения ветра от геострофического.

Преимущество изложенного формального подхода к отысканию решения в виде ряда по степеням ϵ состоит в том, что в принципе он позволяет находить решения для метеорологических элементов с любой степенью точности, приближаясь к решениям примитивных уравнений. Однако, как легко было заметить, этот прием несколько громоздок и притом его громоздкость возрастает тем больше, чем больше членов ряда принимается во внимание при разложении. По всей видимости, достаточно учитывать три члена ряда. Изложенный прием выделения основного состояния при прогнозе метеорологических элементов основан на идее И. А. Кибеля (1940 г.) и в некоторой степени обобщает работу Г. И. Марчука и Н. М. Киреевой [2], выполненную в 1953 г.

Мы здесь не будем рассматривать ни краевые условия, необходимые для решения уравнения $L\left(\frac{\partial H_n}{\partial t}\right) = f$, $L_1(\tau_n) = f_1$, ни методы решения этих уравнений, поскольку эти методы будут подробно рассмотрены другими лекторами.

В заключение остановимся на некоторых работах этого направления, в которых используется разложение в ряд по малому параметру только составляющих ветра, а $\bar{H}$ и $\bar{\tau}$ не разлагаются в ряд. Приведем некоторые результаты работы В. В. Быкова (1961 г.). Он рассматривает ту же систему уравнений [3]. Уравнение для изменения давления строится следу-

ющим образом: выписываются три члена разложения для горизонтальных составляющих ветра, имеющие вид

$$\begin{aligned} u_0 &= -\frac{\partial \bar{H}}{\partial y}, \quad v_0 = \frac{\partial \bar{H}}{\partial x}, \\ u_1 &= -\frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial x \partial t} - J\left(\bar{H}, \frac{\partial \bar{H}}{\partial x}\right), \\ v_1 &= -\frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial y \partial t} - J\left(\bar{H}, \frac{\partial \bar{H}}{\partial y}\right), \\ u_2 &= \frac{\partial^3 \bar{H}}{\partial y \partial t^2} + \left[\Delta \bar{H} \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial x \partial t} + 2J\left(\bar{H}, \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial y \partial t}\right) \right] - \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial x \partial y} + \\ &+ \Delta \bar{H} J\left(\bar{H}, \frac{\partial \bar{H}}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \bar{H}}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^3 \bar{H}}{\partial y^3} + \left(\frac{\partial \bar{H}}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^3 \bar{H}}{\partial x^2 \partial y} - 2 \frac{\partial \bar{H}}{\partial x} \frac{\partial \bar{H}}{\partial y} \frac{\partial^3 \bar{H}}{\partial x \partial y^2}, \\ v_2 &= -\frac{\partial^3 \bar{H}}{\partial x \partial t^2} + \Delta \bar{H} \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial y \partial t} - 2J\left(\bar{H}, \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial x \partial t}\right) - \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial x \partial y} + \\ &+ \Delta \bar{H} J\left(\bar{H}, \frac{\partial \bar{H}}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial \bar{H}}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^3 \bar{H}}{\partial x \partial y^2} - \left(\frac{\partial \bar{H}}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^3 \bar{H}}{\partial x^3} + 2 \frac{\partial \bar{H}}{\partial x} \frac{\partial \bar{H}}{\partial y} \frac{\partial^3 \bar{H}}{\partial x^2 \partial y}. \end{aligned}$$

Затем выписывается уравнение неразрывности, в котором u и v заменяется тремя членами ряда, и уравнение притока тепла, в котором горизонтальные скорости заменяются двумя членами разложения. Затем мы, как обычно, исключаем вертикальную скорость из этих двух уравнений и получаем одно уравнение, содержащее одну искомую функцию $\bar{H}$. Уравнение получается довольно сложного вида:

$$\begin{aligned} a_{11} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + a_{22} \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} + a_{33} \frac{\partial^2 q}{\partial \zeta^2} + a_{12} \frac{\partial^2 q}{\partial x \partial y} + a_{13} \frac{\partial^2 q}{\partial x \partial \zeta} + a_{23} \frac{\partial^2 q}{\partial y \partial \zeta} + \\ + b_1 \frac{\partial q}{\partial x} + b_2 \frac{\partial q}{\partial y} + b_3 \frac{\partial q}{\partial \zeta} = F(x, y, \zeta), \end{aligned}$$

где $q = \frac{\partial \bar{H}}{\partial t}$, а коэффициенты a_{ij} , b_i являются функциями $\bar{H}$ и, следовательно, x , y , ζ , t и зависят от структуры поля $\bar{H}$. В силу этого полученное уравнение может оказаться не эллиптического типа, так как коэффициенты его могут менять знак в зависимости от структуры барического поля.

Более подробно можно рассмотреть баротропную модель, которая получается из бароклинной, если опустить члены, содержащие производные по ξ . Тогда имеем

$$a_{11} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + a_{12} \frac{\partial^2 q}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} + b_1 \frac{\partial q}{\partial x} + b_2 \frac{\partial q}{\partial y} = F_1(x, y),$$

где в размерных величинах коэффициенты равны

$$a_{11} = 1 - \frac{g}{f^2} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + 3 \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \right);$$

$$a_{22} = 1 - \frac{g}{f^2} \left(3 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \right);$$

$$a_{12} = \frac{4g}{f^2} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}; \quad b_1 = -\frac{g}{f^2} \frac{\partial \Delta H}{\partial x}; \quad b_2 = -\frac{g}{f^2} \frac{\partial \Delta H}{\partial y},$$

а правая часть имеет вид

$$F_1(x, y) = -J \left(H, \frac{g}{f} \Delta H + f - 2 \frac{g^2}{f^3} M \right) + \\ + \frac{g^2}{f^3} \left[\frac{\partial}{\partial x} J \left(H, \frac{\partial H}{\partial x} \right) \Delta H + \frac{\partial}{\partial y} J \left(H, \frac{\partial H}{\partial y} \right) \Delta H \right],$$

где

$$M = J \left(\frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial y} \right).$$

Область эллиптичности этого уравнения определяется условием

$$\left(\frac{a_{12}}{2} \right)^2 - a_{11} a_{22} < 0,$$

или, подставляя значения коэффициентов, получим условие

$$\frac{g}{f^2} \left[\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \right] - \frac{3}{4} \frac{g}{f^2} (\Delta H)^2 + \Delta H < \frac{f^2}{4g}.$$

Мы видим, что тип уравнения целиком зависит от характера барического поля. Расчеты показывают, что критерий эллиптичности выполняется для большей части реальных барических полей. Однако имеются области, где это условие не выполняется и уравнение становится уравнением гиперболического типа. Это районы с большой циклонической кривизной. В качестве иллюстрации можно привести карту АТ₇₀₀ за 03 часа 24 января 1959 г., на которой заштрихованные области являются районами, где условие эллиптичности не выполняется (рис. 1).

Таким образом, мы имеем математическую задачу смешанного типа. Там, где условие эллиптичности выполняется, решается задача Дирихле, т. е. задаются условия на краях области эллиптичности. И в области, где выполняется условие гиперболичности, решается смешанная задача. Условия сопряжения двух областей накладывают, естественно, определенные математические трудности на решение задачи. Они все же могут быть преодолены современными вычислительными методами.

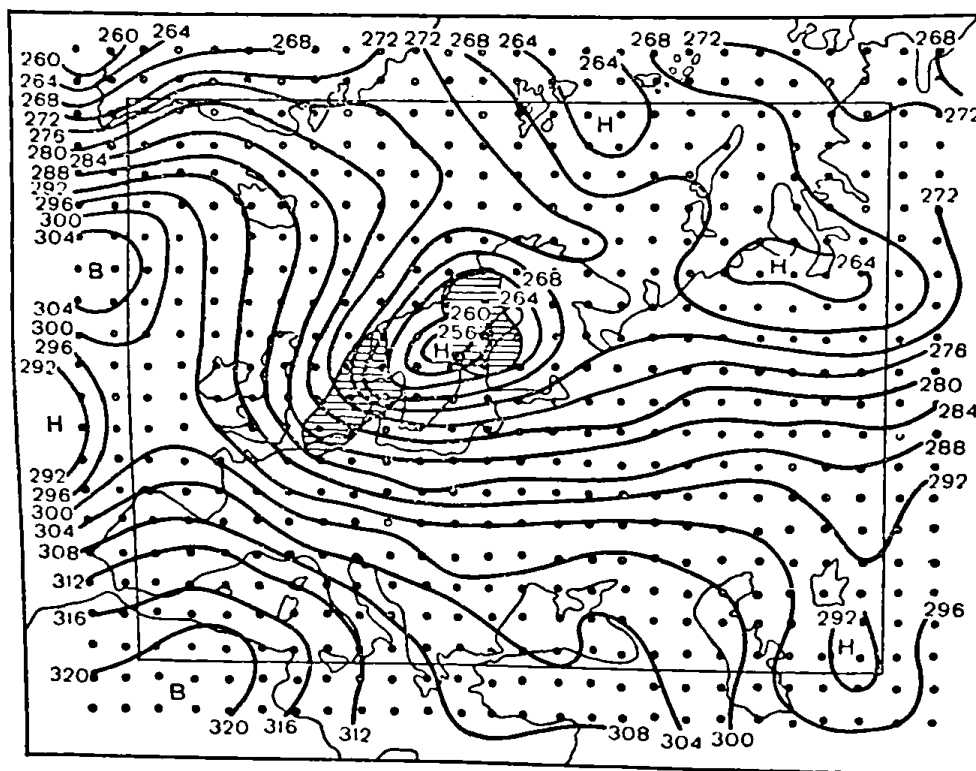


Рис. 1. Карта AT_{700} за 03 часа 24 января 1959 г.

Одна из работ, относящихся к уточнению разложения в ряд по малому параметру, изложена в книге И. А. Кибеля «Введение в гидродинамические методы краткосрочного прогноза погоды» (глава X) [1]. Кроме этого, следует упомянуть работу М. И. Юдина, а также работу А. С. Монина, в которой используется идея разложения в ряд по степеням числа Маха для отфильтровывания в примитивных уравнениях неметеорологических эффектов. Мы здесь не будем подробно рассматривать эту работу, так как она относится к работам по прогнозу с помощью полных уравнений гидродинамики. Мы не останавливаемся также на других работах этого направления.

3. Учет трения и неровностей земной поверхности в численных моделях

В большинстве квазигеострофических моделей трение во внимание не принимается. Наибольшее влияние трение оказывает вблизи земной поверхности, где воздух при своем движении испытывает торможение из-за шероховатости земной поверхности. Эта часть атмосферы (высотой порядка одного километра) называется пограничным слоем.

Для учета трения в пограничном слое обычно применяют следующий прием. Рассматривают пограничный слой независимо от свободной атмосферы. В нем пренебрегают ускорениями, но учитывают вертикальное перемешивание. Решают систему уравнений и определяют вертикальную скорость на верхней границе пограничного слоя. Полученное выражение для вертикальной скорости берется как краевое условие на нижней границе атмосферы, т. е. толщиной пограничного слоя пренебрегают и, кроме того, записывают это условие на уровне моря.

Описанная выше процедура соответствует известной модели Аккерблома, которая определяется решением следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial z} \right) + f v &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \equiv f v_g, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial v}{\partial z} \right) - f u &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = -f u_g,\end{aligned}$$

где ν — кинематический коэффициент турбулентной вязкости, который будем считать постоянным.

В таком случае мы можем выполнить операцию вихря и дивергенции над этими уравнениями и затем ввести комплексную функцию

$$M = D + i\Omega,$$

где

$$D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \Omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Для функции M получим уравнение

$$\frac{\partial^2 M}{\partial z^2} - 2i\delta^2 M = 2\delta^2 \Omega_g, \quad (1)$$

где

$$\Omega_g = \frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y}; \quad \delta^2 = \frac{f}{2\nu}; \quad f = \text{const.}$$

Поскольку это уравнение — второго порядка, нам следует задать два краевых условия.

Первое условие связано с прилипанием частиц воздуха к земной поверхности, в результате чего

$$\text{при } z=0 \quad M=0 \text{ (так как } \Omega = D = u = v = 0).$$

В качестве второго условия следует взять условие ограниченности решения в свободной атмосфере, которая в пограничном слое отождествляется с бесконечностью. Таким образом,

$$\text{при } z \rightarrow \infty \quad M \text{ ограничено.}$$

Имея два крайних условия, можно теперь выписать общее решение уравнения (1). Оно имеет вид

$$M = c_1 e^{-i(1+i)z} + c_2 e^{i(1+i)z} + \frac{i-1}{2} \int_0^\infty e^{-i(1+i)|z'-z|} \Omega_g(z') dz'.$$

Мы видим, что второе слагаемое при $z \rightarrow \infty$ будет стремиться к бесконечности. Чтобы удовлетворить условию ограниченности, потребуем, чтобы $c_2=0$. Наконец, вторая константа c_1 определится из условия при $z=0$, откуда

$$c_1 = -\frac{i-1}{2} \int_0^\infty e^{-i(1+i)z'} \Omega_g(z') dz'.$$

Следовательно, общее решение будет выглядеть следующим образом:

$$M = \frac{i-1}{2} \int_0^\infty [e^{-i(1+i)|z-z'|} - e^{-i(1+i)|z+z'|}] \Omega_g dz'. \quad (2)$$

Уравнение (2) используется для изучения особенностей движения в пограничном слое. Как уже говорилось, вначале нам необходимо определить вертикальную скорость на границе пограничного слоя. Естественно, что в этом случае вертикальная скорость не будет равна нулю, как это имело место в численных моделях, не учитывающих трение.

В пограничном слое вертикальную скорость можно определить из уравнения неразрывности

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -D$$

путем интегрирования по высоте от нуля до z , т. е.

$$w = - \int_0^z D dz',$$

или

$$w = - \operatorname{Re} \int_0^z M dz'.$$

Найдем интеграл

$$\begin{aligned} \int_0^z M dz &= \frac{i-1}{2} \delta \int_0^z \int_0^\infty [e^{-\delta(1+i)|z'-z''|} - e^{-\delta(1+i)(z'+z'')}] \times \\ &\times \Omega_g dz'' dz' = \frac{i-1}{2} \delta \int_0^z \left\{ \int_0^{z'} e^{-\delta(1+i)(z'-z'')} \Omega_g dz'' + \right. \\ &\left. + \int_{z'}^\infty e^{\delta(1+i)(z'-z'')} \Omega_g dz'' - \int_0^\infty e^{-\delta(1+i)(z'+z'')} \Omega_g dz'' \right\} dz', \end{aligned}$$

допуская, что Ω_g мало меняется в пределах пограничного слоя (следует помнить, что знак «бесконечность» в этих интегралах соответствует верхней границе пограничного слоя).

Не производя сравнительно элементарных выкладок, сразу запишем

$$\begin{aligned} \int_0^z M dz &\approx \left\{ \frac{1}{2\delta} [(\cos \delta z + \sin \delta z) e^{-\delta z} - 1] + \right. \\ &\left. + i \left[z + \frac{1}{2\delta} (e^{-\delta z} (\cos \delta z - \sin \delta z) - 1) \right] \right\} \Omega_g. \end{aligned} \quad (3)$$

Таким образом, вертикальная скорость в пограничном слое приближенно равна

$$w = -\operatorname{Re} \int_0^z M dz' \approx \frac{1}{2\delta} [1 - e^{-\delta z} (\cos \delta z + \sin \delta z)] \Omega_g. \quad (4)$$

По смыслу проделанных процедур Ω_g означает вихрь у земной поверхности. Как уже говорилось, мы должны определить вертикальную скорость на верхней границе пограничного слоя и полученную величину взять в качестве условия на уровне земли.

В формуле (4) параметр δ равен $\sqrt{\frac{f}{2\nu}}$. Если $f=10^{-4}$ 1/сек., $\nu=10$ м²/сек., то $\delta \approx 2,5 \cdot 10^{-3}$ 1/м. Принимая для верхней границы пограничного слоя $z^*=1500$ км, получим

$$e^{-\delta z^*} \approx 0,024.$$

Таким образом, с точностью до 2% можно написать приближенное соотношение

$$w_0 \approx \frac{1}{2\delta} \Omega_g \approx \frac{g}{2\delta f} \Delta H_0. \quad (5)$$

Соотношение (5) обычно используется в квазигеострофических схемах численного прогноза в качестве нижнего краевого условия. Эффект трения можно также учесть, вводя соответ-

ствующие члены в уравнения движения. Обычно в численных алгоритмах, построенных таким образом, эффект трения получается автоматически. Такой путь более удобен при решении полных уравнений.

В заключение этого раздела найдем среднее значение вихря скорости в пограничном слое. Из (3) следует, что мнимая часть этого выражения есть интеграл по z от Ω . Распространяя интеграл на весь пограничный слой и деля все выражение на его высоту z^* , получим

$$\bar{\Omega}_{\infty} = \frac{1}{z^*} \int_0^{z^*} \Omega(z') dz' = \frac{1}{z^*} \left[z^* - \frac{1}{2\delta} + \frac{e^{-\delta z^*}}{2\delta} (\cos \delta z^* - \sin \delta z^*) \right] \Omega_{g_0}.$$

Если пренебречь последним слагаемым, то

$$\bar{\Omega}_{\infty} \approx \left(1 - \frac{1}{2\delta z^*} \right) \Omega_{g_0} \approx 0,87 \Omega_{g_0}.$$

Таким образом, средний вихрь в пограничном слое несколько меньше геострофического вихря у поверхности земли. Это обычно надо учитывать при построении прогностических схем, в расчетные формулы которых входит вихрь на уровне земли.

Эффект динамического воздействия гор на поля метеорологических элементов в квазигеострофических моделях учитывается довольно приближенно. Предполагается, что воздух обтекает препятствия без торможения, т. е. нормальная составляющая скорости при таком движении должна обращаться в нуль:

$$v_n = u \cos(n, x) + v \cos(n, y) + w \cos(n, z) = 0,$$

но

$$\cos(n, x) = \frac{\partial z}{\partial x}; \quad \cos(n, y) = \frac{\partial z}{\partial y}; \quad \cos(n, z) = -1,$$

откуда

$$w = u \frac{\partial z}{\partial x} + v \frac{\partial z}{\partial y}, \quad (6)$$

где $z = Z(x, y)$ — уравнение поверхности горы.

Обычно условие (6) записывается не для уровня горы, а для плоской поверхности земли. Вертикальная скорость у поверхности земли не принимается равной нулю, а определяется по уравнению (6).

Более точный учет орографии может быть, видимо, получен приемом, предложенным в свое время Н. Филлипсом. Суть этого метода заключается в следующем.

Вводится новая система координат

$$\xi = x, \quad \eta = y, \quad \zeta = \frac{p}{p_0(x, y)},$$

где $p_0(x, y)$ — давление на уровне горы.

Исходные уравнения записываются в новых переменных путем следующих соотношений:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial y},$$

$$\frac{\partial}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial p}.$$

Затем видоизмененные уравнения подвергают тем же преобразованиям, которые проводят обычно в случае ровной земной поверхности (выводится уравнение вихря скорости).

В новой системе координат независимая переменная меняется от 1 до 0, т. е. так же, как и в отсутствие гор.

В баротропных моделях учет гор также возможен. Это делается следующим образом. Берется уравнение вихря скорости

$$\frac{d\zeta_1}{dt} = -fD,$$

где

$$\eta = f + \Omega, \quad \Omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Затем это уравнение интегрируется по всей атмосфере от бесконечности до уровня земной поверхности, высота которой является функцией x и y .

Таким образом,

$$\int_{h(x, y)}^{\infty} \frac{d\zeta_1}{dt} dz = -f \int_{h(x, y)}^{\infty} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dz.$$

Введем обозначение

$$\bar{A} = \int_{h(x, y)}^{\infty} A dz,$$

тогда приближенно можно написать

$$\frac{d\bar{\zeta}_1}{dt} \approx \frac{d\zeta_1}{dt},$$

и, кроме того, преобразуем в правой части выражение

$$\int_{h(x,y)}^{\infty} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dz.$$

Пользуясь соотношением

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{\infty}^{h(x,y)} u dz = \int_{\infty}^{h(x,y)} \frac{\partial u}{\partial x} dz + u_{h(x,y)} \frac{\partial h(x,y)}{\partial x},$$

получим

$$\begin{aligned} \int_{h(x,y)}^{\infty} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dz &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{h(x,y)}^{\infty} u dz + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \int_{h(x,y)}^{\infty} v dz - u_h \frac{\partial h}{\partial x} - v_h \frac{\partial h}{\partial y}. \end{aligned}$$

Окончательно уравнение вихря для средней атмосферы с учетом эффекта гидродинамического воздействия неровности на средний поток имеет вид

$$\frac{d\bar{\zeta}}{dt} = -f \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) - u_h \frac{\partial h}{\partial x} - v_h \frac{\partial h}{\partial y}.$$

Если предположить, что средний поток бездивергентен, то получим

$$\frac{d\bar{\zeta}}{dt} = -u_h \frac{\partial h}{\partial x} - v_h \frac{\partial h}{\partial y}.$$

Это уравнение можно использовать в различных численных схемах прогноза в средней тропосфере. При этом следует только установить зависимость между $\bar{u}$, $\bar{v}$ и u_h , v_h .

4. Учет притоков тепла в краткосрочных бароклинических схемах прогноза метеорологических элементов

Учет неадиабатических притоков тепла в численных схемах особенно затруднителен. Наиболее обстоятельный учет этих факторов мы видим лишь в работах по моделированию общей циркуляции атмосферы. Однако по различным причинам эти модели пока трудно использовать для оперативных расчетов.

Из всех неадиабатических притоков тепла в настоящее время учитываются главным образом турбулентный поток тепла и приток тепла за счет конденсации. Учет турбулентного

потока тепла производится в схемах, в которых расчет ведется над океаном [4, 5]. Именно, берется только поток тепла от тепловой поверхности океана в атмосферу. Для этой цели используются эмпирические формулы. Наибольшую популярность получила формула для турбулентного потока тепла из океана в атмосферу в виде

$$P_T = Mv_0(T_s - T_0),$$

где M — константа, определяемая из эмпирических данных и равная нулю, если поток тепла направлен сверху вниз; v_0 — скорость ветра у поверхности земли; T_s — температура водной поверхности; T_0 — температура воздуха у водной поверхности.

Температура водной поверхности мало меняется со временем, поэтому многие авторы считают возможным в качестве T_s брать средние месячные климатологические данные. Экспериментальные прогнозы, рассчитанные с учетом потока тепла от поверхности океана, указывают на большое влияние этого фактора на поле геопотенциала. Гамбо [4], в частности, получил, что эффект притока тепла за счет конденсации намного меньше чем за счет турбулентного потока тепла с поверхности океана.

Естественно что полный учет внешних притоков тепла требует полной постановки задачи, в которой лучистые притоки тепла находились бы из решения уравнений переноса лучистой энергии, конденсационный приток тепла определялся бы из решения уравнения переноса и эволюции водяного пара, более полно учитывался бы баланс тепла у подстилающей поверхности и т. д.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кибель И. А. Введение в гидродинамические методы краткосрочного прогноза погоды. Гостехиздат, М., 1957.
2. Марчук Г. И., Киреева Н. М. К вопросу о разложении по малому параметру решений системы уравнений гидродинамики применительно к атмосферным процессам. Труды ИФА АН СССР, № 2, 1958.
3. Быков В. В. Об учете отклонения ветра от геострофического в краткосрочном прогнозе. Изв. АН СССР, серия геофиз., № 3, 1962.
4. Gambo K. The Role of Sensible and Latent Heat in the Baroclinic Atmosphere. J. Met. Soc. Japan. Ser. II, 41, No. 4, 1963.
5. Hallner G. I., Yeh-chun Wang. Numerical Prognosis Including Non-Adiabatic Warming. J. Met., 17, No. 2, 1960.

С. Л. БЕЛОУСОВ

МНОГОУРОВЕННЫЕ КВАЗИГЕОСТРОФИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРОГНОЗА

1. МНОГОУРОВЕННЫЕ КВАЗИГЕОСТРОФИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРОГНОЗА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РЕШЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ФУНКЦИИ ГРИНА

В наиболее ранних моделях гидродинамического прогноза часто использовалось предположение о стандартной зависимости некоторых элементов от высоты. Так, в баротропной модели принималось, что определенным образом осредненное по высоте значение скорости ветра равно значению скорости на некотором среднем уровне атмосферы. При таком предположении состояние атмосферы в любом пункте описывается всего лишь одним параметром — высотой эквивалентно-баротропного уровня (практически высотой AT_{500}). Физическая неполнота этой модели состоит прежде всего в том, что из рассмотрения исключен эффект адвекции температуры.

В более полных моделях атмосферы (политропной и подобных ей) также задается априори, как некоторые параметры атмосферы зависят от высоты. Линейное изменение температуры с высотой, квадратичный закон изменения вертикальной скорости с высотой, зависимость горизонтальных градиентов температуры от высоты в виде $\nabla T = f(p) \cdot \nabla T_0$, где $f(p)$ — эмпирически определяемая функция высоты (давления), — вот примеры заранее принимаемых зависимостей.

Использование подобных квазиплоских (двумерных) моделей атмосферы значительно уменьшает требования, предъявляемые к количеству необходимых начальных данных и к возможностям вычислительной техники, по сравнению с трехмерными моделями.

Однако в реальной атмосфере указанные зависимости не всегда выполняются с достаточной точностью. Поэтому следующий шаг на пути построения более точных способов прогноза — это отказ от ограничений двумерных моделей и переход к пространственным, трехмерным моделям, где не предполага-

ется заранее какая-либо зависимость элементов от высоты. В этих моделях может быть учтен такой фактор эволюции, как бароклинность атмосферных движений.

Напомним основные уравнения динамики атмосферы в квазигеострофическом приближении:

уравнение вихря

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta z + J(z, \zeta + f) - \frac{f(\zeta + f)}{g} \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0,$$

уравнение притока тепла

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial p} + \frac{g}{f} J\left(z, \frac{\partial z}{\partial p}\right) - \sigma \omega = 0$$

или в несколько иных обозначениях

$$\frac{\partial \Delta H}{\partial t} + \frac{g}{f} (H, \Delta H) + \beta \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{f^2}{g} \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0; \quad (1.1)$$

$$p^2 \frac{\partial^2 H}{\partial t \partial p} + p^2 \frac{g}{f} \left(H, \frac{\partial H}{\partial p}\right) + \frac{R^2 T (\gamma_a - \gamma)}{g^2} \omega = 0. \quad (1.2)$$

В уравнении (1.1) отброшены малые слагаемые $\omega \frac{\partial}{\partial p} \Delta z + \nabla \omega \cdot \nabla \frac{\partial z}{\partial p}$. Здесь $\omega = \frac{dp}{dt}$ — вертикальная скорость в системе x, y, p ; σ — параметр устойчивости $\left(\sigma = -\frac{R^2 T}{p^2 g^2} (\gamma_a - \gamma)\right)$, где γ_a — адиабатический температурный градиент, γ — наблюдаемый вертикальный температурный градиент); $f = 2\omega \sin \varphi \approx 1,2 \times 10^{-4}$ 1/сек.; $\beta = \frac{df}{dy} = \frac{1}{a_0} \frac{df}{d\varphi} = \frac{2\omega \cos \varphi}{a_0} \approx 2 \cdot 10^{-11}$ 1/м·сек. Эти параметры будем считать далее постоянными.

Рассмотрим систему (1.1) — (1.2). Это система двух уравнений с двумя искомыми функциями: $\frac{\partial H}{\partial t}$ и ω . Смысл отдельных слагаемых этих уравнений был проанализирован ранее. В частности, члены $\frac{g}{f} (H, \Delta H)$ и $\frac{g}{f} \left(H, \frac{\partial H}{\partial p}\right)$ выражают соответственно адвекцию вихря и адвекцию температуры. Уравнение вихря (1.1) отличается от соответствующего уравнения баротропной модели наличием последнего слагаемого с ω . При сохранении этого слагаемого уравнение (1.1) не может быть решено без привлечения уравнения (1.2), учитывающего эффект бароклинности.

Уравнения (1.1) и (1.2) могут быть применены как для расчета локальных изменений геопотенциала $\frac{\partial H}{\partial t}$, так и для рас-

чета вертикальной скорости ω . С их помощью могут быть определены и другие величины, например, локальные изменения температуры $\frac{\partial T}{\partial t}$.

При численном решении уравнений (1.1) и (1.2) вводится трехмерная (пространственная) сетка точек. Эта сетка может содержать то или иное число уровней n , совпадающих с некоторыми изобарическими поверхностями. В случае одного уровня ($n=1$) мы возвращаемся к баротропной модели, при $n=2$ — к той или иной модели с априори заданным изменением какого-либо параметра атмосферы с высотой, в частности, к модели политропной атмосферы. При выборе сетки из трех уровней ($n=3$) уже появляется возможность отказаться от подобных предположений. По мере дальнейшего увеличения числа уровней возрастает точность представления вертикальной структуры атмосферы. Одновременно при реализации подобных схем прогноза возрастают требования к вычислительной технике и к начальным данным. Вопрос о том, в какой мере увеличение числа уровней обеспечивает увеличение точности прогноза, является предметом специального исследования. В частности, эмпирическим путем было установлено, что междусуточные изменения геопотенциала в некоторой точке на любом уровне тропосферы с достаточностью можно выразить через соответствующие изменения всего лишь трех параметров (такими параметрами могут быть оптимальным образом подобранные линейные комбинации из значений изменений геопотенциала на разных уровнях). Для некоторых средних условий ошибка такого представления не превышает 5% от наблюдаемой изменчивости геопотенциала. На этом основании можно надеяться, что трехуровневая модель может иметь практическую ценность, по крайней мере в рамках квазигеострофического приближения.

На практике применяются различные способы решения сформулированной пространственной задачи прогноза. Как и в случае баротропной модели, возможны и графические способы решения, не требующие применения вычислительных машин. При решении трехмерной задачи переносимая (сохраняемая) величина рассчитывается с помощью некоторого пространственного разностного оператора (такой сохраняемой величиной может быть, например, потенциальный вихрь). Графические методы решения бароклинных уравнений не нашли широкого применения на практике, так как они требуют большого объема вычислений и не дают существенного уточнения по сравнению с баротропным прогнозом.

Существуют различные способы численного решения задачи прогноза с применением электронных вычислительных машин. Сейчас мы рассмотрим один из них — способ, основанный на использовании в решении функций Грина (так называемое ин-

тегральное решение). Разностные способы решения задачи мы рассмотрим позже. Интегральное решение позволяет легко проанализировать вклады отдельных факторов в изменение давления в бароклинической атмосфере.

Уравнение для расчета величины локальных изменений геопотенциала $\frac{\partial H}{\partial t} = q$ запишем в следующем виде:

$$\left(m^2 \Delta + \frac{\partial}{\partial p} p^2 \frac{\partial}{\partial p}\right) q = F(x, y, p). \quad (1.3)$$

Это уравнение получается из (1.1) и (1.2) после исключения ω с помощью дифференцирования уравнения (1.2) по переменной p .

Здесь

$$F = -m^2 \left\{ \frac{g}{f} (H, \Delta H) + \beta \frac{\partial H}{\partial x} \right\} - \frac{\partial}{\partial p} p^2 \frac{g}{f} \left(H, \frac{\partial H}{\partial p} \right),$$

$m = \sqrt{\frac{R^2 T (\gamma_a - \gamma)}{g f^2}}$ — параметр, зависящий от стратификации атмосферы и имеющий размерность длины. В дальнейшем будем считать этот параметр постоянным и равным его среднему значению. В тропосфере $m \approx 750$ км.

Итак, для определения q имеем линейное дифференциальное уравнение эллиптического типа (1.3) с частными производными по x, y, p . После определения значений q во всех точках сетки по этому уравнению могут быть рассчитаны значения H для последующего момента времени и т. д.

Укажем граничные условия для решения уравнения (1.3). Задача сформулирована для бесконечной плоскости, и поэтому по переменным x, y должно быть выполнено условие ограниченности решения на бесконечности, т. е.

$$\text{при } x, y \rightarrow \infty \quad q \text{ ограничено.} \quad (1.4)$$

Рассмотрим граничные условия по переменной p . По этой переменной уравнение имеет второй порядок. Поэтому необходимы два условия по p , например на верхней и нижней границах атмосферы. Наиболее очевидными с физической точки зрения являются следующие граничные условия: отсутствие потока за пределы атмосферы

$$\text{при } p \rightarrow 0 \quad \omega = 0 \quad (1.5)$$

и отсутствие потока массы, перпендикулярного поверхности земли. В случае плоской горизонтальной поверхности земли (горы не учитываются) это условие имеет вид

$$\text{при } z = 0 \quad w = 0,$$

или в системе x, y, p с учетом связи между ω и ω

$$\text{при } p = P \quad \omega = \frac{pg}{RT} \left(\frac{\partial H}{\partial t} + u \frac{\partial H}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y} \right),$$

где $P = 1000$ мб — стандартное давление на уровне моря. С учетом геострофического приближения для u и v последнее условие можно записать в виде

$$\text{при } p = P \quad \omega = \frac{pg}{RT} \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (1.6)$$

Здесь допущена некоторая неточность, состоящая в том, что условие (1.6), справедливое, вообще говоря, для уровня подстилающей поверхности, приписано некоторой изобарической поверхности $p = P = 1000$ мб. Позднее мы укажем, как модифицируется условие (1.6), если учесть влияние рельефа и влияние трения в пограничном слое на процессы в свободной атмосфере.

Для того чтобы применить условия (1.5) и (1.6) для решения уравнения (1.3) относительно q , необходимо преобразовать эти условия так, чтобы они содержали q и не содержали ω . Для этого воспользуемся уравнением притока тепла (1.2), которое перепишем так:

$$p^2 \frac{\partial q}{\partial p} + m^2 \frac{f^2}{g} \omega = -p^2 \frac{g}{f} \left(H, \frac{\partial H}{\partial p} \right). \quad (1.7)$$

Полагая здесь $p=0$ и $p=P$, получаем, согласно (1.5) и (1.6),

$$\lim_{p \rightarrow 0} p^2 \frac{\partial q}{\partial p} = 0,$$

или

$$\text{при } p = 0 \quad p \frac{\partial q}{\partial p} \text{ ограничено,} \quad (1.8)$$

$$\text{при } p = P \quad p \frac{\partial q}{\partial p} + \alpha q = -\frac{pg}{f} \left(H, \frac{\partial H}{\partial p} \right), \quad (1.9)$$

где $\alpha = \frac{R}{g} (\gamma_a - \gamma) \approx 0,1$ — постоянный параметр.

Итак, будем решать уравнение (1.3) с условиями (1.4), (1.8) и (1.9). Решение этой задачи может быть получено аналитически в замкнутой форме.

Введем в (1.3), (1.8), (1.9) безразмерные переменные $x_1 = \frac{x}{m}$, $y_1 = \frac{y}{m}$, $\zeta = \frac{p}{P}$. Получим

$$\frac{\partial^2 q}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial y_1^2} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \frac{\partial q}{\partial \zeta} = F, \quad (1.10)$$

где

$$F = -m^2 \left[\frac{g}{f} (H, \Delta H) + \beta \frac{\partial H}{\partial x} \right] - \frac{g}{f} \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \left(H, \frac{\partial H}{\partial \zeta} \right),$$

при $\zeta = 0$ $\zeta \frac{\partial q}{\partial \zeta}$ ограничено, (1.11)

$$\text{при } \zeta = 1 \quad \frac{\partial q}{\partial \zeta} + \alpha q = -\frac{g}{f} \left(H, \frac{\partial H}{\partial \zeta} \right). \quad (1.12)$$

(В дальнейшем индекс 1 при x и y опустим.)

Для решения сформулированной задачи может быть применен метод разложения в интеграл Фурье. Идея этого метода состоит в следующем. Функции $F(x, y, \zeta)$ и $q(x, y, \zeta)$ представим с помощью интеграла Фурье по бесконечной плоскости x, y [условие (1.4) позволяет это сделать]:

$$F(x, y, \zeta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F_{mn}(\zeta) e^{imx + iny} dm dn; \quad (1.13)$$

$$q(x, y, \zeta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} q_{mn}(\zeta) e^{imx + iny} dm dn, \quad (1.14)$$

где F_{mn} и q_{mn} — суть компоненты Фурье, причем

$$F_{mn}(\zeta) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x', y', \zeta') e^{-imx' - iny'} dx' dy'; \quad (1.15)$$

$$q_{mn}(\zeta) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} q(x', y', \zeta') e^{-imx' - iny'} dx' dy'. \quad (1.16)$$

Подставляя (1.13) и (1.14) в (1.10), получаем уравнение для q_{mn}

$$-\rho^2 q_{mn} + \frac{d}{d\zeta} \left(\zeta^2 \frac{dq}{d\zeta} \right) = F_{mn}(\zeta), \quad (1.17)$$

где

$$\rho^2 = m^2 + n^2.$$

Общее решение однородного уравнения, отвечающего (1.17), есть

$$C_1 \zeta^{v_1} + C_2 \zeta^{v_2}, \quad (1.18)$$

где $v_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \rho^2}$; C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Общее решение неоднородного уравнения (1.17) есть

$$q_{mn}(\zeta) = C_1 \zeta^{\nu_1} + C_2 \zeta^{\nu_2} + \frac{1}{\nu_2 - \nu_1} \left\{ \int_0^{\zeta} \zeta'^{\nu_2} \zeta'^{\nu_1} F_{mn}(\zeta') d\zeta' + \right. \\ \left. + \int_{\zeta}^1 \zeta'^{\nu_1} \zeta'^{\nu_2} F_{mn}(\zeta') d\zeta' \right\}. \quad (1.19)$$

Постоянные C_1 и C_2 определим с помощью краевых условий (1.11) и (1.12). Так как ν_2 отрицательно, то при $\zeta \rightarrow 0$ слагаемое с ζ^{ν_2} неограниченно растет. Поэтому для выполнения условия (1.11) мы должны положить $C_2 = 0$.

Постоянную C_1 определим из условия (1.12), которое предварительно представим в компонентах Фурье:

$$\text{при } \zeta = 1 \quad \frac{dq_{mn}}{d\zeta} + \alpha q_{mn} = -\frac{g}{f} \left(H, \frac{\partial H}{\partial \zeta} \right)_{mn}.$$

Полагая $\zeta = 1$ в (1.19), определяем постоянную C_1 , а затем находим решение для $q_{mn}(\zeta)$ (здесь мы его не выписываем).

Для перехода от $q_{mn}(\zeta)$ к $q(x, y, \zeta)$ необходимо воспользоваться формулой (1.14), т. е. вычислить интеграл от $q_{mn}(\zeta)$ по переменным m и n . Приведем окончательный результат вычисления этого интеграла:

$$q(\zeta) \equiv \frac{\partial H}{\partial t}(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \left\{ M_\omega m^2 \left[\frac{g}{f} (H, \Delta H) + \beta \frac{\partial H}{\partial x} \right] + \right. \\ \left. + M_T \zeta \frac{g}{f} \left(H, \frac{\partial H}{\partial \zeta} \right) \right\} r dr d\varphi d\zeta'. \quad (1.20)$$

(Мы перешли в (1.14) от декартовых координат x, y к полярным r, φ , причем начало координат помещается в точке, для которой ведется расчет q .)

Здесь M_ω и M_T — функции Грина. Это функции трех аргументов ζ, ζ', r . Переменная ζ относится к тому уровню, для которого ведется расчет $\frac{\partial H}{\partial t}$, ζ' — к «влияющему» уровню, r — расстояние от «влияющей» точки (текущей точки интегрирования) до точки прогноза, причем область влияния — вся бесконечная плоскость. Функция M_ω описывает вклад адвекции вихря в изменение геопотенциала, M_T — вклад адвекции температуры.

Приведем аналитические выражения для функций Грина (функций влияния) M_Σ и M_T :

$$M_\Sigma = \left\{ \frac{1}{2} \varpi(a, r) \left| \begin{array}{c} a = \ln \frac{\xi'}{\xi} \\ a = \ln \frac{1}{\xi \xi'} \end{array} \right. + X_\alpha(a, r) \right|_{a = \ln \frac{1}{\xi \xi'}} \right\};$$

$$M_T = -\xi' \frac{\partial M_\Sigma}{\partial \xi'};$$

$$\varpi(a, r) = \frac{e^{-\frac{1}{2} \sqrt{a^2 + r^2}}}{\sqrt{a^2 + r^2}};$$

$$X_\alpha(a, r) = \varpi(a, r) + \left(\frac{1}{2} - \alpha \right) e^{-\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) a} \int_0^\infty e^{\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) a} \varpi(a, r) da.$$

В таком виде решение задачи для расчета $\frac{\partial H}{\partial t}$ было получено Н. И. Булеевым и Г. И. Марчуком [2], а также Го [5].

Функции Грина M_Σ и M_T могут быть рассчитаны и иным способом — в результате численного решения уравнения (1.10). Для этого оператор левой части уравнения записывается с помощью конечных разностей в точках некоторой фиксированной сетки, а правая часть принимается равной единице в некоторой точке сетки, влияние которой необходимо рассчитать (это «источник»). В остальных точках сетки значения правой части принимаются равными нулю. Получаемая при этом система алгебраических уравнений для q решается численно. Этот способ расчета функций Грина как функций источника был осуществлен К. Хинкельманом [3]. При таком способе решения представляется возможным не принимать постоянными во всей атмосфере некоторые параметры, в частности, параметр m^2 , зависящий от стратификации, как это сделано в только что рассмотренном аналитическом решении.

Решение задачи в форме (1.20) позволяет проследить влияние на изменение геопотенциала основных факторов — адвекции вихря и адвекции температуры, наблюдаемых на разных уровнях и на различных расстояниях от точки, для которой ведется расчет $\frac{\partial H}{\partial t}$. Количественно это влияние описывается функциями Грина M_Σ и M_T .

Отметим прежде всего, что эти функции обладают осевой симметрией, т. е. линии равных значений этих функций при фиксированных значениях ξ и ξ' — окружности, центры кото-

рых находятся на вертикальной оси, проходящей через точку прогноза. (Более точный учет зависимости параметра Кориолиса от широты при геострофической аппроксимации вихря скорости позволяет обнаружить некоторую несимметрию этих функций в направлении север — юг.)

На рис. 1 в качестве примера представлен график функции влияния M_z для $\zeta=0,5$.

По оси абсцисс отложено расстояние от точки прогноза, причем единица расстояния ($r=1$) равна m (т. е. 750 км для тропосферы). Если этот параметр равен другой величине (на-

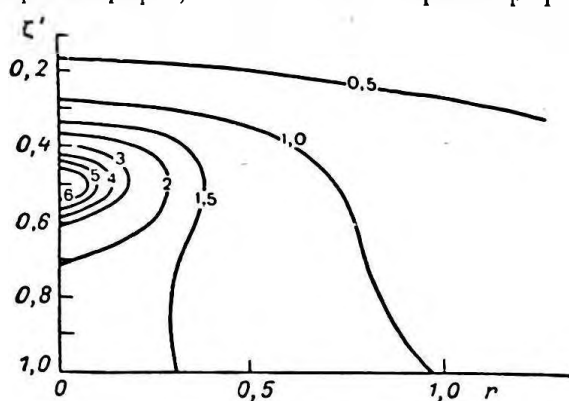


Рис. 1. Функция Грина для изменений геопотенциала, обусловленных адвекцией вихря ($\zeta=0,5$).

пример, 900 км при повышенной устойчивости или 600 км при уменьшенной устойчивости), то значению $r=1$ соответствует расстояние 900 или 600 км. Следовательно, этот же график позволяет проследить зависимость функций Грина от расстояния при различной устойчивости атмосферы. Функция M_z всюду положительна. Это значит, что адвекция вихря на любом уровне приводит к изменениям давления одного и того же

знака на всех уровнях. При этом положительная адвекция вихря приводит к росту геопотенциала ($\frac{\partial H}{\partial t} > 0$), а отрицательная — к уменьшению. Нетрудно проверить, что адвекция вихря положительна, в частности, при возрастании циклонического вихря скорости вдоль потока.

Функция M_z для $\zeta=0,5$ имеет особенность при $\zeta'=\zeta=0,5$ и $r=0$, т. е. в точке прогноза. Следовательно, наибольший вклад в изменение давления вносит адвекция вихря, наблюдаемая вблизи точки прогноза. Характер убывания M_z по мере удаления от этой точки как в вертикальном, так и в горизонтальном направлении можно проследить на рис. 1. Аналогичный вид имеет функция M_z и для других значений ζ .

Совсем иной вид имеет функция M_T , представляющая вклад адвекции температуры в изменение давления. На рис. 2 представлен график функции M_T для $\zeta=0,5$. Она отрицательна для всех значений $\zeta' < \zeta$ (т. е. выше того уровня, для которого ведется расчет $\frac{\partial H}{\partial t}$) и положительна для $\zeta' > \zeta$ (т. е. ниже этого

уровня). Физически это означает, что положительные значения адвекции температуры на некотором уровне (имеющие место при адвекции тепла, когда $(H, \frac{\partial H}{\partial p}) > 0$) способствуют уменьшению давления во всем нижележащем слое атмосферы и росту давления в вышележащем слое.

Функция влияния M_T для $\xi=1$ (т. е. для расчета изменений геопотенциала на уровне моря) всюду отрицательна: адвекция тепла (холода), наблюдаемая на любом уровне, приводит к уменьшению (росту) давления у земли.

Функция влияния M_T для расчета $\frac{\partial H}{\partial t}$ на среднем уровне

атмосферы ($\xi=0,5$) характеризуется симметричным расположением областей положительных и отрицательных влияний. Следовательно, адвекция температуры одного и того же знака, наблюдаемая в слоях, примыкающих к этому уровню сверху и снизу, не приводит к изменению геопотенциальных высот этого уровня

(в силу взаимной компенсации вкладов с противоположными знаками). Этим обстоятельством в известной мере оправдан тот факт, что при прогнозе геопотенциальных высот среднего уровня атмосферы не учитывается влияние адвекции температуры. С другой стороны, постоянство знака функции M_T в той же мере оправдывает возможность при решении этой задачи учитывать данные об адвекции вихря только на одном (среднем) уровне атмосферы.

Как показывает опыт, для всех уровней, лежащих в свободной атмосфере, вклад адвекции вихря в изменение геопотенциальных высот, как правило, в 2—3 раза превосходит вклад адвекции температуры.

Как отмечалось выше, приведенные выражения для функций влияния M_ω и M_T получены в предположении постоянства параметра m^2 . Характер зависимости функций влияния от величины этого параметра легко понять, если вспомнить, что в этих расчетах в качестве горизонтальной координаты фигурирует безразмерная величина r_1 , равная расстоянию от точки прогноза, разделенному на m ($r_1 = \frac{r}{m}$). Отсюда ясно, что,

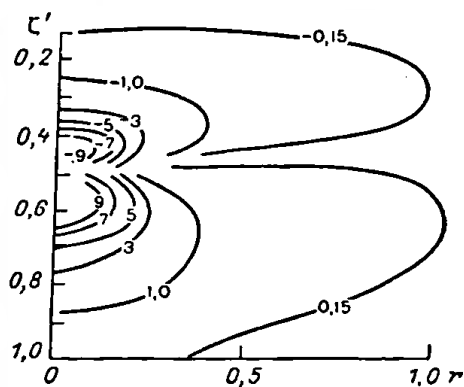


Рис. 2. Функция Грина для изменений геопотенциала, обусловленных адвекцией температуры ($\xi=0,5$).

например, при увеличении m , т. е. с ростом $\gamma_a - \gamma$ (повышение статической устойчивости атмосферы), область влияния «растягивается» в горизонтальном направлении. Это означает, что при большей статической устойчивости атмосферы влияние возмущений сильнее распространяется в горизонтальном направлении и меньше в вертикальном. В частности, это имеет место в стратосфере, где $m \approx 900$ км, тогда как для тропосферы $m \approx 750$ км.

При расчете функций влияния имеется возможность учесть различие величины параметра m в стратосфере и тропосфере. Так, в упомянутом ранее численном способе расчета функций влияния [3] параметр стратификации принимался изменяющимся с высотой, а именно было принято, что в тропосфере $\gamma = 6^\circ/\text{км}$, а в стратосфере $\gamma = 0$. Однако оба решения задачи (с $m = \text{const}$ и $m \neq \text{const}$) имеют заметные различия только внутри области, в которой значения этого параметра различны. Основным результатом этих уточнений — увеличение области влияния по горизонтали и сокращение по вертикали для стратосферы.

Приведенное выше решение (1.20) для расчета $\frac{\partial H}{\partial t}$ представляет скорее методический, чем практический интерес. Трудность практического использования этого решения связана с тем, что согласно (1.20) интегрирование по переменной r должно быть выполнено по всей бесконечной плоскости, что, однако, неосуществимо практически и неоправданно с физической точки зрения. Практически реально действующей является обычно лишь некоторая ограниченная область влияния, непосредственно примыкающая к пункту прогноза. Это следует уже хотя бы из того факта, что скорость распространения влияний конечна. Поэтому более удобным с практической точки зрения было бы решение, предполагающее учет ограниченной области влияния.

Такое решение имеет вид (см. [4])

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t} = & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R \left\{ m^2 \left[\frac{g}{f} (H, \Delta H) + 2 \frac{\partial H}{\partial x} \right] M'_z + \right. \\ & \left. + 2 \frac{g}{f} \left(H, \frac{\partial H}{\partial z} \right) M'_T \right\} r dr d\varphi d\varphi' + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\partial H}{\partial t} (R) M'(R) d\varphi d\varphi', \end{aligned} \quad (1.21)$$

где R — радиус ограниченной области влияния, имеющей вид цилиндра с вертикальной осью, проходящей через точку прогноза (начало координат). Здесь функции влияния M'_z и M'_T отличаются от функций M_z и M_T тем, что обращаются в нуль при $r=R$, т. е. на границах области влияния. Вторым интеграл

в (1.21) распространен по боковой поверхности цилиндра, представляющего область влияния. Для вычисления этого интеграла необходимо иметь значения $\frac{\partial H}{\partial t}$ в точках боковой поверхности цилиндра. Эти величины, очевидно, заранее неизвестны. Поэтому данный интеграл может быть вычислен лишь как поправка к решению после того, как значения $\frac{\partial H}{\partial t}$ в точках поверхности цилиндра уже вычислены без учета этого интеграла, т. е. методом последовательных уточнений, причем первое приближение для $\frac{\partial H}{\partial t}$ находится с помощью только одного первого интеграла в (1.21).

Обычно область влияния выбирается с достаточно большим радиусом, порядка 1000 км. В этих условиях второй интеграл в (1.21) дает вклад, малый по сравнению с первым интегралом. Это и оправдывает возможность приближенного учета указанного интеграла.

В качестве иллюстрации двух типов решений одного и того же уравнения с ограниченной и с неограниченной областью влияния укажем два типа решения уравнения Пуассона $\Delta q = F(x, y)$ на плоскости (это уравнение фигурирует при баротропном прогнозе):

решение с неограниченной областью влияния

$$q = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} F \ln \frac{1}{r} r dr d\varphi,$$

решение с ограниченной областью влияния

$$q = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R F \ln \frac{R}{r} r dr d\varphi + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q(R) d\varphi.$$

Здесь второй интеграл вычисляется по окружности радиусом R (т. е. равен среднему значению q на этой окружности). В первом случае функция влияния $\ln \frac{1}{r}$ неограниченно растет при $r \rightarrow \infty$, а во втором $\ln \frac{R}{r}$ обращается в нуль при $r = R$. Первое решение практически не может быть использовано для расчетов.

Сейчас мы укажем некоторые уточнения рассмотренного решения (1.20), касающиеся учета влияния рельефа и влияния трения в пограничном слое. Как уже отмечалось, эти уточнения связаны с модификацией краевого условия у поверхности земли (т. е. при $\zeta = 1$).

Для того чтобы учесть эффект орографии, мы должны считать равной нулю уже не вертикальную скорость, а состав-

ляющую скорости, перпендикулярную к неровной поверхности земли. Получим

$$\omega = u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \quad \text{при } z = 0,$$

где $h(x, y)$ — поверхность земли.

Выражаем здесь u и v с помощью геострофических соотношений, учитываем связь между ω и ω и переходим к переменным x, y, p . Получим

$$\omega = \frac{pg}{RT} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{pg}{f} (H, \eta) \quad \text{при } p = P. \quad (1.22)$$

Это и есть уточненное краевое условие у поверхности земли. Оно отличается от полученного ранее условия (1.6) наличием одного дополнительного слагаемого. Здесь $\eta = \frac{p_h}{P}$, причем p_h — стандартное давление (давление в стандартной атмосфере) на высоте $h(x, y)$, т. е. на высоте поверхности горы. Здесь допущена одна неточность — условие (1.22) приписано не поверхности горы, а близкой к ней поверхности $p = P = 1000$ мб. Последний член в (1.22) выражает ту дополнительную вертикальную скорость, которая возникает при набегании воздушного потока на горное препятствие.

Для функции $q = \frac{\partial H}{\partial t}$ вместо (1.12) получаем следующее условие:

$$\frac{\partial q}{\partial \zeta} + \alpha q = -\frac{g}{f} \left(H, \frac{\partial H}{\partial \zeta} \right) - \frac{\gamma RT}{f} (H, \eta) \quad \text{при } \zeta = 1. \quad (1.23)$$

Аналогичным видоизменением краевого условия при $\zeta = 1$ может быть учтено влияние торможения воздушного потока в пограничном слое земли на процессы в свободной атмосфере. Для этого мы должны определить ту дополнительную вертикальную скорость, которая возникает на верхней границе приземного пограничного слоя вследствие указанного фактора. Эту дополнительную вертикальную скорость мы припишем нижней границе атмосферы (практически уровню $p = P = 1000$ мб).

Если принять, что в пределах пограничного слоя для скорости ветра действительна модель Аккерблома, то, согласно уравнению неразрывности, искомая вертикальная скорость на верхней границе слоя трения будет равна

$$\omega_{\text{тр}} = k \Omega_r, \quad (1.24)$$

где Ω_r — вихрь геострофического ветра на верхней границе слоя трения; $k = \sqrt{\frac{\nu}{2f}} \approx 140$ м; ν — коэффициент вязкости ($\nu \approx 5$ м²/сек.).

Используя (1.24), заменим условие (1.6)

$$\text{при } p = P \quad \omega = \frac{gp}{RT} \left(\frac{\partial H}{\partial t} - k \frac{g}{f} \Delta H \right) \quad (1.25)$$

и соответственно вместо (1.12) будем иметь

$$\text{при } \zeta = 1 \quad \frac{\partial q}{\partial \zeta} + \alpha q = - \frac{g}{f} \left(H, \frac{\partial H}{\partial \zeta} \right) + \frac{\alpha kg}{f} \Delta H. \quad (1.26)$$

С учетом видоизменений краевого условия (1.12) в виде (1.23) и (1.26) решение (1.20) приобретает два дополнительных слагаемых:

для учета орографии

$$- \frac{1}{2\pi} \frac{m^2 f}{V \zeta} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty X_\alpha \left(\ln \frac{1}{\zeta}, r \right) (H, \eta)_{\zeta=1} r dr d\varphi, \quad (1.27)$$

для учета трения

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\alpha kg}{f V \zeta} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty X_\alpha \left(\ln \frac{1}{\zeta}, r \right) (\Delta H)_{\zeta=1} r dr d\varphi, \quad (1.28)$$

причем функция X_α всюду положительна. Она убывает с удалением от поверхности земли (с уменьшением ζ) соответственно тому, как убывает влияние подстилающей поверхности по мере удаления от нее.

Нетрудно проверить, что слагаемое (1.27) описывает дополнительный рост давления с наветренной стороны хребта и падение — с подветренной. Выражение (1.28) положительно в циклонах и отрицательно в антициклонах.

В заключение укажем, что интегральные решения типа (1.20) могут быть построены тем же методом и для расчета ряда других метеорологических величин: вертикальной скорости ω , локальных изменений температуры $\frac{\partial T}{\partial t}$, для расчета $\frac{\partial u_g}{\partial t}$ и $\frac{\partial v_g}{\partial t}$ и дивергенции D по значениям адвекции вихря и адвекции температуры в окружающей области.

Изложение этих выводов читатель найдет в главе VII монографии И. А. Кибеля [1].

II. МНОГОУРОВЕННЫЕ КВАЗИГЕОСТРОФИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРОГНОЗА В ОПЕРАТИВНОЙ ПРАКТИКЕ

В настоящей лекции мы рассмотрим следующие оперативные квазигеострофические модели прогноза:

1) трехуровневую схему прогноза, применяемую в Мировом метеорологическом центре в Москве;

2) пятиуровневую схему прогноза, применяемую в Новосибирске;

3) двухуровневую схему прогноза с использованием метода «прямых», применяемую в Ленинграде;

4) четырехуровневую схему прогноза, применяемую в Японском метеорологическом агентстве.

Теоретические основы перечисленных схем были изложены в предыдущих лекциях. Напомним только, что в основе этих схем лежат следующие два уравнения:

уравнение вихря

$$\Delta \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{g}{f} (H, \Delta H) + \beta \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{f^2}{g} \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0; \quad (2.1)$$

уравнение притока тепла

$$p^2 \frac{\partial^2 H}{\partial t \partial p} + p^2 \frac{g}{f} \left(H, \frac{\partial H}{\partial p} \right) + \frac{R^2 T (\gamma_a - \gamma)}{g^2} \omega = 0, \quad (2.2)$$

а также уравнение для расчета $\frac{\partial H}{\partial t}$, получающееся из (2.1) и (2.2):

$$\begin{aligned} \left(m^2 \Delta + \frac{\partial}{\partial z} \tau^2 \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{\partial H}{\partial t} = - m^2 \left\{ \frac{g}{f} (H, \Delta H) + \beta \frac{\partial H}{\partial x} \right\} - \\ - \frac{\partial}{\partial z} \tau^2 \frac{g}{f} \left(H, \frac{\partial H}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (2.3)$$

1. Трехуровневая схема прогноза

В этой схеме используется интегральное решение уравнения (2.3), содержащее функции Грина:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^R \left\{ m^2 \left[\frac{g}{f} (H, \Delta H) + \beta \frac{\partial H}{\partial x} \right] M'_2 + \right. \\ \left. + \frac{g}{f} \tau \left(H, \frac{\partial H}{\partial z} \right) M'_r \right\} r dr d\varphi d\varphi' + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{\partial H}{\partial t} (R) M'(R) d\varphi d\varphi'. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Имеются два варианта схемы, отличающиеся размером сетки. В первом из них область исходных данных представляет собой сетку из $26 \times 22 = 572$ точек с шагом 300 км, а во втором варианте — $37 \times 27 = 999$ точек с тем же шагом на ши-

роте 60° (учитывается изменение масштаба карты с широтой). В обоих вариантах исходными данными служат значения AT_{850} , AT_{500} , AT_{300} , полученные в результате объективного анализа. Шаг по времени равен 1,5 часа с использованием односторонних разностей по времени в эксплицитной форме.

При расчете адвекции вихря и адвекции температуры используется представление производных по x (и y) в виде (рис. 3)

$$\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_0 = \frac{1}{8s} [(H_1 - H_2) + 2(H_3 - H_4) + (H_5 - H_6)].$$

Здесь $s = 300$ км — шаг сетки.

Производные по переменной ζ в якобиане $(H, \frac{\partial H}{\partial \zeta})$ заменяются разностями

значений H на соседних уровнях, так что практически значения адвекции температуры на разных уровнях могут быть представлены всего лишь двумя различными якобианами вида

$$(H_1, H_2) \text{ и } (H_2, H_3),$$

где индексы 1, 2, 3 относятся соответственно к уровням 850, 500 и 300 мб.

Таким образом, в каждой точке сетки рассчитывается пять влияющих на изменение геопотенциала величин: значения адвекции вихря $\frac{g}{f}(H, \Delta H) + \beta \frac{\partial H}{\partial x}$ на трех уровнях и значения адвекции температуры в виде указанных выше двух якобианов.

Для расчета приращений δH на уровнях 850, 500 и 300 мб по формуле (2.4) вводится область влияния ограниченного размера R , причем $R \approx 3,5s$, т. е. $R \approx 1050$ км. Область влияния охватывает 7×7 точек сетки. Внутри этой области интеграл по переменной r разбивается на сумму интегралов по нескольким (по четырем) concentрическим кольцам, а интеграл по переменной ζ' — по трем слоям. Внутри каждого кольца интегрирование по переменной ϕ состоит в простом суммировании по точкам некоторого контура.

При этих условиях вычисление первого интеграла в (2.4) практически сводится к суммированию умноженных на соответствующие весовые коэффициенты пяти значений адвекции вихря и адвекции температуры в точках четырех контуров, окружающих точку прогноза. Второй интеграл в (2.4) вычисляется по результатам вычисления первого интеграла. Здесь суммирование производится по точкам самого внешнего из четырех контуров на всех трех уровнях.

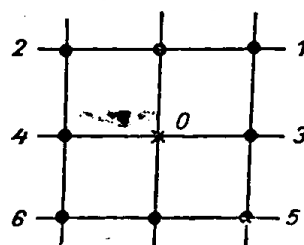


Рис. 3. К расчету производных по x и y .

Все весовые коэффициенты заданы в виде заранее подготовленных констант. Они могут быть рассчитаны двояким образом: с использованием аналитического представления функций влияния и численным способом путем решения системы алгебраических уравнений, которая получается при конечно-разностном представлении оператора левой части уравнения (2.3) в точках области влияния соответственно выбранным контурам. При этом ставится дополнительное условие обращения искомой функции в заданную величину на внешнем контуре области влияния. Этот способ близок к тому, который был использован в упоминавшейся ранее работе К. Хинкельмана при расчете функций влияния.

2. Пятиуровневая разностная схема прогноза

Здесь исходными данными являются значения высот изобарических поверхностей 1000, 850, 700, 500 и 300 мб, заданные в 26×22 точках. Приращения геопотенциала $\frac{\partial H}{\partial t}$ на каждом шаге рассчитываются в результате решения системы алгебраических уравнений, которая получается в результате конечно-разностного представления оператора, находящегося в левой части уравнения (2.3). (В известном смысле такой способ решения аналогичен рассмотренному в одной из предыдущих лекций способу разностного решения баротропного уравнения вихря.)

Очевидно, что число неизвестных в этой системе равно числу точек, содержащихся в пространственной сетке, т. е. $5 \times 26 \times 22 = 2860$. Эта система уравнений решается методом последовательных приближений. Для того чтобы обеспечить быструю сходимость решения, используется специальный прием. Поясним идею этого приема. Запишем уравнение (2.3) в конечных разностях для некоторой точки сетки, не лежащей на двух крайних уровнях:

$$\begin{aligned} a^k q_{ij}^{k+1} - (b^k + 4\mu^2) q_{ij}^k + c^k q_{ij}^{k-1} = -\mu^2 \Delta q_{ij}^k - \\ - \frac{g}{f} \frac{1}{4h^2} (H_{ij}^k, \mu^2 \Delta H_{ij}^k + a^k H_{ij}^{k+1} + c^k H_{ij}^{k-1}) - \\ - \frac{3}{2h} (H_{i+1,j}^k - H_{i-1,j}^k). \end{aligned} \quad (2.5)$$

(Соответствующие соотношения для точек крайних уровней отличаются от этого соотношения. Они строятся с учетом граничных условий задачи.)

Верхний индекс здесь относится к номеру уровня (он возрастает с высотой). Нижние индексы обозначают расположе-

ние точки в горизонтальной сетке. Здесь введено обозначение: $\mu^2 = \frac{m^2}{h^2}$, причем h — шаг сетки. Символом ΔH_{ij}^k обозначена сумма значений H на поверхности номера k в четырех точках, ближайших к точке i, j . Оператор Лапласа Δq для точки i, j , входящий в левую часть уравнения (2.3), выражен через значения q в самой точке i, j и в четырех окружающих точках, причем в левой части (2.5) сохранено только лишь слагаемое $-4\mu^2 q_{ij}^k$, относящееся к центральной точке i, j , тогда как остальные слагаемые разностного лапласиана в виде Δq_{ij}^k перенесены в правую часть уравнения (2.5). Благодаря этому в левой части (2.5) остаются значения q только лишь в точках, лежащих на одной вертикали. Благодаря этому для каждой вертикали получается своя система пяти уравнений с пятью неизвестными, которая может быть решена независимо от систем, относящихся к остальным вертикалям. Это существенно упрощает решение системы уравнений для q_{ij}^k , хотя при этом вводится в правую часть (2.5) неизвестная величина Δq_{ij}^k .

Остальные слагаемые правой части (2.5) не требуют специальных пояснений. Отметим лишь то, что второй член в правой части получен путем объединения якобианов $m^2(H, \Delta H)$ и $\frac{\partial}{\partial \xi} \left(H, \frac{\partial H}{\partial \xi} \right)$ с использованием очевидного тождества $(H, \Delta H) \equiv (H, \Delta H)$. Последний член в (2.5) соответствует слагаемому $\beta \frac{\partial H}{\partial x}$.

Коэффициенты a^k, b^k, c^k получаются в результате разностного представления производных по ξ . Число их определено тем, что в уравнении (2.3) имеется вторая производная по ξ , для представления которой используется трехточечная схема. Для каждого уровня имеется свой набор этих коэффициентов соответственно тому, что различные уровни располагаются на разных расстояниях один от другого и, кроме того, здесь учитывается изменение с высотой параметра m^2 , зависящего от статической устойчивости атмосферы.

Система алгебраических уравнений для q_{ij}^k , представленная соотношением (2.5), решается численно следующим образом. Рассчитываются значения второго и третьего членов правой части (2.5). Неизвестная величина Δq_{ij}^k в первом приближении принимается равной нулю (или берется по результатам предыдущего шага по времени). Далее для каждой вертикали (независимо!) решаются системы пяти уравнений с пятью неизвестными. Так будет определено поле q_{ij}^k на всех уровнях в первом приближении. По этим величинам могут быть рассчитаны значения Δq_{ij}^k во всех точках. Кроме того, могут

быть определены также и будущие значения $H_{i+\Delta t}$ в первом приближении. Для перехода к следующему приближению в правую часть (2.5) вставляются найденные на предыдущем приближении значения Δq_{ij}^k . Имеется возможность попутно вычислить заново и остальные слагаемые правой части (2.5), полагая в них значения H равными их приближенным будущим значениям $H_{i+\Delta t}$ (либо равными линейной комбинации начальных H_i и будущих $H_{i+\Delta t}$ значений H). Следовательно, возникает возможность использовать имплицитную схему для представления производной по времени. Как показал опыт, при счете по неявной схеме оказывается достаточным проделать на каждом шаге по 4—5 приближений при шаге по времени в один час.

Отметим еще одну деталь, касающуюся принятого здесь способа решения системы уравнений пятого порядка для каждой вертикали.

Эти системы имеют специфический вид:

$$\left. \begin{aligned} -B_1 q_1 + (a_1 + c_1) q_2 &= F_1 \\ c_1 q_1 - B_2 q_2 + a_2 q_3 &= F_2 \\ c_3 q_2 - B_3 q_3 + a_3 q_4 &= F_3 \\ c_4 q_3 - B_4 q_4 + a_4 q_5 &= F_4 \\ (c_5 + a_5) q_4 - B_5 q_5 &= F_5 \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

Здесь по сравнению с (2.5) все верхние индексы перенесены вниз; $B_i = b_i + 4\mu^2$; F_i — значение правой части уравнения (2.5). Для решения алгебраических систем такого вида может быть применен метод, требующий выполнения не более чем $6n$ арифметических операций (в данном случае $n=5$). В то же время решение этой системы в форме $q_i = \sum_j a_{ij} F_j$, где коэффициенты a_{ij} определены заранее, потребовало бы выполнения $2n^2$ операций.

3. Двухуровневая схема прогноза с использованием «метода прямых»

Мы рассмотрели две схемы прогноза, отличающиеся в основном тем, что в первой из них используется интегральное решение прогностического уравнения, тогда как во второй — разностное решение. Если в первой схеме оператор левой части уравнения сохранялся в дифференциальной форме, то во второй схеме он заменялся разностным оператором по всем трем переменным.

Сейчас мы рассмотрим схему, являющуюся в известном смысле промежуточной. Именно, здесь в операторе уравнения

(2.3) конечными разностями заменяются производные по переменным x, y , тогда как по переменной ζ этот оператор остается дифференциальным. В результате после замены производных по x, y конечными разностями мы приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений по переменной ζ , каждое из которых определено вдоль соответствующей вертикали. Эти дифференциальные уравнения решаются с помощью функций Грина, которые в этом случае зависят уже только от одной переменной. (Попутно отметим, что существует и другой вариант интегрально-разностного решения, в котором оператор левой части заменяется разностями по высоте и остается дифференциальным по переменным x, y . Это метод «плоскостей».)

Рассматриваемая схема была построена применительно к треугольной сетке точек.

Пример такой сетки представлен на рис. 4.

Такая сетка по сравнению с обычно применяемой квадратной сеткой обеспечивает более равномерное размещение точек в различных направлениях. На рис. 4 одной и той же цифрой обозначается группа точек, находящихся на одинаковом расстоянии от точки 0 (начало координат). Точки каждой группы являются вершинами правильного шестиугольника с центром в точке 0 (точка 2 соответствует точке 3 по тексту). Приведем разностное выражение для оператора Лапласа в случае треугольной сетки точек:

$$(\Delta q)_0 = \frac{4}{h^2} (q_1 - q_0), \quad (2.7)$$

где q_1 — осредненное по шести точкам с номером 1 значение функции q . Нетрудно проверить, что это выражение вполне аналогично соответствующей формуле для квадратной сетки точек.

Запишем теперь уравнение (2.3) для вертикали, проходящей через точку 0:

$$\frac{d}{d\zeta} \left(\frac{1}{\zeta^2} \frac{dq_0}{d\zeta} \right) + m^2 \frac{4}{h^2} (q_1 - q_0) = F_0(p). \quad (2.8)$$

Здесь $F_0(p)$ — значение правой части уравнения (2.3) на вертикали, проходящей через точку 0. Функции $q_0(\zeta)$ и $q_1(\zeta)$ определены вдоль соответствующих вертикальных линий.

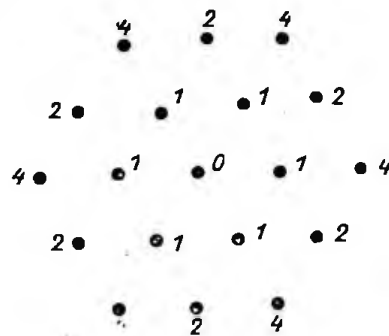


Рис. 4. Треугольная сетка точек.

Запишем теперь по этому же принципу уравнение (2.3) для точек с номером 1, сложим их и разделим на шесть. Получим

$$\frac{d}{d\zeta} \zeta^2 \frac{dq_1}{d\zeta} + \frac{m^2}{6} \frac{4}{h^2} (q_0 + 2q_1 + 2q_3 + q_4 - 6q_1) = F_1(p). \quad (2.9)$$

Аналогичные уравнения можно записать и для точек со следующими номерами. Выписанные уравнения (2.8) и (2.9) содержат четыре искомые функции и, следовательно, не образуют замкнутой системы. Присоединение к ним уравнений, записанных для точек с последующими номерами, также не приводит к замыканию системы. Поэтому систему уравнений (2.8), (2.9) по отношению к q_0 решают последовательными приближениями. Именно, в первом приближении принимаются равными нулю значения q_i в точках, наиболее удаленных от точки прогноза 0. В данном случае принимается, что $q_3 \approx 0$ и $q_4 \approx 0$, и система уравнений (2.8) и (2.9) решается относительно q_0 . Так будет получено решение в первом приближении для всех точек сетки. После того как значения q_0 в первом приближении всюду будут определены, уравнения (2.8) и (2.9) решаются относительно q_0 заново, но при этом значения q в точках 3 и 4 уже не принимаются равными нулю, а берутся в соответствии с полученным решением в первом приближении. Так будет получено решение во втором приближении.

Нетрудно заметить, что в первых двух рассмотренных схемах прогноза влияние удаленных по горизонтали точек учитывается с помощью последовательных приближений.

В рассматриваемой схеме прогноза ограничиваются использованием только двух уравнений (для q_0 и q_1), так как дальнейшее увеличение числа привлекаемых уравнений не приводит к повышению точности прогноза.

Система дифференциальных уравнений (2.8) и (2.9) решается относительно функции $q_0(\zeta)$, причем в первом приближении, как уже отмечалось, считается, что $q_3 = q_4 = 0$. Мы не будем выписывать это решение в аналитическом виде. Отметим лишь, что оно содержит интегралы по ζ от произведений адвекции вихря и адвекции температуры на соответствующие одномерные функции влияния. Характер изменения этих функций с высотой такой же, как и рассмотренных ранее трехмерных функций влияния.

В оперативной практике данная схема применяется в двухуровневом варианте (для уровней 850 и 500 мб).

4. Четырехуровневая схема прогноза

Рассмотрим схему, в которой учитываются притоки тепла от конденсации и от теплообмена с подстилающей поверхностью.

В этой схеме предполагается, что

- 1) при наличии восходящих движений в слое ниже 500 мб всегда имеет место насыщение, причем выделение скрытой теплоты конденсации пропорционально вертикальной скорости;
- 2) поток тепла через поверхность океана пропорционален разности температур океана и атмосферы.

Основные уровни: 900, 700, 500 и 300 мб.

Для прогноза высоты поверхности 500 мб используется уравнение вихря баротропной модели, в котором сохранено слагаемое, содержащее $\frac{\partial \omega}{\partial p}$. Для прогноза высоты остальных уровней рассчитываются тенденции толщин слоев между двумя изобарическими поверхностями. Для этого используется уравнение притока тепла, записанное для промежуточных уровней: 400, 600 и 800 мб. Входящие в уравнения значения вертикальных скоростей на этих уровнях рассчитываются заранее с помощью известного диагностического уравнения, причем при расчете ω_{800} учитывается еще и трение у поверхности земли.

Например, уравнение для тенденций толщины слоя между уровнями 300 и 500 мб имеет вид

$$\frac{\partial h_{400}}{\partial t} = -\frac{g}{f}(H_{100}, h_{400}) + \frac{\Delta p}{g} s_{100} \omega_{100},$$

где $h_{400} = H_{300} - H_{500}$; $\Delta p = 200$ мб; $s = -\frac{\alpha}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial p}$ — параметр устойчивости.

Аналогичный вид имеет уравнение для $\frac{\partial h_{600}}{\partial t}$. Однако при восходящих движениях (т. е. при $\omega_{600} < 0$) оно дополняется слагаемым, учитывающим приток тепла за счет конденсации. Оно пропорционально $s^* \omega$, где s^* — параметр устойчивости в насыщенном влагой воздухе. Уравнение для $\frac{\partial h_{500}}{\partial t}$, кроме того, дополнено слагаемым, учитывающим приток тепла от поверхности океана,

$$V_{900}(T_s - T_{1000}),$$

где V_{900} — скорость геострофического ветра на уровне 900 мб; T_s — температура поверхности океана (берется по климатическим данным); T_{1000} — прогнозируемая температура воздуха на уровне моря.

Область прогноза состоит из 30×22 точек с шагом 304,8 км на широте 60° .

Укажем еще одну особенность данной схемы прогноза. При вычислении адвекции вихря используется разностная схема, обеспечивающая сохранение энергии и квадрата вихря скорости. Практически она близка к той, которая была указана в первой рассмотренной схеме прогноза.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кибель И. А. Введение в гидродинамические методы краткосрочного прогноза погоды. Гостехиздат, М., 1957.
2. Булесв Н. И., Марчук Г. И. О динамике крупномасштабных атмосферных процессов. Труды ИФА АН СССР, вып. 2, 66—104. Изд. АН СССР, М., 1958. (Работа выполнена в 1951 г.)
3. Хинкельман К. К численному прогнозу погоды с помощью релаксационного метода при учете бароклинических эффектов, *Tellus*, 4, No. 3, 1953. Русский перевод в сб. «Вопросы численного предсказания погоды». Под ред. Л. С. Гандина и А. С. Дубова. Гидрометеониздат, Л., 1960.
4. Ломоносов Е. Г. К использованию функций влияния при гидродинамическом прогнозе. Материалы совещания координационной комиссии по численным методам прогноза. Гидрометеониздат, Л., 1961.
5. Го Сяо-Лань. Квазиздивергентные прогностические уравнения и их интегрирование. *Tellus*, 8, No. 3, 1956. Русский перевод в сб. «Вопросы численного предсказания погоды». Под ред. Л. С. Гандина и А. С. Дубова. Гидрометеониздат, Л., 1960.
6. Марчук Г. И. [и др.]. Оперативная квазигеострофическая схема краткосрочного прогноза для пяти уровней атмосферы. Изв. АН СССР, серия физики атмосферы и океана, т. 1, № 2, 1965.
7. Юдин М. И. О прогнозе поля давления численными методами. Труды ГГО, вып. 71, 1957.
8. Staff Members of Electronic Computation Center. 72-hr Baroclinic Forecast by the Diabatic Quasigeostrophic Model. *J. Met. Soc. Japan*, Ser. II, 43, No. 5, 246—261, 1965.

К. Г. ХИНКЕЛЬМАН

ПОЛНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ГЛАВА I

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ОБОБЩЕННЫХ КООРДИНАТАХ

Логически самый простой, наиболее общий и прямой метод численного прогноза погоды заключается в попытке проинтегрировать основные уравнения в их невидоизмененной форме. Известно, что эти основные уравнения описывают, кроме метеорологически интересных явлений, также волны, распространяющиеся с большой скоростью в различных направлениях, как, например, звуковые волны, внутренние и внешние гравитационные волны, инерционные волны или смешанные волны этих типов. Поэтому численные методы требуют очень малых шагов по времени. Как правило, величина шага по времени должна быть меньше, чем время прохождения сигнала от одной точки сетки до соседних точек. Из-за того, что в решения основных уравнений включены скорости распространяющегося вертикально звукового сигнала, вертикальное размещение точек сетки по вертикали на расстоянии нескольких километров друг от друга требует шагов по времени, равных нескольким секундам. Даже в случае использования быстродействующих вычислительных машин процесс расчетов при таких малых шагах по времени не может состязаться в скорости с процессами в действительной атмосфере. Поэтому в конечном итоге распространяющиеся по вертикали звуковые волны должны быть исключены.

Один из способов их отфильтровывания заключается в использовании гидростатического уравнения вместо третьего уравнения движения. Тем не менее основные уравнения с использованием гидростатического соотношения также назовем полными уравнениями.

§ 1. Система векторных обозначений

Начнем с основных уравнений, записанных в векторной форме. Уравнения движения, отнесенные к системе отсчета, вращающейся вместе с земной поверхностью, имеют вид

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{U} - \nabla \frac{1}{2} (\boldsymbol{\Omega} R)^2 = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \Phi^*, \quad (1.1)$$

Здесь первый член — относительное ускорение ветра, второй член — кориолисово ускорение (Ω — вектор угловой скорости вращения Земли), третий член — ускорение вследствие центробежных сил (R — расстояние рассматриваемой точки от земной оси), четвертый член — сила давления, а Φ^* обозначает потенциал земного притяжения, ∇_3 — трехмерный оператор набла.

Уравнение неразрывности

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \nabla_3 \cdot \mathbf{U} = 0. \quad (1.2)$$

Условие адиабатичности

$$\frac{d\theta}{dt} = 0; \quad \theta = \left(\frac{p_0}{p}\right)^k T; \quad k = \frac{R}{c_p} = 0,286; \quad p_0 = 1000 \text{ мб}. \quad (1.3)$$

Уравнение состояния Бойля — Шарля

$$p = \rho R T. \quad (1.4)$$

Заметим, что повсюду пренебрегается всеми видами источников тепла и всеми источниками количества движения, обусловленными внутренними или внешними силами трения.

Чтобы проинтегрировать основные уравнения (1.1) — (1.3) численным методом

а) необходимо разложить векторную форму на скалярные составляющие и в соответствии с производительностью современных вычислительных машин исключить по крайней мере звуковые волны, распространяющиеся в вертикальном направлении;

б) крайне желательно упростить метрику и преобразовать уравнения в локальную систему декартовых координат, в которой топография Земли совпадает с уровнем обобщенной вертикальной координаты, что обеспечит простую структуру сетки и удобное равномерное размещение ограниченного числа точек сетки. Наиболее легко можно удовлетворить этим требованиям, используя вместо некоторых обозначений совершенно эквивалентную лагранжеву систему обозначений.

§ 2. Система обозначений Лагранжа¹

В специальной, еще не определенной координатной системе с пространственными координатами

$$q_k = q_1, q_2, q_3$$

и с обобщенными скоростями

$$\frac{dq_k}{dt} = \dot{q}_k = \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3$$

¹ Вывод лагранжевых уравнений дается в главе 2.

уравнения (1.1) — (1.3) можно записать следующим образом:
уравнения движения

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} (K - \Phi^*) \right] - \frac{\partial}{\partial q_k} (K - \Phi^*) = - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial q_k}; \quad k=1, 2, 3; \quad (1.5)$$

уравнение неразрывности

$$\frac{1}{rD} \frac{d}{dt} (rD) + \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_k} = 0; \quad (1.6)$$

условие адиабатичности

$$\frac{d\theta}{dt} = 0, \quad (1.7)$$

где

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}_k \frac{\partial}{\partial q_k}; \quad (1.8)$$

$$K = \frac{1}{2} U^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \quad (1.9)$$

— кинетическая энергия, выраженная через $q_k, \dot{q}_k$;

$$D^2 = \left| \frac{\partial^2 K}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k} \right|. \quad (1.10)$$

Примечания.

1. Согласно правилам тензорной записи, мы должны суммировать по всем членам, содержащим одинаковые индексы от 1 до 3 дважды, например,

$$\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_k} = \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q_1} + \frac{\partial \dot{q}_2}{\partial q_2} + \frac{\partial \dot{q}_3}{\partial q_3}.$$

2. Считается, что q_k и $\dot{q}_k$ являются независимыми переменными.

3. Потенциал притяжения Φ^* зависит только от пространственных координат q_k и не зависит от $\dot{q}_k$. Поэтому в уравнении (1.5) выражение $\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} (K - \Phi^*) \right]$ можно заменить на $\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k}$.

4. Чтобы определить основные скалярные уравнения, необходимо лишь определить метрическую форму dr^2 через dq_k или кинетическую энергию K через $q_k, \dot{q}_k$.

5. В системе отсчета, связанной с вращающейся Землей, в уравнении (1.9) скорость $\dot{q}_k$ необходимо разложить на относительную и переносную составляющие.

6. При переходе от одной системы координат к другой необходимо преобразовать лишь выражение для кинетической энергии K .

ГЛАВА 2

ВЫВОД ЛАГРАНЖЕВЫХ УРАВНЕНИЙ

В этой главе дадим краткий вывод лагранжевых уравнений (1.5) и (1.6) главы 1.

Предположим, что q_k и D не зависят от времени, однако окончательные уравнения имеют силу также для случаев, когда эти выражения являются функциями и времени, и координат.

§ 1. Уравнения движения

Начнем с уравнений движения в декартовых координатах, записанных в инерциальной системе отсчета, причем будем использовать теорему Даламбера:

$$\left(\frac{du_i}{dt} + \frac{\partial \Phi^*}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) \delta x_i = 0, \quad (2.1)$$

где δx_i или δq_k являются произвольными пространственными перемещениями; $u_i = u_1, u_2, u_3$ — составляющие скорости ветра в декартовых координатах; $x_i = x_1, x_2, x_3$ — декартовы пространственные координаты. Координаты x_i вообще могут зависеть от обобщенных координат q_k и наоборот

$$x_i = x_i(q_k); \quad q_k = q_k(x_i); \quad i, k = 1, 2, 3. \quad (2.2)$$

Формулы перехода от одних координат к другим имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial x_i}; \quad \frac{\partial}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial q_k}; \quad (2.3)$$

$$\delta x_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \delta q_j; \quad (2.4)$$

$$u_i = \dot{x}_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \quad (2.5)$$

или в более общем виде

$$\frac{d}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial}{\partial t} \right).$$

Из выражения (2.5) следует

$$\frac{\partial u_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial x_i}{\partial q_j}, \quad (2.6)$$

индекс j обозначает любой произвольный индекс от 1 до 3, который встречается неоднократно в одном и том же выражении.

Подставляя (2.4) в (2.1) и имея в виду (2.3), получим при $j \equiv k$

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{\partial \Phi^*}{\partial q_k} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial q_k} \right) \dot{q}_k = 0. \quad (2.7)$$

Первый член в выражении (2.7) можно представить в виде

$$\frac{du_i}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \left(u_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right) - u_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right),$$

или вследствие (2.6)

$$\begin{aligned} \frac{du_i}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} &= \frac{d}{dt} \left(u_i \frac{\partial u_i}{\partial \dot{q}_k} \right) - u_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right) = \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \frac{u_i^2}{2} \right) - u_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Поскольку q_k и $\dot{q}_k$ считаются независимыми переменными, операторы $\frac{d}{dt}$ и $\frac{\partial}{\partial q_j}$ являются обратимыми. Покажем это свойство для последнего члена выражения (2.8)

$$\begin{aligned} u_i \frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} &= u_i \dot{q}_j \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial q_k} = u_i \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\dot{q}_j \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) = \\ &= u_i \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{dx_i}{dt} \right) = u_i \frac{\partial}{\partial q_k} \dot{x}_i = u_i \frac{\partial u_i}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{u_i^2}{2} \right). \end{aligned}$$

Учитывая это соотношение, перепишем (2.8) в виде

$$\frac{du_i}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \frac{u_i^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{u_i^2}{2} \right). \quad (2.9)$$

Уравнение (2.7) с учетом соотношения (2.9) можно записать следующим образом:

$$\left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \frac{u_i^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{u_i^2}{2} - \Phi^* \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial q_k} \right\} \dot{q}_k = 0. \quad (2.10)$$

Так как $\frac{u_i^2}{2}$ определяет как раз кинетическую энергию K , выраженную через q_k или $\dot{q}_k$, то уравнение (2.10) в точности совпадает с уравнением (1.5) главы 1, если заметить, что Φ^* зависит только от q_k , но не от $\dot{q}_k$ и что перемещения δq_k могут определяться совершенно произвольно.

§ 2. Уравнение неразрывности

Начнем с уравнения неразрывности в декартовых координатах

$$\frac{1}{r} \frac{dr}{dt} + \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.11)$$

и заметим, ссылаясь на § 1, что

$$u_i = \dot{x}_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j, \quad \text{см. (2.5);} \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial x_i}; \quad \frac{\partial}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial q_k}, \quad \text{см. (2.3).} \quad (2.13)$$

Преобразуем сначала член $\frac{\partial u_i}{\partial x_i}$ из (2.11). Получим

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\partial u_i}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial x_i} = \frac{\partial q_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \right),$$

или

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \dot{q}_k \frac{\partial q_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial q_k} + \frac{\partial q_j}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_j}. \quad (2.14)$$

Легко видеть, что

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial q_j}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} &= \frac{\partial q_j}{\partial q_k} = \delta_{jk} \\ \text{и наоборот} \\ \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial x_k} &= \frac{\partial x_j}{\partial x_k} = \delta_{jk} \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

$$\delta_{ik} \text{ (единичная матрица)} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = k, \\ 0, & \text{если } i \neq k. \end{cases}$$

Предположим, что

$$\frac{\partial q_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial q_k} = \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial q_k}. \quad (2.16)$$

Позже покажем, что в выражении (2.16)

$$D = \left| \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right|$$

определяется уравнением (1.10).

Учитывая (2.15) и (2.16), перепишем выражение (2.14) в виде

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \dot{q}_k \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial q_k} + \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_k}$$

или вследствие (2.5)

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{1}{D} \frac{dD}{dt} + \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_k}. \quad (2.17)$$

С учетом (2.17) уравнение неразрывности в обобщенных координатах представится следующим образом:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{D} \frac{dD}{dt} + \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_k} = 0$$

или

$$\frac{1}{\rho D} \frac{d(\rho D)}{dt} + \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_k} = 0. \quad (2.18)$$

В этой записи уравнение (2.18) является тождественным уравнению неразрывности (1.6) главы 1.

Чтобы закончить предшествующие выкладки, покажем, что D , определяемое уравнением (1.10), является тождественным функциональному определителю $\left| \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right|$.

Используя (2.12), выполним преобразования

$$u_i = \dot{x}_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j = \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \quad \text{и} \quad u_i u_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k$$

и получим кинетическую энергию K

$$K = \frac{u_i u_i}{2} = \frac{1}{2} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k,$$

откуда следует

$$\frac{\partial^2 K}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k} = \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \frac{\partial x_i}{\partial q_k}$$

и, согласно (1.10),

$$D^2 \equiv \left| \frac{\partial^2 K}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k} \right| = \left| \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right|.$$

Очевидно, что

$$\left| \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right| = \left| \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right|,$$

поэтому, следуя правилам умножения определителей, получим

$$D^2 = \left| \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right| \cdot \left| \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right| = \left| \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right|^2$$

и

$$D = \left| \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right|. \quad (2.19)$$

Здесь

$$\left| \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right| = \frac{\partial (x_1, x_2, x_3)}{\partial (q_1, q_2, q_3)}$$

есть функциональный определитель или якобиан

$$\left| \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right| = J(x_1, x_2, x_3)$$

с дифференцированием по q_1, q_2, q_3 .

Покажем далее, что предположение (2.16) выполняется.

Рассмотрим произвольную матрицу d_{ij} , зависящую от q . Ее определитель

$$D = |d_{ij}|,$$

ее алгебраическое дополнение D_{ij} является подопределителем, получающимся в результате вычеркивания в D строки и столбца, содержащих d_{ij} . Элемент обратной матрицы имеет вид

$$^{(-1)}d_{ij} = \frac{D_{ji}}{D}.$$

Имеем

$$\frac{\partial D}{\partial d_{ij}} = D_{ij}$$

и

$$\frac{\partial D}{\partial q} = \frac{\partial D}{\partial d_{ij}} \frac{\partial d_{ij}}{\partial q} = D_{ij} \frac{\partial d_{ij}}{\partial q}$$

или

$$\frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial q} = \frac{D_{ij}}{D} \frac{\partial d_{ij}}{\partial q} = ^{(-1)}d_{ji} \frac{\partial d_{ij}}{\partial q}. \quad (2.20)$$

Теперь заменим

$$d_{ij} \text{ на } \frac{\partial x_i}{\partial q_j}, \text{ а } q \text{ на } q_k \text{ при } D = \left| \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right|. \quad (2.21)$$

С учетом этого определения находим

$$d_{ij}^{(-1)} = \frac{\partial q_i}{\partial x_j} \quad \text{и} \quad d_{ji}^{(-1)} = \frac{\partial q_j}{\partial x_i}. \quad (2.22)$$

Выражение (2.22) можно легко проверить путем умножения матрицы d_{ij} на обратную матрицу $d_{ij}^{(-1)}$, в результате которого должна получиться единичная матрица δ_{ij} :

$$d_{ii} \cdot d_{ij}^{(-1)} = \frac{\partial x_i}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}, \quad \text{см. (2.15).}$$

С учетом (2.21) и (2.22) уравнение (2.20) представляется следующим образом:

$$\frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial q_k} = \frac{\partial q_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_k \partial q_j}; \quad D = \left| \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right|. \quad (2.23)$$

Уравнение (2.23) тождественно уравнению (2.16).

Покажем также, как непосредственно преобразовать D из одной координатной системы в другую.

Если мы имеем дело с координатной системой, в которой форма кинетической энергии не определяется или является неизвестной, мы должны преобразовать D непосредственно из системы, в которой D известно, в конечную систему.

Предположим, что $D = D_q$ имеется для системы с пространственными координатами $q_k = q_1, q_2, q_3$:

$$D_q = \left| \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right|$$

и что мы хотим получить из D_q определитель D для системы с пространственными координатами $r_j = r_1, r_2, r_3$:

$$D_r = \left| \frac{\partial x_i}{\partial r_j} \right|.$$

Чтобы получить D_r из D_q , используем правила преобразования функциональных определителей, поскольку D является функциональным определителем:

$$\frac{\partial (x_1, x_2, x_3)}{\partial (r_1, r_2, r_3)} = \frac{\partial (x_1, x_2, x_3)}{\partial (q_1, q_2, q_3)} \frac{\partial (q_1, q_2, q_3)}{\partial (r_1, r_2, r_3)},$$

или

$$\left| \frac{\partial x_i}{\partial r_j} \right| = \left| \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right| \cdot \left| \frac{\partial q_k}{\partial r_j} \right|,$$

или

$$D_r = D_q \left| \frac{\partial q_k}{\partial r_j} \right| = D_q \frac{\partial (q_1, q_2, q_3)}{\partial (r_1, r_2, r_3)}. \quad (2.24)$$

ГЛАВА 3

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ В СФЕРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

Для того чтобы в скалярных уравнениях наиболее близко учитывалась почти сферическая форма земной поверхности, запишем уравнения главы 1 в сферических координатах λ , φ , r (рис. 1).

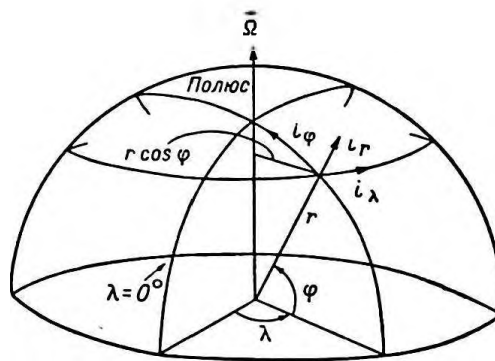


Рис. 1.

§ 1. Переход от векторной записи

Используя ортогональные единичные векторы i_λ , i_φ , i_r , указывающие направления λ , φ , r , и исходя из геометрических соображений, разложим векторы на составляющие

$$\left. \begin{aligned}
 \mathbf{U} &= u i_\lambda + v i_\varphi + w i_r; \\
 u &= r \cos \varphi \dot{\lambda}, \quad v = r \dot{\varphi}, \quad w = \dot{r}; \\
 \nabla_3 &= \frac{i_\lambda}{r \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{i_\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + i_r \frac{\partial}{\partial r}; \\
 \frac{d}{dt} = \left(\dot{} \right) &= \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla_3 = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{r \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \\
 &+ w \frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{\lambda} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \dot{\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \dot{r} \frac{\partial}{\partial r}; \\
 \mathbf{\Omega} &= \Omega \cos \varphi i_\lambda + \Omega \sin \varphi i_r; \\
 2\mathbf{\Omega} &= h i_\lambda + f i_r, \\
 f &= 2\Omega \sin \varphi, \quad h = 2\Omega \cos \varphi.
 \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

Так как единичные векторы зависят от пространственных координат, их пространственные производные имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{i}_\lambda}{\partial \lambda} &= \sin \varphi \mathbf{i}_\varphi - \cos \varphi \mathbf{i}_r, & \frac{\partial \mathbf{i}_\lambda}{\partial \varphi} &= 0; \\ \frac{\partial \mathbf{i}_\varphi}{\partial \lambda} &= -\sin \varphi \mathbf{i}_\lambda, & \frac{\partial \mathbf{i}_\varphi}{\partial \varphi} &= -\mathbf{i}_r; \\ \frac{\partial \mathbf{i}_r}{\partial \lambda} &= \cos \varphi \mathbf{i}_\lambda, & \frac{\partial \mathbf{i}_r}{\partial \varphi} &= \mathbf{i}_\varphi; \\ \frac{\partial (\mathbf{i}_\lambda, \mathbf{i}_\varphi, \mathbf{i}_r)}{\partial r} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

а их полные производные по времени представляются следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{i}_\lambda}{dt} &= \frac{u}{r} \operatorname{tg} \varphi \mathbf{i}_\varphi - \frac{u}{r} \mathbf{i}_r = \dot{\lambda} (\sin \varphi \mathbf{i}_\varphi - \cos \varphi \mathbf{i}_r); \\ \frac{d\mathbf{i}_\varphi}{dt} &= -\frac{u}{r} \operatorname{tg} \varphi \mathbf{i}_\lambda - \frac{v}{r} \mathbf{i}_r = -(\dot{\lambda} \sin \varphi \mathbf{i}_\lambda + \dot{\varphi} \mathbf{i}_r); \\ \frac{d\mathbf{i}_r}{dt} &= \frac{u}{r} \mathbf{i}_\lambda + \frac{v}{r} \mathbf{i}_\varphi = \dot{\lambda} \cos \varphi \mathbf{i}_\lambda + \dot{\varphi} \mathbf{i}_\varphi. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Применяя (3.1), (3.2) и (3.3) к векторным уравнениям (1.1), (1.2) и (1.3), получим следующие скалярные уравнения в сферических координатах:

уравнения движения

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + \frac{uw}{r} - \frac{uv}{r} \operatorname{tg} \varphi - f v + l w &= \\ &= -\frac{1}{\rho r \cos \varphi} \frac{\partial p}{\partial \lambda} - \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}; \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{vw}{r} + \frac{u^2}{r} \operatorname{tg} \varphi + f u = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}; \quad (3.5)$$

$$\frac{dw}{dt} - \frac{1}{2} \left(\frac{u^2 + v^2}{r} \right) - l u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\partial \Phi}{\partial r}; \quad (3.6)$$

уравнение неразрывности

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{r \cos \varphi} \left[\frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \varphi} (v \cos \varphi) \right] + \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{2w}{r} = 0; \quad (3.7)$$

уравнение адиабатичности

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial\theta}{\partial t} + \frac{u}{r \cos \varphi} \frac{\partial\theta}{\partial \lambda} + \frac{v}{r} \frac{\partial\theta}{\partial \varphi} + \omega \frac{\partial\theta}{\partial r} = 0, \quad (3.8)$$

причем

$$\Phi = \Phi^* - \frac{1}{2} \Omega^2 r^2 \cos^2 \varphi \quad (3.9)$$

есть потенциал силы тяжести, равный сумме потенциалов силы притяжения и центробежной силы.

В уравнениях (3.4)—(3.7) подчеркнутые члены можно считать малыми по сравнению с остальными членами и ими можно пренебречь для упрощения численных расчетов. Эти упрощения обосновываются в главе 3.

§ 2. Переход от лагранжевой записи

Чтобы выяснить эффективность основных уравнений в форме Лагранжа, четко показанную в следующих главах, рассмотрим уравнения (1.5) и (1.6) в сферических координатах

$$q_k = \lambda, \varphi, r \quad \text{и} \quad \dot{q}_k = \dot{\lambda}, \dot{\varphi}, \dot{r}.$$

1. Метрические формы

Метрика рассматриваемой координатной системы определяется формой элемента траектории $d\mathbf{r}$ в сферических координатах:

$$(d\mathbf{r})^2 = r^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2 + r^2 d\varphi^2 + dr^2. \quad (3.10)$$

Из (3.10) получим

1) кинетическую энергию, отнесенную к абсолютному движению $(\dot{\lambda}_a, \dot{\varphi}, \dot{r})$,

$$K = \frac{1}{2} \frac{dr^2}{dt^2} = \frac{1}{2} (r^2 \cos^2 \varphi \dot{\lambda}_a^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2), \quad (3.11)$$

где $\dot{\lambda}_a$ — абсолютная угловая скорость;

2) кинетическую энергию, отнесенную к относительному движению $(\dot{\lambda}, \dot{\varphi}, \dot{r})$,

$$K = \frac{1}{2} [r^2 \cos^2 \varphi (\dot{\lambda} + \Omega)^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2] = \frac{1}{2} [r^2 \cos^2 \varphi (\dot{\lambda}^2 + 2\dot{\lambda}\Omega + \\ + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2] + \frac{1}{2} r^2 \cos^2 \varphi \Omega^2, \quad (3.12)$$

причем $\dot{\lambda}_a = \dot{\lambda} + \Omega$, $\dot{\lambda}$ — относительная угловая скорость;

3) функцию Лагранжа

$$K - \Phi^* = \frac{1}{2} [r^2 \cos^2 \varphi (\dot{\lambda}^2 + 2\Omega\dot{\lambda}) + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2] - \Phi, \quad (3.13)$$

где $\Phi = \Phi^* - \frac{1}{2} r^2 \cos^2 \varphi \Omega^2$ — геопотенциал;

4) форму D (см. (1.10))

$$D^2 = \frac{\partial^2 K}{\partial q_j \partial q_k} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 K}{\partial \dot{\lambda}^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 K}{\partial \dot{\varphi}^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial^2 K}{\partial \dot{r}^2} \end{vmatrix} = r^4 \cos^2 \varphi$$

или

$$D = r^2 \cos \varphi. \quad (3.14)$$

Заметим, что полная производная по времени определяется в виде (см. (1.8))

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{\lambda} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \dot{\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \dot{r} \frac{\partial}{\partial r}. \quad (3.15)$$

2. Основные уравнения

Подставляя функцию Лагранжа $K - \Phi^*$ (3.13) в общее лагранжево уравнение (1.5) и конкретизируя $q_k = \lambda, \varphi, r$, получим уравнения движения в сферических координатах

$$\frac{d}{dt} [r^2 \cos^2 \varphi (\dot{\lambda} + \Omega)] = - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \lambda} - \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}, \quad (3.16)$$

т. е. вариант уравнения (3.4) для момента количества движения,

$$\frac{d}{dt} (r^2 \dot{\varphi}) + \sin \varphi \cos \varphi r^2 (\dot{\lambda}^2 + 2\Omega\dot{\lambda}) = - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} - \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}; \quad (3.17)$$

$$\frac{d}{dt} (\dot{r}) - r \cos^2 \varphi (\dot{\lambda}^2 + 2\Omega\dot{\lambda}) - r \dot{\varphi}^2 = - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\partial \Phi}{\partial r}. \quad (3.18)$$

Учитывая (3.1), эти уравнения можно преобразовать точно в уравнения (3.4), (3.5), (3.6).

Подставляя D в виде (3.14) в общее лагранжево уравнение (1.6), получим уравнение неразрывности в сферических координатах

$$\frac{1}{r^2 \cos \varphi} \frac{d}{dt} (r^2 \cos \varphi) + \frac{\partial \dot{\lambda}}{\partial \lambda} + \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \dot{r}}{\partial r} = 0, \quad (3.19)$$

легко преобразуемое в уравнение (3.7).

ГЛАВА 4

МЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЕ УПРОЩЕНИЯ

Произведем некоторые упрощения основных уравнений, необходимые для облегчения численных расчетов, не затрагивая в то же время существенно метеорологические особенности решений этих уравнений.

§ 1. Метрическое упрощение

Как упомянуто в § 1 главы 3, для того чтобы упростить уравнения и процедуру численного решения, обычно опускаются некоторые члены основных уравнений, записанных в сферических координатах.

Рассматривая основные уравнения в форме Лагранжа, заметим, что по сравнению с радиусом Земли толщина атмосферы, представляющая интерес для метеорологии, является незначительной. Это оправдывает предположение, заключающееся в том, что в метрической форме dr^2 радиус r может считаться постоянным, когда он не входит под знак дифференцирования.

Это предположение определяет новую согласованную метрику, при которой в атмосферном режиме уровни постоянной вертикальной координаты r имеют всюду одну и ту же кривизну, независимую от изменения координаты r ,

$$r = a, \quad dr = dr. \quad (4.1)$$

Вместо соотношений (3.10)–(3.14) получим как следствие (4.1):

элемент траектории

$$dr^2 = a^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2 + a^2 d\varphi^2 + dr^2; \quad (4.2)$$

кинетическую энергию $K = \frac{1}{2} \frac{dr^2}{dt^2}$ в относительной системе отсчета

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} [a^2 \cos^2 \varphi (\dot{\lambda} + \Omega)^2 + a^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2] = \\ &= \frac{1}{2} [a^2 \cos^2 \varphi (\dot{\lambda}^2 + 2\dot{\lambda}\Omega) + a^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2] + \frac{1}{2} a^2 \cos^2 \varphi \Omega^2; \end{aligned} \quad (4.3)$$

функцию Лагранжа

$$K - \Phi^* = \frac{1}{2} [a^2 \cos^2 \varphi (\dot{\lambda}^2 + 2\dot{\lambda}\Omega) + a^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2] - \Phi, \quad (4.4)$$

где $\Phi = \Phi^* - \frac{1}{2} a^2 \cos^2 \varphi \Omega^2$ — геопотенциал,
форму D

$$D^2 = \left| \frac{\partial^2 K}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k} \right| = a^4 \cos^2 \varphi, \quad D = a^2 \cos \varphi. \quad (4.5)$$

Подставляя лагранжеву функцию (4.4) в лагранжевы уравнения движения (1.5) и задавая

$$q_k = \lambda, \varphi, r; \quad \dot{q}_k = \dot{\lambda}, \dot{\varphi}, \dot{r},$$

получим уравнения движения в сферических координатах, соблюдая при этом упрощенную метрику

$$\frac{d}{dt} [a^2 \cos^2 \varphi (\dot{\lambda} + \Omega)] = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \lambda} - \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}; \quad (4.6)$$

$$\frac{d}{dt} [a^2 \dot{\varphi}] + \sin \varphi \cos \varphi a^2 (\dot{\lambda} + 2\Omega \dot{\lambda}) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} - \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}; \quad (4.7)$$

$$\frac{d}{dt} [\dot{r}] = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\partial \Phi}{\partial r}. \quad (4.8)$$

Если

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{\lambda} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \dot{\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \dot{r} \frac{\partial}{\partial r} \quad (4.9)$$

и одномерные составляющие ветра имеют вид (см. (3.1))

$$u = a \cos \varphi \dot{\lambda}, \quad v = a \dot{\varphi}, \quad w = \dot{r}, \quad (4.10)$$

мы легко преобразуем предыдущие уравнения к следующему виду:

$$\frac{du}{dt} - \frac{uv}{a} \operatorname{tg} \varphi - fv = -\frac{1}{ra \cos \varphi} \frac{\partial p}{\partial \lambda} - \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}; \quad (4.11)$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{u^2}{a} \operatorname{tg} \varphi + fu = -\frac{1}{ra} \frac{\partial p}{\partial \varphi} - \frac{1}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}; \quad (4.12)$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\partial \Phi}{\partial r}. \quad (4.13)$$

Подставляя форму D (4.5) в лагранжево уравнение неразрывности (1.6), получим уравнение неразрывности в метрически упрощенных сферических координатах:

$$\frac{1}{r \cos \varphi} \frac{d(r \cos \varphi)}{dt} + \frac{\partial \dot{\lambda}}{\partial \lambda} + \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \dot{r}}{\partial r} = 0,$$

которое с учетом (4.9) и (4.10) легко можно преобразовать к следующему виду:

$$\frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{1}{a \cos \varphi} \left[\frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \varphi} (v \cos \varphi) \right] + \frac{\partial w}{\partial r} = 0. \quad (4.14)$$

Сравнивая уравнения (4.11), (4.12), (4.13) и (4.14) с уравнениями (3.4), (3.5), (3.6) и (3.7), мы видим, что благодаря используемой упрощенной метрике (4.2), члены, которыми обычно пренебрегают (подчеркнутые члены в уравнениях главы 3), исключаются автоматически, но при этом переменная r заменяется постоянным радиусом a , если a не входит под знак дифференцирования.

§ 2. Упрощение потенциала

В метеорологических задачах наиболее адекватной координатной системой была бы ортогональная система, в которой вертикальная координата направлена вдоль силовых линий результирующей силы притяжения и центробежной силы. В этой системе

а) поверхности постоянной вертикальной координаты совпадали бы с поверхностями постоянного потенциала силы тяжести Φ или со свободной поверхностью Земли, например с водной поверхностью, которая возникает только под влиянием силы притяжения и центробежной силы;

б) геопотенциал Φ не зависел бы от горизонтальных координат.

Поскольку поверхность Земли имеет форму геоида, т. е. поверхность постоянного Φ может быть довольно близко аппроксимирована сферой, в целях дальнейшего упрощения уравнений будем предполагать, что геопотенциал Φ зависит только от вертикальной координаты. Однако не будем преобразовывать уравнения в эллиптическую или геоидальную систему координат, а вернемся к сферическим координатам

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial s} = 0, \quad (4.16)$$

где ds — горизонтальное приращение.

Кроме того, будем считать протяженность атмосферного слоя по вертикали достаточно малой, чтобы выполнялось предположение о том, что Φ является линейной функцией вертикальной координаты в области, представляющей метеорологический интерес:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = g, \quad (4.17)$$

где $g \approx 9,81$ м/сек.² — ускорение силы тяжести.

§ 3. Гидростатическое упрощение

Чтобы избежать неэкономично малых шагов по времени при процедуре численного решения, исключим распространяющиеся по вертикали звуковые волны, вводя для всех моментов времени уравнение гидростатического баланса:

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad (4.18)$$

которое, учитывая (4.17), перепишем в виде

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - g.$$

Это гидростатическое уравнение заменяет третье уравнение движения (4.13) и получается, если пренебречь членом $\frac{d\omega}{dt}$ в (4.18).

Примечания.

1. Гидростатическое уравнение (4.18) определяет диагностическое уравнение или уравнение совместимости, не допуская больше произвольного определения p и ρ в любой момент $t = \text{const}$.

2. Поскольку (4.18) выполняется для всех моментов времени, можно продифференцировать (4.18) по времени и затем исключить производные по времени от p и ρ , используя уравнение неразрывности и условие адиабатичности. В результате получится второе диагностическое уравнение, уравнение Ричардсона, которое свяжет вертикальную скорость ω с пространственными производными от давления и горизонтальных составляющих скорости ветра, показывая тем самым, что вертикальная составляющая скорости ветра больше не может определяться произвольно в любой момент времени.

3. Легко можно видеть, что распространяющиеся по горизонтали звуковые волны не исключаются применением (4.18) в предположении, что $\omega = 0$. В этом случае решения основных уравнений определяются независимо от того, имеет ли силу уравнение (4.18) или полное вертикальное уравнение движения.

4. Уравнение (4.18) является достаточным, но не необходимым для отфильтровывания распространяющихся по вертикали звуковых волн. Другие соотношения, например диагностическое уравнение, получающееся в результате пренебрежения производной по времени в выражении для трехмерной дивергенции скорости ветра, могут гарантировать исключение звуковых волн, распространяющихся как по вертикали, так и по горизонтали.

§ 4. Гидростатические примитивные уравнения в метрически упрощенных сферических координатах

После упрощений, проведенных в этой главе, полная система уравнений будет иметь вид:

уравнения движения, получающиеся из (4.11), (4.12) и (4.13) с учетом (4.16), (4.17) и (4.18)

а) горизонтальные составляющие

$$\frac{du}{dt} - \frac{uv}{a} \operatorname{tg} \varphi - fv = - \frac{1}{\rho a \cos \varphi} \frac{\partial p}{\partial \lambda}; \quad (4.19)$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{u^2}{a} \operatorname{tg} \varphi + fu = - \frac{1}{\rho a} \frac{\partial p}{\partial \varphi}; \quad (4.20)$$

б) вертикальная составляющая, гидростатическое уравнение,

$$0 = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - g; \quad (4.21)$$

уравнение неразрывности (4.14)

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{a \cos \varphi} \left[\frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \varphi} (v \cos \varphi) + \frac{\partial w}{\partial r} \right] = 0; \quad (4.22)$$

условие адиабатичности

$$\frac{d\theta}{dt} = 0; \quad (4.23)$$

закон Шарля

$$p = \rho R T, \quad (4.24)$$

безатронутый упрощениями этой главы.

Здесь

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + \dot{\lambda} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \dot{\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \dot{r} \frac{\partial}{\partial r} = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial}{\partial \varphi} + w \frac{\partial}{\partial r}; \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$u = a \cos \varphi \dot{\lambda}, \quad v = a \dot{\varphi}, \quad w = \dot{r}. \quad (4.26)$$

Будем называть указанные основные уравнения полными уравнениями или, имея в виду (4.21), гидростатическими полными уравнениями. При дальнейшем преобразовании полных уравнений в главах 5—8 будет полностью сохранен их физический смысл.

ГЛАВА 5

СТЕРЕОГРАФИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ

Чтобы преобразовать полные уравнения в систему искривлинейных, т. е. декартовых, координат, сохраняя сферическую метрику § 1 главы 4, спроектируем стереографически из юж-

ного полюса сферу радиусом $r=a$ на плоскость, пересекающую земную поверхность по широте φ_0 .

Для этого мы должны лишь переписать метрическое выражение dr^2 через спроектированные пространственные приращения, используя лагранжеву форму уравнений. Используем хорошо известное свойство стереографической проекции, обеспечивающей конформное преобразование. Это свойство заключается в том, что соотношение между любым элементом траектории на сфере $(ds)_{\text{сф}}$ и его проекцией на плоскость $(ds)_{\text{пл}}$ зависит от их положения, но не от направления:

$$|(ds)_{\text{сф}}| = \frac{1}{m} |(ds)_{\text{пл}}|, \quad (5.1)$$

где m — масштабный множитель, являющийся функцией пространственных координат q_k .

Примечания.

1. Вследствие симметрии m не зависит от долготы.
2. Из-за метрических упрощений, введенных в § 1 главы 4, масштабный множитель m не зависит от вертикальной координаты (мы имеем дело лишь с одной сферой радиусом a). При использовании точной сферической метрики, однако, необходимо считать m зависящим также и от вертикальной координаты.
3. Стереографическая проекция не затрагивает вертикальной координаты r .

Чтобы различать формально сферические и спроектированные координаты, мы используем алфавитное z для обозначения вертикальной координаты спроектированной системы

$$dr = dz.$$

Учитывая также (5.1), упрощенную метрическую форму (4.2)

$$dr^2 = a^2 \cos^2 \varphi di^2 + a^2 d\varphi^2 + dr^2 = (ds)_{\text{сф}}^2 + dr^2$$

можно выразить через спроектированные приращения координат $(ds)_{\text{пл}}$ и dz :

$$dr^2 = \frac{(ds)_{\text{пл}}^2}{m^2} + dz^2, \quad (5.2)$$

где $(ds)_{\text{пл}}^2$ необходимо разложить на приращения горизонтальных координат в спроектированной системе, например, при использовании декартовых координат x, y :

$$(ds)_{\text{пл}}^2 = dx^2 + dy^2;$$

при использовании цилиндрических координат $R, \alpha = \lambda$:

$$(ds)_{\text{пл}}^2 = dR^2 + R^2 d\alpha^2.$$

Из геометрического рассмотрения (рис. 2) легко можно найти

$$ad\varphi = -\frac{1}{m}dR; \quad (5.3)$$

$$m = \frac{R}{a \cos \varphi} = \frac{1 + \sin \varphi_0}{1 + \sin \varphi} = \frac{c^2 + R^2}{2ac}; \quad (5.4)$$

$$\sin \varphi = 1 + \frac{m^2}{2} R \frac{d \frac{1}{m^2}}{dR} = 1 + \frac{m^2}{2} = R \cdot \nabla \frac{1}{m^2}, \quad (5.5)$$

где $\mathbf{R}$ — радиус-вектор, с началом на полярной оси, ∇ — горизонтальный оператор набла в спроектированных координатах.

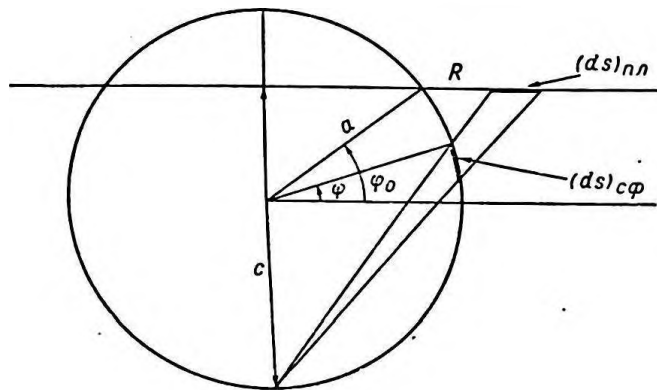


Рис. 2.

Соотношение (5.5), используемое в следующей главе, получается из выражения

$$\sin \varphi = -\frac{1}{2 \cos \varphi} \frac{d \cos^2 \varphi}{d\varphi}$$

заменой $d\varphi$ и $\cos \varphi$ на (5.3) и (5.4):

$$\sin \varphi = \frac{1}{2} \frac{m^2}{R} \frac{d}{dR} \left(\frac{R^2}{m^2} \right) = 1 + \frac{m^2}{2} R \frac{d \frac{1}{m^2}}{dR} = 1 + \frac{1}{2} m^2 R \cdot \nabla \frac{1}{m^2}.$$

ГЛАВА 6

ПОЛНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ДЕКАРТОВЫХ И ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

Задавая метрическую форму (5.2) и соблюдая сферическую метрику, получим в этой главе полные уравнения в координатах, связанных со стереографически спроектированной системой отсчета.

§ 1. Метрические формы K и D

Применяя декартовы координаты $q_k = x, y, z$, $\dot{q}_k = \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, получим по (5.2) метрическую форму

$$d\mathbf{r}^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{m^2} + dz^2 \quad (6.1)$$

и кинетическую энергию K для абсолютного движения $\dot{x}_a, \dot{y}_a$

$$K = \frac{1}{2} \frac{d\mathbf{r}^2}{dt^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{x}_a^2 + \dot{y}_a^2}{m^2} + \dot{z}^2 \right). \quad (6.2)$$

Чтобы разложить абсолютное движение $\mathbf{V}_a \begin{Bmatrix} \dot{x}_a \\ \dot{y}_a \end{Bmatrix}$ на относительное движение $\mathbf{V} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix}$ и движение в системе отсчета, связанной с плоскостью проекции, которая вращается с угловой скоростью вращения Земли Ω , используем векторное соотношение

$$\mathbf{V}_a = \mathbf{V} + \Omega \mathbf{k} \times \mathbf{R},$$

где $\mathbf{k}$ — вертикальный единичный вектор, $\mathbf{R}$ — радиус-вектор с началом на полярной оси (рис. 3),

$$\dot{x}_a = \dot{x} - \Omega y;$$

$$\dot{y}_a = \dot{y} + \Omega x. \quad (6.3)$$

Подставляя (6.3) в (6.2), получим кинетическую энергию для относительного движения

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \left[\frac{(\dot{x} - \Omega y)^2 + (\dot{y} + \Omega x)^2}{m^2} + \dot{z}^2 \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2\Omega(x\dot{y} - y\dot{x})}{m^2} + \dot{z}^2 \right] + \frac{1}{2m^2} \Omega^2 (x^2 + y^2), \end{aligned} \quad (6.4)$$

а функция Лагранжа примет вид

$$K - \Phi^* = \frac{1}{2} \left[\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2\Omega(x\dot{y} - y\dot{x})}{m^2} + \dot{z}^2 \right] - \Phi, \quad (6.5)$$

где

$$\Phi = \Phi^* - \frac{1}{2m^2} \Omega^2 (x^2 + y^2) \approx gz + \text{const}$$

вследствие допущений (4.16) и (4.17).

Форма D (1.10) получается из (6.4)

$$D^2 = \left| \frac{\partial^2 K}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k} \right| = \frac{1}{m^4}; \quad D = \frac{1}{m^2}. \quad (6.6)$$

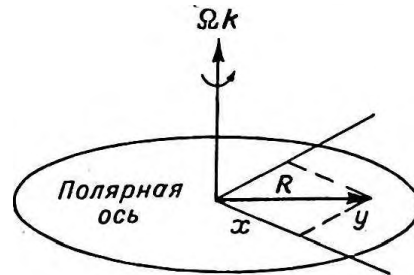


Рис. 3.

§ 2. Полные уравнения в декартовых координатах

Подставляя функцию Лагранжа $K - \Phi^*$ в уравнение движения (1.5) и при этом задавая $q_k = x, y, z$; $\dot{q}_k = \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, получим уравнения горизонтального движения с помощью одних лишь операций дифференцирования, а пренебрегая $\frac{dz}{dt}$ в уравнении вертикального движения — гидростатическое уравнение: уравнения горизонтального движения

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{x}}{m^2} \right) - \frac{f\dot{y}}{m^2} + \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2m^4} \frac{\partial m^2}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}; \quad (6.7)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{y}}{m^2} \right) + \frac{f\dot{x}}{m^2} + \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2m^4} \frac{\partial m^2}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}; \quad (6.8)$$

гидростатическое уравнение

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g. \quad (6.9)$$

Покажем детально процесс дифференцирования для уравнения (6.7).

Из (6.5) найдем при $q_k = x$; $\dot{q}_k = \dot{x}$:

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} (K - \Phi^*) = \frac{\dot{x} - \Omega y}{m^2};$$

$$\frac{\partial}{\partial q_k} (K - \Phi^*) = \frac{\Omega \dot{y}}{m^2} + \frac{1}{2} [\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2\Omega (x\dot{y} - y\dot{x})] \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{m^2} \right);$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} (K - \Phi^*) \right] &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{x}}{m^2} \right) - \frac{\Omega \dot{y}}{m^2} - y\Omega \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{m^2} \right) = \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{x}}{m^2} \right) - \frac{\Omega}{m^2} \dot{y} - y\Omega \left(\dot{x} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{m^2} + \dot{y} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{m^2} \right). \end{aligned}$$

Полное уравнение (1.5)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} (K - \Phi^*) - \frac{\partial}{\partial q_k} (K - \Phi^*) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial q_k}$$

можно переписать поэтому в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{x}}{m^2} \right) - \frac{2\Omega \dot{y}}{m^2} - \dot{y}\Omega \left(x \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{m^2} + y \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{m^2} \right) - \\ - \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{m^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}; \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{x}}{m^2} \right) - \frac{2\Omega \dot{y}}{m^2} \left(1 + \frac{m^2}{2} \mathbf{R} \cdot \nabla \frac{1}{m^2} \right) + \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2m^4} \frac{\partial m^2}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}. \end{aligned}$$

Учитывая далее (5.5) и то, что $f = 2\Omega \sin \varphi$, окончательно имеем

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{x}}{m^2} \right) - f \frac{\dot{y}}{m^2} + \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2m^4} \frac{\partial m^2}{\partial x} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x},$$

что совпадает с уравнением (6.7).

Подставляя D в виде (6.6) в лагранжево уравнение (1.6), получим уравнение неразрывности

$$\frac{m^2}{\rho} \frac{d}{dt} \left(\frac{\rho}{m^2} \right) + \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} = 0$$

или, так как

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{m^2} \right) &= \dot{x} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{m^2} + \dot{y} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{m^2}, \\ \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + m^2 \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\dot{x}}{m^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\dot{y}}{m^2} \right) \right] + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Стереографическое преобразование формально не затрагивает условие адиабатичности

$$\frac{d\theta}{dt} = 0, \quad (6.11)$$

где

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{x} \frac{\partial}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial}{\partial y} + \dot{z} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (6.12)$$

Примечания.

1. При $m=1$ приведенные выше уравнения сводятся к часто рассматриваемым простым полным уравнениям, которые, однако, не связаны со сферической метрикой и характеристиками движения, обусловленными кривизной земной поверхности, и которые можно применять поэтому лишь к движениям на ограниченной области земной поверхности, когда кривизной можно пренебречь.

Уравнения (6.7)–(6.10) включают те же кинематические и динамические характеристики, что и соответствующие полные уравнения (4.19)–(4.22) в сферических координатах.

2. Компоненты движения $\dot{x}$, $\dot{y}$ описывают движение в плоскости проекции $z = \text{const}$, которое наблюдалось бы при стереографическом отображении действительного движения на земной поверхности $r=a$.

Зависимость между действительной горизонтальной скоростью ветра

$$V_{\text{действ}} \begin{Bmatrix} a \cos \dot{\lambda} \\ a \dot{\varphi} \end{Bmatrix}$$

и проекцией скорости ветра

$$V_{\text{проекция}} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix}$$

имеет вид

$$V_{\text{проекция}}^2 = (m V_{\text{действ}})^2. \quad (6.13)$$

§ 3. Полные уравнения в полувекторных обозначениях

Можно легко перейти к векторной записи, вводя следующие горизонтальные векторы:

$$\mathbf{V} = u\mathbf{i}_x + v\mathbf{i}_y, \quad u = \frac{\dot{x}}{m^2}, \quad v = \frac{\dot{y}}{m^2}; \quad \nabla = \mathbf{i}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{i}_y \frac{\partial}{\partial y}. \quad (6.14)$$

Учитывая (6.14), перепишем уравнения (6.7) — (6.11) в виде: уравнение горизонтального движения

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} + f\mathbf{k} \times \mathbf{V} + \frac{\mathbf{V}^2}{2} \nabla m^2 = -\frac{1}{\rho} \nabla p; \quad (6.15)$$

гидростатическое уравнение

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g; \quad (6.16)$$

уравнение неразрывности

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + m^2 \nabla \cdot \mathbf{V} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0; \quad (6.17)$$

условие адиабатичности

$$\frac{d\theta}{dt} = 0, \quad (6.18)$$

где

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + m^2 \mathbf{V} \cdot \nabla + w \frac{\partial}{\partial z}; \quad w = \dot{z}. \quad (6.19)$$

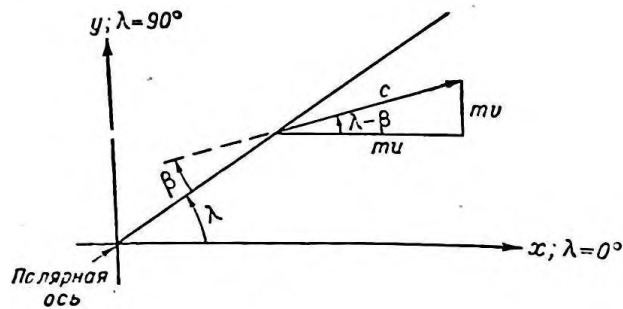


Рис. 4.

Составляющие скорости ветра u и v следует понимать как проекции составляющих скорости ветра, уменьшенные в m^2 раз, которые можно использовать при всех вычислительных операциях. Чтобы связать горизонтальные компоненты реального

ветра или их проекции при стереографическом отображении (u и v) с измеренными характеристиками ветра:

$$\left. \begin{array}{l} c - \text{скорость ветра,} \\ \beta - \text{направление ветра,} \end{array} \right\} \quad (6.20)$$

используем соотношение, которое легко получается простым преобразованием координат (рис. 4):

$$u = \frac{c}{m} \cos(\lambda - \beta); \quad v = \frac{c}{m} \sin(\lambda - \beta), \quad (6.21)$$

где λ — географическая долгота.

§ 4. Полные уравнения в цилиндрических координатах

Чтобы получить скалярные полные уравнения в цилиндрических координатах

$$q_k = \alpha, R, z,$$

сохраняя при этом сферическую метрику, используем

а) полувекторные обозначения § 3, вводя следующие векторы:

$$\begin{aligned} V &= u_\alpha \mathbf{i}_\alpha + v_R \mathbf{i}_R; \quad u_\alpha = \frac{\dot{R}\alpha}{m^2}; \quad v_R = \frac{\dot{R}}{m^2}; \\ \nabla &= \frac{\mathbf{i}_\alpha}{R} \frac{\partial}{\partial \alpha} + \mathbf{i}_R \frac{\partial}{\partial R} \end{aligned}$$

и сохраняя выражение для производных

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + \dot{\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} + \dot{R} \frac{\partial}{\partial R} + \dot{z} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial t} + \\ &+ m^2 \left(\frac{u_\alpha}{R} \frac{\partial}{\partial \alpha} + v_R \frac{\partial}{\partial R} \right) + \dot{z} \frac{\partial}{\partial z}; \\ \frac{\partial \mathbf{i}_\alpha}{\partial \alpha} &= -\mathbf{i}_R; \quad \frac{\partial \mathbf{i}_R}{\partial \alpha} = \mathbf{i}_\alpha; \quad \frac{\partial (\mathbf{i}_\alpha, \mathbf{i}_R)}{\partial R} = 0; \\ \frac{d\mathbf{i}_\alpha}{dt} &= -\dot{\alpha} \mathbf{i}_R = -\frac{m^2}{R} u_\alpha \mathbf{i}_R; \\ \frac{d\mathbf{i}_R}{dt} &= \dot{\alpha} \mathbf{i}_\alpha = \frac{m^2}{R} u_\alpha \mathbf{i}_\alpha; \end{aligned}$$

б) лагранжевы обозначения $q_k = \alpha, R, z$; $\dot{q}_k = \dot{\alpha}, \dot{R}, \dot{z}$, задавая метрическую форму

$$d\mathbf{r}^2 = \frac{(ds)_{\text{пл}}}{m^2} + dz^2 = \frac{1}{m^2} (R^2 d\alpha^2 + dR^2) + dz^2,$$

кинетическую энергию для относительного движения

$$K = \frac{1}{2} \left[\frac{R^2 (\dot{z}^2 + 2\dot{z}\Omega) + \dot{R}^2}{m^2} + \dot{z}^2 \right] + \frac{1}{2} \frac{R^2 \Omega^2}{m^2},$$

функцию Лагранжа

$$K - \Phi^* = \frac{1}{2} \left[\frac{R^2 (\dot{z}^2 + 2\dot{z}\Omega) + \dot{R}^2}{m^2} + \dot{z}^2 \right] - \Phi,$$

где геопотенциал

$$\Phi = \Phi^* - \frac{1}{2} \frac{R^2 \Omega^2}{m^2} \approx gz + \text{const},$$

и форму D

$$D^2 = \left| \frac{\partial^2 K}{\partial q_i \partial q_k} \right| = \frac{R^2}{m^4}; \quad D = \frac{R}{m^2}.$$

Окончательные уравнения в цилиндрических координатах имеют вид

$$\frac{du_a}{dt} + \frac{u_a v_R}{R} m^2 + f v_R = -\frac{1}{rR} \frac{\partial p}{\partial z};$$

$$\frac{dv_R}{dt} - \frac{u_a^2 m^2}{R} - f u_a + \frac{u_a^2 + v_R^2}{2} \frac{\partial m^2}{\partial R} = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial R};$$

$$0 = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial z} - g;$$

$$\frac{1}{r} \frac{dz}{dt} + \frac{m^2}{R} \left[\frac{\partial u_a}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial R} (R v_R) \right] + \frac{\partial z}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{dh}{dt} = 0,$$

где

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + m^2 \left(-\frac{u_a}{R} \frac{\partial}{\partial z} + v_R \frac{\partial}{\partial R} \right) + \dot{z} \frac{\partial}{\partial z},$$

$$u_a = -\frac{1}{m} c \sin \beta; \quad v_R = \frac{1}{m} c \cos \beta \quad (\text{см. рис. 5}).$$

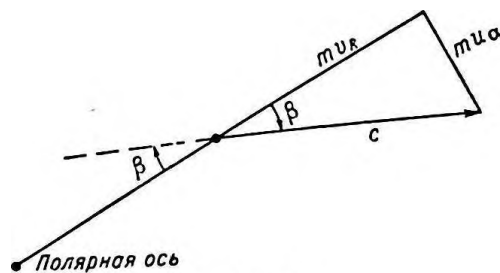


Рис. 5.

ГЛАВА 7

ПОЛНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ОБОБЩЕННОЙ ВЕРТИКАЛЬНОЙ
КООРДИНАТОЙ

Полные уравнения в той форме, в какой они получены в главе 6, имеют следующие недостатки с точки зрения размещения численной сетки:

1) область интегрирования является неограниченной по отношению к вертикальной оси z , так как верхней границы (например, $p=0$) для конечного z не существует;

2) реальная поверхность земли не совпадает с уровнем вертикальной координаты $z=\text{const}$. Это требует неравномерного размещения точек сетки вблизи нижней кинематической границы.

Чтобы устранить эти недостатки, введем вертикальную координату, более удобную при численных расчетах. Будем использовать при фиксированных x и y вместо z новую, пока не определенную координату ζ , обладающую следующими свойствами:

1) координата ζ однозначно связана с z и наоборот; это требование выполняется, если ζ монотонно возрастает или убывает в зависимости от z ;

2) предполагается, что ζ является одной из зависимых переменных или их функций, например, ζ равно p , ρ или θ . Рассматривается такой переход от системы x, y, z, t к системе x, y, ζ, t , при котором z и ζ меняются ролями как независимая и зависимая переменные.

§ 1. Формулы перехода

Чтобы различать производные по x, y, t при $z=\text{const}$ и при $\zeta=\text{const}$, будем использовать индексы z и ζ , однако позже индексы у производных при $\zeta=\text{const}$ будут опущены:

$$\left. \frac{\partial}{\partial (x, y, t)} \right|_z \text{ — производные при } z = \text{const};$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial (x, y, t)} \right|_{\zeta} = \frac{\partial}{\partial (x, y, t)} \text{ — производные при } \zeta = \text{const}.$$

Поскольку горизонтальные координаты x, y являются одними и теми же в обеих системах, соответствующие горизонтальные скорости

$$\dot{x}, \dot{y}; u, v \text{ или } V$$

остаются без изменений, полная производная $\frac{d}{dt}$ формально сохраняется, но в системе x, y, ζ, t должна представляться в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{\zeta} + \dot{x} \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{\zeta} + \dot{y} \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{\zeta} + \dot{\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{\zeta} + \\ + m^2 \mathbf{V} \cdot \nabla \Big|_{\zeta} + \dot{\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} = \frac{\partial}{\partial t} + m^2 \mathbf{V} \cdot \nabla + \dot{\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta}, \end{aligned} \quad (7.1)$$

где

$$\dot{\zeta} \equiv \frac{d\zeta}{dt}. \quad (7.2)$$

— обобщенная вертикальная скорость.

Чтобы перейти от производных при $z = \text{const}$ к производным при $\zeta = \text{const}$, введем в обеих системах произвольную зависящую переменную ψ , замечая, что

$$z = z(x, y, \zeta, t),$$

и рассмотрим численное тождество

$$\psi[x, y, z(x, y, \zeta, t), t] = \psi(x, y, \zeta, t). \quad (7.3)$$

Варьируя переменные x, y, ζ, t , получим

$$\frac{\partial \psi}{\partial (x, y, t)} \Big|_z + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial (x, y, t)} \Big|_{\zeta} = \frac{\partial \psi}{\partial (x, y, t)} \Big|_{\zeta}; \quad (7.4)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \zeta} = \frac{\partial \psi}{\partial \zeta}; \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z}. \quad (7.5)$$

С учетом (7.4) горизонтальный оператор набла преобразуется к виду

$$\nabla \Big|_{\bar{z}} = \nabla \Big|_{\zeta} - \frac{\partial \dots}{\partial z} \cdot \nabla \Big|_{\zeta}; \quad (7.6)$$

$$\nabla \Big|_{\bar{z}} = \nabla \dots - \frac{\partial \dots}{\partial z} \cdot \nabla z \equiv \nabla \dots - \frac{1}{g} \frac{\partial \dots}{\partial z} \cdot \nabla \Phi; \quad \Phi = gz + \text{const},$$

где

$$\nabla = \nabla \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{\zeta} \\ \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{\zeta} \end{array} \right\}.$$

Используя (2.24), получим форму D_z в ζ -системе из D_z в z -системе:

$$D_z = D_z \frac{\partial (x, y, z)}{\partial (x, y, \zeta)} = D_z \frac{\partial z}{\partial \zeta}.$$

По (6.6) $D_z = \frac{1}{m^2}$, следовательно,

$$D_z = \frac{1}{m^2} \frac{\partial z}{\partial \zeta} = \frac{1}{m^2 \cdot g} \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}; \quad \Phi = gz + \text{const.} \quad (7.7)$$

§ 2. Полные уравнения в ζ -системе координат

1. Уравнения горизонтального движения

При переходе к новой системе координат левая часть уравнения (6.15) формально сохраняется вследствие (7.1) и вследствие того, что m^2 не зависит от z ; правая часть этого уравнения, по (7.6), преобразуется к виду

$$-\frac{1}{\rho} \nabla \Big|_z p = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho g} \frac{\partial p}{\partial z} \nabla \Phi,$$

или, по гидростатическому уравнению (6.16),

$$-\frac{1}{\rho} \nabla \Big|_z p = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \Phi.$$

Полное уравнение (6.15) в ζ -системе имеет вид

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} + f\mathbf{k} \times \mathbf{V} + \frac{\mathbf{V}^2}{2} \nabla m^2 = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \Phi. \quad (7.8)$$

2. Гидростатическое уравнение

Гидростатическое уравнение (6.16) можно преобразовать в аналогичное уравнение в ζ -системе по формуле (7.5), замечая, что $\Phi = gz + \text{const}$,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \zeta}. \quad (7.9)$$

3. Уравнение неразрывности

Подставим D из (7.7), записанное с учетом (7.9),

$$D = \frac{1}{m^2} \frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} = -\frac{1}{m^2 \rho g} \frac{\partial p}{\partial \zeta}$$

в лагранжево уравнение (1.6). Получим

$$m^2 \left(\frac{\partial p}{\partial \zeta} \right)^{-1} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{m^2} \frac{\partial p}{\partial \zeta} \right) + \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial \zeta} = 0.$$

Это уравнение легко преобразуется по (7.1) к виду

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial p}{\partial \zeta} \right) + m^2 \nabla \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial \zeta} \mathbf{V} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\dot{\zeta} \frac{\partial p}{\partial \zeta} \right) = 0. \quad (7.10)$$

Для полноты добавим условие адиабатичности (6.18), формально не затронутое преобразованиями:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= 0; \\ \frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + m^2 \mathbf{V} \cdot \nabla + \dot{\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{aligned} \right\} \quad (7.11)$$

§ 3. Кинематическое нижнее граничное условие

Чтобы обеспечить единственность решения полных уравнений, система уравнений должна быть дополнена граничными условиями. Согласно нижнему граничному условию, поверхность горы является твердой.

Предположим, что высоту горы, отсчитываемую от изогеопотенциального уровня $r=0$, или $z=0$, или $\Phi=0$, можно считать известной функцией горизонтальных координат:

$$z = z_s(x, y) \quad \text{или} \quad \Phi = \Phi_s(x, y). \quad (7.12)$$

Индексом s в (7.12) и далее отмечаются значения на твердой нижней граничной поверхности.

Считается, что в обобщенной ζ -системе эта поверхность, определяемая в виде

$$\zeta = \zeta_s(x, y, t), \quad (7.13)$$

является также функцией времени t , поскольку имеется в виду, что ζ представляет собой одну из переменных метеорологического состояния и поэтому является функцией, изменяющейся в общем со временем на земной поверхности, например, $\zeta = p$.

Перепишем теперь соотношение (7.13) в виде

$$F = \zeta - \zeta_s(x, y, t); \quad F = 0, \quad (7.14)$$

согласно которому F характеризует постоянное или консервативное свойство, которое сохраняется частицей, движущейся неизменно по поверхности нижней границы.

Нижнее кинематическое граничное условие может быть поэтому выражено в виде

$$\frac{dF}{dt} = 0, \quad F = 0$$

или

$$\frac{\partial F}{\partial t} + m^2 \mathbf{V} \cdot \nabla F + \dot{\zeta} \frac{\partial F}{\partial \zeta} = 0, \quad F = 0,$$

или, если применить (7.14),

$$\frac{\partial \zeta_s}{\partial t} + m^2 \mathbf{V}_s \cdot \nabla \zeta_s = \dot{\zeta}_s \quad (7.15)$$

при $F=0$ или $\Phi = \Phi_s(x, y)$.

Замкнутая гидростатическая система полных уравнений, рассмотренных в этой главе и в общем случае представляемых уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{V}}{dt} + f\mathbf{k} \times \mathbf{V} + \frac{\mathbf{V}^2}{2} \nabla m^2 &= -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \Phi; \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \zeta}; \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial p}{\partial \zeta} \right) + m^2 \nabla \cdot \left(\mathbf{V} \frac{\partial p}{\partial \zeta} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\dot{\zeta} \frac{\partial p}{\partial \zeta} \right) &= 0; \\ \frac{d\theta}{dt} &= 0; \\ \dot{\zeta}_s &= \frac{\partial \zeta_s}{\partial t} + m^2 \mathbf{V}_s \cdot \nabla \zeta_s; \\ \frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + m^2 \mathbf{V}_s \cdot \nabla + \dot{\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta}, \end{aligned} \right\} \quad (7.16)$$

должна быть детализирована заданием ζ для возникающих частных задач.

§ 4. Полные уравнения с давлением p в качестве вертикальной координаты

Чтобы показать частный случай уравнений (7.16), используем давление в качестве вертикальной координаты

$$\zeta \equiv p \quad (7.17)$$

и легко получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{V}}{dt} + f\mathbf{k} \times \mathbf{V} + \frac{\mathbf{V}^2}{2} \nabla m^2 &= -\nabla \Phi; \\ \frac{\partial \Phi}{\partial p} &= -\frac{1}{\rho}; \quad \Phi = \Phi_s \quad \text{при} \quad p = p_s; \\ m^2 \nabla \cdot \mathbf{V} + \frac{\partial \omega}{\partial p} &= 0; \\ \frac{d\theta}{dt} &= 0; \\ \frac{\partial p_s}{\partial t} + m^2 \mathbf{V}_s \cdot \nabla p_s &= \omega_s; \quad \omega = 0 \quad \text{при} \quad p = 0, \end{aligned} \right\} \quad (7.18)$$

где

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + m^2 \mathbf{V} \cdot \nabla + \omega \frac{\partial}{\partial p} \quad \text{и} \quad \omega = \frac{dp}{dt} = \dot{p}$$

— обобщенная вертикальная скорость; индексом s отмечены значения на земной поверхности: $p = p_s$, $\Phi = \Phi_s$.

§ 5. Полные уравнения с потенциальной температурой θ или с плотностью p в качестве вертикальной координаты

Для полноты изложения, но не для дальнейших приложений приведем ниже полные уравнения (7.16), в которых вертикальная координата ζ заменена потенциальной температурой θ или плотностью p .

а. Полные уравнения в (x, y, θ, t) -системе с обобщенной вертикальной скоростью θ :

уравнение горизонтального движения

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} + f\mathbf{k} \times \mathbf{V} + \frac{\mathbf{V}^2}{2} \nabla m^2 = -\nabla M;$$

гидростатическое уравнение

$$\frac{\partial M}{\partial \theta} = \frac{c_p T}{\eta};$$

уравнение неразрывности

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + m^2 \nabla \cdot \left(\mathbf{V} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) = 0,$$

или

$$\frac{\partial p}{\partial t} + m^2 \nabla \cdot \int_{\theta(p=0)}^{\theta} \left(\mathbf{V} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) d\theta = 0;$$

условие адиабатичности

$$\dot{\theta} = 0;$$

кинематическое граничное условие

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial t} + m^2 \mathbf{V}_s \cdot \nabla \theta_s = 0 \quad \text{при} \quad \Phi = \Phi_s,$$

где $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + m^2 \mathbf{V} \cdot \nabla$ и $M = c_p T + \Phi$ — функция Монтгомери в θ -системе.

Основное преимущество этой системы координат заключается в том, что для адиабатического движения обобщенная вертикальная скорость всюду равна нулю.

б. Полные уравнения в (x, y, ρ, t) -системе с обобщенной вертикальной скоростью $\dot{\rho}$:

уравнение горизонтального движения

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} + f\mathbf{k} \times \mathbf{V} + \frac{V^2}{2} \nabla m^2 = -\nabla M;$$

гидростатическое уравнение

$$\frac{\partial M}{\partial \rho} = -\frac{RT}{\rho};$$

уравнение неразрывности

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \rho} \right) + m^2 \nabla \cdot \left(\mathbf{V} \frac{\partial \rho}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\dot{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \rho} \right) = 0$$

или

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + m^2 \nabla \cdot \int_0^{\rho} \left(\mathbf{V} \frac{\partial \rho}{\partial \rho} \right) d\rho + \dot{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \rho} = 0;$$

условие адиабатичности

$$\frac{d\theta}{dt} = 0;$$

кинематическое граничное условие

$$\dot{\rho}_s = \frac{\partial \rho_s}{\partial t} + m^2 \mathbf{V}_s \cdot \nabla \rho_s \text{ при } \Phi = \Phi_s,$$

$\dot{\rho} = 0$ на верхней границе атмосферы ($\rho = 0$),

где $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + m^2 \mathbf{V} \cdot \nabla + \dot{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}$; $M \equiv RT + \Phi$ — функция Монгомери в ρ -системе.

В свете планов организации системы наблюдений, при которой используются уравновешенные шары, движущиеся на уровнях постоянной плотности и фиксируемые с помощью спутников, система уравнений, приведенная выше, может, вероятно, служить в качестве приемлемой системы при численных расчетах.

ГЛАВА 8

ПОЛНЫЕ УРАВНЕНИЯ В КООРДИНАТНОЙ СИСТЕМЕ
С ПРИВЕДЕННЫМ ДАВЛЕНИЕМ В КАЧЕСТВЕ
ВЕРТИКАЛЬНОЙ КООРДИНАТЫ

Отождествим вертикальную координату ζ с давлением p , деленным на давление p_s на орографическом уровне, и рассмотрим координатную систему с независимыми переменными

$$x, y, \sigma, t,$$

где σ — вертикальная координата, σ (или s) — обобщенная вертикальная скорость,

$$\left. \begin{aligned} \zeta \equiv \sigma &= \frac{p}{p_s}, \\ \text{где } p_s &\equiv \pi(x, y, t) \text{ — приземное давление,} \\ \text{или } \sigma &= \frac{p}{\pi} \text{ и } p = \sigma \pi. \end{aligned} \right\} \quad (8.1)$$

Определенная таким образом (x, y, σ, t) -система имеет следующие преимущества с точки зрения численной процедуры:

1) область интегрирования является ограниченной по вертикальной координате, поскольку на верхней границе атмосферы, где $z \rightarrow \infty$ и $p \rightarrow 0$, вертикальная координата σ равна нулю:

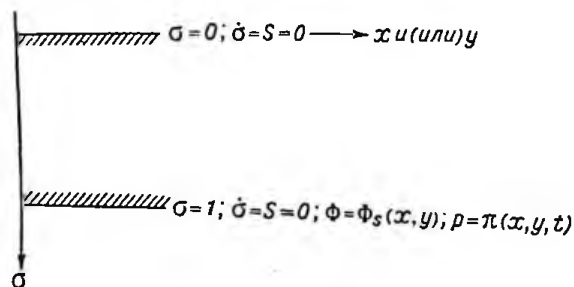


Рис. 6.

2) поверхность горы, на которой $\Phi = \Phi_s$ и $p = \pi$, совпадает с уровнем вертикальной координаты σ (рис. 6):

$$\begin{aligned} \sigma &= 0 \text{ на верхней границе атмосферы, где } p = 0, \\ \sigma &= 1 \text{ на нижней границе атмосферы, где } p = \pi \text{ и } \Phi = \Phi_s. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Заменяем теперь в уравнениях (7.16) главы 7 ζ на σ и $\dot{\zeta}$ на $\dot{\sigma}$ (или s):

$$\zeta \equiv \sigma, \quad \dot{\zeta} \equiv \dot{\sigma} = s. \quad (8.3)$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial p}{\partial \sigma} = \pi \quad \text{и} \quad \nabla p = \sigma \nabla \pi, \quad (8.4)$$

получим:

уравнение горизонтального движения

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} + f\mathbf{k} \times \mathbf{V} + \frac{\mathbf{V}^2}{2} \nabla m^2 = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \Phi = -\frac{\sigma}{\rho} \nabla \pi - \nabla \Phi; \quad (8.5)$$

гидростатическое уравнение

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} = -\frac{\pi}{\rho}, \quad (8.6)$$

или с учетом уравнения состояния (1.4)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} = -\frac{RT}{\sigma};$$

уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} + m^2 \nabla \cdot (\pi \mathbf{V}) + \frac{\partial (\pi s)}{\partial \sigma} = 0; \quad (8.7)$$

условие адиабатичности

$$\frac{d\theta}{dt} = 0. \quad (8.8)$$

Кинематическое граничное условие (рис. 6):

$$\begin{aligned} s = 0 \quad \text{при} \quad \sigma = 0 & \text{— верхнее граничное условие,} \\ s = 0 \quad \text{при} \quad \sigma = 1 & \text{— нижнее граничное условие.} \end{aligned} \quad (8.9)$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + m^2 \mathbf{V} \cdot \nabla + s \frac{\partial}{\partial \sigma}; \\ \nabla &= \nabla \left\{ \left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{aligned} \right|_{\sigma} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (8.10)$$

Уравнение состояния имеет вид (см. (1.3), (1.4) и (8.1))

$$\left. \begin{aligned} p &= \sigma \pi = \rho R T; \\ T &= \left(\frac{p}{p_0} \right)^k \theta = \left(\frac{\pi}{\pi_0} \right)^k \theta; \\ \frac{1}{\rho} &= \frac{RT}{\sigma \pi} = \frac{R}{(p_0)^k} (\pi \pi_0)^{k-1} \theta, \\ k &= 0,286, \quad p_0 = \text{const} = 1000 \text{ мб.} \end{aligned} \right\} \quad (8.11)$$

В дальнейшем будем рассматривать уравнения (8.5) — (8.10) как прототипы семейства бароклинных полных уравнений, наиболее подходящие для применения конечно-разностных методов и удобного размещения сетки и достаточно разработанные в физическом и метрическом отношении, чтобы использовать их для моделирования развития атмосферных процессов, представляющих синоптический интерес, т. е. в качестве основных уравнений при процедуре численного решения.

ГЛАВА 9

БАРОТРОПНЫЙ ВАРИАНТ ПОЛНЫХ УРАВНЕНИЙ

Чтобы получить из уравнений главы 8 двумерный вариант системы уравнений, обычно применяемый при численном прогнозе движений на уровне 500 мб, необходимо ввести ряд предположений.

1. Жидкость баротропна. Это предположение означает, что всегда и везде в модели атмосферы плотность ρ является функцией только давления p . Более точно такое состояние называется автобаротропным:

$$\rho = \rho(p) \quad \text{или} \quad \nabla_3 \rho \times \nabla_3 p = 0, \quad (9.1)$$

где ∇_3 — трехмерный оператор набла.

Будем считать, что функция (9.1) задана.

Привлекая уравнение (9.1) и используя гидростатическое уравнение (8.6), покажем, что силы давления, представляемые членами правой части уравнения горизонтального движения (8.5), не зависят от вертикальной координаты.

Выражение

$$\frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \Phi$$

в соответствии с (9.1) может быть переписано в виде

$$\nabla \left(\int_{\text{const}}^p \frac{1}{\rho} dp + \Phi \right)$$

и

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\nabla \int_{\text{const}}^p \frac{1}{\rho} dp + \Phi \right] = \nabla \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) = \nabla \left(\frac{\pi}{\rho} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) = 0$$

в соответствии с (8.4) и гидростатическим уравнением (8.6), т. е. всегда

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \Phi \right) = 0.$$

Мы можем поэтому брать силы давления в уравнениях горизонтального движения на любом уровне σ и использовать для простоты и удобства уровень $\sigma=1$, на котором

$$\frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \Phi = \frac{1}{\rho_s} \nabla p_s + \nabla \Phi_s = \frac{1}{\rho_s} \nabla \pi + \nabla \Phi_s. \quad (9.2)$$

Здесь индексом s отмечены значения на уровне $\sigma=1$, на котором $\Phi = \Phi_s(x, y)$ — известная функция земного рельефа.

Уравнение горизонтального движения (8.5) представляется с учетом (9.2) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + m^2 (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + s \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial s} + f \mathbf{k} \times \mathbf{V} + \frac{\mathbf{V}^2}{2} \nabla m^2 = \\ = - \frac{1}{\rho_s} \nabla \pi - \nabla \Phi_s. \end{aligned} \quad (9.3)$$

2. В определенный момент $t=t_0$ горизонтальное движение $\mathbf{V}$ не зависит от вертикальной координаты:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} = 0 \quad \text{при} \quad t = t_0. \quad (9.4)$$

Рассматривая уравнение (9.3), можно заключить, что если $\mathbf{V}$ не зависит от вертикальной координаты при $t=t_0$, то $\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}$ также не зависит от вертикальной координаты (при $t=t_0$) и, следовательно, $\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z}$ будет стремиться к нулю в любой момент времени:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} = 0. \quad (9.5)$$

Вследствие (9.5) уравнение горизонтального движения (9.3) приводится к виду

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + m^2 (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + f \mathbf{k} \times \mathbf{V} + \frac{\mathbf{V}^2}{2} \nabla m^2 = - \frac{1}{\rho_s} \nabla \pi - \nabla \Phi_s, \quad (9.6)$$

где все переменные $\mathbf{V}$, ρ_s и π зависят только от x, y, t .¹

¹ Двумерная эквивалентно-баротропная модель, в которой $\mathbf{V} = A(\sigma) \bar{\mathbf{V}}$, причем $\bar{\mathbf{V}}$ является функцией x, y, t , а A — функция только от σ , здесь не рассматривается.

Двумерное уравнение неразрывности получается путем интегрирования уравнения (8.7) по σ от $\sigma=0$ до $\sigma=1$ с учетом граничных условий (8.9) и условия (9.5):

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} + m^2 \nabla \cdot (V \pi) = 0. \quad (9.7)$$

В дальнейшем будем считать уравнения (9.6) и (9.7) прототипами семейства полных баротропных уравнений, которые для практических приложений необходимо привести к более конкретному виду путем явного задания соотношения баротропности (9.1).

Эти уравнения могут содержать шумовые волны (внешние гравитационные или звуковые), которые распространяются в горизонтальном направлении со скоростями, зависящими от задания (9.1).

Примечания.

1. В силу баротропности уравнений (9.6) и (9.7) процедура интегрирования приведена к двумерной задаче.

2. Уравнения (9.6) и (9.7) представляют собой полную систему трех скалярных уравнений с зависимыми переменными u, v, π и с независимыми переменными x, y, t . Величину ρ_* в (9.6) следует, однако, исключить по (9.1): $\rho_* = \rho_*(\pi)$.

ГЛАВА 10

ЛОГИЧЕСКАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ПРОЦЕДУРЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ПОЛНЫХ УРАВНЕНИЙ

В дальнейшем будем иметь дело с бароклиническими полными уравнениями (8.5)—(8.11) и рассмотрим различные варианты и этапы процесса решения.

§ 1. Задание параметрических данных

Необходимо иметь следующие параметрические данные, зависящие только от горизонтальных координат: $\Phi_s(x, y)$ — данные об орографии, $m^2(x, y)$ — данные о масштабном множителе, $f(x, y)$ — данные о параметре Кориолиса.

§ 2. Задание начальных данных

Вначале, при $t=0$, распределение массы, определяемое, например, с помощью приземного давления

$$\pi(x, y, t=0),$$

потенциальной температуры

$$\theta(x, y, \sigma, t=0) \quad \text{при} \quad 0 \leq \sigma \leq 1$$

и поля горизонтального ветра

$$V(x, y, z, t=0) \text{ при } 0 \leq \sigma \leq 1,$$

должно быть задано произвольно и без каких-либо ограничений, накладываемых условиями совместности, которые имеют место при интегрировании систем фильтрованных уравнений.

Здесь необходимо заметить, что по значениям π и θ с помощью гидростатического уравнения (8.6) и уравнения состояния (8.11) можно всюду однозначно определить полное распределение массы (Φ , p , ρ , T , θ). Вместо π и θ могут быть использованы любые другие параметры состояния, определяющие неявно полное распределение массы.

§ 3. Способ интегрирования

Сначала перечислим полные бароклинные уравнения главы 8 и установим различие между прогностическими уравнениями, включающими производные по времени от зависимых переменных, и диагностическими уравнениями или уравнениями совместности, которые не содержат производных по времени, а определяют соотношения между зависимыми переменными в фиксированный момент времени и являются приемлемыми для расчета тех зависимых переменных, которые вначале не могут задаваться произвольным образом. В соответствии с этими двумя типами уравнений процесс интегрирования делится на диагностическую и прогностическую части.

1. Диагностическая часть

а. Вычисление поля геопотенциала Φ . По заданным начальным данным вычисляем с помощью гидростатического уравнения (8.6) и уравнения состояния (8.11) поле геопотенциала:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} = - \frac{RT}{\sigma} = - R \left(\frac{\pi}{p_0} \right)^k \sigma^{k-1} \theta. \quad (10.1)$$

Интегрируя (10.1) в пределах от σ до $\sigma=1$ и замечая, что $\Phi=\Phi_s$ на уровне $\sigma=1$, находим

$$\Phi = \Phi_s + R \left(\frac{\pi}{p_0} \right)^k \int_{\sigma}^1 (\theta \tau^{k-1}) d\tau. \quad (10.2)$$

б. Вычисление поля вертикальной скорости s . С помощью диагностического уравнения, которое получим из уравнения неразрывности (8.7) и граничных условий (8.9), вычисляем начальную вертикальную скорость $s(x, y, \sigma, t=0)$.

Рассмотрим уравнение (8.7)

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} + m^2 \nabla \cdot (\mathbf{V} \pi) + \frac{\partial (s \pi)}{\partial \sigma} = 0, \quad (10.3)$$

пронтегрируем его по σ от 0 до 1 и получим в соответствии с (8.9)

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} + m^2 \int_0^1 \nabla \cdot (\mathbf{V} \pi) d\sigma = 0. \quad (10.4)$$

Исключая $\frac{\partial \pi}{\partial t}$ из (10.3) и (10.4), получим

$$\frac{\partial (s \pi)}{\partial \sigma} = -m^2 \nabla \cdot (\mathbf{V} \pi) + m^2 \int_0^1 \nabla \cdot (\mathbf{V} \pi) d\sigma. \quad (10.5)$$

Пронтегрируем опять это уравнение от $\sigma=0$ до σ и, замечая, что $s=0$ при $\sigma=0$, получим

$$s = -\frac{m^2}{\pi} \int_0^\sigma \nabla \cdot (\mathbf{V} \pi) d\sigma + \frac{m^2 \sigma}{\pi} \int_0^1 \nabla \cdot (\mathbf{V} \pi) d\sigma. \quad (10.6)$$

Это второе диагностическое уравнение, вытекающее неявно из предположения о сохранении гидростатического равновесия, представляет собой уравнение Ричардсона для рассматриваемой системы координат.

2. Прогностическая часть

После вычисления Φ и s будем иметь в момент $t=0$ полное поле массы и полное поле ветра, которые входят в полные уравнения как зависимые переменные.

Следующие прогностические уравнения:
уравнения горизонтального движения (8.5)

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} &= m^2 (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + s \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \sigma} + f \mathbf{k} \times \mathbf{V} + \frac{\mathbf{V}^2}{2} \nabla m^2 + \\ &\quad + \frac{\sigma}{\rho} \nabla \pi + \nabla \Phi; \\ -\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} &= m^2 (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + s \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \sigma} + f \mathbf{k} \times \mathbf{V} + \frac{\mathbf{V}^2}{2} \nabla m^2 + \\ &\quad + R \left(\frac{\sigma}{p_0} \right)^k \pi^{k-1} \nabla \pi + \nabla \Phi; \end{aligned} \right\} \quad (10.7)$$

уравнение неразрывности (10.4), записанное с учетом граничных условий,

$$-\frac{\partial \pi}{\partial t} = m^2 \nabla \cdot \int_0^1 (V \pi) d\sigma, \quad (10.8)$$

условие адиабатичности (8.8)

$$-\frac{\partial \theta}{\partial t} = m^2 V \cdot \nabla \theta + s \frac{\partial \theta}{\partial z}, \quad (10.9)$$

дают возможность рассчитать временные тенденции начального поля, а при переходе к конечно-разностным аналогам обеспечивают возможность расчета этих начальных данных на следующем шаге по времени. Принимая эти данные на следующем шаге за начальные и повторяя весь диагностический и прогностический циклы, можно интегрировать на такое большое количество шагов по времени, какое необходимо.

Уравнение (10.7) следует из уравнения (8.5), в которое подставлены значения $\frac{dV}{dt}$ из (8.10) и $\frac{1}{\rho}$ из (8.11). Уравнение (10.8) тождественно уравнению (10.4), а уравнение (10.9) получается из уравнений (8.8) и (8.10).

Необходимо отметить, что диагностическая часть требует лишь простого интегрирования (т. е. суммирования конечно-разностных форм) по вертикальной координате, в то время как прогностическая часть предусматривает прямое вычисление тенденций, не включенных в пространственные дифференциальные операторы, которые встречаются при решении фильтрованных вариантов бароклиных систем уравнений и поэтому не требующих затрат времени на численное решение соответствующих дифференциальных уравнений.

В конечном итоге увеличение числа точек сетки требует лишь линейного увеличения вычислительных операций.

Ссылаясь на баротропный вариант полных уравнений, полученный в главе 9, заметим, что логическая последовательность численного решения сводится к чисто прогностической части; она является очевидной и не нуждается в детальном объяснении.

ГЛАВА 11

ПРИМЕР КОНЕЧНО-РАЗНОСТНОЙ АППРОКСИМАЦИИ БАРОТРОПНЫХ ПОЛНЫХ УРАВНЕНИЙ

Существует большое количество конечно-разностных методов решения полных уравнений, и почти каждый, кто имеет дело с численными приложениями, использует свой особый вариант размещения сетки и конечно-разностной аппроксимации.

Поэтому далее рассмотрим только один метод из многих, который используется сейчас Группой численного предсказания погоды в Оффенбахе для текущего прогноза высоты изобарической поверхности 500 мб, дает обнадеживающие результаты и является достаточно устойчивым для составления прогнозов по крайней мере на несколько дней.

§ 1. Полные баротропные дифференциальные уравнения

Начнем с прототипов баротропных уравнений (9.1)–(9.7) главы 9 и получим общие баротропные уравнения, задавая простейшее возможное баротропное соотношение (9.1), в котором плотность ρ является постоянной:

$$\rho = \text{const};$$

$$\nabla \rho = \frac{\partial \rho}{\partial z} = \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (11.1)$$

Этот режим, описываемый уравнениями, которые вытекают из (11.1), физически можно проверить на модели несжимаемой атмосферы со свободной верхней поверхностью (рис. 7).

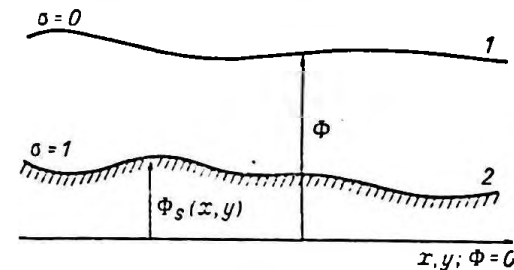


Рис. 7.

1 — верхняя свободная поверхность, где $\Phi_{\sigma=0} = \Phi$, $p=0$, $\sigma=0$; 2 — поверхность горы, где $\Phi = \Phi_s$, $p=\pi$, $\sigma=1$.

Можно использовать непосредственно уравнения (9.6) и (9.7) и заменить приземное давление π геопотенциалом Φ свободной поверхности, на которой предполагается, что $p=0$ и $\sigma=0$.

Интегрируя гидростатическое уравнение (8.6) от $\sigma=0$ до $\sigma=1$ при $\rho=\text{const}$, получим

$$\Phi_{\sigma=0} - \Phi_{\sigma=1} = \frac{\pi}{\rho} \quad (11.2)$$

или

$$\pi = \rho (\Phi - \Phi_s); \quad \Phi = \Phi|_{\sigma=0} \quad (\text{рис. 7}).$$

Заменяя в уравнениях (9.6) и (9.7) π по (11.2) и включив диффузионный член $Am^2 \nabla^2 \mathbf{V}$ в уравнение движения, находим окончательно следующие прогностические скалярные уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} = & -m^2 \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + f v - \frac{u^2 + v^2}{2} \frac{\partial m^2}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \\ & + Am^2 \nabla^2 u; \end{aligned} \quad (11.3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -m^2 \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) - fu - \frac{u^2 + v^2}{2} \frac{\partial m^2}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} + Am^2 \nabla^2 v; \quad (11.4)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -m^2 \left[\frac{\partial u (\Phi - \Phi_s)}{\partial x} + \frac{\partial v (\Phi - \Phi_s)}{\partial y} \right]. \quad (11.5)$$

Члены диффузии (сглаживания) вводятся обычно в уравнения движения перед переходом к конечно-разностному аналогу не из физических соображений, а с целью нейтрализации и демпфирования аппроксимированного численного режима самых коротких волн с длиной, сравнимой с шагом сетки.

§ 2. Конечно-разностная сетка

Для численного интегрирования полных баротропных уравнений (11.3) — (11.5) необходимо заменить дифференциальные операторы конечно-разностными, а непрерывное пространство (время) — соответствующей сеткой.

С целью симметрии и избежания вычислительной неустойчивости будем везде использовать центрированные конечные разности.

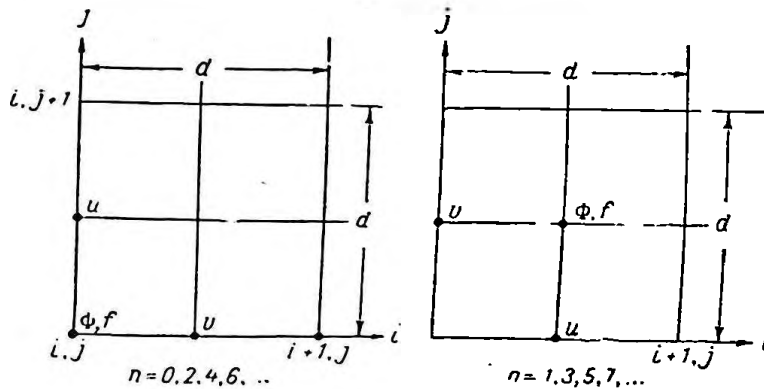


Рис. 8.

А. Элиассен предложил использовать особую, удобную и экономичную структуру решетки, для которой численные значения зависимых переменных определяются только в тех точках сетки, где этого требует соответствующий линеаризованный вариант полных уравнений, и в которых сеточные значения чередуются от одного шага по времени к другому вдоль диагонали квадрата сетки с основанием, равным половине шага сетки. Такую решетку назовем расшатанной сеткой или сеткой спуска. В соответствии с этим зависимые переменные и пара-

метры u , v , Φ , и Φ_s , f , m^2 на множестве всех имеющихся точек сетки определяем, как это показано на рис. 8, где n указывает номер шагов по времени Δt , а i, j — число узлов по координатам x и y при равномерном размещении точек сетки: $\Delta x = \Delta y = d$; m^2 и Φ_s задаются в тех узлах сетки, в которых задается f .

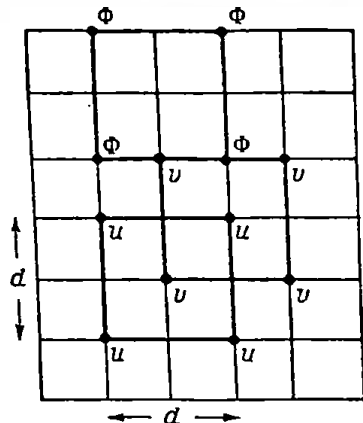


Рис. 9.

Структура этой решетки такова, что, во-первых, на фиксированном шаге по времени $n = \text{const}$ мы имеем дело с тремя типами квадратных сеток с шагом d , расположенных одна за другой, на которых задаются соответственно u , v , Φ (рис. 9), и, во-вторых, мы должны вычислять в момент n тенденции $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$ и $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ в тех точках сетки, где аргументы u , v , Φ определяются соответственно на предыдущем $(n-1)$ -м и последующем $(n+1)$ -м шагах времени (рис. 10).

По сравнению с полной сеткой, на которой каждая переменная задается в каждом узле сетки, основное преимущество «расшатанной» сетки заключается в том, что уменьшаются

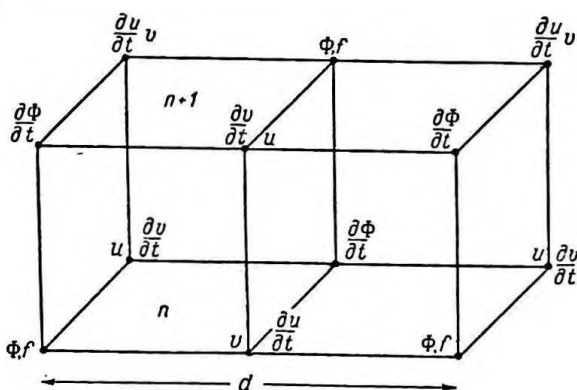


Рис. 10.

ошибки аппроксимации при том же общем числе определяемых значений. Недостаток этой сетки состоит в том, что необходимо интерполировать значения в тех точках сетки, где они не определяются, но требуются по нелинейным вариантам рассматриваемых конечно-разностных уравнений. Следствием интерполяции является эффект сглаживания.

§ 3. Определение конечно-разностных операторов и операторов осреднения

Аппроксимируем дифференциальные операторы в уравнениях (11.3) — (11.5) следующими операторами централизованных конечных разностей, где ψ означает любую из величин u , v , Φ , Φ_s , m^2 , f :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_i &\approx d_x \psi \Big|_i \equiv \frac{1}{d} \left(\psi_{i+\frac{1}{2}} - \psi_{i-\frac{1}{2}} \right); \\ &\quad j, n \text{ фиксированные;} \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} \Big|_j &\approx d_y \psi \Big|_j \equiv \frac{1}{d} \left(\psi_{j+\frac{1}{2}} - \psi_{j-\frac{1}{2}} \right); \\ &\quad i, n \text{ фиксированные;} \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} \Big|_n &\approx d_t \psi \Big|_n \equiv \frac{1}{2\Delta t} (\psi_{n+1} - \psi_{n-1}); \\ &\quad i, j \text{ фиксированные;} \end{aligned} \right\} \quad (11.6)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \psi \Big|_{i,j,n} &\approx \Delta \psi \Big|_{i,j,n} \equiv \frac{2}{d^2} \left(\psi_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, n} + \psi_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, n} + \right. \\ &\quad \left. + \psi_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, n} + \psi_{i-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, n} - 4\psi_{i,j,n-1} \right). \end{aligned} \quad (11.7)$$

В тех точках расштатанной сетки, для которых на данном шаге вычисления не производились, значения искомых функций определяются путем интерполяции. Для этого введем следующие операторы интерполяции или осреднения:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\psi}_i^x &\equiv \frac{1}{2} \left(\psi_{i+\frac{1}{2}} + \psi_{i-\frac{1}{2}} \right); \quad j, n \text{ фиксированные;} \\ \bar{\psi}_j^y &\equiv \frac{1}{2} \left(\psi_{j+\frac{1}{2}} + \psi_{j-\frac{1}{2}} \right); \quad i, n \text{ фиксированные;} \\ \bar{\psi}_i^{xx} &\equiv \frac{1}{4} (\psi_{i+1} + \psi_{i-1} + 2\psi_i); \quad j, n \text{ фиксированные;} \\ \bar{\psi}_j^{yy} &\equiv \frac{1}{4} (\psi_{j+1} + \psi_{j-1} + 2\psi_j); \quad i, n \text{ фиксированные;} \end{aligned} \right\} \quad (11.8)$$

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_{i,j}^{xy} &\equiv \frac{1}{4} \left(\psi_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} + \psi_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}} + \psi_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} + \right. \\ &\quad \left. + \psi_{i-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}} \right), \quad n \text{ фиксированное.} \end{aligned} \quad (11.9)$$

Учитывая (11.9), выражение (11.7) можно переписать в виде

$$\Delta \psi_{i,j,n} = \frac{8}{d^2} (\bar{\psi}_{i,j,n}^{xy} - \psi_{i,j,n-1}). \quad (11.10)$$

Относительно (11.7) или (11.10) необходимо подчеркнуть, что в операторе $\Delta \psi$ используется $\psi_{i,j,n-1}$, а не $\psi_{i,j,n}$. Это сделано не только потому, что значений $\psi_{i,j,n}$ нет в наличии, когда они необходимы, но в основном для того, чтобы избежать вычислительной неустойчивости, которая может возникнуть при использовании $\psi_{i,j,n}$, а также для объединения обеих семейств решений на четных и нечетных шагах по времени, которые при возрастании количества шагов по времени имеют тенденцию расходиться.

§ 4. Конечно-разностные уравнения

Используя конечно-разностные операторы и операторы осреднения, определенные в § 3, мы сможем теперь аппроксимировать дифференциальные уравнения (11.3)—(11.5) § 1 конечно-разностными уравнениями, соответствующими рассматриваемой расщатанной сетке, и использовать следующие приближения:

$$\begin{aligned} d_t u = & -\bar{m}^{2x} (\bar{u}^{xy} d_x \bar{u}^y + \bar{v}^{yy} d_y \bar{u}^x) - \frac{1}{2} [(\bar{u}^{xy})^2 + (\bar{v}^{yy})^2] d_x m^2 + \\ & + \bar{f}^x v - d_x \Phi + A \bar{m}^{2x} \Delta u; \end{aligned} \quad (11.11)$$

$$\begin{aligned} d_t v = & -\bar{m}^{2y} (\bar{u}^{xx} d_x \bar{v}^y + \bar{v}^{xy} d_y \bar{v}^x) - \frac{1}{2} [(\bar{u}^{xx})^2 + (\bar{v}^{xy})^2] d_y m^2 - \\ & - \bar{f}^y u - d_y \Phi + A \bar{m}^{2y} \Delta v; \end{aligned} \quad (11.12)$$

$$d_t \Phi = -\bar{m}^{2xy} [d_x (u (\Phi - \Phi_s)^y) + d_y (v (\Phi - \Phi_s)^x)]. \quad (11.13)$$

Легко видеть, что примененные конечно-разностные приближения (11.11)—(11.13) не являются самыми прямыми. Однако при этом варианте достаточно точно аппроксимируется также моментная форма соответствующих дифференциальных уравнений, не приведенная здесь. Параметр Кориолиса f лучше всего задавать в тех же точках, в которых определяются u и v . Такое задание f удобно для сохранения большего места во внутренней памяти машины.

§ 5. Область интегрирования, боковые границы

В качестве примера рассмотрим сеточную область и граничные условия, используемые Группой численного предсказания погоды в Оффенбахе.

1. Область интегрирования

Область интегрирования имеет следующие особенности (рис. 11). Шаг сетки $d=381$ км на плоскости стереографической проекции при $\varphi_0=60^\circ$. Форма сетки — симметричный восьмиугольник; из-за симметрии полюс не совпадает с точкой сетки; наиболее южная точка расположена на 9° с. ш. Горизонтальные границы не являются расштатными, т. е. точки сетки на четных и нечетных шагах по времени относятся к одной и той же границе. Область покрыта 2080 точками сетки одного типа.

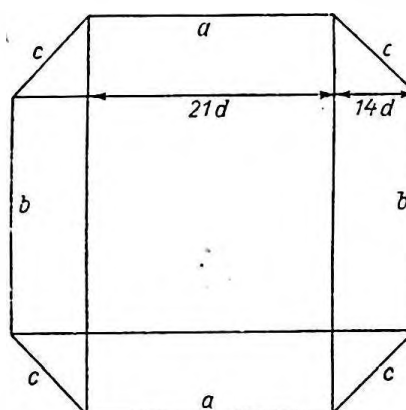


Рис. 11.

2. Боковые границы

Чтобы гарантировать замкнутую в физическом отношении систему и единственность решений, представим боковые границы в виде твердых стенок, где $u=0$ в граничных секторах b , $v=0$ в граничных секторах a .

Граничные секторы, обозначенные через c , включают только значения Φ (рис. 12).

Чтобы численно рассчитать тенденции зависимых переменных вдоль боковых границ или во внутренних точках сетки, расположенных вблизи боковых границ, необходимо:

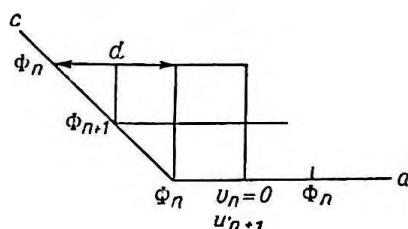


Рис. 12.

а) или переписать уравнения (11.11) — (11.13) для граничных и близких к граничным точек, используя операторы направленных внутрь односторонних разностей так, чтобы требовались только сеточные значения в пределах области интегрирования.

б) или определить сеточные значения вне области интегрирования таким образом, чтобы выполнялись условия жесткой границы.

Используем последний метод и определим значения во внешних точках сетки, предполагая, что зеркала, установленные вдоль граничных секторов, отражают скалярные величины и составляющие ветра, рассматриваемые в течение процесса отражения как векторы, из внутренних точек в соответствующие внешние точки сетки. Во время этого гипотетического процесса параметр Корнолиса меняет знак (рис. 13).

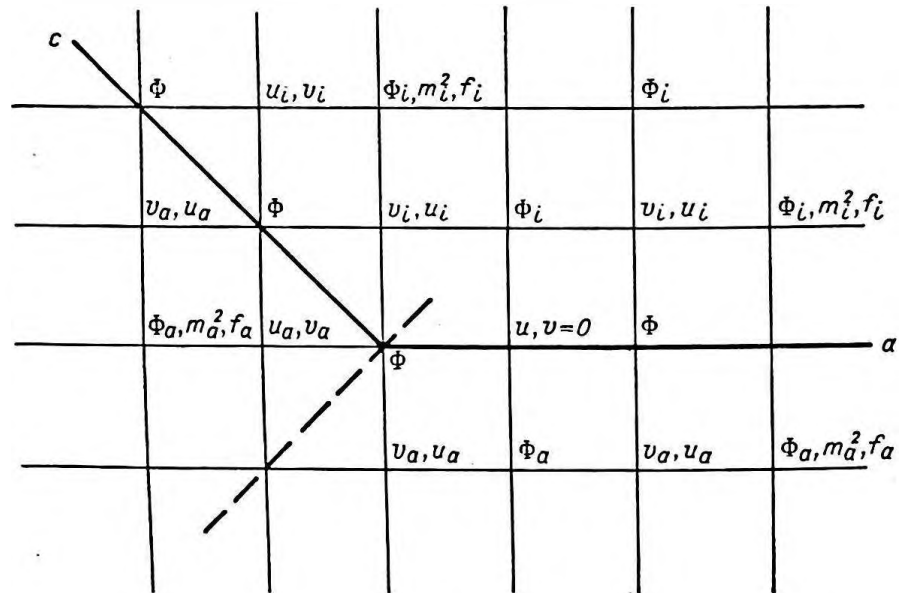


Рис. 13.

Рисунок 13 служит для определения отражения из граничного сектора a

$$\begin{aligned}\Phi_a &= \Phi_i, \quad m_a^2 = m_i^2, \quad f_a = -f_i, \\ u_a &= u_i, \quad v_a = -v_i\end{aligned}\quad (11.14a)$$

и отражения из граничного сектора c

$$\begin{aligned}\Phi_a &= \Phi_i, \quad m_a^2 = m_i^2, \quad f_a = -f_i, \\ u_a &= -v_i, \quad v_a = -u_i.\end{aligned}\quad (11.14b)$$

Эта предполагаемая процедура экстраполяции сеточных значений имитирует граничные условия твердых стенок и позволяет использовать конечно-разностные уравнения (11.11) — (11.13) для вычисления тенденций во всех внутренних и граничных точ-

ках сетки. Однако для последовательности при вычислении каждой тенденции рекомендуется использовать лишь те значения на внешних точках сетки, которые отражаются одним и тем же зеркалом.

Если тенденцию Φ нужно вычислять в восьми угловых точках, необходимо повторное приближение дивергентного члена $\nabla \cdot [V(\Phi - \Phi_s)]$ в уравнении (11.13).

Используя теорему Гаусса, получим следующее приближение в угловой точке рис. 14 (с логической модификацией в других угловых точках):

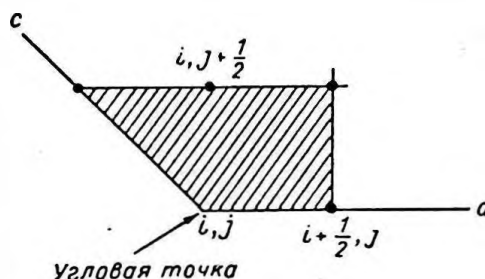


Рис. 14.

$$\nabla \cdot (V\psi)_{i,j} \approx \frac{4}{3d} \left\{ 2(\bar{\psi}^x v)_{i,j+\frac{1}{2}} + \psi_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} u_{i+\frac{1}{2},j} \right\}. \quad (11.15)$$

§ 6. Параметры модели

Рассмотренную баротропную модель можно применять для прогноза AT_{500} , отождествляя ветер модели V с ветром на уровне 500 мб и связывая линейно геопотенциал модели Φ с геопотенциалом изобарической поверхности 500 мб:

$$\Phi_{\text{модели}} = \Phi_{500 \text{ мб}} - \text{const.}$$

Шаг сетки $d = 381$ км, шаг по времени $\Delta t = 7,5$ мин.

Коэффициент диффузии

$$A = \frac{d^2}{1536} (\text{час})^{-1}.$$

Численное значение A взято из предположения, что начальное возмущение с самыми короткими длинами волн $L_x = 2d$, $L_y = 2d$ уменьшается в течение восьми дней до e^{-1} своей первоначальной амплитуды только вследствие диффузии.

Начальные данные u , v получаются из заданных вначале значений Φ путем решения уравнения баланса, выведенного соответственно из уравнений (11.11) и (11.12).

ГЛАВА 12

ПРИМЕР КОНЕЧНО-РАЗНОСТНОЙ АППРОКСИМАЦИИ БАРОКЛИННЫХ ПОЛНЫХ УРАВНЕНИЙ

Опыт оперативной работы с бароклиными моделями, основанными на решении полных уравнений с использованием фактических данных, является довольно бедным. Бароклинные сис-

темы полных уравнений более чувствительны к изменениям конечно-разностной схемы, чем баротропные варианты. Дальнейшие усилия должны быть направлены на разработку методики аппроксимации вертикальных производных, на физически более обоснованное включение операторов осреднения и на осуществление более тщательного контроля эффектов сохранения количества движения, энергии и тепла.

Однако в последние годы выполнено большое количество экспериментов с различными вариантами бароклинических моделей на основе фактических или идеализированных данных, которые ясно показывают, что бароклинические полные уравнения

а) позволяют производить интегрирование на продолжительные периоды времени (эффекты вычислительной неустойчивости не возникают);

б) следует предпочесть при количественном исследовании процессов общей циркуляции с включением источников тепла и количества движения;

в) могут детально воспроизвести при достаточно высоком вертикальном и горизонтальном разрешениях сетки характерные черты развития атмосферных процессов, наблюдаемые на ежедневных картах погоды, например, циклогенез, фронтогенез, окклюзирование, образование новых возмущений и т. д.

Далее на примере простой бароклинической модели мы обсудим особенности различных испытанных систем конечно-разностных полных уравнений.

Ниже рассмотрим специфическую модель конечно-разностных бароклинических полных уравнений, которая испытывается Группой численного предсказания погоды в Оффенбахе. Эту модель выведем из прототипов уравнений, сформулированных в главах 8 и 10, аналогично выводу баротропных систем, рассмотренному в главе 11.

§ 1. Бароклинические полные дифференциальные уравнения

Будем отталкиваться от бароклинических уравнений (8.5) — (8.11) или (10.1) — (10.9) и введем формально из соображений симметрии приведенную вертикальную скорость

$$S = \frac{s}{m^2} = \frac{\dot{z}}{m^2}. \quad (12.1)$$

С целью сглаживания в уравнения движения и в условии адиабатичности введем члены диффузии для переменных u ; v и θ , так же как и в баротропном варианте,

$$\frac{\partial}{\partial t} (u, v, \theta) = \dots + Am^2 \nabla^2 (u, v, \theta); \quad (12.2)$$

заменим приземное давление $p_s = \pi$ безразмерным давлением, приведенным к постоянному давлению $p_0 = 1000$ мб,

$$\Pi = \frac{\pi}{p_0}, \quad p_0 = 1000 \text{ мб.} \quad (12.3)$$

Учитывая (12.1)–(12.3), перепишем бароклинные полные уравнения в виде:

уравнения горизонтального движения (см. (10.7))

$$\begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial t} &= m^2 \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + S \frac{\partial u}{\partial z} - A \nabla^2 u \right) - \\ &- f v + \frac{u^2 + v^2}{2} \frac{\partial m^2}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} + R \tau^k \Pi^{k-1} \theta \frac{\partial \Pi}{\partial x}; \\ -\frac{\partial v}{\partial t} &= m^2 \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + S \frac{\partial v}{\partial z} - A \nabla^2 v \right) + f u + \\ &+ \frac{u^2 + v^2}{2} \frac{\partial m^2}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} + R \tau^k \Pi^{k-1} \theta \frac{\partial \Pi}{\partial y}; \end{aligned} \quad (12.4)$$

условие адиабатичности (см. (10.9))

$$-\frac{\partial \theta}{\partial t} = m^2 \left(u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} + S \frac{\partial \theta}{\partial z} - A \nabla^2 \theta \right); \quad (12.5)$$

уравнение неразрывности или уравнение тенденции, записанное с учетом граничных условий и разрешаемое относительно переменной Π (см. (10.8)),

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} = -m^2 \int_0^1 \left(\frac{\partial u \Pi}{\partial x} + \frac{\partial v \Pi}{\partial y} \right) dz. \quad (12.6)$$

диагностическое уравнение неразрывности, записанное с учетом граничных условий и разрешаемое относительно переменной S (см. (10.5)),

$$\frac{\partial S}{\partial \tau} = \frac{1}{\Pi} \left[\int_0^1 \left(\frac{\partial u \Pi}{\partial x} + \frac{\partial v \Pi}{\partial y} \right) dz - \left(\frac{\partial u \Pi}{\partial x} + \frac{\partial v \Pi}{\partial y} \right) \right]; \quad (12.7)$$

диагностическое гидростатическое уравнение (см. (10.1))

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = -R \Pi^k \tau^{k-1} \theta, \quad \Phi(\tau = 1) = \Phi_s. \quad (12.8)$$

Граничные условия (см. (8.9)):

$$S = 0 \quad \text{при} \quad \sigma = 0 \quad \text{и при} \quad \sigma = 1, \quad \text{когда} \quad \Phi = \Phi_s. \quad (12.9)$$

Здесь

$$k = \frac{R}{c_p} = 0,286. \quad (12.10)$$

§ 2. Конечно-разностная сетка

1. Горизонтальное разрешение сетки

Будем использовать горизонтальную сетку, указанную в главе 11, § 2, дополнив ее заданием относительного положения точек, в которых определяются новые переменные S , θ и Π , не входящие в уравнения баротропной модели (рис. 15). m^2 и Φ_s

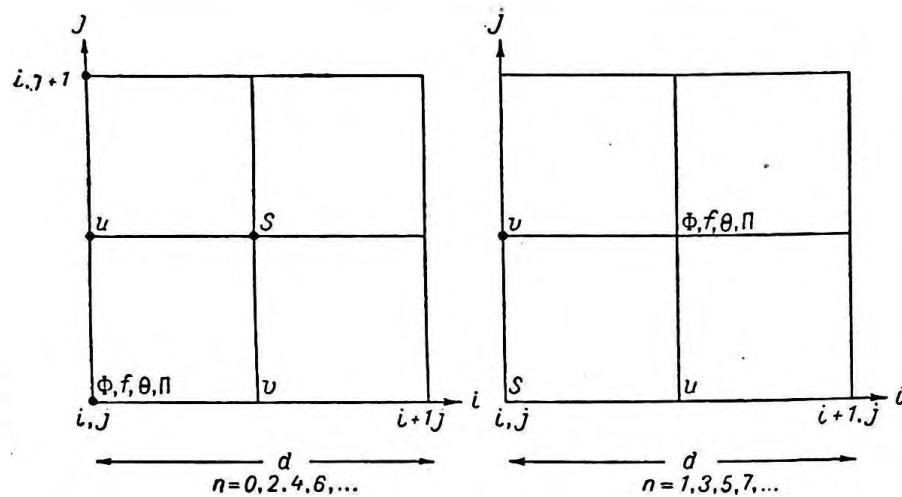


Рис. 15.

задаются в тех точках сетки, где задается f . Согласно приведенной выше решетке, тенденции $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$, $\frac{\partial \theta}{\partial t}$, $\frac{\partial \Pi}{\partial t}$ необходимо рассчитывать в тех точках сетки в момент n , в которых аргументы тенденций u , v , θ , Π определяются соответственно на предыдущем $(n-1)$ -м или последующем $(n+1)$ -м шагах по времени.

2. Вертикальное разрешение сетки

Вертикальная координата σ ($0 \leq \sigma \leq 1$) разрешается с шагом $\Delta\sigma = 0,1$. При вертикальном разрешении мы не используем расштанную сетку, а определяем на каждом шаге по времени все переменные u , v , Π , θ , Φ , зависящие от вертикальной координаты, на одном и том же уровне $\sigma = \text{const}$.

Чтобы различать уровни $\sigma = \text{const}$, будем использовать индекс l , отсчитывающий число шагов сетки $\Delta\sigma$ по вертикали. Часть переменных определяется для четных, а часть — для нечетных значений l , как это видно из рис. 16.

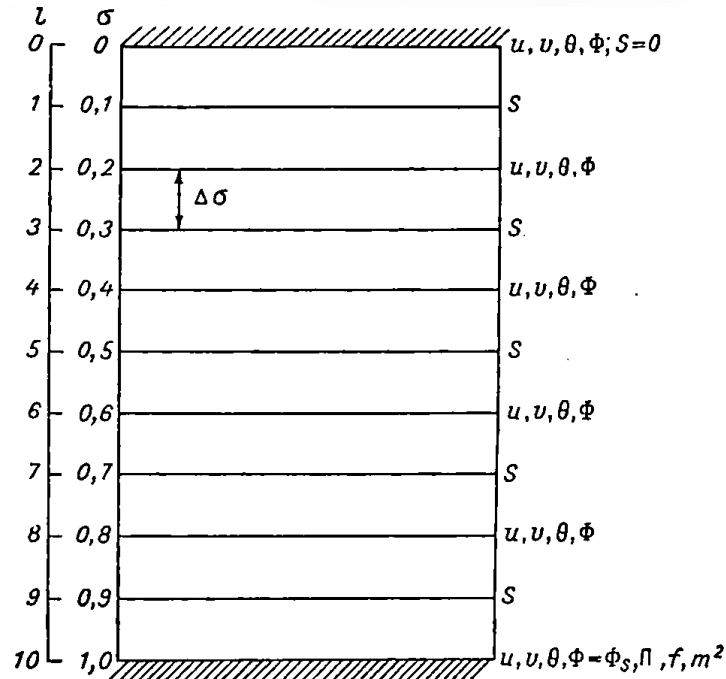


Рис. 16.

Заметим, что u, v, θ, Φ определяются на уровнях с четным l ; S определяется на уровнях с нечетным l , а Φ_s, Π, f, m^2 не зависят от σ .

§ 3. Определение конечно-разностных операторов дифференцирования, интегрирования и осреднения

Сохраним конечно-разностные операторы и операторы осреднения, уже определенные в виде (11.6) — (11.10) в главе 11, дополнив их следующими операторами, аппроксимирующими дифференцирование, интегрирование и осреднение относительно вертикальной координаты σ , где ψ означает любую из используемых переменных:

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} \right|_l \approx d_\sigma \psi \Big|_l = \frac{1}{2\Delta\sigma} (\psi_{l+1} - \psi_{l-1}); \quad (12.11)$$

$$\int_{\sigma=0}^{\sigma=1} \psi d\sigma \approx \Sigma \psi = \Delta\sigma (\psi_{l=0} + 2\psi_{l=2} + 2\psi_{l=4} + 2\psi_{l=6} + 2\psi_{l=8} + \psi_{l=10}); \quad (12.12)$$

$$\bar{\psi}_l \equiv \frac{1}{2} (\psi_{l+1} + \psi_{l-1}); \quad i, j, n \text{ фиксированные.} \quad (12.13)$$

§ 4. Конечно-разностная система бароклинных полных уравнений

Используя операторы конечных разностей, интегралы и осреднения, полученные в предыдущем § 3 и в § 3 главы 11, теперь можно аппроксимировать дифференциальные уравнения (12.4)–(12.8) соответствующими разностными уравнениями, согласно размещению рассматриваемой сетки. Будем использовать следующие определения:

уравнения движения (см. (12.4))

$$\begin{aligned} -d_t u = \overline{m^2}^x [\bar{u}^{xy} d_x \bar{u}^y + \bar{v}^{xy} d_y \bar{u}^x + (\overline{S^y d_x \bar{u}})^{xy} - A \Delta u] + \\ + \frac{1}{2} [(\bar{u}^{xy})^2 + (\bar{v}^{xy})^2] d_x m^2 - \bar{f}^x v + d_x \Phi + R \tau^k (\overline{\Pi^{k-1} \theta})^x d_x \Pi; \end{aligned} \quad (12.14)$$

$$\begin{aligned} -d_t v = \overline{m^2}^y [\bar{u}^{xy} d_x \bar{v}^y + \bar{v}^{xy} d_y \bar{v}^x + (\overline{S^x d_y \bar{v}})^{xy} - A \Delta v] + \\ + \frac{1}{2} [(\bar{u}^{xy})^2 + (\bar{v}^{xy})^2] d_y m^2 + \bar{f}^y u + d_y \Phi + R \tau^k (\overline{\Pi^{k-1} \theta})^y d_y \Pi; \end{aligned} \quad (12.15)$$

условие адиабатичности (см. (12.5))

$$-d_t \theta = \overline{m^2}^{xy} [\bar{u}^x d_x \bar{\theta}^y + \bar{v}^y d_y \bar{\theta}^x + (\overline{S d_x \bar{\theta}^{xy}}) - A \Delta \theta], \quad (12.16)$$

уравнение тенденции (см. (12.6))

$$d_t \Pi = -\overline{m^2}^{xy} \sum (d_x (u \bar{\Pi}^y) + d_y (v \bar{\Pi}^x)) \quad (12.17)$$

диагностическое уравнение неразрывности (см. (12.7))

$$\begin{aligned} d_t S = \frac{1}{\overline{\Pi}^{xy}} [\sum (d_x (u \bar{\Pi}^y) + d_y (v \bar{\Pi}^x)) - \\ - d_x (u \bar{\Pi}^y) - d_y (v \bar{\Pi}^x)]; \end{aligned} \quad (12.18)$$

диагностическое гидростатическое уравнение (см. (12.8))

$$d_t \Phi = -R \Pi^k \overline{\tau^{k-1} \theta}, \quad (12.19)$$

с граничным значением

$$\Phi_{k=10} = \Phi_s.$$

Граничные условия:

$$S = 0 \quad \text{при} \quad l = 0 \text{ и } l = 10, \quad \text{где} \quad \Phi = \Phi_s. \quad (12.20)$$

§ 5. Область интегрирования, боковые границы

Формулировки и предположения, сделанные в § 5 главы 11, в которой рассматривается баротропная модель, могут быть логически перенесены также на полную бароклинную модель, аппроксимируемую конечно-разностным аналогом.

Чтобы вычислить члены типа $\overline{Sd_{\frac{1}{2}}\psi}$ (где ψ соответственно u, v, θ) при $\sigma=0, \sigma=1$ или при $l=0, l=10$, мы отображаем значения $Sd_{\frac{1}{2}}\psi$, определенные на уровнях $l=1$ и $l=9$, соответственно на уровнях $l=-1$ и $l=11$ без изменения знака этих членов. Другими словами значения $\overline{Sd_{\frac{1}{2}}\psi}$ на уровнях $l=0$ и $l=10$ заменяются соответственно значениями $Sd_{\frac{1}{2}}\psi$ на уровнях $l=1$ или $l=9$.

ГЛАВА 13

ПРОБЛЕМА ЗАДАНИЯ НАЧАЛЬНЫХ ДАННЫХ. ЛИНЕЙНАЯ ВОЛНОВАЯ ТЕОРИЯ

§ 1. Характерные особенности системы полных уравнений по сравнению с фильтрованными уравнениями

Для более детального понимания различия процессов, описываемых полными уравнениями и фильтрованными уравнениями, следует применить методы линейной волновой теории и рассмотреть аналитическое решение упрощенного линейризованного варианта полных уравнений. В последующих параграфах рассматривается частное решение линейризованной системы полных уравнений. Полученные при этом результаты позволяют высказать следующие общие замечания качественного характера относительно различий между полными и фильтрованными уравнениями, имеющие физическое и практическое значение.

1. Типы волн

Фильтрованные уравнения содержат только характерные метеорологические волны (как устойчивые, так и неустойчивые), которые связаны с перемещением и эволюцией наблюдаемых на ежедневных синоптических картах возмущений в полях давления и ветра. Эти волны будем называть волнами Россби. Они перемещаются со скоростью, сравнимой со скоростью ветра.

Решения полных уравнений, однако, наряду с волнами Россби содержат также волны других типов, не связанные непосредственно с синоптическими процессами и не представляю-

щие интереса для метеоролога, занимающегося предсказанием крупномасштабных явлений. Такие волны будем называть шумовыми. К ним относятся смешанные звуковые, гравитационные и инерционные волны, присутствующие в решении полных уравнений для баротропной атмосферы. Скорость шумовых волн порядка скорости звука, т. е. на порядок выше скорости волн Россби. Они распространяются по различным направлениям в горизонтальной плоскости и, накладываясь на волны Россби, могут замаскировать эффект последних, если не принять специальные меры для подавления их эффекта, например, путем соответствующей настройки начальных данных.

2. Начальные данные

Математическим следствием того факта, что полные уравнения содержат волны разных типов, является, в частности, то, что полные уравнения (подчиняющиеся гидростатическому соотношению) позволяют задавать как начальные значения распределения массы воздуха, например, через θ и Π (или Φ), так и поле ветра, и притом совершенно произвольным образом, причем далее эти переменные рассчитываются по независимым прогностическим уравнениям. Фильтрованные уравнения, однако, позволяют задавать в начальный момент произвольно только одно скалярное поле, например, поле массы с помощью переменной Φ или поле функции тока, отвечающей горизонтальной составляющей скорости ветра.

3. Универсальность

Благодаря большой общности полные уравнения могут применяться для изучения тех особых случаев эволюции в атмосфере, которые невозможно описать с помощью фильтрованных уравнений. К ним относятся, в частности, процессы взаимного приспособления, когда в начальный момент распределение масс и поле ветра в атмосфере далеки от обычно наблюдаемого состояния равновесия, например, если депрессия в поле масс совпадает с антициклонической областью в поле ветра. Изучение таких явлений, хотя и не характерных для практики ежедневных прогнозов, представляет теоретический интерес.

4. Точность физического описания

Предположим, что содержащийся в решении полных уравнений механизм волн Россби приводит к развитию атмосферных явлений как раз того типа, который мы хотим предсказывать. Будем далее считать фильтр шумов совершенным в том случае, если он исключает шумы, но сохраняет эффект волн Россби неизменным.

Однако все известные и применявшиеся до настоящего времени операции отфильтровывания так или иначе модифицируют, а потому искажают также и физику волн Россби. И, по-видимому, практически не существует оператора фильтрации, который бы полностью отфильтровывал шумы и одновременно полностью сохранял явления Россби.

Количественные различия между точным явлением Россби и тем, которое остается в фильтрованных системах, определенные с помощью линейной теории волн по разности фазовых скоростей, не существенны в случае баротропных моделей, но существенны при бароклинных моделях. Например, физическая неустойчивость и усиление амплитуд неустойчивых возмущений при прочих равных условиях в решениях полных уравнений меньше, чем в решениях фильтрованных систем.

Следовательно, присутствие шумовых волн является неизбежным злом, возникающим всегда, когда мы хотим предсказывать действие механизма Россби в неискаженном виде.

5. Объем вычислений

Вследствие больших скоростей распространения возмущений, содержащихся в решениях полных уравнений, для обеспечения вычислительной устойчивости последних необходимо использовать шаг по времени, на порядок меньший, чем шаг при решении фильтрованных уравнений. Следовательно, необходимое число шагов по времени при прогнозе на тот же срок оказывается примерно в 10 раз большим. Это дает основание думать, что затраты труда (машинного времени) на решение полных уравнений велики по сравнению с соответствующими затратами на решение фильтрованных уравнений, и, следовательно, полные уравнения «неэкономичны». Однако надо иметь в виду, что объем вычислений и, в частности, затраты машинного времени на один шаг по времени в случае полных уравнений значительно меньше, чем в случае фильтрованных уравнений. Уже отмечалось, что вычислительная процедура решения полных уравнений требует интегрирования по вертикальному направлению в основном только для выполнения диагностических расчетов; вычисление же тенденций здесь весьма просто, так как производная по времени в каждой данной точке сетки не зависит от значений этих производных в окружающих пунктах. Это прямо противоположно тому, что имеет место при решении фильтрованных уравнений, когда для расчета тенденций на каждом шаге по времени необходимо решать сложную и требующую много времени краевую задачу.

Далее, следует иметь в виду, что в случае полных уравнений объем вычислений на каждом шаге линейно возрастает при увеличении числа точек сетки, т. е. при увеличении простран-

ственного разрешения, и что полные уравнения обеспечивают возможность непосредственного описания явления Россби. В то же время объем вычислений при решении фильтрованных уравнений возрастает с увеличением разрешения пропорционально более высокой степени числа точек вследствие необходимости решать краевую задачу. Кроме того, как будет показано ниже, в случае фильтрованных уравнений повышение точности описания механизма Россби требует дополнительных и притом значительных усилий вычислительного характера. Поэтому по мере дальнейшей детализации в описании явления Россби решение фильтрованных уравнений довольно скоро становится неэкономичным по сравнению с непосредственным решением полных уравнений.

6. Точность задания начальных данных

Когда метеорологами впервые была предпринята попытка интегрировать полные уравнения, немедленно были высказаны возражения. Они состояли в том, что в этих уравнениях изменения во времени определяются как малые разности больших величин, а именно как разности между силой Кориолиса и силой барического градиента, и что эти разности нельзя считать репрезентативными и достаточно точными хотя бы потому, что величина их имеет тот же порядок, что и ошибки наблюдений, содержащиеся в указанных больших величинах.

Для того чтобы отвести это возражение, достаточно просто попытаться интегрировать полные уравнения. Получаемые при этом результаты свидетельствуют о том, что даже большие ошибки в абсолютных величинах начальных значений действующих сил не приносят вреда при практических прогнозах и не искажают существенным образом явление Россби, если эти ошибки (неизбежные вследствие неточности измерений) малы по сравнению с компонентами самих сил. Реальная атмосфера благодаря факту близости ветра к геострофическому как раз и отвечает этому условию. Это обеспечивает возможность решать полные уравнения уже при современном уровне точности наблюдений.

Допуская некоторые вполне оправданные упрощения, можно следующим образом описать физическое содержание решений полных уравнений.

Если разность между силой Кориолиса и силой барического градиента мала, то физика волн Россби будет определена почти полностью уже одним (любым) из этих двух компонентов. Иными словами, для прогноза явлений Россби достаточно знать с необходимой точностью только один из главных компонентов (или поле ветра, или поле давления). Только шумы оказываются чувствительными к разностям между главными чле-

нами, и в том случае, когда их предсказывают, необходимо достаточно точно задать начальные значения указанных разностей.

На практике, однако, шумовые волны должны быть исключены и их поведение не предсказывают, так как они не представляют практического интереса и только искажают эффект Россби. Для того чтобы предсказывать с помощью полных уравнений только волны Россби, необходимо с помощью специальных диагностических соотношений соответствующим образом согласовать начальные данные.

Задача отыскания и построения методов решения таких диагностических дифференциальных уравнений, которые бы воздействовали только на начальные данные и описывали бы движение, полностью свободное от шумов, пока все еще не решена полностью. Она остается решающей проблемой в теории метеорологического диагноза поскольку, по-видимому, реальная атмосфера находится в состоянии колебательного движения, скорее, около некоторого определенного, свободного от шумов состояния, чем около равновесного состояния при отсутствии вынуждающих сил.

7. Конечно-разностные схемы

Опыт использования полных уравнений указывает на то, что численные решения этих уравнений по сравнению с решениями фильтрованных уравнений более чувствительны к изменению конечно-разностных схем и структуры сетки точек. По-видимому, это связано с тем, что полные уравнения зависят от большего числа переменных, включают больше прогностических уравнений и описывают более разнообразные физические явления, и поэтому имеется большая вероятность возникновения и развития нереальных вычислительных эффектов, источники которых трудно локализовать. Поэтому для полных уравнений оказывается труднее построить экономичную и согласованную конечно-разностную схему, обеспечивающую наибольшее снижение ошибок аппроксимации, чем для фильтрованных уравнений. При этом, чтобы предотвратить накопление ошибок аппроксимации в решениях полных уравнений, часто используются операторы сглаживания и/или диффузии.

Для того чтобы попытаться аналитическим путем обосновать утверждения, высказанные в этом параграфе, далее рассмотрим линеаризованный вариант упрощенной системы баротропных уравнений из главы II, которыми описывается поведение однородной и несжимаемой жидкости со свободной поверхностью наверху. Решения этой системы содержат как волны Россби, так и быстро перемещающиеся внешние гравитационные волны, являющиеся частным случаем шумовых волн.

Рассмотрим вопрос о том, каким диагностическим уравнениям должны подчиняться начальные данные для того, чтобы в решениях отсутствовали шумовые эффекты. Эти диагностические уравнения могут применяться:

а) как средство для исключения шумовых волн при использовании полных уравнений и в таком случае применяются только к полям начальных данных;

б) как часть системы уравнений и заменять собой соответствующее число прогностических полных уравнений, образуя, таким образом, систему фильтрованных уравнений, которая в полной мере сохраняет физику волн Россби. Такое построение фильтрованной системы оправдывается тем, что условия согласованности начальных данных, полностью исключающие шумы, будут выполняться также и в течение всего времени интегрирования, так что система уравнений будет действительно фильтрующей.

Таким образом, проблема нахождения условий, гарантирующих отсутствие шумов в решении полных уравнений, непосредственно связана с проблемой построения эффективной системы фильтрованных уравнений.

В общем случае невозможно указать диагностические уравнения, полностью отфильтровывающие шумы, и поэтому нам придется довольствоваться некоторым приближением.

§ 2. Линеаризированные полные уравнения для баротропной модели

Обратимся к системе баротропных уравнений (11.3) — (11.5) из главы 11 и положим в них

$$m^2 = 1, \quad f = \text{const}, \quad \Phi_s = \text{const}, \quad A = 0.$$

Тогда мы приходим к упрощенной системе уравнений баротропной модели, отвечающей метрике декартовой системы координат:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - f v &= - \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + f u &= - \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + u \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \Phi \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (13.1)$$

Для линеаризации системы (13.1) определяем основное состояние следующим образом:

$$\bar{u} = \text{const}, \quad \bar{v} = 0, \quad \bar{\Phi} = \bar{\Phi}(y), \quad (13.2)$$

причем $\bar{u} = -\frac{1}{f} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y}.$

В качестве дальнейшего упрощения принимаем, что возмущения $u' = u - \bar{u}$, $v' = v$ и $\Phi' = \Phi - \bar{\Phi}$ не зависят от y :

$$\frac{\partial u'}{\partial y} = \frac{\partial v'}{\partial y} = \frac{\partial \Phi'}{\partial y} = 0. \quad (13.3)$$

Тогда с учетом (13.2) и (13.3) линеаризованный вариант системы (13.1) получается в виде

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) u' - f v' + \frac{\partial \Phi'}{\partial x} &= 0; \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) v' + f u' &= 0; \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) \Phi' + \bar{\Phi} \frac{\partial u'}{\partial x} - f \bar{u} v' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (13.4)$$

§ 3. Характеристическое уравнение

Как известно, решение системы линейных уравнений может быть получено суперпозицией частных решений. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать только одну синусоидальную волну длиной L с волновым числом

$$k = \frac{2\pi}{L},$$

причем распространение этой волны определяется фазовой скоростью c (которая пока еще не определена) или относительной фазовой скоростью

$$d = \bar{u} - c. \quad (13.5)$$

Волновое решение системы (13.4) может быть записано в виде

$$\left. \begin{aligned} u' &= u^* E; \\ v' &= v^* E; \\ \Phi' &= \Phi^* E, \end{aligned} \right\} \quad (13.6)$$

где введено обозначение

$$E = E(x, t) = e^{ik(x-ct)}, \quad (13.7)$$

причем амплитуды u^* , v^* , Φ^* и фазовая скорость c могут быть как действительными, так и комплексными.

Подставляя (13.6) в (13.4), получаем однородную систему уравнений для определения неизвестных амплитуд u^* , v^* и Φ^*

$$\left. \begin{aligned} ikdu^* &= fv^* - ik\Phi^*, \\ ikdv^* &= -fu^*, \\ ikd\Phi^* &= -ik\bar{\Phi}u^* + f\bar{u}v^* \end{aligned} \right\} \quad (13.8)$$

или, применяя матричную форму записи,

$$ikd \begin{pmatrix} u^* \\ v^* \\ \Phi^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & f & -ik \\ -f & 0 & 0 \\ -ik\bar{\Phi} & f\bar{u} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^* \\ v^* \\ \Phi^* \end{pmatrix}. \quad (13.8)$$

Система (13.8) имеет нетривиальное решение только в том случае, если d является собственным значением матрицы, или, что то же, d является корнем следующего характеристического уравнения:

$$P(d) \equiv d^3 - \left(\bar{\Phi} + \frac{f^2}{k^2}\right)d + \bar{u} \frac{f^2}{k^2} = 0. \quad (13.9)$$

В том случае, если $u < \sqrt{\bar{\Phi}}$, существуют три действительных корня этого уравнения d , которые мы занумеруем в порядке возрастания их абсолютных величин:

$$|d_1| < |d_2| < |d_3|. \quad (13.10)$$

Оправданное с физической точки зрения допущение приводит к неравенствам

$$|d_1| \ll |d_2| \quad \text{и} \quad |d_1| \ll |d_3|.$$

При этом получаются следующие приближенные выражения для корней d уравнения (13.9):

$$d_1 \approx \frac{\bar{u}}{1 + \bar{\Phi} \frac{k^2}{f^2}}; \quad c_1 = \bar{u} - d_1 \approx \frac{\bar{u}}{1 + \frac{f^2}{k^2} \frac{1}{\bar{\Phi}}}. \quad (13.11)$$

Здесь d_1 и c_1 представляют фазовую скорость волн Россби.¹ Далее,

$$\left. \begin{aligned} d_2 &\approx -\frac{d_1}{2} + \sqrt{\bar{\Phi} + \frac{f^2}{k^2}}, \\ d_3 &\approx -\frac{d_1}{2} - \sqrt{\bar{\Phi} + \frac{f^2}{k^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (13.12)$$

Причем d_2 и d_3 (и соответственно $c_2 = \bar{u} - d_2$ и $c_3 = \bar{u} - d_3$) представляют фазовые скорости шумовых волн.

¹ В случае $f = \text{const}$, но при $\frac{df}{dy} = \beta = \text{const} \neq 0$, мы получили бы вместо (13.11) следующие выражения для фазовой скорости волн Россби:

$$d_1 \approx \frac{\bar{u} + \frac{3\bar{\Phi}}{f^2}}{1 + \bar{\Phi} \frac{k^2}{f^2}}; \quad c_1 \approx \frac{\bar{u} - \frac{3}{k^2}}{1 + \frac{f^2}{k^2} \frac{1}{\bar{\Phi}}}.$$

§ 3. Общее решение для одной волны

Для дальнейшего рассмотрения удобно выразить общее решение системы (13.4) с помощью собственных решений, отвечающих трем собственным значениям (13.8) d_1, d_2, d_3 или d_j , причем $j=1, 2, 3$.

Амплитуды собственных решений u_j, v_j, Φ_j мы найдем, подставляя корни d_j в (13.8) и определяя u_j, v_j, Φ_j через находящиеся при этом соответствующие амплитуды u^*, v^*, Φ^* .

Так как система (13.8) однородна, то ее собственные значения определены с точностью до некоторого общего множителя и только два уравнения из (13.8) необходимы для определения амплитуд собственных решений, например,

$$ikd_j u_j = f v_j - ik \Phi_j$$

и

$$ikd_j v_j = -f u_j.$$

Отсюда следует, что

$$v_j = \frac{if}{k} \frac{u_j}{d_j} \quad \text{и} \quad \Phi_j = \frac{f^2}{k^2} \frac{u_j}{d_j} - d_j u_j,$$

или, нормируя решения так, чтобы $u_j = d_j$, имеем

$$\left. \begin{aligned} u_j &= d_j, \\ v_j &= i \frac{f}{k}, \\ \Phi_j &= \frac{f^2}{k^2} - d_j^2. \end{aligned} \right\} \quad (13.13)$$

Теперь мы можем записать общее решение для рассматриваемой волны через эти три собственных вектора в следующем виде:

$$\begin{aligned} u'(x, t) &= a_1 u_1 E_1 + a_2 u_2 E_2 + a_3 u_3 E_3, \\ v'(x, t) &= a_1 v_1 E_1 + a_2 v_2 E_2 + a_3 v_3 E_3, \\ \Phi'(x, t) &= a_1 \Phi_1 E_1 + a_2 \Phi_2 E_2 + a_3 \Phi_3 E_3, \end{aligned}$$

или

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \\ \Phi' \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \Phi_1 \end{pmatrix} E_1 + a_2 \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} E_2 + a_3 \begin{pmatrix} u_3 \\ v_3 \\ \Phi_3 \end{pmatrix} E_3. \quad (13.14)$$

Здесь a_1, a_2, a_3 — произвольные постоянные интегрирования, а E_1, E_2, E_3 определены так:

$$E_j(x, t) = e^{ik(x - c_j t)}; \quad c_j = \bar{u} - d_j \quad (j = 1, 2, 3)$$

(см. (13.5) и (13.7)).

Решение (13.14) показывает, что любая заданная в начальный момент волна в поле переменных u' , v' , Φ' расщепляется со временем на три волны, перемещающиеся с различными скоростями. Из них волну с E_1 , имеющую скорость, близкую к $\bar{u}$, мы назовем волной Россби, а две другие волны с E_2 и E_3 — шумовыми волнами. Последние распространяются в противоположных направлениях, причем их фазовая скорость имеет порядок величины

$$\text{mag}|c_{2,3}| = \sqrt{\Phi + \frac{f^2}{k^2}}.$$

Эти волны включают смешанные внешние гравитационно-инерционные волны.

Собственные функции u_j , v_j , Φ_j определяются характеристиками волн и параметрами дифференциальных уравнений (13.13), тогда как коэффициенты a_1 , a_2 , a_3 суть произвольные постоянные, означающие, что в начальный момент мы можем произвольно задать амплитуды и фазы трех различных волн, относящихся к u' , v' , Φ' .

§ 5. Проблема задания начальных данных

Эта проблема включает решение вопроса о том, каким соотношениям должны быть подчинены начальные данные для того, чтобы решения не содержали шумовых волн, или в общем случае, что представляют собой три типа волн с фазовыми скоростями c_1 , c_2 , c_3 и каков их характер в зависимости от начальных данных?

Легко ответить на эти вопросы, если воспользоваться общим решением (13.14). Для этого рассмотрим соотношения (13.14) для момента $t=0$, полагая

$$\left. \begin{aligned} u'(x, t=0) &= u_0 e^{ikx}, \\ v'(x, t=0) &= v_0 e^{ikx}, \\ \Phi'(x, t=0) &= \Phi_0 e^{ikx}, \end{aligned} \right\} \quad (13.15)$$

где u_0 , v_0 , Φ_0 — начальные амплитуды и фазы. Тогда, полагая $E_j = e^{ikx}$, находим из (13.14) и (13.15) для $t=0$:

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3, \\ v_0 &= a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3, \\ \Phi_0 &= a_1 \Phi_1 + a_2 \Phi_2 + a_3 \Phi_3, \end{aligned} \right\} \quad (13.16)$$

или

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \Phi_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}.$$

Для того чтобы получить ответ на первый вопрос, потребуем обращение в нуль амплитуд шумовых волн, т. е.

$$a_2 = a_3 = 0 \quad (13.17)$$

Тогда с помощью (13.16) и (13.17) находим искомые диагностические соотношения для u_0, v_0, Φ_0 :

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \Phi_0 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \Phi_1 \end{pmatrix} \quad (13.18)$$

или, исключая a_1 ,

$$u_0 = \frac{u_1}{\Phi_1} \Phi_0 \quad \text{и} \quad v_0 = \frac{v_1}{\Phi_1} \Phi_0. \quad (13.19)$$

Отсюда следует, что для обеспечения свободного от шумов движения вектор амплитуды начальных данных с компонентами u_0, v_0, Φ_0 должен быть пропорционален собственному вектору амплитуд волны Россби с компонентами u_1, v_1, Φ_1 .

Вспоминая (13.13), перепишем (13.19) в явном виде:

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{d_1}{\frac{f^2}{k^2} - d_1^2} \Phi_0; \\ v_0 &= \frac{\frac{if}{k}}{\frac{f^2}{k^2} - d_1^2} \Phi_0 = \frac{\frac{ik}{f}}{1 - d_1^2 \frac{k^2}{f^2}} \Phi_0. \end{aligned} \quad (13.20)$$

Сравнивая эти диагностические соотношения для движения, свободного от шумов, с геострофическими соотношениями, имеющими в рассматриваемом случае вид

$$\begin{aligned} (u_0)_r &= 0, \\ (v_0)_r &= \frac{ik}{f} \Phi_0, \end{aligned} \quad (13.21)$$

можем утверждать следующее.

Существуют условия для начальных данных, гарантирующие движение без шумов. Эти условия, однако, не совпадают с условием геострофического равновесия, а именно

а) бездивергентная часть скорости ветра при свободном от шумов движении, представляемая меридиональной компонентной v , находится в фазе с геострофическим ветром, но превосходит его по амплитуде;

б) дивергентная часть скорости ветра при движении без шумов, представляемая зональной компонентой u , не равна нулю, в то время как геострофический ветер бездивергентен.

Само собой очевидно, что соотношения (13.19) и (13.20), будучи заданы априори при $t=0$, должны выполняться и в течение всего последующего времени, а потому они могут заменить собой два из трех прогностических уравнений (13.8), определяя, таким образом, в явном виде систему фильтрованных уравнений, состоящую из двух диагностических уравнений и одного прогностического и сохраняющую неизменной фазовую скорость d_1 (или c_1) волны Россби.

Для того чтобы получить ответ на второй вопрос, мы разрешим уравнения (13.16) относительно постоянных интегрирования a_j . Привлекая еще характеристическое уравнение (13.9)

$$P(d_j) \equiv d_j^3 - \left(\bar{\Phi} + \frac{f^2}{k^2}\right) d_j + \bar{u} \frac{f^2}{k^2} = 0, \quad (13.22)$$

имеем

$$a_j = \frac{1}{P_j'} \left[d_j u_0 - \frac{ik}{f} (d_j^2 - \bar{\Phi}) v_0 - \bar{\Phi}_0 \right], \quad (13.23)$$

где P_j' определено так:

$$P_j' \equiv \frac{dP_j}{d(d_j)} = 3d_j^2 - \left(\bar{\Phi} + \frac{f^2}{k^2}\right). \quad (13.24)$$

Соотношения (13.23) позволяют вычислять коэффициенты a_j для трех различных волн, т. е. для волны Россби и для двух шумовых волн, при любых заданных начальных значениях u_0 , v_0 , Φ_0 и вместе с тем они проясняют некоторые характерные особенности действия полных уравнений применительно к рассматриваемому простому примеру.

§ 6. Случай геострофического равновесия в начальный момент

Теперь мы рассмотрим тот частный случай начальных данных, когда поля ветра и давления в начальный момент находятся в геострофическом равновесии. Для заданного поля геопотенциала Φ'

$$\Phi'(x, t=0) = \varphi_0 e^{ikx}$$

с компонентами геострофического ветра

$$u' = -\frac{1}{f} \frac{\partial \Phi'}{\partial y} = 0;$$

$$v' = \frac{1}{f} \frac{\partial \Phi'}{\partial x} = \frac{ik}{f} \varphi_0 e^{ikx}$$

находим амплитуды геострофического движения в виде

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= 0; \\ v_0 &= \frac{ik}{f} \varphi_0; \\ \Phi_0 &= \varphi_0. \end{aligned} \right\} \quad (13.25)$$

Подставляя эти геострофические амплитуды в (13.23), получаем коэффициенты a_j в виде

$$a_j = \frac{\varphi_0}{P'_j} \left[\frac{k^2}{f^2} (d_j^2 - \bar{\Phi}) - 1 \right].$$

Привлекая еще характеристическое уравнение (13.22), перепишем в виде

$$\frac{k^2}{f^2} (d_j^2 - \bar{\Phi}) - 1 = - \frac{\bar{u}}{d_j}, \quad (13.26)$$

представим a_j в иной форме:

$$a_j = - \frac{\varphi_0 \bar{u}}{P'_j d_j}.$$

Отсюда находим, что в случае начального геострофического равновесия отношение коэффициентов a_j имеет вид

$$a_1 : a_2 : a_3 = \frac{1}{P'_1 d_1} : \frac{1}{P'_2 d_2} : \frac{1}{P'_3 d_3}$$

или

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{P'_1 d_1}{P'_2 d_2}; \quad \frac{a_3}{a_1} = \frac{P'_1 d_1}{P'_3 d_3}. \quad (13.27)$$

Оценки фигурирующих здесь величин показывают, что

$$\left. \begin{aligned} \left| \frac{P'_1}{P'_2} \right| &\approx \left| \frac{P'_1}{P'_3} \right| \approx \frac{1}{2}; \\ |d_2| &\approx |d_3|; \\ \left| \frac{d_1}{d_2} \right| &\approx \left| \frac{d_1}{d_3} \right| \approx 10^{-2} \text{ или меньше, т. е.} \\ \left| \frac{a_2}{a_1} \right| &\approx \left| \frac{a_3}{a_1} \right| \ll 1. \end{aligned} \right\} \quad (13.28)$$

Для того чтобы оценить отношение вкладов шумовых волн к волнам Россби, мы должны найти отношение самих амплитуд этих волн, фигурирующих в общем решении (13.14), а не только отношение коэффициентов a_j .

С помощью (13.13) находим

$$\begin{aligned} a_1 u_1 : a_2 u_2 : a_3 u_3 &= a_1 d_1 : a_2 d_2 : a_3 d_3; \\ a_1 v_1 : a_2 v_2 : a_3 v_3 &= a_1 : a_2 : a_3; \\ a_1 \Phi_1 : a_2 \Phi_2 : a_3 \Phi_3 &= \\ &= a_1 \left(\frac{f^2}{k^2} - d_1^2 \right) : a_2 \left(\frac{f^2}{k^2} - d_2^2 \right) : a_3 \left(\frac{f^2}{k^2} - d_3^2 \right). \end{aligned}$$

И в случае начального геострофического равновесия вследствие (13.27) и (13.28) имеем

$$\left| \frac{a_2 u_2}{a_1 u_1} \right| \approx \left| \frac{a_3 u_3}{a_1 u_1} \right| \approx \frac{1}{2}; \quad (13.29)$$

$$\left| \frac{a_2 v_2}{a_1 v_1} \right| \approx \left| \frac{a_3 v_3}{a_1 v_1} \right| \approx \frac{1}{2} \left| \frac{d_1}{d_2} \right| \approx \frac{1}{2} \left| \frac{d_1}{d_3} \right| \approx 10^{-2} \text{ или меньше; } (13.30)$$

$$\left| \frac{a_2 \Phi_2}{a_1 \Phi_1} \right| \approx \left| \frac{a_3 \Phi_3}{a_1 \Phi_1} \right| \approx \frac{1}{2} \left| \frac{\frac{f^2}{k^2} - d_2^2}{\frac{f^2}{k^2} - d_1^2} \right| \approx \frac{1}{2} \left| \frac{\frac{f^2}{k^2} - d_3^2}{\frac{f^2}{k^2} - d_1^2} \right|. \quad (13.31)$$

Соотношения (13.29) и (13.30) позволяют высказать следующее утверждение.

Отправляясь от начального геострофического (или соленидального) условия для ветра, мы получим в решении шумовые волны соленидальной части скорости ветра (представленной здесь компонентой v) на порядок величины меньшими по амплитуде по сравнению с соответствующей волной Россби для v . Однако шумовые волны для дивергентной части ветра (представленной здесь компонентой u) имеют тот же порядок величины, что и соответствующая волна Россби для u . Для того чтобы подавить шумовые волны во всех переменных, необходимо использовать более точное условие для начальных данных, которое аппроксимирует движение без шумов лучше, чем геострофические соотношения.

Более точная оценка величин в (13.29), (13.30) и (13.31) показывает следующее. При задании начальных данных близкими к геострофическому равновесию, дивергентная часть ветра, а следовательно, и вертикальная скорость, оказываются теми переменными, которые особенно чувствительны к шумовым волнам в том смысле, что наибольшие амплитуды шумовых волн в решениях бывают присущи именно дивергентной части скорости ветра. Это последнее обстоятельство подтверждается опытом численных решений.

§ 7. Зависимость решения от начальных агеострофических отклонений

Для того чтобы показать в аналитическом виде, в какой мере различные типы волн реагируют на нарушение геострофического равновесия начального состояния, мы проанализируем тот случай, когда начальные значения u_0 , v_0 , Φ_0 слегка отклонены от условия геострофичности, а именно положим, что

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= 0, \\ v_0 &= \frac{ik}{f} \varphi_0, \\ \Phi_0 &= \varphi_0 + d\varphi_0 = (1 + \varepsilon) \varphi_0, \end{aligned} \right\} \quad (13.32)$$

причем $\varepsilon = \frac{d\varphi_0}{\varphi_0}$ будет мерой относительного агеострофического отклонения в поле геопотенциала Φ' (в процентах).

Используя эти начальные данные (13.32), по соотношению (13.23) с учетом (13.26) находим

$$a_j = \frac{\varphi_0}{P_j} \left[\frac{k^2}{f^2} (d_j^2 - \bar{\Phi}) - (1 + \varepsilon) \right] = - \frac{\varphi_0}{P_j} \left(\frac{\bar{u}}{d_j} + \varepsilon \right). \quad (13.33)$$

Для того чтобы установить зависимость коэффициентов a_j от агеострофических отклонений ε , продифференцируем (13.33) по ε при постоянном φ_0 и, полагая $\varepsilon = 0$ и $d\varepsilon = \varepsilon$, найдем

$$\frac{da_j}{a_j} = \frac{d_j}{\bar{u}} \varepsilon = \frac{d_j}{\bar{u}} \frac{d\varphi_0}{\varphi_0} \quad (13.34)$$

или

$$\begin{aligned} \frac{da_1}{a_1} &= \frac{d_1}{\bar{u}} \frac{d\varphi_0}{\varphi_0}; & \frac{da_2}{a_2} &= \frac{d_2}{\bar{u}} \frac{d\varphi_0}{\varphi_0}; \\ \frac{da_3}{a_3} &= \frac{d_3}{\bar{u}} \frac{d\varphi_0}{\varphi_0}. \end{aligned}$$

С учетом (13.11), (13.12) и (13.28) мы можем оценить коэффициенты при $\frac{d\varphi_0}{\varphi_0}$ в (13.34) и найдем, что

$$\left| \frac{d_1}{\bar{u}} \right| \ll 1 \ll \left| \frac{d_2}{\bar{u}} \right| \approx \left| \frac{d_3}{\bar{u}} \right|. \quad (13.35)$$

Соотношения (13.34) с учетом оценки (13.35) ясно показывают, что коэффициенты a_j и, следовательно, амплитуды для шумовых волн ($j=2; 3$) реагируют на начальные агеострофические отклонения гораздо сильнее, чем соответствующие величины для волн Россби. Это обстоятельство оправдывает выска-

занное в пункте 6 § 1 утверждение о том, что разности между силой Корнолиса и силой барического градиента, которые обычно бывают сравнимы с ошибками наблюдений, имеют существенное значение именно для шумовых волн, но почти не затрагивают волны Россби.

§ 8. Линейные диагностические дифференциальные уравнения для отфильтровывания шумов

В порядке логического продолжения проведенного рассмотрения и для получения наиболее общих выводов и результатов, пригодных для практического применения в численных прогнозах, сейчас мы будем искать условия отфильтровывания шумов уже не в виде соотношений между параметрами одиночной волны d , и k , а для более общего случая. А именно, мы будем строить фильтрующий оператор в форме дифференциальных уравнений.

Для этого мы могли бы, например, вернуться от соотношений (13.20) к дифференциальным уравнениям, заменив ik на $\frac{\partial}{\partial x}$ и d , по соотношению (13.11) или с помощью приближения более высокого порядка точности.

Однако следующие соображения позволяют применить более простой путь для решения рассматриваемой задачи.

Мы считаем (и попытаемся это проверить), что оба следующих уравнения, которым должны удовлетворять начальные данные, гарантируют исключение шумовых волн или в терминах уже рассмотренного примера — обеспечивают обращение в нуль коэффициентов a_2 и a_3 :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right)^n \left(\frac{\partial u'}{\partial x} \right) &= 0 \quad \text{при } t = 0; \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right)^{n+1} \left(\frac{\partial u'}{\partial x} \right) &= 0 \quad \text{при } t = 0. \end{aligned} \quad (13.36)$$

Более формально эти уравнения перепишем так:

$$\begin{aligned} Q^n D &= 0 \quad \text{при } t = 0; \\ Q^{n+1} D &= 0 \quad \text{при } t = 0, \end{aligned} \quad (13.37)$$

где

$$\left. \begin{aligned} Q &\equiv \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x}, \\ D &\equiv \frac{\partial u'}{\partial x}, \end{aligned} \right\} \quad (13.38)$$

причем Q — упрощенный линеаризованный вариант оператора полной производной по времени $\frac{d}{dt}$; D — упрощенный линеаризованный вариант плоской дивергенции скорости ветра $\nabla \cdot \mathbf{V}$.

Применяя условия (13.37) к общему решению (13.14), покажем, что амплитуды шумов a_2 и a_3 стремятся к нулю с возрастанием n .

Прежде всего в уравнениях (13.36) или (13.37) заменим u' в соответствии с общим решением (13.14) для u' :

$$u'(x, t) = a_1 u_1 E_1 + a_2 u_2 E_2 + a_3 u_3 E_3;$$

$$E_j = e^{ik(x - c_j t)}.$$

Вследствие того что

$$QE_j = ikd_j, \quad d_j = \bar{u} - c_j$$

и

$$\frac{\partial E_j}{\partial x} = ik,$$

находим из (13.37) при $t=0$, когда $E_1 = E_2 = E_3$, что

$$\left. \begin{aligned} a_1 u_1 (d_1)^n + a_2 u_2 (d_2)^n + a_3 u_3 (d_3)^n &= 0, \\ a_1 u_1 (d_1)^{n+1} + a_2 u_2 (d_2)^{n+1} + a_3 u_3 (d_3)^{n+1} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (13.39)$$

Уравнения (13.39) для любого значения n определяют два соотношения между коэффициентами a_1, a_2, a_3 , которые можно разрешить относительно отношений $a_1 : a_2 : a_3$, например, для

$$\frac{a_2}{a_1} \text{ и } \frac{a_3}{a_1}.$$

Учитывая, что, по (13.10),

$$|d_1| < |d_2| < |d_3|,$$

замечаем, что, согласно (13.39), $\frac{a_2}{a_1}$ и $\frac{a_3}{a_1}$ стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Применяя условия (13.37) к системе линеаризованных дифференциальных уравнений (13.4), покажем, что для любого n эти условия определяют диагностические уравнения, которые могут быть использованы как для согласования начальных данных с целью снижения шумов при решении полных уравнений, так и для замены некоторого числа полных уравнений при построении системы фильтрованных уравнений.

Поясним смысл уравнений (13.37) с помощью уравнений (13.4), которые запишем так:

$$\left. \begin{aligned} Qu' &= fv' - \frac{\partial \Phi'}{\partial x}; \\ Qv' &= -fu'; \\ Q\Phi' &= -\bar{\Phi} \frac{\partial u'}{\partial x} + f\bar{u}v'. \end{aligned} \right\} \quad (13.40)$$

Тогда последовательным исключением Qu' , Qv' и $Q\Phi'$ с учетом того, что $D = \frac{\partial u'}{\partial x}$, находим

$$\left. \begin{aligned} \text{для } n=0 \quad Q^0 D &= D = 0, \\ \text{для } n=1 \quad Q^1 D &= f \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial x^2} = 0, \\ \text{для } n=2 \quad Q^2 D &= \left(\bar{\Phi} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - f^2 \right) D - \bar{u} f \frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} = 0, \\ \text{для } n=3 \quad Q^3 D &= \left(\bar{\Phi} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - f^2 \right) \left(f \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial x^2} \right) + \\ &\quad + f^2 \bar{u} \frac{\partial D}{\partial x} = 0, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (13.41)$$

Легко получающееся рекуррентное соотношение

$$Q^n D = \left(\bar{\Phi} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - f^2 \right) Q^{n-2} D + f^2 \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} (Q^{n-3} D) \quad (13.42)$$

позволяет построить диагностические уравнения вида $Q^n D = 0$ для всех более высоких производных ($n > 3$).

Для пояснения полученных результатов, отметим следующее (не приводя подробных доказательств):

1. Смысл отдельных уравнений в (13.41) при различных n :
 $Q^0 D = 0$ определяет бездивергентное движение;
 $Q^1 D = 0$ определяет линейный вариант так называемого уравнения баланса для баротропной жидкости;
 $Q^2 D = 0$ определяет линейный вариант диагностического уравнения для вертикальной скорости ω в баротропном случае;
 $Q^n D = 0$ при нечетном n — уточненный вариант линейного уравнения баланса в баротропном случае;
 $Q^{n+1} D = 0$ при нечетном n — уточненный вариант линейного диагностического уравнения для вертикальной скорости ω в баротропном случае.

2. Любые два рядом стоящих уравнения в (13.41) могут служить диагностическими уравнениями для настройки начальных данных с целью снижения шумов при использовании полных уравнений.

Отношение коэффициентов при амплитудах шумовых волн и волн Россби есть

$$a_1 : a_2 : a_3 = \frac{1}{d_1^n P_1'} : \frac{1}{d_2^n P_2'} : \frac{1}{d_3^n P_3'}.$$

Следовательно, при переходе от n -го приближения к $(n+1)$ -му отношение амплитуды шумов к амплитуде волн Россби уменьшается на величину множителей

$$\left| \frac{d_1}{d_2} \right| \text{ и } \left| \frac{d_1}{d_3} \right|.$$

3. Любые два рядом стоящих уравнения в (13.41) могут быть использованы для замены двух прогностических уравнений в системе (13.4), если мы хотим построить систему фильтрованных уравнений. При $n \rightarrow \infty$ мы приближаемся к такой фильтрованной системе, которая полностью сохраняет физику волн Россби, в частности в случае линейного уравнения — фазовую скорость волны Россби d_1 (или c_1).

§ 9. Нелинейные диагностические дифференциальные уравнения для отфильтровывания шумов

Пока еще не решен вопрос о том, как мы должны сформулировать условие фильтрации, соответствующее уравнениям (13.37), для случая более сложных нелинейных баротропных и бароклинических систем уравнений. Однако представляется логичным распространить (13.37) и на случай нелинейной задачи, приняв при этом в качестве фильтрующих условий два следующих диагностических уравнения:

$$\frac{d^n}{dt^n} D = 0 \quad \text{и} \quad \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} D = 0, \quad (13.43)$$

где $\frac{d}{dt}$ — полный нелинейный оператор индивидуальной производной по времени

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}_k \frac{\partial}{\partial q_k}, \quad k = 1, 2, 3,$$

а D — полное выражение горизонтальной дивергенции

$$D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Примененные к бароклиным системам уравнения (13.43) при $n=0$ обращаются в бездивергентное уравнение баланса, а при $n=1$ — в дивергентное уравнение баланса и диагностическое уравнение для вертикальной скорости ω .

Повторяя те же рассуждения, что и в § 8, мы можем установить, что уравнения (13.37) могут быть заменены последовательностью фильтрующих соотношений, которые при $n \rightarrow \infty$ также обеспечивают полную фильтрацию шумов, но отличаются по скорости стремления к этому предельному результату. В частности, условия

$$Q^n u' = Q^n v' = 0 \quad \text{при } t = 0 \quad (13.44)$$

или в нелинейном случае

$$\frac{d^n}{dt^n} \mathbf{V} = 0 \quad \text{при } t = 0 \quad (13.45)$$

определяют при $n=1$ геострофическое движение, а при $n=2$ — частный случай квазигеострофического движения, подобного тому, которое описывается дивергентным уравнением баланса.

Описанные в главах 11 и 12 методы численных решений используют в качестве условий для настройки начальных данных следующие диагностические уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{d^0}{dt^0} D = \frac{d^1}{dt^1} D = 0 & \text{ — в случае баротропной модели;} \\ \frac{d^2 u}{dt^2} = \frac{d^2 v}{dt^2} = 0 & \text{ — в случае бароклиной модели. } \end{aligned} \quad (13.46)$$

Для указанной цели уравнения (13.46) должны быть превращены в диагностические уравнения и аппроксимированы надлежащим образом с помощью конечных разностей.

В. В. БЫКОВ

**ПРИМЕНЕНИЕ ПОЛНЫХ УРАВНЕНИЙ
ГИДРОДИНАМИКИ К ПРОГНОЗУ
МЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ И ОПЫТ
ОПЕРАТИВНОЙ РАБОТЫ**

ЧАСТЬ А

Лекции, которые мне надлежит прочесть, посвящены задаче краткосрочного прогноза метеорологических элементов с помощью полных уравнений гидродинамики. Мы рассмотрим конкретные схемы прогноза, использующие полные уравнения гидродинамики. В этих схемах, как и в геострофических, ограничивающим предположением является использование гипотезы квазистатичности. В последующих лекциях мы остановимся на организации оперативной работы с помощью указанных прогностических моделей в Мировом метеорологическом центре (Москва) и обсудим результаты этих прогнозов в сравнении с прогнозами по квазигеострофическим моделям. Систематическому изложению указанного материала мы предпошлем небольшое введение, в котором, в частности, остановимся на вопросе приспособления движения воздуха к геострофическому.

**1. ПРИСПОСОБЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ВОЗДУХА
К ГЕОСТРОФИЧЕСКОМУ В СВЯЗИ С ЗАДАЧЕЙ ПРОГНОЗА
ПО ПОЛНЫМ УРАВНЕНИЯМ ГИДРОДИНАМИКИ**

Близость движения воздуха к геострофическому — давно известный факт. Использование геострофического приближения, проведенное впервые И. А. Кибелем в 1940 г. [20], позволило отфильтровать гравитационные волны и поставить задачу гидродинамического прогноза погоды на реальную физическую основу. С появлением электронных вычислительных машин квазигеострофические модели прогноза стали быстро внедряться в оперативную службу погоды. В дальнейшем усилия исследователей были в основном направлены на уточнение ме-

тодики численного прогноза за счет учета негеострофичности движения. Эти исследования велись главным образом в следующих направлениях: 1) замена гипотезы квазигеострофичности предположением о квазисолеоидальности движения с использованием уравнения баланса [1, 12, 9, 24, 45]; 2) уточнение разложения составляющих скорости ветра по степеням безразмерного малого параметра [24, 28, 32, 10] и построение агеострофических моделей прогноза [16, 17, 6, 39, 41]; 3) построение прогностических моделей, основанных на решении полных (непреобразованных) уравнений гидродинамики в рамках квазистатической гипотезы. Понятно, что наиболее точная постановка задачи прогноза, основанная на решении полных уравнений гидродинамики, является наиболее заманчивой и перспективной, хотя с ней связаны значительные трудности. Эти трудности, как принципиального, так и технического характера, уже обсуждались на предыдущих лекциях и здесь мы на них останавливаться не будем.

Один из подходов к построению моделей прогноза по полным уравнениям был выбран под влиянием исследований механизма приспособления движения к геострофическому. Постановка задачи об адаптации полей давления и ветра ведет свое начало от работы К. Г. Россби, относящейся к 1938 г. [42]. В дальнейшем теории адаптации метеорологических полей как для баротропной, так и для бароклинической атмосферы были посвящены работы А. М. Обухова, И. А. Кибеля и ряда других авторов [35, 22, 31]. В этой постановке (линейная задача, решение ищется для бесконечной плоскости при постоянном значении параметра Корнелиса) было показано, что практически при любых начальных значениях горизонтальных скоростей ветра и давления (геопотенциала) движение стремится к геострофическому.

Отсюда возникает постановка общей нелинейной задачи, которая будет уже задачей прогноза. Она заключается в том, чтобы привлечь нелинейные члены и, считая их известными, использовать результаты, добытые в линейном случае, в качестве методической основы прогноза метеорологических полей. Постановка и решение этой задачи принадлежат И. А. Кибелю [23—26]. Забегая вперед, можно сказать, что на основе этой методики были построены оперативные схемы прогноза метеорологических элементов, которые прошли испытания и в настоящее время используются для составления оперативных прогнозов.

Рассмотрим далее, как происходит приспособление ветра к геострофическому в случае общей, нелинейной задачи прогноза для бароклинической атмосферы. Точнее, можно ли выделить геострофическую часть движения при решении полных уравнений гидродинамики в целях прогноза погоды.

Полную систему уравнений краткосрочного прогноза погоды возьмем в системе координат x, y, ζ, t в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \omega \frac{\partial u}{\partial \zeta} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + fv, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \omega \frac{\partial v}{\partial \zeta} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} - fu, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial \zeta} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + \omega \frac{\partial T}{\partial \zeta} = 0, \quad (4)$$

$$T = -\frac{\zeta}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}. \quad (5)$$

Здесь $\zeta = \frac{p}{p_0}$ — приведенное давление; $u = \frac{(v_0 - v) R}{g}$; $\omega = \frac{1}{p} \frac{dp}{dt}$;

$\tilde{T}$ — средняя температура; f — параметр Кориолиса; R — газовая постоянная. Из этой системы уравнений подлежат определению пять функций: горизонтальные составляющие скорости ветра u и v , геопотенциал Φ , температура T и эквивалент вертикальной скорости ω . Последняя функция связана с вертикальной скоростью w соотношением

$$-gw = \frac{RT}{\zeta} \omega - \frac{\partial \Phi}{\partial t} - u \frac{\partial \Phi}{\partial x} - v \frac{\partial \Phi}{\partial y}. \quad (6)$$

Определение искоемых функций производится при заданных начальных и краевых условиях.

В качестве начальных данных для этой системы достаточно задать начальные значения u, v, Φ [система (1) — (5) третьего порядка по времени]. Функция ω определится при этом из уравнения неразрывности (3), а T из уравнения статики (5).

Мы можем свести, таким образом, систему (1) — (5) к системе трех уравнений. Исключая из (4) функцию ω и температуру T с помощью (3) и (5), приходим к следующей системе уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \omega \frac{\partial u}{\partial \zeta} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + fv, \quad (7)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \omega \frac{\partial v}{\partial \zeta} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} - fu, \quad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\zeta^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \zeta \partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \left(u \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial \zeta} + v \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial \zeta} \right) - \zeta^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0. \quad (9)$$

Следуя И. А. Кибелю, перенесем в уравнениях (7) — (9) все линейные члены влево, а нелинейные — вправо и будем считать их известными величинами.

Вводя обозначения для групп нелинейных членов

$$\begin{aligned} B_u &= u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \omega \frac{\partial u}{\partial \zeta}, \\ B_v &= u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \omega \frac{\partial v}{\partial \zeta}, \\ A_T &= -\zeta \left(u \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial \zeta} + v \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial \zeta} \right), \end{aligned} \quad (10)$$

запишем систему (7) — (9) в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} - f v = -B_u, \quad (11)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} + f u = -B_v, \quad (12)$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\zeta^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \zeta \partial t} \right) - c^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial \zeta A_T}{\partial \zeta}. \quad (13)$$

Эти уравнения решаются при следующих краевых условиях:

$$\zeta \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \text{ ограничено при } \zeta = 0, \quad (14)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \zeta \partial t} + a \frac{\partial \Phi}{\partial t} = A_T \text{ при } \zeta = 1. \quad (15)$$

Заменим производные по времени отношениями конечных разностей:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u - u^0}{\delta t}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} \approx \frac{v - v^0}{\delta t}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} \approx \frac{\Phi - \Phi^0}{\delta t}.$$

Тогда имеем

$$u + \delta t \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} - f v \right) = -\delta t \cdot B_u + u^0, \quad (16)$$

$$v + \delta t \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + f u \right) = -\delta t \cdot B_v + v^0, \quad (17)$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\zeta^2 \frac{\partial \Phi - \Phi^0}{\partial \zeta} \right) - c^2 \delta t \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \delta t \frac{\partial \zeta A_T}{\partial \zeta}. \quad (18)$$

Краевое условие (15) при этом примет вид

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} (\Phi - \Phi^0) + \alpha (\Phi - \Phi^0) = \zeta t \cdot A_T \quad \text{при} \quad \zeta = 1. \quad (19)$$

Введем безразмерный параметр $f_0 \delta t = \delta$, где f_0 — значение f в начале координат. Тогда из (16) и (17) мы получим следующие выражения для составляющих скорости ветра u и v :

$$u = \frac{\zeta^2}{1 + \zeta^2} \left[-\frac{1}{f_0} \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{1}{f_0} B_v + \frac{1}{\delta} v^0 - \frac{1}{\delta f_0} B_u - \frac{1}{\delta f_0} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{1}{\delta^2} u^0 \right], \quad (20)$$

$$v = \frac{\zeta^2}{1 + \zeta^2} \left[\frac{1}{f_0} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{1}{f_0} B_u - \frac{1}{\delta} u^0 - \frac{1}{\delta f_0} B_v - \frac{1}{\delta f_0} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{1}{\delta^2} v^0 \right]. \quad (21)$$

Составляя выражение для плоской дивергенции и исключая ее из (18), получим уравнение для определения приращения функции $\Phi - \Phi^0$ за момент времени δt :

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1 + \zeta^2}{\zeta^2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\zeta^2}{f_0^2} \left(\Delta + b \zeta \frac{\partial}{\partial x} - b' \frac{\partial}{\partial y} \right) \right] (\Phi - \Phi^0) = \\ & = \zeta \left[\frac{1 + \zeta^2}{f_0 \delta^2} \frac{\partial}{\partial \zeta} (\zeta A_T) - \frac{\zeta^2}{f_0^2} \left(\frac{\partial B_v}{\partial x} - \frac{\partial B_u}{\partial y} + b \frac{\partial \Phi^0}{\partial x} \right) \right] - \\ & - \frac{\zeta^2}{f_0^2} \left[\frac{\partial B_u}{\partial x} + \frac{\partial B_v}{\partial y} + \Delta \Phi^0 - f_0 \left(\frac{\partial v^0}{\partial x} - \frac{\partial u^0}{\partial y} \right) - b' \frac{\partial \Phi^0}{\partial y} \right] + \\ & + \frac{\zeta^2}{f_0 \delta} \left[\frac{\partial u^0}{\partial x} + \frac{\partial v^0}{\partial y} \right]. \end{aligned} \quad (22)$$

В этом уравнении Δ — плоский оператор Лапласа, а коэффициенты b и b' связаны с параметром Кориолиса соотношениями

$$b = \left(\frac{1}{f} \frac{df}{dy} \right)_0 \frac{\zeta^2 - 1}{\zeta^2 + 1}, \quad b' = 2 \left(\frac{1}{f} \frac{df}{dy} \right)_0 \frac{\zeta^2}{\zeta^2 + 1}. \quad (23)$$

Обратим внимание на то, что в правой части уравнения (22) имеются три группы членов, содержащие множители δ в первой, нулевой и минус первой степени соответственно. Заметим (и это существенно для последующего анализа), что $\delta \gg 1$, т. е. мы предполагаем $\delta t \gg 2$ час. 30 мин.

Уравнение (22) интегрируется при краевых условиях (14) и (19) в предположении, что группа членов, входящих в его правую часть, известна. Не останавливаясь на математической стороне вопроса, укажем сразу, что решение получено И. А. Кибелем в виде [26]

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \frac{1}{\delta} \Phi_3, \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^1 \left[G \left(\frac{\partial B_v}{\partial x'} - \frac{\partial B_u}{\partial y'} + b \frac{\partial \Phi^0}{\partial x'} \right) + \right. \\ \left. + \frac{f_0}{c^2} \frac{1 + \delta^2}{\delta^2} \zeta' \frac{\partial G}{\partial \zeta'} A_T \right] d\zeta' dx' dy', \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \Phi_2 = \Phi^0 + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^1 G \left[\frac{\partial B_u}{\partial x'} + \frac{\partial B_v}{\partial y'} + \Delta \Phi^0 - \right. \\ \left. - f_0 \left(\frac{\partial v^0}{\partial x'} - \frac{\partial u^0}{\partial y'} \right) - b' \frac{\partial \Phi^0}{\partial y'} \right] d\zeta' dx' dy', \end{aligned} \quad (26)$$

$$\Phi_3 = - \frac{f_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^1 G \left(\frac{\partial u''}{\partial x'} + \frac{\partial v^0}{\partial y'} \right) d\zeta' dx' dy'. \quad (27)$$

Функцию влияния (функцию Грина) G мы здесь выписывать не будем.

Предложенная схема решения полных уравнений является имплицитной по времени. В выражения для Φ_1 , Φ_2 и Φ_3 нелинейные члены (B_u , B_v , A_T) входят как в начальный, так и в будущий моменты времени. Поэтому применение предложенной методики решения полных уравнений при построении конкретной прогностической модели предполагает, что будущие значения нелинейных членов на каждом шаге по времени находятся последовательными итерациями.

Остановимся на анализе полученного решения. Прежде всего заметим, что, подставляя Φ из (24) в (20) и (21), мы можем привести выражения для u и v к аналогичному виду.

Именно,

$$u = \frac{\delta^2}{1 + \delta^2} \left(\delta u_1 + u_2 + \frac{1}{\delta} u_3 + \frac{1}{\delta^2} u_4 \right), \quad (28)$$

$$v = \frac{\delta^2}{1 + \delta^2} \left(\delta v_1 + v_2 + \frac{1}{\delta} v_3 + \frac{1}{\delta^2} v_4 \right), \quad (29)$$

где

$$u_1 = -\frac{1}{f_0} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y}; \quad v_1 = \frac{1}{f_0} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}; \quad (30a)$$

$$u_2 = -\frac{1}{f_0} \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} - \frac{B_v}{f_0} - \frac{1}{f_0} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x};$$

$$v_2 = \frac{1}{f_0} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} + \frac{B_u}{f_0} - \frac{1}{f_0} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y}; \quad (30б)$$

$$u_3 = -\frac{1}{f_0} \frac{\partial \Phi_3}{\partial y} - \frac{1}{f_0} B_u + v^0 - \frac{1}{f_0} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x};$$

$$v_3 = \frac{1}{f_0} \frac{\partial \Phi_3}{\partial x} - \frac{1}{f_0} B_v - u^0 - \frac{1}{f_0} \frac{\partial \Phi_2}{\partial y}; \quad (30в)$$

$$u_i = u^0 - \frac{1}{f_0} \frac{\partial \Phi_3}{\partial x}; \quad v_i = v^0 - \frac{1}{f_0} \frac{\partial \Phi_3}{\partial y}. \quad (30г)$$

Обратимся теперь к полученному выражению (24) для геопотенциала Φ и вспомним, что $\delta \gg 1$. Первый член правой части, содержащий в качестве множителя δ , условно может быть назван эволюционирующим, второй — стационарным, третий — затухающим. Аналогичные члены мы находим в выражениях (28) и (29) для горизонтальных составляющих скорости u и v .

Точно так же может быть разложена по степеням параметра δ функция ω . Выражение для ω по (18) и (3) возьмем в виде

$$\omega = \frac{r}{c^2} \left(A_T - \frac{f_0 r}{\delta} \frac{\partial \Phi - \Phi^0}{\partial z} \right). \quad (31)$$

Учитывая (24), представим ω в виде

$$\omega = \omega_2 + \frac{1}{\delta} \omega_3 + \frac{1}{\delta^2} \omega_1, \quad (32)$$

где

$$\omega_2 = \frac{r}{c^2} \left(A_T - f_0 r \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \right), \quad (33a)$$

$$\omega_3 = -\frac{f_0 r^2}{c^2} \frac{\partial \Phi_2 - \Phi^0}{\partial z}, \quad (33б)$$

$$\omega_1 = -\frac{f_0 r^2}{c^2} \frac{\partial \Phi_3}{\partial z}. \quad (33в)$$

Таким образом, выражение для ω не содержит эволюционирующего члена.

Выясним роль отдельных членов в полученном решении.

Отбросим в уравнении (22) нелинейные члены (B_u , B_v , A_T) и положим $b=0$ (пренебрегаем членом, содержащим $\frac{df}{dy}$). Тогда $\Phi_1 = u_1 = v_1 = \omega_2 = 0$. Все три функции Φ , u и v будут содержать лишь стационарные члены, которые по (30б) будут связаны условием геострофичности, и затухающие члены. Это решение прогностического смысла не имеет.

Если только отбросить нелинейные члены, то получим частичную эволюцию за счет изменения параметра Кориолиса с широтой ($b \neq 0$).

Наконец, сохраняя нелинейные члены, получим эволюцию процесса в ее полном выражении. Этому общему случаю отвечает условие, заключающееся в том, что главные (эволюционирующие) члены для Φ , u и v всегда связаны по (24), (28), (29) и (30а) условиями геострофичности.

Из этой общей постановки можно получить квазигеострофическую постановку задачи прогноза шагами по времени [5].

II. РЕАЛИЗАЦИЯ ДВУХУРОВЕННОЙ СХЕМЫ ПРОГНОЗА ГЕОПОТЕНЦИАЛА И ВЕТРА ПО ПОЛНЫМ УРАВНЕНИЯМ, ОСНОВАННОЙ НА ПРИМЕНЕНИИ ФУНКЦИИ ВЛИЯНИЯ

1. Введение

Постановка задачи решения полной системы уравнений в целях краткосрочного прогноза погоды [23—26], о которой шла речь в разделе I, послужила основой для создания нескольких прогностических моделей. В 1960 г. Цзэн Цин-цунь [46] реализовал указанный путь решения задачи для двухуровневой модели и получил примеры прогноза метеорологических элементов, которые были рассчитаны на электронной вычислительной машине БЭСМ-2. Эти первые расчеты с реальными начальными данными подтвердили рациональность предложенной теории решения полных уравнений и показали возможность дальнейшего уточнения расчетной схемы. С. А. Бортников довел эту модель до оперативного применения [2, 4]. В 1961—1962 гг. им была сосчитана серия прогнозов, а в конце 1962 г. было проведено авторское испытание модели на оперативном материале. В дальнейшем было сделано уточнение прогностической модели путем учета влияния неровностей земной поверхности [3]. С 1964 г. по этой модели в отделе краткосрочного прогноза погоды и мезометеорологии Мирового метеорологического центра (Москва) стали регулярно составляться оперативные прогнозы.

Мы рассмотрим здесь подробно указанную модель прогноза метеорологических элементов по полным уравнениям на двух уровнях атмосферы.

2. Исходные уравнения и граничные условия

Возьмем в качестве исходных уравнений уравнения движения, уравнение неразрывности, уравнение притока тепла (условие адиабатичности) и уравнение статики в системе координат x, y, ζ, t в том виде, в каком мы их записали первоначально. Исключим температуру T из уравнения притока тепла с помощью уравнения статики, а уравнения движения запишем с помощью уравнения неразрывности в так называемой дивергентной форме. Тогда мы получим следующую систему уравнений для определения четырех неизвестных функций u, v, Φ, ω :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial u\omega}{\partial \zeta} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + fv, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial v\omega}{\partial \zeta} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} - fu, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial \zeta} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\zeta^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left(\zeta^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left(\zeta^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right) + c^2 \omega = 0, \quad (4)$$

которую следует решить при заданных начальных и граничных условиях. Как уже говорилось, в такой постановке задачи нужно задать начальные значения трех функций: u, v и Φ . Исходя из предположения, что поверхность Земли является плоской, в качестве краевых условий можно принять:

$$\omega = 0 \quad \text{при} \quad \zeta = 0, \quad (5)$$

$$\omega = 0 \quad \text{при} \quad \zeta = 1. \quad (6)$$

Данная задача прогноза решается для ограниченной территории. Принятые краевые условия на боковых границах (краях сетки) будут указаны в дальнейшем.

3. Постановка задачи в случае учета влияния гор Выбор новой системы координат

Наличие неровностей поверхности Земли приближенно можно учесть через краевое условие. В этом случае в качестве нижнего краевого условия следует принять условие скольжения воздуха по поверхности горы (равенство нулю нормальной к поверхности горы составляющей скорости ветра [21]). Пусть $\eta = \frac{P_i}{P}$ — приведенное давление на поверхности горы. Тогда нижнее краевое условие мы можем записать в виде

$$\omega = u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad \text{при} \quad \zeta = \eta. \quad (7)$$

Для того чтобы иметь возможность записать нижнее краевое условие, как обычно, при $\zeta=1$ или, условно говоря, «спрямить гору», введем новую систему независимых переменных, положив

$$\bar{x} = x, \quad \bar{y} = y, \quad \bar{\zeta} = \frac{\zeta}{\eta(x, y)}, \quad \bar{t} = t, \quad (8)$$

где $\eta(x, y)$ — приведенное стандартное давление на уровне горы, не зависящее от времени. Предполагается, что отклонение стандартного давления на уровне горы от стандартного давления на уровне моря значительно больше изменения во времени давления на уровне горы, так что этим изменением можно пренебречь. Предложенная ранее Н. А. Филлипсом [36] система координат отличается от (8) как раз тем, что в вертикальной координате σ давление на уровне горы $\pi(x, y, t)$ зависит от времени $\left(\sigma = \frac{p}{\pi(x, y, t)}\right)$.

Из (8) имеем следующие формулы для замены независимых переменных в наших уравнениях:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}} - \frac{\bar{\zeta}}{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \bar{y}} - \frac{\bar{\zeta}}{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}},$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}},$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \bar{t}}.$$

Тогда в новых переменных уравнения (1) — (4) запишутся так:

$$\begin{aligned} & \eta \frac{\partial u}{\partial \bar{t}} + \eta \frac{\partial u^2}{\partial \bar{x}} + \eta \frac{\partial uv}{\partial \bar{y}} - \bar{\zeta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial u^2}{\partial \bar{\zeta}} - \\ & - \bar{\zeta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial uv}{\partial \bar{\zeta}} + \frac{\partial u\omega}{\partial \bar{\zeta}} = -\eta \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{x}} + \bar{\zeta} \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\zeta}} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \eta f v; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & \eta \frac{\partial v}{\partial \bar{t}} + \eta \frac{\partial uv}{\partial \bar{x}} + \eta \frac{\partial v^2}{\partial \bar{y}} - \bar{\zeta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial uv}{\partial \bar{\zeta}} - \\ & - \bar{\zeta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial v^2}{\partial \bar{\zeta}} + \frac{\partial v\omega}{\partial \bar{\zeta}} = -\eta \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{y}} + \bar{\zeta} \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\zeta}} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \eta f u; \end{aligned} \quad (10)$$

$$\eta \frac{\partial \omega}{\partial \bar{x}} + \eta \frac{\partial v}{\partial \bar{y}} - \bar{\zeta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial \bar{\zeta}} - \bar{\zeta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial \bar{\zeta}} + \frac{\partial \omega}{\partial \bar{\zeta}} = 0; \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\eta \bar{\tau}^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\tau}} \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta \bar{\tau}^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\tau}} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \bar{\tau}^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\tau}} \right) - \\ & - \frac{\partial}{\partial \bar{\tau}} \left(\bar{\tau}^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\tau}} \right) \bar{\tau} \left(u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) + c^2 \omega = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Введем новую функцию

$$\bar{\omega} = \omega - \bar{\tau} \left(u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} \right), \quad (13)$$

тогда система уравнений (9) — (12) примет вид

$$\frac{\partial \eta u}{\partial t} + \frac{\partial \eta u^2}{\partial x} + \frac{\partial \eta uv}{\partial y} + \frac{\partial \eta \bar{\omega}}{\partial \bar{\tau}} = - \frac{\partial \eta \Phi}{\partial x} + \eta f v + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \bar{\tau} \Phi}{\partial \bar{\tau}}; \quad (14)$$

$$\frac{\partial \eta v}{\partial t} + \frac{\partial \eta uv}{\partial x} + \frac{\partial \eta v^2}{\partial y} + \frac{\partial \eta \bar{\omega}}{\partial \bar{\tau}} = - \frac{\partial \eta \Phi}{\partial y} - \eta f u + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \bar{\tau} \Phi}{\partial \bar{\tau}}; \quad (15)$$

$$\frac{\partial \eta u}{\partial x} + \frac{\partial \eta v}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \bar{\tau}} = 0; \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\eta \bar{\tau}^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\tau}} \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta \bar{\tau}^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\tau}} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \bar{\tau}^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\tau}} \right) + \\ & + c^2 \bar{\omega} + \left[c^2 - \frac{\partial}{\partial \bar{\tau}} \left(\bar{\tau}^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\tau}} \right) \right] \bar{\tau} \left(u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Теперь в качестве краевых условий примем

$$\bar{\omega} = 0 \quad \text{при} \quad \bar{\tau} = 0, \quad (18)$$

$$\bar{\omega} = 0 \quad \text{при} \quad \bar{\tau} = 1. \quad (19)$$

Нетрудно заметить, что при отсутствии гор ($\eta \equiv 1$) уравнения (14) — (17) становятся идентичными уравнениям (1) — (4), а краевые условия (18), (19) заменяются краевыми условиями (5), (6).

4. Прогностические уравнения для двухуровневной модели

Для простоты выкладок при получении прогностических уравнений мы ограничимся случаем отсутствия гор.

Уравнения для двухуровневной модели получим так же, как и в работе А. А. Элпассена [14]. Уравнения движения (1), (2)

и уравнение неразрывности (3) запишем на уровнях $\zeta=0,3$ и $\zeta=0,7$, а уравнение притока тепла (4) — на уровне $\zeta=0,5$.

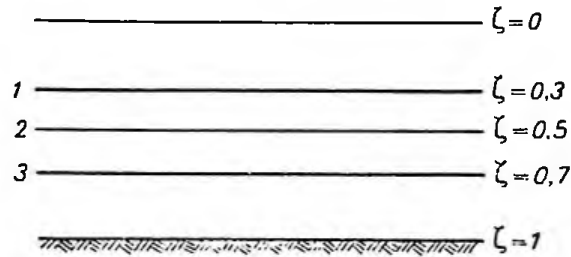


Рис. 1. Обозначения уровней в двух-уровневой модели.

Уровни $\zeta=0,3$, $\zeta=0,5$, $\zeta=0,7$ перенумеруем соответственно индексами 1, 2, 3 (рис. 1). Имеем

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} - f v_i = - \frac{\partial u_i^2}{\partial x} - \frac{\partial u_i v_i}{\partial y} - \left(\frac{\partial u \omega}{\partial \zeta} \right)_i, \quad i = 1, 3; \quad (20)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} + f u_i = - \frac{\partial u_i v_i}{\partial x} - \frac{\partial v_i^2}{\partial y} - \left(\frac{\partial v \omega}{\partial \zeta} \right)_i, \quad i = 1, 3; \quad (21)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial v_i}{\partial y} + \left(\frac{\partial \omega}{\partial \zeta} \right)_i = 0, \quad i = 1, 3; \quad (22)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\zeta^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right)_2 + c^2 \omega_2 = - \left[u \frac{\partial}{\partial x} \left(\zeta^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left(\zeta^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right) \right]_2. \quad (23)$$

Подготовим выражения для замены в полученных уравнениях производных по ζ отношениями конечных разностей. Учитывая крайевые условия (5) и (6), получим

$$\left(\frac{\partial u \omega}{\partial \zeta} \right)_1 \approx 2 (u \omega)_2; \quad \left(\frac{\partial u \omega}{\partial \zeta} \right)_3 \approx -2 (u \omega)_2;$$

$$\left(\zeta^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right)_2 \approx \frac{5}{8} (\Phi_3 - \Phi_1).$$

Имеем также

$$2 \omega_2 \approx - \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) \approx \left(\frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial v_3}{\partial y} \right).$$

Введем новые функции

$$U = \frac{1}{2} (u_1 + u_3), \quad V = \frac{1}{2} (v_1 + v_3); \quad H = \frac{1}{2} (\Phi_1 + \Phi_3),$$

$$u = \frac{1}{2} (u_1 - u_3), \quad v = \frac{1}{2} (v_1 - v_3), \quad h = \frac{1}{2} (\Phi_1 - \Phi_3)$$

и положим, что

$$\Phi_2 = \frac{1}{2} (\Phi_1 + \Phi_3), \quad \Phi_{z-1} = 2\Phi_1 - \Phi_2 = \frac{1}{2} (3\Phi_3 - \Phi_1),$$

$$u_2 = U, \quad v_2 = V.$$

Тогда из (20) — (23) можно получить следующую систему уравнений для определения шести неизвестных функций U, V, H, u, v, h :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial x} - fV = - \frac{\partial (U^2 + u^2)}{\partial x} - \frac{\partial (UV + uv)}{\partial y} = A_1; \quad (24)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial y} + fU = - \frac{\partial (UV + uv)}{\partial x} - \frac{\partial (V^2 + v^2)}{\partial y} = A_2; \quad (25)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0; \quad (26)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} - fv = - \left[\frac{\partial uU}{\partial x} + v \frac{\partial U}{\partial y} + V \frac{\partial u}{\partial y} \right] = a_1; \quad (27)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial y} + fu = - \left[\frac{\partial vV}{\partial y} + u \frac{\partial V}{\partial x} + U \frac{\partial v}{\partial x} \right] = a_2; \quad (28)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{2c^2}{5} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \left[U \frac{\partial h}{\partial x} + V \frac{\partial h}{\partial y} \right] = a_3. \quad (29)$$

Эту систему следует решить при заданных начальных значениях искомых функций.

Функция ω_2 найдется при этом из соотношения

$$2\omega_2 = - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right). \quad (30)$$

5. Интегрирование полученных уравнений

Преобразуем систему уравнений (24) — (29). Из первых двух уравнений этой системы получим уравнение вихря скорости и уравнение ветрового баланса. Вводя далее по (26) функцию тока ψ , такую, что

$$U = - \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad V = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (31)$$

запишем полученные уравнения в виде

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} = \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} - \beta V - \beta' U = B_2, \quad (32)$$

$$\Delta H = f \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) + \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} - \beta U + \beta' V = F, \quad (33)$$

где

$$\beta' = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \beta = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Заменим производные по времени в уравнениях (32), (27), (28) и (29) отношениями конечных разностей. Кроме того, остальные члены в левых частях уравнений (27), (28) и (29) запишем в виде полусуммы значений функций в начальный и конечный моменты времени. Тогда получим

$$\Delta(\psi - \psi^0) = B_2 \delta t, \quad (34)$$

$$\frac{u - u^0}{\delta t} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial(h + h^0)}{\partial x} - f(v + v^0) \right] = a_1, \quad (35)$$

$$\frac{v - v^0}{\delta t} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial(h + h^0)}{\partial y} + f(u + u^0) \right] = a_2, \quad (36)$$

$$\frac{h - h^0}{\delta t} + \frac{c^2}{5} (D + D^0) = a_3, \quad (37)$$

где

$$D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Из уравнения (34), привлекая соотношения (31), получим в окончательном виде первые два уравнения прогностической системы:

$$\Delta(U - U^0) = -\frac{\partial B_2}{\partial y} \delta t, \quad (38)$$

$$\Delta(V - V^0) = \frac{\partial B_2}{\partial x} \delta t. \quad (39)$$

Третьим уравнением будет уравнение ветрового баланса (33):

$$\Delta[H(t) - H^0] = F(t) - \Delta H^0. \quad (40)$$

Еще два уравнения получим, разрешая уравнения (35) и (36) непосредственно относительно $u - u^0$ и $v - v^0$. Наконец, последнее уравнение получим, построив выражение для дивергенции по (35), (36) и исключив его из (37). Вводя обозначения

$$\delta' = \frac{f \delta t}{2}, \quad \Omega^0 = \frac{\partial v^0}{\partial x} - \frac{\partial u^0}{\partial y},$$

указанные три уравнения запишем в виде

$$u - u^0 = \frac{2\gamma'}{1+\gamma'^2} \left[-\gamma' \left(u^0 + \frac{1}{f} \frac{\partial h^0}{\partial y} - \frac{1}{f} a_2 \right) + \right. \\ \left. + \left(v^0 - \frac{1}{f} \frac{\partial h^0}{\partial x} + \frac{1}{f} a_1 \right) - \frac{1}{2f} \left(\frac{\partial(h-h^0)}{\partial x} + \gamma' \frac{\partial(h-h^0)}{\partial y} \right) \right], \quad (41)$$

$$v - v^0 = \frac{2\gamma'}{1+\gamma'^2} \left[-\gamma' \left(v^0 - \frac{1}{f} \frac{\partial h^0}{\partial x} + \frac{1}{f} a_1 \right) - \right. \\ \left. - \left(u^0 + \frac{1}{f} \frac{\partial h^0}{\partial y} - \frac{1}{f} a_2 \right) + \frac{1}{2f} \left(\gamma' \frac{\partial(h-h^0)}{\partial x} - \frac{\partial(h-h^0)}{\partial y} \right) \right], \quad (42)$$

$$\Delta(h - h^0) - \frac{1+\gamma'^2}{\gamma'^2} \frac{5f^2}{2c^2} (h - h^0) = \gamma' \left[2 \left(\frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} \right) - \right. \\ \left. - \beta' (u + u^0) - \beta (v + v^0) - \frac{1+\gamma'^2}{\gamma'^2} \frac{5f}{c^2} a_3 \right] + 2 \left(\frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} \right) + \\ + \beta' (v + v^0) - \beta (u + u^0) + 2(f\Omega^0 - \Delta h^0) + \frac{2f}{\gamma'} D^0 = \chi. \quad (43)$$

Мы получили, таким образом, систему уравнений (38) — (43) для определения шести неизвестных функций U , V , H , u , v , h .

Решение уравнений (38) — (40), являющихся уравнениями Пуассона, выписывается для центра круга радиусом R в виде¹

$$U - U^0 = \frac{\gamma t}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{2\pi} \int_0^R B_z \ln \frac{R}{r'} r' dr' d\theta' + \\ + \frac{1}{2\pi R} \int_{\Gamma} (U - U^0) ds; \quad (44)$$

$$V - V^0 = -\frac{\gamma t}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{2\pi} \int_0^R B_z \ln \frac{R}{r'} r' dr' d\theta' + \frac{1}{2\pi R} \int_{\Gamma} (V - V^0) ds, \quad (45)$$

$$H(t) - H^0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R [\Delta H^0 - F(t)] \ln \frac{R}{r'} r' dr' d\theta' + \\ + \frac{1}{2\pi R} \int_{\Gamma} [H(t) - H^0] ds, \quad (46)$$

¹ В первоначальных вариантах расчетных схем использовалось упрощенное решение. Например, решение уравнения (38) бралось в виде

$$U - U^0 = \frac{\gamma t}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R \varepsilon B_z \ln \frac{R}{r'} r' dr' d\theta',$$

где ε — коэффициент, определяемый эмпирически.

где вторые интегралы в правой части (44), (45) и (46) берутся вдоль окружности радиусом R . Такой вид решений предполагает, что задача решается в двух приближениях (вначале без контурного интеграла).

Решение уравнения (43), являющегося уравнением Гельмгольца, имеет вид

$$h - h^0 = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_0\left(\frac{2f}{5c^2} \sqrt{1 + \frac{1}{5c^2} r'}\right) \chi(x', y') dx' dy', \quad (47)$$

где $K_0(r)$ — цилиндрическая функция мнимого аргумента. Так как функция $K_0(r)$ быстро затухает, то можно ограничить область влияния в решении (47) кругом радиусом R .

Таким образом, с помощью формул (41), (42), (44), (45), (46) и (47) определяются все искомые функции. При этом надо иметь в виду, что решение уравнения ветрового баланса по формуле (46) должно осуществляться в конце шага по времени, когда найдены другие неизвестные функции, входящие в выражение F .

6. Некоторые особенности расчетной схемы и ее реализация на электронной вычислительной машине

Сделаем некоторые замечания относительно подготовки рабочих формул.

Уточним прежде всего вид разностной аппроксимации по времени в выражениях правых частей уравнений (34)–(37), (43), включающих в себя нелинейные члены. Автор модели остановился на способе вычисления этих выражений, т. е. B_2 , a_1 , a_2 , a_3 и χ , в виде полусуммы их значений в начальный и будущий моменты времени, например,

$$B_2 = \frac{1}{2} (B_2^0 + B_2^u).$$

При этом определение правых частей уравнений в будущий момент времени производится с помощью двух итераций (в начальный момент $B_2 = B_2^0$). Производные по горизонтальным координатам, входящие в выражения правых частей уравнений, вычисляются с помощью центрированных разностей по четырем точкам.

Такая разностная имплицитная схема решения уравнений, при которой нелинейные члены подвергаются нескольким итерациям, характеризуется устойчивостью счета и позволяет увеличить шаг по времени до трех часов без проведения на промежуточных шагах какого-либо сглаживания как самих функций, так и их изменений.

При подготовке рабочих формул из решений (44) — (47) вся область интегрирования $r \leq R$ разбивается на n малых площадок, среднее значение функции на каждой площадке выносится из под знака интеграла и заменяется значением функции в центре площадки. Именно, каждый интеграл в формулах (44) — (47) представляется в виде

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} \varphi Gr' dr' d\theta' \approx \sum_{k=0}^2 \bar{\varphi}_k \int_{r_k}^{r_{k+1}} \int_0^{2\pi} Gr' dr' d\theta', \quad (48)$$

где $\bar{\varphi}_0$ — значение функции в центральной точке круга, совпадающей с узлом сетки, для которой ведется расчет; $\bar{\varphi}_1$ — среднее значение функции в центрах восьми площадок размером $\frac{1}{8} \pi (r_2^2 - r_1^2)$, а $\bar{\varphi}_2$ — среднее значение функции в центрах 12 площадок размером $\frac{1}{12} \pi (R^2 - r_2^2)$; $r_0 = 0$; $r_1 = \frac{1}{2} \delta s = 150$ км; $r_2 = \frac{3}{2} \delta s = 450$ км; $r_3 = 3 \delta s = 900$ км; шаг сетки $\delta x = \delta y = \delta s = 300$ км.

В качестве граничных условий на краях сетки для каждой из шести неизвестных функций ставится условие линейной экстраполяции найденных изменений этой функции на внешние края сетки.

Результаты расчетов по двухуровневой модели будут изложены ниже.

III. МОДЕЛЬ ПРОГНОЗА ПО ПОЛНЫМ УРАВНЕНИЯМ НА ТРЕХ УРОВНЯХ АТМОСФЕРЫ, ПОСТРОЕННАЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА ИНТЕГРАЛЬНЫХ СООТНОШЕНИЙ

1. Введение

Практика оперативного составления краткосрочных прогнозов погоды основывается в первую очередь на использовании прогностических карт приземного барического поля. Поэтому одной из важнейших задач численного (гидродинамического) прогноза погоды является задача разработки надежной методики прогноза приземных карт.

Изложим оперативную модель прогноза метеорологических элементов на трех уровнях атмосферы, одним из которых является уровень моря. Модель эта, как и предыдущая, основана на решении полных уравнений гидродинамики. При выводе прогностических уравнений применяется метод интегральных соотношений, разработанный А. А. Дородницыным [13]. Автор этой трехуровневой модели, применяемой в настоящее

время в Мировом метеорологическом центре (Москва) при составлении оперативных прогнозов, является В. М. Кадышников [18].

2. Исходная система уравнений и ее преобразование

Граничные условия

Будем отправляться от полной системы уравнений, которую выпишем в следующем виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \omega \frac{\partial u}{\partial \zeta} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + f v, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \omega \frac{\partial v}{\partial \zeta} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} - f u, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial \zeta} = 0, \quad (3)$$

$$T = -\frac{\zeta}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + \omega \frac{\partial T}{\partial \zeta} = \gamma_a \frac{R \tilde{T}}{g \zeta} \omega. \quad (5)$$

Здесь $\tilde{T}$ — средняя температура, остальные обозначения прежние. В качестве граничных условий примем:

$$\omega = 0 \quad \text{при} \quad \zeta = 0, \quad (6)$$

$$\omega = \frac{1}{R \tilde{T}} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + u \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \quad \text{при} \quad \zeta = 1. \quad (7)$$

Введем вместо температуры T и геопотенциала Φ их отклонения T' и Φ' от некоторых стандартных значений из условий

$$T'(x, y, \zeta, t) = T(x, y, \zeta, t) - \bar{T}(\zeta), \quad (8)$$

$$\Phi'(x, y, \zeta, t) = \Phi(x, y, \zeta, t) - \bar{\Phi}(\zeta), \quad (9)$$

где $\bar{T}(\zeta)$ и $\bar{\Phi}(\zeta)$ — стандартные значения температуры и геопотенциала, зависящие только от переменной ζ .

Тогда стандартные функции $\bar{T}$, $\bar{\Phi}$ и стандартный вертикальный градиент температуры $\bar{\gamma}$ оказываются связанными соотношениями

$$\bar{T} = -\frac{\zeta}{R} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \zeta}, \quad \bar{\gamma} = \frac{g \zeta}{R \tilde{T}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \zeta}, \quad (10)$$

а наша система уравнений примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \omega \frac{\partial u}{\partial \zeta} = - \frac{\partial \Phi'}{\partial x} + f v, \quad (11)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \omega \frac{\partial v}{\partial \zeta} = - \frac{\partial \Phi'}{\partial y} - f u, \quad (12)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial \zeta} = 0, \quad (13)$$

$$T' = - \frac{\zeta}{R} \frac{\partial \Phi'}{\partial \zeta}, \quad (14)$$

$$\omega \frac{\partial T'}{\partial t} + u \frac{\partial T'}{\partial x} + v \frac{\partial T'}{\partial y} + \omega \frac{\partial T'}{\partial \zeta} = \frac{(\gamma_a - \gamma) R \tilde{T}}{g \zeta} \omega. \quad (15)$$

Граничные условия при этом запишутся так:

$$\omega = 0 \quad \text{при} \quad \zeta = 0, \quad (16)$$

$$\omega - \frac{1}{R \tilde{T}} \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial t} + u \frac{\partial \Phi'}{\partial x} + v \frac{\partial \Phi'}{\partial y} \right) \quad \text{при} \quad \zeta = 1. \quad (17)$$

Для удобства мы не будем далее писать штрихи при соответствующих функциях и опустим знак черты над γ .

Цель дальнейших преобразований системы (11)–(15) состоит в том, чтобы привести ее к виду, удобному для применения метода интегральных соотношений по вертикальной координате.

Преобразуем прежде всего уравнения движения (11), (12) и уравнение притока тепла (15), внося в конвективных членах величины составляющих скорости под знаки производных и учитывая уравнение неразрывности (13). Кроме того, обе части уравнения неразрывности умножим на ζ . Тогда получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial u\omega}{\partial \zeta} = - \frac{\partial \Phi}{\partial x} + f v, \quad (18)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial v\omega}{\partial \zeta} = - \frac{\partial \Phi}{\partial y} - f u, \quad (19)$$

$$\zeta \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \zeta \frac{\partial \omega}{\partial \zeta}, \quad (20)$$

$$R T = - \zeta \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}, \quad (21)$$

$$\zeta \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial u T}{\partial x} + \frac{\partial v T}{\partial y} + \frac{\partial \omega T}{\partial \zeta} \right) = \frac{(\gamma_a - \gamma) R \tilde{T}}{g} \omega. \quad (22)$$

Введем далее вместо ζ новую независимую переменную. Положим

$$x_1 = x, \quad y_1 = y, \quad \xi = 1 - \zeta, \quad t_1 = t. \quad (23)$$

Тогда имеем простые формулы для замены независимых переменных в наших уравнениях:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y_1} = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial \xi} = -\frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial t_1} = \frac{\partial}{\partial t}. \quad (24)$$

При этом исходная система уравнений окончательно преобразуется к следующей системе:

$$\frac{\partial u \omega}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} - f v, \quad (25)$$

$$\frac{\partial v \omega}{\partial \xi} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} + f u, \quad (26)$$

$$\frac{\partial (1 - \xi) \omega}{\partial \xi} = (1 - \xi) D - \omega, \quad (27)$$

$$\frac{\partial (1 - \xi) \Phi}{\partial \xi} = R T - \Phi, \quad (28)$$

$$\frac{\partial (1 - \xi) \omega T}{\partial \xi} = (1 - \xi) \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial u T}{\partial x} + \frac{\partial v T}{\partial y} \right) - \omega \left[\frac{(i_a - i) R \tilde{T}}{g} + T \right], \quad (29)$$

где $D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$, со следующими граничными условиями:

$$\omega = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 1, \quad (30)$$

$$\omega = \frac{1}{R \tilde{T}} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial u \Phi}{\partial x} + \frac{\partial v \Phi}{\partial y} - \Phi D \right) \quad \text{при} \quad \xi = 0. \quad (31)$$

Исходная система уравнений приведена, таким образом, к дивергентной форме, позволяющей применить к ней метод интегральных соотношений.

3. Применение метода интегральных соотношений

Метод интегральных соотношений позволяет свести систему дифференциальных уравнений в частных производных к системе с меньшим числом независимых переменных. Метод интегральных соотношений в рассматриваемой прогностической модели применяется для того, чтобы привести систему дифференциальных уравнений задачи к системе дифференциальных уравнений, не зависящей от вертикальной координаты ξ . Заметим, что дивергентная форма системы (25)–(29) позволяет применить этот метод для всех четырех независимых переменных. Сведение полной системы дифференциальных уравнений краткосрочного прогноза к системе нелинейных алгебраических уравнений было осуществлено И. А. Кибселем в работе [27].

Идея метода интегральных соотношений состоит в том, что все дифференциальные уравнения системы интегрируются по той переменной, от которой целесообразно избавиться. Подынтегральные выражения в области изменения этой переменной аппроксимируются с помощью какой-либо интерполяционной формулы так, чтобы в выбранных точках эти подынтегральные выражения давали точные значения. Тогда мы придем к системе дифференциальных уравнений с большим числом функций, которые, однако, не зависят от переменной, по которой произведено интегрирование. Применим метод интегральных соотношений по переменной ξ к системе уравнений (25) — (29). Каждое уравнение этой системы имеет вид

$$\frac{\partial q}{\partial \xi} = F. \quad (32)$$

Разобьем интервал изменения переменной ξ точками $\xi_0=0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n=1$ и уравнения системы (25) — (29) проинтегрируем по ξ в пределах от 0 до ξ_i . Тогда каждое уравнение системы даст выражения вида

$$q_i - q_0 = \int_0^{\xi_i} F(\xi) d\xi \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (33)$$

Представим $F(\xi)$ полиномом, принимающим значения F_i при $\xi = \xi_i$,

$$F(\xi) = \sum_{k=0}^n a_k \xi^k. \quad (34)$$

Неизвестные коэффициенты полинома a_n определяются при этом следующей системой линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} F_0 &= a_0, \\ F_1 &= a_0 + a_1 \xi_1 + a_2 \xi_1^2 + \dots + a_n \xi_1^n, \\ F_2 &= a_0 + a_1 \xi_2 + a_2 \xi_2^2 + \dots + a_n \xi_2^n, \\ &\dots \dots \dots \\ F_n &= a_0 + a_1 \xi_n + a_2 \xi_n^2 + \dots + a_n \xi_n^n. \end{aligned}$$

Запишем кратко эту систему так:

$$F_i - F_0 = \sum_{k=1}^n a_k \xi_i^k \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (35)$$

С другой стороны, подставляя (34) в выражения (33) и выполняя квадратуры, получим систему уравнений

$$q_i - q_0 - F_0 z_i = \sum_{k=1}^n a_k \frac{z_i^{k+1}}{k+1} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (36)$$

Если коэффициенты a_k выразить из системы уравнений (35) через F_i и подставить эти выражения в (36), то последняя система даст нам n соотношений, связывающих функции F_i с функциями $q_1, q_2, \dots, q_{n-1}, F_0$

$$F_i = \sum_{k=1}^{n-1} b_{ik} q_k + F_0, \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (37)$$

где b_{ik} — известные коэффициенты. Заметим, что $q_n \equiv 0$ для каждого уравнения системы (25) — (29).

Дальнейший путь получения новой системы уравнений из системы пяти уравнений (25) — (29) заключается в следующем. Мы можем получить $5n - 4$ уравнений, применив первые $n - 1$ равенств системы (37) для уравнений (25), (26), (28), (29) и все n равенств (37) для уравнения неразрывности (27). В этих уравнениях не будут содержаться функции при значениях $\xi = 1$, так как при преобразовании уравнения неразрывности мы его умножили на ξ . Недостающие четыре уравнения можно получить, записывая уравнения движения (25), (26) и уравнение притока тепла (29) при $\xi = 0$ и пренебрегая слагаемыми типа $\omega \frac{\partial}{\partial \xi}$, а также привлекая нижнее граничное условие (31). Имеем

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} + \frac{\partial u_0^2}{\partial x} + \frac{\partial u_0 v_0}{\partial y} - u_0 D_0 + \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} - f v_0 = 0, \quad (38)$$

$$\frac{\partial v_0}{\partial t} + \frac{\partial u_0 v_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0^2}{\partial y} - v_0 D_0 + \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} + f u_0 = 0, \quad (39)$$

$$\frac{\partial T_0}{\partial t} + \frac{\partial u_0 T_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0 T_0}{\partial y} - T_0 D_0 - \frac{(\gamma_a - \gamma_0) R \tilde{T}_0}{g} \omega_0 = 0, \quad (40)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{R \tilde{T}_0} \left[\frac{\partial \Phi_0}{\partial t} + \frac{\partial u_0 \Phi_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0 \Phi_0}{\partial y} - \Phi_0 D_0 \right], \quad (41)$$

где $\tilde{T}_0$ — среднее значение температуры на уровне моря. Таким образом получим $5n$ уравнений для определения $5n$ функций $\Phi_i, u_i, v_i, \omega_i, T_i$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$).

4. Система уравнений для трехуровневой модели

При построении расчетной схемы прогноза для трехуровневой модели автор этой модели положил $\xi_0=0$, $\xi_1=0,5$, $\xi_2=0,7$, $\xi_3=1$, т. е. в этой модели берутся уровни изобарических поверхностей 1000, 500 и 300 мб. В дальнейшем все функции на ука-

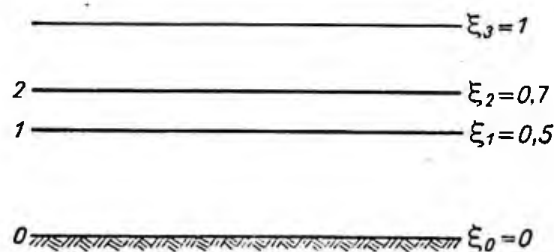


Рис. 2. Обозначения уровней в трехуровневой модели.

занных уровнях будем отмечать соответственно индексами 0, 1 и 2 (рис. 2). При сделанных предположениях соотношения (37) имеют вид

$$F_1 = -\frac{45}{49} q_0 - 3q_1 + \frac{625}{147} q_2 - \frac{1}{7} F_0,$$

$$F_2 = \frac{123}{175} q_0 - \frac{147}{25} q_1 + \frac{95}{21} q_2 + \frac{53}{360} F_0,$$

$$F_3 = -\frac{114}{49} q_0 + 12q_1 - \frac{2500}{147} q_2 - \frac{3}{7} F_0. \quad (37a)$$

Более простые коэффициенты получаются, если положить $\xi_2=0,75$, т. е. если в качестве третьего уровня берется уровень изобарической поверхности 250 мб. Дальнейшие выкладки мы будем проводить именно в этом предположении. Тогда вместо (37a) мы имеем соотношения

$$F_1 = -\frac{19}{18} q_0 - 2q_1 + \frac{32}{9} q_2 - \frac{1}{6} F_0,$$

$$F_2 = \frac{17}{24} q_0 - \frac{9}{2} q_1 + \frac{8}{3} q_2 + \frac{1}{8} F_0,$$

$$F_3 = -\frac{16}{9} q_0 + 8q_1 - \frac{128}{9} q_2 - \frac{1}{3} F_0. \quad (37b)$$

В соответствии со сказанным выше получим теперь вместо (25)–(29) новую систему уравнений. Предварительно лишь выпишем вид функции F_0 для уравнений (25)–(29). С учетом уравнений (38)–(40) имеем

$$F_0^I = u_0 D_0; \quad F_0^{II} = v_0 D_0; \quad F_0^{III} = D_0 - \omega_0;$$

$$F_0^{IV} = RT_0 - \Phi_0; \quad F_0^V = T_0 (D_0 - \omega_0).$$

Здесь верхними индексами отмечены порядковые номера уравнений системы (25)–(29).

Применяя первые два равенства системы (37б) к первому уравнению движения, получим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial u_1^2}{\partial x} + \frac{\partial u_1 v_1}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} - f v_1 = \\ & = -\frac{19}{18} u_0 \omega_0 - 2 u_1 \omega_1 + \frac{32}{9} u_2 \omega_2 - \frac{1}{6} u_0 D_0; \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial u_2^2}{\partial x} + \frac{\partial u_2 v_2}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} - f v_2 = \\ & = \frac{17}{24} u_0 \omega_0 - \frac{9}{2} u_1 \omega_1 + \frac{8}{3} u_2 \omega_2 + \frac{1}{8} u_0 D_0; \end{aligned} \quad (43)$$

аналогично из второго уравнения движения имеем

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial u_1 v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1^2}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} + f u_1 = \\ & = -\frac{19}{18} v_0 \omega_0 - 2 v_1 \omega_1 + \frac{32}{9} v_2 \omega_2 - \frac{1}{6} v_0 D_0; \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v_2}{\partial t} + \frac{\partial u_2 v_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2^2}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} + f u_2 = \\ & = \frac{17}{24} v_0 \omega_0 - \frac{9}{2} v_1 \omega_1 + \frac{8}{3} v_2 \omega_2 + \frac{1}{8} v_0 D_0; \end{aligned} \quad (45)$$

из уравнения статики

$$T_1 + \frac{1}{6} T_0 = -\frac{8}{9R} \Phi_0 + \frac{8}{9R} \Phi_2; \quad (46)$$

$$T_2 - \frac{1}{6} T_0 = \frac{7}{12R} \Phi_0 - \frac{9}{4R} \Phi_1 + \frac{5}{3R} \Phi_2; \quad (47)$$

из уравнения притока тепла

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial T_1}{\partial t} + \frac{\partial u_1 T_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1 T_1}{\partial y} \right) - \frac{(\gamma_a - \gamma_1) R \tilde{T}_1}{g} \omega_1 = \\ = -\frac{8}{9} \omega_0 T_0 + \frac{8}{9} \omega_2 T_2 - \frac{1}{6} T_0 D_0; \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \left(\frac{\partial T_2}{\partial t} + \frac{\partial u_2 T_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2 T_2}{\partial y} \right) - \frac{(\gamma_a - \gamma_2) R \tilde{T}_2}{g} \omega_2 = \\ = \frac{7}{12} \omega_0 T_0 - \frac{9}{4} \omega_1 T_1 + \frac{5}{3} \omega_2 T_2 + \frac{1}{8} T_0 D_0. \end{aligned} \quad (49)$$

Здесь $\tilde{T}_1$ и $\tilde{T}_2$ — средние значения температуры на изобарических поверхностях 500 и 300 мб.

Наконец, применяя все три равенства системы (37б) к уравнению неразрывности, получим еще три уравнения:

$$\frac{1}{2} D_1 + \frac{1}{6} D_0 = -\frac{8}{9} \omega_0 + \frac{8}{9} \omega_2, \quad (50)$$

$$\frac{1}{4} D_2 - \frac{1}{8} D_0 = \frac{7}{12} \omega_0 - \frac{9}{4} \omega_1 + \frac{5}{3} \omega_2, \quad (51)$$

$$\frac{1}{3} D_0 = -\frac{13}{9} \omega_0 + 4\omega_1 - \frac{32}{9} \omega_2. \quad (52)$$

Добавляя, как было сказано выше, к полученным уравнениям (42) — (52) уравнения (38) — (41), имеем систему 15 уравнений для определения функций u , v , Φ , ω , T на указанных трех изобарических поверхностях.

5. Получение расчетных формул

Обратим внимание на одну особенность системы (38) — (52). Разрешая уравнения (46), (47), (50) — (52) относительно T_1 , T_2 , ω_0 , ω_1 , ω_2 , мы можем рассматривать эти уравнения как диагностические и с их помощью определять значения указанных функций для любого момента времени, если найдены значения Φ_0 , Φ_1 , Φ_2 , u_0 , u_1 , u_2 , v_0 , v_1 , v_2 , T_0 . Задача прогноза сводится, таким образом, к определению этих 10 функций в будущий момент времени из уравнений (38) — (45), (48), (49).

Рассмотрим вначале уравнения (38), (39), (42), (44), (43), (45). Если заменить производные по времени отношениями

конечных разностей и перенести нелинейные члены в правые части уравнений, то эти уравнения можно записать в виде

$$u_i - f \partial_t v_i + \partial_t \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} = \varphi_i'', \quad (53)$$

$$(i = 0, 1, 2)$$

$$v_i + f \partial_t u_i + \partial_t \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} = \varphi_i^v, \quad (54)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_0'' &= u_0^0 - \partial_t \left(\frac{\partial u_0^2}{\partial x} + \frac{\partial u_0 v_0}{\partial y} - u_0 D_0 \right), \\ \varphi_0^v &= v_0^0 - \partial_t \left(\frac{\partial u_0 v_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0^2}{\partial y} - v_0 D_0 \right), \\ \varphi_1'' &= u_1^0 - \partial_t \left(\frac{\partial u_1^2}{\partial x} + \frac{\partial u_1 v_1}{\partial y} + \frac{1}{6} u_0 D_0 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{19}{18} u_0 \omega_0 + 2 u_1 \omega_1 - \frac{32}{9} u_2 \omega_2 \right), \\ \varphi_1^v &= v_1^0 - \partial_t \left(\frac{\partial u_1 v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1^2}{\partial y} + \frac{1}{6} v_0 D_0 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{19}{18} v_0 \omega_0 + 2 v_1 \omega_1 - \frac{32}{9} v_2 \omega_2 \right), \\ \varphi_2'' &= u_2^0 - \partial_t \left(\frac{\partial u_2^2}{\partial x} + \frac{\partial u_2 v_2}{\partial y} - \frac{1}{8} u_0 D_0 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{17}{24} u_0 \omega_0 + \frac{9}{2} u_1 \omega_1 - \frac{8}{3} u_2 \omega_2 \right), \\ \varphi_2^v &= v_2^0 - \partial_t \left(\frac{\partial u_2 v_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2^2}{\partial y} - \frac{1}{8} v_0 D_0 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{17}{24} v_0 \omega_0 + \frac{9}{2} v_1 \omega_1 - \frac{8}{3} v_2 \omega_2 \right). \end{aligned}$$

Разрешая эти уравнения относительно u_i и v_i , имеем

$$u_i = \frac{\varphi_i'' + f \partial_t \varphi_i^v - \partial_t \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} - f \partial_t^2 \frac{\partial \Phi_i}{\partial y}}{1 + f^2 \partial_t^2}; \quad (55)$$

$$v_i = \frac{-f \partial_t \varphi_i'' + \varphi_i^v + f \partial_t^2 \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} - \partial_t \frac{\partial \Phi_i}{\partial y}}{1 + f^2 \partial_t^2} \quad (i = 0, 1, 2). \quad (56)$$

Наметим путь решения задачи определения указанных десяти функций. Положим, что функции Φ_i найдены. Тогда по формулам (55) и (56) можно рассчитать для того же момента времени u_i и v_i , если известны φ_i^u и φ_i^v , т. е. если известны нелинейные члены. Можно принять, например, значения нелинейных членов равными их значениям на предыдущем шаге или брать нелинейные члены в будущий момент времени путем выполнения на каждом шаге нескольких итераций¹. Наконец, после определения составляющих скорости ветра температура на уровне моря для нового момента времени может быть определена из конечно-разностного (по времени) аналога уравнения (40):

$$T_0 = T_0^0 + \delta t \left[\frac{(\gamma_a - \gamma_0) R \tilde{T}_0 \omega_0}{g} - \frac{\partial u_0 T_0}{\partial x} - \frac{\partial v_0 T_0}{\partial y} + T_0 D_0 \right], \quad (57)$$

если температуру T_0 в нелинейных членах взять в предыдущий момент времени, а u_0, v_0, D_0, ω_0 — в будущий.

Таким образом, для реализации намеченного пути необходимо определить Φ_i , т. е. значения геопотенциала в будущий момент времени на трех изобарических поверхностях.

Остановимся на получении недостающих уравнений для определения Φ_i .

Из уравнений (53) и (54), привлекая (55), (56), получим

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \beta \delta t \frac{1 - f^2 \delta t^2}{1 + f^2 \delta t^2} \frac{\partial}{\partial x} - \beta \delta t \frac{2f \delta t}{1 + f^2 \delta t^2} \frac{\partial}{\partial y} \right) \Phi_i + \\ & + \frac{1 + f^2 \delta t^2}{\delta t} D_i = \frac{1}{\delta t} \left(\frac{\partial \varphi_i^u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_i^v}{\partial y} \right) + f \left(\frac{\partial \varphi_i^v}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_i^u}{\partial y} \right) - \\ & - \beta \frac{1 - f^2 \delta t^2}{1 + f^2 \delta t^2} \varphi_i^u - \beta \frac{2f \delta t}{1 + f^2 \delta t^2} \varphi_i^v. \end{aligned} \quad (58)$$

Введем вместо Φ_i тенденцию геопотенциала $\delta \Phi_i$. Обозначая также

$$\begin{aligned} L &= \Delta - A \frac{\partial}{\partial x} - B \frac{\partial}{\partial y}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \\ A &= \beta \delta t \frac{1 - f^2 \delta t^2}{1 + f^2 \delta t^2}, \quad B = \beta \delta t \frac{2f \delta t}{1 + f^2 \delta t^2}, \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned} L \delta \Phi_i + \frac{1 + f^2 \delta t^2}{\delta t} D_i &= \frac{1}{\delta t} \left(\frac{\partial \varphi_i^u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_i^v}{\partial y} \right) + \\ & + f \left(\frac{\partial \varphi_i^v}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_i^u}{\partial y} \right) - \frac{1}{\delta t} (A \varphi_i^u + B \varphi_i^v) - L \Phi_i^0 \equiv \gamma_i. \end{aligned} \quad (59)$$

¹ Автор модели для линеаризованной системы уравнений показал [19], что достаточно одной итерации относительно нелинейных членов, чтобы данная конечно-разностная схема была устойчива по начальным данным.

Стоящие здесь справа нелинейные члены, как и в формулах для определения составляющих скорости ветра и приземной температуры, считаются известными. Параметры f и β берутся постоянными.

Остается исключить D_i из левых частей уравнений системы (59), т. е. исключить нелинейные члены, содержащие D_i . Для этого можно использовать диагностические соотношения (50)–(52), которые удобно разрешить относительно D_i :

$$D_0 = -\frac{13}{3} \omega_0 + 12\omega_1 - \frac{32}{3} \omega_2, \quad (50a)$$

$$D_1 = -\frac{1}{3} \omega_0 - 4\omega_1 + \frac{16}{3} \omega_2, \quad (51a)$$

$$D_2 = \frac{1}{6} \omega_0 - 3\omega_1 + \frac{4}{3} \omega_2, \quad (52a)$$

Необходимые соотношения для замены ω_i через $\delta\Phi_i$ можно получить, используя непосредственно граничное условие (41), а также исключая из диагностических уравнений (46) и (47), записанных для тенденций, выражения для тенденций температуры δT_i по (57), (48) и (49). Не производя выкладок, которые являются достаточно громоздкими, выпишем лишь вид системы уравнений для определения $\delta\Phi_i$:

$$L\delta\Phi_0 + a_{00}\delta\Phi_0 + a_{01}\delta\Phi_1 + a_{02}\delta\Phi_2 = \Psi_0, \quad (60)$$

$$L\delta\Phi_1 + a_{10}\delta\Phi_0 + a_{11}\delta\Phi_1 + a_{12}\delta\Phi_2 = \Psi_1, \quad (61)$$

$$L\delta\Phi_2 + a_{20}\delta\Phi_0 + a_{21}\delta\Phi_1 + a_{22}\delta\Phi_2 = \Psi_2, \quad (62)$$

где a_{ij} — известные коэффициенты, которые рассчитываются заранее по выбранным параметрам задачи ($\tilde{T}_i$, γ_i , δt), а функции Ψ_i содержат нелинейные члены типа χ_i и др., а также начальные значения функций.

Канонизация этой системы [33] сводит задачу определения тенденций геопотенциала $\delta\Phi_0$, $\delta\Phi_1$, $\delta\Phi_2$ к решению трех уравнений типа Гельмгольца от некоторых функций, через которые $\delta\Phi_i$ выражаются линейно.

6. Расчетная схема

Расчетная схема прогноза по трехуровневой модели основывается на применении уравнений (60)–(62), формул (55)–(57) и диагностических соотношений (46), (47) и (50a)–(52a).

Вначале решением канонизированной системы уравнений (60)–(62) находятся функции Φ_i . При этом нелинейные члены, входящие в правые части уравнений, берутся равными их зна-

чениям в начальный момент (на предыдущем шаге). Найденные функции Φ_i используются для определения u_i и v_i по формулам (55), (56), в которых берутся те же значения ϕ_i , что и при определении χ_i . Наконец, по соотношению (57) с учетом уже найденных функций (u_0, v_0, ω_0, D_0) определяется T_0 . Заметим, что функции $T_1, T_2, \omega_0, \omega_1, \omega_2$, которые необходимы для вычисления правых частей уравнений (60)—(62) и (57), определяются каждый раз по диагностическим соотношениям (46), (47) и (50a)—(52a).

Далее вся процедура расчета повторяется с той лишь разницей, что в нелинейных членах правых частей уравнений (60)—(62) и (55)—(57) берется полусумма начальных и вновь вычисленных значений функций Φ_i, u_i, v_i, T_0 . Найденные таким образом значения функций используются для расчета на следующем шаге по времени. Однако для сокращения времени счета практически можно ограничиться вычислением нелинейных членов только по начальным значениям функций, так как при составлении прогноза на одни сутки вычислительная неустойчивость еще не проявляется.

Данная расчетная схема прогноза на трех уровнях атмосферы была реализована на электронной вычислительной машине для сетки размером 26×22 с шагом 300 км. Входящие в расчетные формулы производные по координатам вычисляются центрированными конечными разностями. Решение уравнений Гельмгольца осуществляется экстраполированным методом Либмана. На краях сетки значения функций закреплены.

При выбранном шаге по времени, равном одному часу, время расчета на сутки составляет 15 мин.

Результаты оперативных расчетов приземных и высотных карт по рассмотренной модели будут изложены в одной из следующих лекций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bolin B. Numerical Forecasting with the Barotropic Model. *Tellus*, 7, No. 1, 1955.
2. Бортников С. А. Опыт краткосрочного прогноза погоды на основе решения полной системы уравнений гидротермодинамики. *Метеорология и гидрология*, № 11, 1962.
3. Бортников С. А. Учет влияния орографии при краткосрочном прогнозе погоды на основе решения полной системы уравнений гидротермодинамики. *Труды ВМЦ*, вып. 1, 1963.
4. Бортников С. А. Опыт краткосрочного оперативного прогноза с помощью полных уравнений. *Труды симпозиума по численным методам прогноза погоды*. Москва, 24—29 июня 1963 г. Гидрометеоиздат, 1964.
5. Булеев Н. И., Марчук Г. И. О динамике крупномасштабных атмосферных процессов. *Труды ИФА АН СССР*, № 2, 1958.
6. Бурцев А. И., Ветлов И. П. Схема численного прогноза ветра в свободной атмосфере. *Метеорология и гидрология*, № 11, 1962.
7. Бурцев А. И. О предвычислении ветра и температуры. *Труды ММЦ*, вып. 6, 1965.

8. Bushby F. H., Huckle V. M. The Use of a Stream Function in a Two-parameter Model of the Atmosphere. Q. J. Roy. Met. Soc., 82, No. 354, 1958.
9. Быков В. В. Об уравнениях динамики атмосферы при гипотезе квазисolenoidalности. Метеорология и гидрология, № 11, 1956.
10. Быков В. В. Об учете отклонения ветра от геострофического в краткосрочном прогнозе. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 3, 1962.
11. Быков В. В. Применение одного метода решения нестационарных задач к краткосрочному прогнозу погоды. Труды ВМЦ, вып. 1, 1963.
12. Charney J. The Use of the Primitive Equations of Motion in Numerical Prediction. Tellus, 7, No. 1, 1955.
13. Дороницын А. А. Об одном методе численного решения некоторых задач аэрогидродинамики. Труды III Всесоюзного математического съезда, т. 2, 1956.
14. Eliassen A. A. A. Procedure for Numerical Integration of the Primitive Equations of the Two-parameter Model of the Atmosphere. Sci. Rept. No. 4, University of California at Los Angeles, 1956.
15. Hinkelmann K. Primitive Equations. 1965.
16. Юдин М. И. Предвычисление поля ветра и связанных с ним метеорологических элементов. ДАН СССР, т. 112, № 1, 1957.
17. Юдин М. И. Новые методы и проблемы краткосрочного прогноза погоды. Гидрометеоиздат, 1963.
18. Кадышников В. М. Применение метода интегральных соотношений при решении полных прогностических уравнений метеорологии. Изв. АН СССР, серия геофиз., № 8, 1962.
19. Кадышников В. М. О применении системы полных уравнений к краткосрочному прогнозу погоды. Труды симпозиума по численным методам прогноза погоды. Москва, 24—29 июня 1963 г. Гидрометеоиздат, 1964.
20. Кибель И. А. Приложение к метеорологии уравнений механики бароклинной жидкости. Изв. АН СССР, сер., географ. и геофиз., № 5, 1940.
21. Кибель И. А. К вопросу о переваливании циклона через горный хребет. Труды НИУ ГУГМС, сер. 1, вып. 30, 1947.
22. Кибель И. А. О приспособлении движения воздуха к геострофическому. ДАН СССР, т. 104, № 1, 1955.
23. Кибель И. А. Выделение геострофического движения при прогнозе погоды. Труды ЦИП, вып. 60, 1957.
24. Кибель И. А. Введение в гидродинамические методы краткосрочного прогноза погоды. Гостехиздат, 1957.
25. Кибель И. А. Способ краткосрочного прогноза метеорологических элементов. ДАН СССР, т. 118, № 4, 1958.
26. Кибель И. А. Конечно-разностная схема решения полной системы уравнений краткосрочного прогноза и соотношения квазигеострофичности. ДАН СССР, т. 132, № 2, 1960.
27. Кибель И. А. Сведение системы дифференциальных уравнений, используемых при краткосрочном прогнозе погоды, к системе алгебраических уравнений. ДАН СССР, т. 143, № 6, 1962.
28. Марчук Г. И., Киреева Н. М. К вопросу о разложении по малому параметру решений системы уравнений гидротермодинамики применительно к атмосферным процессам. Труды ИФА АН СССР, № 2, 1958.
29. Марчук Г. И. Численные методы решения задач прогноза погоды и теории климата. Новосибирск, 1965.
30. Марчук Г. И., Курбаткин Г. П., Каленкович Е. Е., Панчук В. И., Ривин Г. С., Романов Л. Н. О решении системы уравнений краткосрочного прогноза погоды. Изв. АН СССР, серия геофиз., № 12, 1964.

31. Монин А. С. Изменение давления в бароклинной атмосфере. Изв. АН СССР, серия геофиз., № 4, 1958.
32. Монин А. С. Изменение давления в сжимаемой атмосфере. Изв. АН СССР, серия геофиз., № 4, 1961.
33. Немчинов С. В. О решении уравнения для прогноза поля атмосферного давления. Изв. АН СССР, серия геофиз., № 12, 1959.
34. Nemchinov S. V., Sadokov V. P. Establishment of a Scheme Stable in Initial Data to Compute Meteorological Elements by Means of Solving Thermohydrodynamic Equations. Tellus, 14, No. 3, 1962.
35. Обухов А. М. К вопросу о геострофическом ветре. Изв. АН СССР, серия географ. и геофиз., № 4, 1949.
36. Phillips N. A. A Coordinate System Having Some Special Advantage for Numerical Forecasting. J. Met., 14, No. 2, 1957.
37. Phillips N. A. Numerical Integration of the Hydrostatic System of Equations with a Modified Version of the Eliassen Finite-Difference Grid. Proc. Int. Symp. N. W. P., Tokyo, Nov. 7—13, 1960. Japan. Met. Agency, 1962.
38. Прессман Д. Я. Об одной разностной схеме краткосрочного прогноза погоды. Труды ММЦ, вып. 6, 1965.
39. Пятыгина К. В. Агеострофическая модель прогноза полей метеозадающих на большом количестве уровней. Труды симпозиума по численным методам прогноза погоды. Москва, 24—29 июня 1963 г. Гидрометеониздат, 1964.
40. Reiser H. Baroclinic Forecasting with the Primitive Equations. Proc. Int. Symp. N. W. P., Tokyo, Nov. 7—13, 1960. JMA, 1962.
41. Рогов А. И., Фишман Ю. С. Агеострофические отклонения и их учет в численном прогнозе ветра. Труды симпозиума по численным методам прогноза погоды. Москва, 24—29 июня 1963 г. Гидрометеониздат, 1964.
42. Rossby C. G. On the Mutual Adjustment of Pressure and Velocity Distribution in Certain Simple Current Systems, II. J. Marine Res., No. 1, 1937—1938.
43. Shuman F. G. Numerical Methods in Weather Prediction: I. The Balance Equation. Monthly Weather Review, 85, No. 10, 1957.
44. Shuman F. G. Numerical Experiments with the Primitive Equations. Proc. Int. Symp. N. W. P., Tokyo, Nov. 7—13, 1960. Japan Met. Agency, 1962.
45. Томпсон Ф. Д. Анализ и предсказание погоды численными методами. Изд-во иностр. лит., 1962. (Thompson Ph. D. Numerical Weather Analysis and Forecasting, MacMillan, New York, 1961).
46. Цзэн Цин-цунь. Применение полной системы уравнений термодинамики к краткосрочному прогнозу погоды в двухуровневой модели. ДАН СССР, т. 137, № 1, 1961.

ЧАСТЬ Б

IV. ОРГАНИЗАЦИЯ ОПЕРАТИВНОЙ РАБОТЫ ПО СОСТАВЛЕНИЮ ЧИСЛЕННЫХ ПРОГНОЗОВ С ПОМОЩЬЮ ПОЛНЫХ УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИКИ

Остановимся на опыте оперативной работы, которая ведется с помощью моделей, основанных на решении полных уравнений гидродинамики, в Мировом метеорологическом центре (Москва).

Составление оперативных численных прогнозов проводится силами отдела краткосрочного прогноза погоды и мезометеорологии, который ведет опытную оперативную работу наряду с на-

учно-исследовательской работой по созданию методики численного прогноза погоды на базе полных уравнений гидродинамики. Первоначальная цель этих оперативных расчетов состояла в том, чтобы отработать наилучший вариант оперативной прогностической модели для составления ежедневных численных прогнозов. Методика дальнейшего исследования состояла в следующем. Изучалось качество прогностических карт, рассчитанных в оперативных условиях. На основании анализа ошибок в прогнозах в расчетную схему вводились те или иные уточнения. После этого вычисления по новому варианту расчетной схемы производились по тем же исходным данным, подготовленным в оперативных условиях. Оценки прогностических карт вновь изучались и сравнивались с оценками по первому варианту схемы и т. д.

Остановимся на организации оперативной работы по составлению численных прогнозов с помощью полных уравнений гидродинамики. Эти прогнозы стали систематически составляться в отделе краткосрочного прогноза погоды и мезометеорологии с 1964 г., когда упомянутые выше прогностические модели прошли авторские испытания (в основном на старом материале). Расчеты проводились вначале два раза в неделю, по данным за 03 часа московского времени, так что в течение одного месяца прогностические карты составлялись в среднем за восемь сроков. В настоящее время численные прогнозы с помощью полных уравнений составляются ежедневно.

В качестве начальных данных для расчета в оперативных условиях берутся наблюденные значения высот соответствующих изобарических поверхностей и рассчитанные по геострофическим соотношениям значения составляющих скорости ветра. Расчету прогнозов по указанным прогностическим моделям предшествует процедура численного (объективного) анализа значений абсолютного геопотенциала. Численный анализ проводится на пяти уровнях атмосферы (1000, 850, 700, 500 и 300 мб) для 572 узлов прямоугольной сетки (22 ряда по 26 узлов в каждом ряду, шаг сетки 300 км), закрепленной на бланке карты стереографической полярной проекции масштаба 1:15 000 000. Расположение сетки показано на рис. 3 (внутренний прямоугольник). Методика численного многоуровневого анализа аэрологических данных основана на принципе построения карт барической топографии [5, 6].

При составлении оперативных прогнозов проводятся следующие виды работ:

1. Подготовка данных аэрологических и наземных наблюдений для проведения объективного анализа высот изобарических поверхностей.

2. Перфорирование подготовленных данных.

3. Расчет на электронной вычислительной машине по программе численного анализа и по двум программам, реализующим две рассмотренные модели численного прогноза.

4. Наноска предвычисленных данных и анализ прогностических карт.

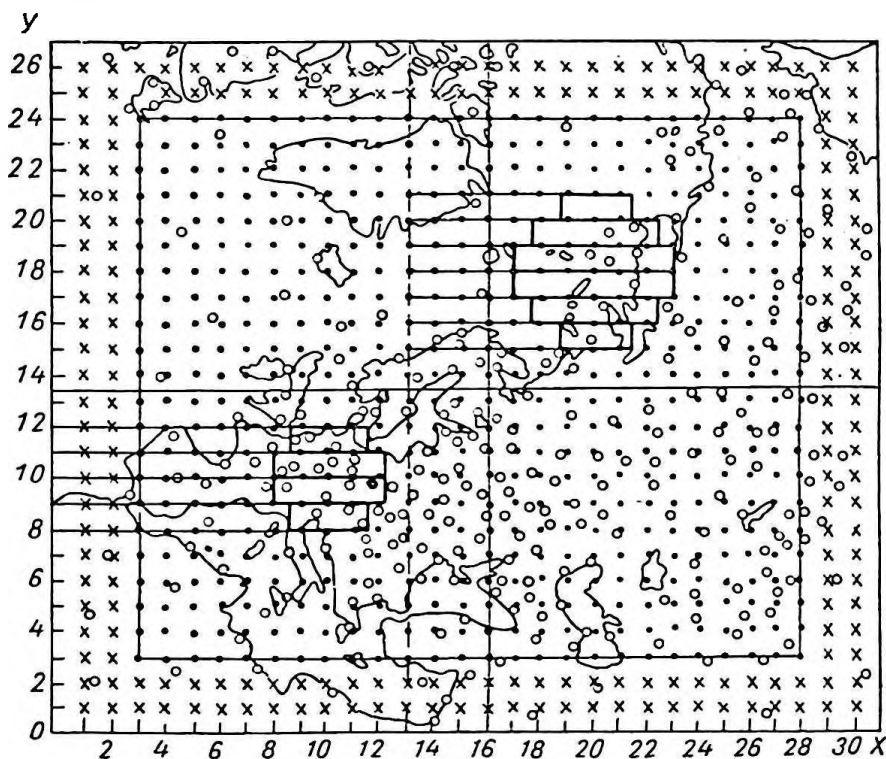


Рис. 3. Расположение сетки точек и стандартная сеть станций, используемых для численного анализа.

Данные аэрологических наблюдений, необходимые для проведения объективного анализа, выписываются в оперативном порядке из поступивших телеграмм на специальные бланки, с которых производится перфорирование. Эти данные для каждой станции включают индекс станции (Iiii) и высоты ($H_K H_K H_K$) изобарических поверхностей 1000, 850, 700, 500 и 300 мб. Кроме этого, на отдельные бланки записываются значения приземного давления за тот же срок для некоторых станций, расположенных на краях сетки, наличие информации от которых желательно при проведении объективного анализа. Эти данные используются для восстановления отсутствующей информации с помощью аэрологических данных за предыдущий срок наблюдений.

Расчет оперативных прогнозов с помощью рассмотренных моделей, основанных на решении полных уравнений, требует следующей затраты машинного времени на электронной вычислительной машине:

Вспомогательная программа восстановления отсутствующей аэрологической информации	0,5 мин.
Программа численного (объективного) анализа геопотенциала на пяти уровнях атмосферы в 572 узлах сетки	7,5 мин.
Программа расчета геопотенциала на двух уровнях и вертикальных токов на 24 часа вперед	5 мин.
на 36 часов вперед	7 мин.
Программа расчета геопотенциала на трех уровнях атмосферы на 24 часа вперед	15 мин.

Весь указанный объем работы на электронной вычислительной машине вместе с вводом и выводом данных численного анализа и численного прогноза занимает не более 35 мин. машинного времени.

Выданные на печать результаты численного анализа и прогноза в виде цифрового материала наносятся на бланки карт, после чего на этих картах проводятся соответствующие изолинии. В ближайшем будущем ввод исходной информации и выдача прогностических карт будут автоматизированы.

В результате осуществления указанного цикла оперативных расчетов с помощью полных уравнений составляются следующие прогностические карты: по двухуровневой модели карты AT_{700} и AT_{300} на 24 и 36 час. вперед и карта прогностических вертикальных токов, по трехуровневой модели карта наземного барического поля и карты AT_{500} и AT_{300} на 24 часа вперед.

В течение всего двухлетнего периода составления опытных оперативных прогнозов по полным уравнениям в отделе краткосрочного прогноза погоды и мезометеорологии систематически велась оценка прогностических карт и изучались характерные ошибки. В период с мая 1964 г. по январь 1965 г. прогностические карты передавались в лабораторию испытания и внедрения, где определялось их качество с помощью различных систем оценок. Ниже мы приведем как оценки, так и примеры прогнозов. Здесь мы укажем лишь некоторые общие выводы, полученные на основе опыта оперативной работы.

Уже первые результаты оперативной работы показали принципиальную возможность получения с помощью полных уравнений прогнозов более точных, чем по квазигеострофическим моделям. Качество карт AT_{300} , рассчитанных с помощью полных уравнений по двухуровневой модели, оказалось в среднем таким же, как при расчете по геострофическим моделям с большим числом уравнений. Это позволило сделать вывод о целе-

сообразности применения методики решения полных уравнений, используемой в двухуровневой модели, при построении прогностической модели с большим числом уровней. В настоящее время эта работа осуществляется автором двухуровневой модели. Аналогичные результаты оказались при расчете прогностических карт высоких уровней (AT_{500} и AT_{300}) с помощью полных уравнений по трехуровневой модели. Однако качество приземных прогностических карт, несмотря на наличие положительных моментов, оказалось вначале заметно хуже, чем качество приземных карт, которые строятся синоптиками. На рассчитанных картах в ряде случаев обнаружилось наличие некоторого «фона» в предсказанных значениях приземного давления. В настоящее время автором модели выработана методика выделения этого фона и проведены другие уточнения в расчетной схеме.

Проведенное усовершенствование трехуровневой модели позволило впервые в практике составления численных прогнозов погоды добиться с помощью полных уравнений хорошего качества приземных прогностических карт. В настоящее время прогностические карты, составляемые на основе полных уравнений, ежедневно передаются в отдел оперативных краткосрочных прогнозов погоды для практического использования.

Перед тем как более подробно остановиться на результатах оперативных расчетов с помощью полных уравнений гидродинамики, рассмотрим многоуровневую схему численного анализа аэрологических данных, используемую при составлении этих прогнозов.

V. ОПЕРАТИВНАЯ МНОГОУРОВНЕВАЯ СХЕМА ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА АЭРОЛОГИЧЕСКИХ ДАННЫХ, ОСНОВАННАЯ НА ПРИНЦИПЕ ПОСТРОЕНИЯ КАРТ БАРИЧЕСКОЙ ТОПОГРАФИИ

1. Применение принципа построения карт барической топографии при численном анализе геопотенциальных высот изобарических поверхностей

В практике численного прогноза с помощью бароклинных (многоуровневых) моделей важную роль играет использование согласованных результатов численного анализа высот изобарических поверхностей. В качестве такой основы для согласования данных при осуществлении численного анализа может быть указана методика анализа геопотенциальных высот, основанная на принципе построения карт барической топографии [5, 6]. Известно, что при построении этих карт определение абсолютного геопотенциала стандартных изобарических поверхностей по данным температурного зондирования атмосферы включает в качестве основного этапа вычисление толщины слоев (значений

относительного геопотенциала) между этими поверхностями с помощью барометрической формулы

$$H_{p_{k+1}} - H_{p_k} = -\frac{R}{g} \int_{p_k}^{p_{k+1}} T \frac{dp}{p} \approx \frac{R}{g} T_m \ln \frac{p_k}{p_{k+1}}. \quad (1)$$

При этом вычисление толщин слоев производится последовательно — от ниже расположенных изобарических поверхностей к выше расположенным. Такой порядок обработки радиозондовых наблюдений обусловлен стремлением повысить точность вычисления значений абсолютного геопотенциала путем более детального учета термического состояния отдельных слоев (применение «способа равных площадей» при определении средней виртуальной температуры слоя T_m). Указанную особенность связи значений геопотенциальных высот изобарических поверхностей целесообразно использовать при проведении численного анализа этих данных. Именно, численный анализ геопотенциальных высот в каждом узле (X_m, Y_m) регулярной сетки точек основывается при этом на применении известного соотношения, являющегося следствием формулы (1),

$$H_{p_{k+1}}(X_m, Y_m) = H_{p_k}(X_m, Y_m) + H_{p_k}^{p_{k+1}}(X_m, Y_m), \\ k = 1, 2, \dots, (s-1), \quad (2)$$

где s — число поверхностей, на которых производится анализ. Анализ сводится при этом к горизонтальной интерполяции в узлы сетки (X_m, Y_m) значений абсолютного геопотенциала самой нижней изобарической поверхности и значений относительного геопотенциала выше лежащих изобарических поверхностей с последовательным применением формулы (2).

Методика многоуровневого анализа, основанная на принципе построения карт барической топографии, имеет ряд преимуществ по сравнению с независимым анализом значений абсолютного геопотенциала на каждой изобарической поверхности. Во-первых, применением этой методики достигается лучшее согласование проинтерполированных в узлы сетки значений абсолютного геопотенциала разных изобарических поверхностей, поскольку они вычислены, как и исходные данные в пунктах зондирования, в соответствии с уравнением статики. Во-вторых, численный анализ относительного геопотенциала как функции более гладкой, чем абсолютный геопотенциал, может быть проведен при помощи менее сложного алгоритма расчета и тем самым дает возможность сократить время вычислений. Наконец, одновременная выборка информации по всем уровням, необхо-

лимая для анализа в отдельном узле сетки, также сокращает время счета.

Переходя к описанию оперативной схемы многоуровневого анализа аэрологических данных для ограниченной территории, заметим, что она представляет дальнейшую модификацию схемы численного анализа, первоначально разработанную для одного уровня [4], а затем для пяти уровней атмосферы [5].

2. Методика применения полиномов для анализа барических полей

В описываемой схеме анализа, как и в предыдущих, широко применяется полиномиальная аппроксимация метеорологических полей. Некоторые авторы использовали полиномиальную интерполяцию в качестве основного алгоритма при построении схем анализа [10, 11 3, 7].

Остановимся на методике применения полиномов для анализа барических полей на разных уровнях атмосферы.

Поле высот самой нижней изобарической поверхности в окрестности каждого узла сетки точек локально представляется с помощью полинома второй степени по безразмерным координатам x и y :

$$H_{p_1} = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{11}xy + a_{20}x^2 + a_{02}y^2, \quad (3)$$

где H_{p_1} — высота изобарической поверхности $p_1 = \text{const}$. Коэффициенты a_{ij} аппроксимирующего полинома определяются из переопределенной системы исходных уравнений методом наименьших квадратов. При составлении системы нормальных уравнений для учета расстояния от станции до узла сетки производится приведение всех условных уравнений к одинаковому «весу» [9]. Найденное из этой системы значение высоты нижней изобарической поверхности в узле — значение коэффициента a_{00} (начало координат помещается в анализируемый узел) — используется далее для определения высоты следующей, выше лежащей изобарической поверхности.

Поле относительного геопотенциала изобарической поверхности над ближайшей стандартной изобарической поверхностью описывается билинейным полиномом

$$H_{p_k}^{p_{k+1}} = b_{00} + b_{10}x + b_{01}y + b_{11}xy, \quad (4)$$

где $H_{p_k}^{p_{k+1}}$ — высота изобарической поверхности $p_{k+1} = \text{const}$ над поверхностью $p_k = \text{const}$. Как и в случае полинома второй степени, коэффициенты b_{ij} билинейного полинома (4) находятся

методом наименьших квадратов. Система нормальных уравнений получается при этом из требования минимума функции E

$$E = \sum_{n=1}^N p_n \left[(b_{00} + b_{10}x_n + b_{01}y_n + b_{11}x_n y_n) - (\tilde{H}_{p_k}^{p_{k+1}})_n \right]^2, \quad (5)$$

где N — число станций, использованных при расчете; $\tilde{H}_{p_k}^{p_{k+1}}$ — наблюдаемое значение относительного геопотенциала изобарической поверхности; p — весовой множитель, учитывающий величину расстояния от станции до узла сетки; $p = \frac{1}{1 + \alpha R}$; α — ко-

эффициент, подбираемый эмпирически; $R = \sqrt{(\bar{x} - \bar{X})^2 + (\bar{y} - \bar{Y})^2}$, где $\bar{x}$ и $\bar{y}$ — безразмерные координаты станции, $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ — безразмерные координаты узла сетки. Полученное в результате расчета значение относительного геопотенциала $H_{p_k}^{p_{k+1}}$ в узле сетки (значение коэффициента b_{00}) используется для определения значения абсолютного геопотенциала выше лежащей изобарической поверхности $H_{p_{k+1}}$ по соотношению (2).

3. Контроль качества исходной информации

Полиномиальная аппроксимация метеорологических полей применяется в рассматриваемой схеме численного анализа и при контроле качества наблюдений, который осуществляется в процессе проведения интерполяции в узел сетки. Методика контроля высот нижней изобарической поверхности (1000 мб) основывается на сопоставлении результатов интерполяции на станции с данными наблюдений этих станций. С помощью вычисленных коэффициентов полинома второй степени производится восстановление высот изобарической поверхности для всех станций, участвующих в расчете узла. При этом бракуется информация, поступившая от тех станций, в которых ошибки (вернее, отклонения наблюдаемых значений высоты изобарической поверхности от значений высоты, полученной при численном анализе) превышают по модулю 3σ , где σ — средняя квадратическая ошибка [14]. При обнаружении грубых ошибок в данных наблюдений матрица коэффициентов исправляется и система нормальных уравнений решается повторно. После проведенного контроля коэффициенты полинома второй степени используются не только для интерполяции в узел сетки, но и для восстановления забракованной или отсутствующей информации на нижней изобарической поверхности.

Контроль наблюдаемых значений абсолютного геопотенциала любой следующей стандартной изобарической поверхности

осуществляется посредством контроля значений относительного геопотенциала этой поверхности над нижележащей. Так как значения относительного геопотенциала вычислены для станций в соответствии с уравнением статики (1) и так как относительный геопотенциал является достаточно гладкой функцией координат, то, по существу, с помощью указанной методики осуществляется статический контроль данных абсолютного геопотенциала. Таким образом, процедура контроля значений относительного геопотенциала аналогична процедуре, применяемой при контроле абсолютного геопотенциала с той лишь разницей, что она проводится, как и анализ относительного геопотенциала, с помощью билинейного полинома (4). Исправленное значение относительного геопотенциала $H_{p_k}^{p_{k+1}}$ для этой станции используется для восстановления забракованного значения абсолютного геопотенциала на вышележащей изобарической поверхности $p_{k+1} = \text{const}$ по формуле (2). После контроля данных производится восстановление отсутствующей информации на указанной поверхности.

4. Некоторые особенности расчетной схемы численного анализа

Численный анализ производится на пяти уровнях атмосферы (1000, 850, 700, 500 и 300 мб) для 572 узлов прямоугольной сетки (шаг сетки 300 км), расположенной на бланке карты стереографической полярной проекции масштаба 1 : 15 000 000. Интерполяция проводится в каждом узле сетки последовательно для всех пяти уровней атмосферы, начиная с нижнего.

В первую очередь рассчитываются значения в узлах сетки, хорошо обеспеченных данными наблюдений, а затем в малоосвещенных районах с привлечением дополнительной информации (значений геопотенциальных высот в проанализированных узлах). Такой порядок расчета, по существу аналогичный синоптическому анализу карт погоды и аэрологических карт, преследует цель повысить надежность работы программы и улучшить качество анализа в крайних узлах сетки.

Для анализа в каждом узле берутся данные наблюдений в радиусе около 2 или 3 клеток сетки (600 или 900 км). Узлы, хорошо обеспеченные исходной информацией, анализируются с использованием наблюдений в радиусе 600 км. При анализе последующих узлов производится расширение области, из которой выбирается исходная информация. В случаях когда в окрестности узла количество станций, от которых поступили телеграммы, меньше заданной константы (10 станций при анализе с помощью полиномов второй степени), при составлении системы нормальных уравнений используются рассчитанные значения геопотенциала в ближайших проанализированных узлах.

Важным моментом при реализации задачи численного анализа на электронной вычислительной машине является применение рациональной методики отбора информации, необходимой для расчета, позволяющей сократить время на ее поиск.

Данные абсолютного геопотенциала для анализа в отдельном узле сетки (X_m, Y_m) выбираются из поля исходной информации I сразу для всех пяти уровней атмосферы. Это необходимо для осуществления алгоритма расчета и дает, кроме того, значительную экономию времени. Для того чтобы облегчить поиск станций в заданной окрестности узла сетки, поле исходной информации I определенным образом упорядочивается, так что данные каждой станции располагаются в памяти машины на определенных адресах. Именно, вся область на бланке синоптической карты (рис. 3) разбивается на полосы, параллельные оси X (ширина полос равна шагу сетки). В памяти машины содержатся вначале данные станций первой полосы поля I в порядке возрастания абсцисс, затем второй полосы в том же порядке и т. д. Испытанию на принадлежность к окрестности анализируемого узла $(\bar{X}_m, \bar{Y}_m)$ подвергаются последовательно те станции, которые находятся в пределах ближайших к узлу четырех полос (шести полос в малоосвещенных районах), ограниченных прямыми, параллельными оси X . Если рассчитываемый узел находится в левой половине сетки ($\bar{X}_m < 16$), то испытание начинается с первой станции в полосе, если в правой ($\bar{X}_m \geq 16$), то первой испытывается станция, имеющая абсциссу $\bar{x}_i \geq 16 - 3 = 13$. В каждой полосе испытание станций заканчивается сразу же, как только встретится станция с абсциссой $\bar{x}_i > \bar{X}_m + L_s$, где L_s — заданная константа для полосы ($L_s \leq 2$, если станции выбираются из четырех полос, и $L_s \leq 3$, если из шести полос). На рис. 3 для двух узлов, расположенных в левой и правой половине сетки, сплошными линиями показаны границы областей, внутри которых данные наблюдений используются для расчета (с радиусами выборки 600 и 900 км), и участки полос, в которых станции испытываются на принадлежность к окрестности анализируемого узла.

Исходная информация о геопотенциале, а также о ветре (если предполагается производить анализ последнего) вводится в электронную вычислительную машину в том виде, в каком она получена в телеграмме. В последнем случае данные каждой станции занимают шесть ячеек памяти машины. В одной из них содержится индекс станции III_i , в пяти других — высоты изобарических поверхностей $H_k H_k H_k$ в цифрах аэрологического кода, направление ветра dd в десятках градусов и скорость ветра ff в метрах в секунду или узлах на указанных пяти уровнях атмосферы. Порядок ввода данных каждой станции безразличен. Соответствующую растасовку данных всех

станций, необходимую для быстрого нахождения информации при проведении анализа в каждом узле сетки, производит сама машина.

Вся программа численного анализа состоит из двух независимых частей — вспомогательной и основной.

5. Вспомогательная программа

Вспомогательная программа предназначена для первоначальной обработки данных наблюдений и приведения их к виду, удобному для основных расчетов. При работе этой программы используется вспомогательная информация K (шпаргалка), содержащая для всех возможных станций, расположенных в указанном выше порядке, сведения об их координатах и значениях некоторой специальной константы γ , предназначенной для обработки ветра и характеризующей ориентацию сетки точек относительно географической системы координат. Каждой станции в массиве K отводятся две ячейки памяти. Одну из них занимает индекс станции, другую — координаты станции $(\bar{x}, \bar{y})$, константа $\gamma = 270^\circ + \beta$, где β — угол отклонения оси ординат от меридиана, и признак, указывающий, в каких единицах поступают от станции данные о ветре (в метрах в секунду или в узлах).

Вспомогательная программа производит следующие логические и арифметические операции:

- 1) растасовку исходной информации в заданном порядке и замену индексов станций координатами с помощью вспомогательной информации K ;
- 2) раскодировку данных геопотенциала и ветра по аэрологическим кодам;
- 3) формальную отбраковку данных, содержащих грубые ошибки, исходя из известных пределов значений высот разных изобарических поверхностей;
- 4) вычисление горизонтальных составляющих скорости ветра по осям прямоугольных координат по формулам

$$u = ff \cos \varphi, \quad v = ff \sin \varphi, \quad (6)$$

где $\varphi = \gamma - 10dd$.

Расчет по вспомогательной программе длится около 1,5 мин.

6. Основная программа численного анализа

Главную задачу анализа — интерполяцию в узел сетки и контроль качества исходной информации — осуществляет основная программа. При расчетах по основной программе в память машины вводится вспомогательное поле рассчитываемых

узлов сетки U , перенумерованных построчно. В каждой ячейке этого поля содержатся координаты соответствующего узла сетки $(\bar{X}, \bar{Y})$ и адрес (C) следующего узла, для которого должен проводиться расчет. Благодаря этому может быть заранее задана любая последовательность анализа узлов. В первую очередь анализ проводится для тех узлов сетки, в окрестности которых имеется более пустая сеть пунктов зондирования.

Результаты численного анализа в узлах сетки посылаются в соответствующие ячейки поля $U(H_{1000}; H_{850}; H_{700})$, где до этого хранились координаты узлов, и ячейки поля $U_1(H_{500}; H_{300}; 0)$. Заметим, что поля U и U_1 дважды «окантованы» свободными ячейками (этим ячейкам на рис. 3 соответствуют узлы, отмеченные крестиками), что позволяет очень просто производить выборку данных из проанализированных узлов.

Основная программа реализует следующую схему расчета для каждого узла сетки:

1) выделение из ячейки U_m поля U координат $\bar{X}_m$ и $\bar{Y}_m$ узла, для которого производится анализ;

2) выделение из поля I информации от станций, попадающих в заданную окрестность анализируемого узла сетки. При выборке информации, осуществляемой по приведенной выше схеме, используется набор специальных констант, указывающих, с какой станции в каждой полосе надо начинать испытание станций на принадлежность к окрестности узла сетки. Выбранные значения геопотенциальных высот (или составляющих скорости ветра) вместе с координатами $(\bar{x}_n, \bar{y}_n)$ и адресами станций I_n посылаются в специально отведенные рабочие ячейки памяти машины R_i . Вся процедура отбора данных из поля исходной информации I (330 возможных станций) для анализа в 572 узлах на пяти уровнях занимает не более двух минут времени работы электронной вычислительной машины;

3) приведение в рабочих ячейках R_i выбранной информации к виду, удобному для расчетов, вычисление координат станций (x_n, y_n) относительно нового начала в узле U_m ($x_n = \bar{x}_n - \bar{X}_m$; $y_n = \bar{y}_n - \bar{Y}_m$), вычисление весового множителя $V/\bar{p}_n$ и др.;

4) выделение из ячеек, соответствующих ближайшим проанализированным узлам, вычисленных значений геопотенциальных высот, выделение из констант программы координат этих узлов и значений весового множителя $V/\bar{p}$; эти данные также посылаются в рабочие ячейки R_i ;

5) проведение интерполяции в узел сетки значений абсолютного геопотенциала нижней изобарической поверхности (1000 мб) с помощью полинома второй степени и запоминание значения H_{1000} в узле;

6) контроль качества наблюдений абсолютного геопотенциала нижней изобарической поверхности (исключение информации, содержащей грубые ошибки) с использованием вычисленных коэффициентов полинома второй степени;

7) восстановление отсутствующих или забракованных данных по коэффициентам полинома второй степени и посылка вычисленных значений геопотенциальных высот нижней изобарической поверхности (1000 мб) в ячейки поля исходной информации I , соответствующие забракованным станциям;

8) проведение интерполяции в узел сетки значений относительного геопотенциала следующей изобарической поверхности (H_{1000}^{850}) с помощью билинейного полинома, контроль данных наблюдений, исправление забракованной и восстановление отсутствующей информации;

9) вычисление и запоминание значения абсолютного геопотенциала выше лежащей изобарической поверхности (H_{850}) по соотношению (2), переход к анализу следующего уровня и т.д.

Вычисленные значения абсолютного геопотенциала в узле на всех пяти изобарических поверхностях посылаются в соответствующие ячейки полей U и U_1 , где они хранятся соответственно по три и два числа в ячейке, после чего осуществляется организация работы программы для анализа данных в следующем узле.

Продолжительность расчетов на электронной вычислительной машине по основной программе (выборка информации из поля I и численный анализ в $572 \times 5 = 2860$ узлах сетки) составляет около шести минут.

7. Некоторые оценки качества численного анализа

Рассмотрим вопрос о точности интерполяции при расчетах по рассмотренной схеме численного анализа.

В первую очередь приведем сведения о точности интерполяции при анализе высот изобарической поверхности 1000 мб, осуществляемой с помощью полинома второй степени. Одной из возможных оценок, характеризующих точность интерполяции, является величина среднего (среднего квадратического) отклонения результатов численного анализа от результатов синоптического анализа. Однако эту оценку, одну из наиболее надежных в районах с достаточным количеством информации, мы не сможем привести для данного уровня из-за отсутствия синоптически проанализированных карт топографии изобарической поверхности 1000 мб. Поэтому мы остановились на способе оценки точности анализа, при котором результаты интерполяции на станцию сопоставляются с данными наблюдений этой станции. Практически это было осуществлено следующим образом. К основной программе анализа была подключена под-

программа, которая изымала наблюденное значение H_{1000} на ближайшей к узлу станции, так что соответствующее этой станции условное уравнение не участвовало в составлении системы нормальных уравнений. После решения этой системы восстановленное по найденным коэффициентам полинома второй степени значение H_{1000} для указанной станции сравнивалось с фактическим значением этой величины. Такой расчет был проведен при анализе всех 572 узлов сетки по данным за 03 часа 10 марта 1964 г. Оценки точности интерполяции представлены в табл. 1 отдельно для густой и редкой сети станций.

Таблица 1

Средние (α) и средние квадратические (σ) отклонения (дкм) фактических значений H_{1000} и H_{850} от вычисленных по коэффициентам полиномов для ближайших станций к узлу для густой (числитель) и редкой (знаменатель) сети станций

Уровень, мб	Без отбраковки			С отбраковкой		
	число случаев	α	σ	число случаев	α	σ
1000	144	1,09	1,49	142	1,03	1,34
	428	1,72	2,21	396	1,49	1,88
850	144	1,03	1,32	143	1,00	1,30
	428	1,57	2,03	417	1,51	1,94

Сеть станций считалась редкой, если в радиусе 400 км от узла сетки или совсем не было станций, или их было не больше двух.

В табл. 1 приведены также данные сопоставления наблюденных значений абсолютного геопотенциала на изобарической поверхности 850 мб (в тот же срок) с результатами интерполяции этой функции по методике, применяемой в рассмотренной схеме численного анализа. При этих расчетах горизонтальная интерполяция относительного геопотенциала производилась с помощью полинома первой степени. Процедура расчета была аналогичной (на ближайшей к узлу станции искусственно браковалось — заменялось признаком отсутствия информации — значение абсолютного геопотенциала поверхности 850 мб и т. д.).

Приведем также для изобарической поверхности 850 мб величины среднего и среднего квадратического отклонений в узлах сетки значений абсолютного геопотенциала, полученных при численном анализе, от соответствующих значений, полученных при синоптическом анализе. Для густой сети станций (144 случая) они оказались соответственно равными 0,90 и 1,20 дкм, а для редкой сети (428 случаев) — 1,26 и 1,58 дкм.

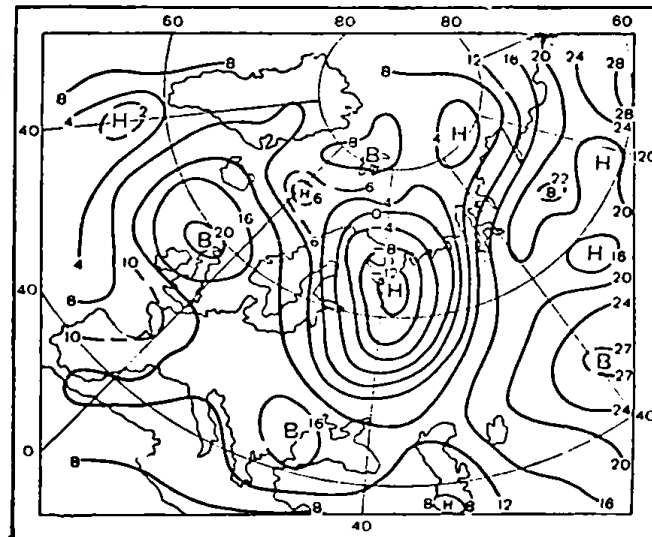


Рис. 4. Карта AT_{1000} в 03 часа 10 марта 1964 г. (по данным численного анализа).

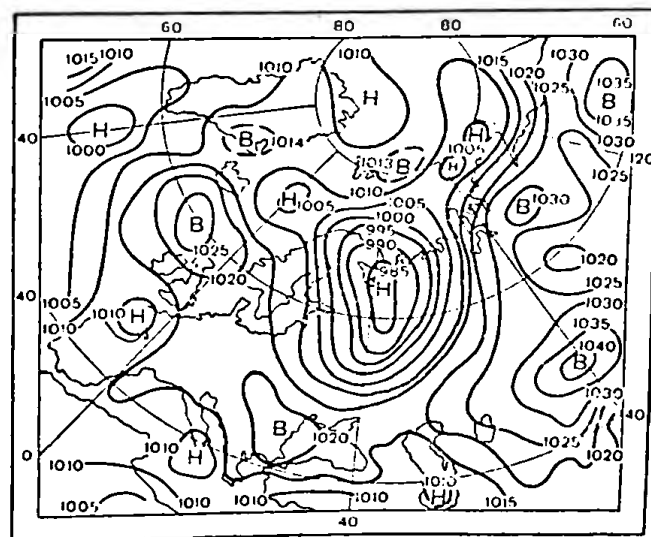


Рис. 5. Карта приземного барического поля в 03 часа 10 марта 1964 г. (синоптический анализ).

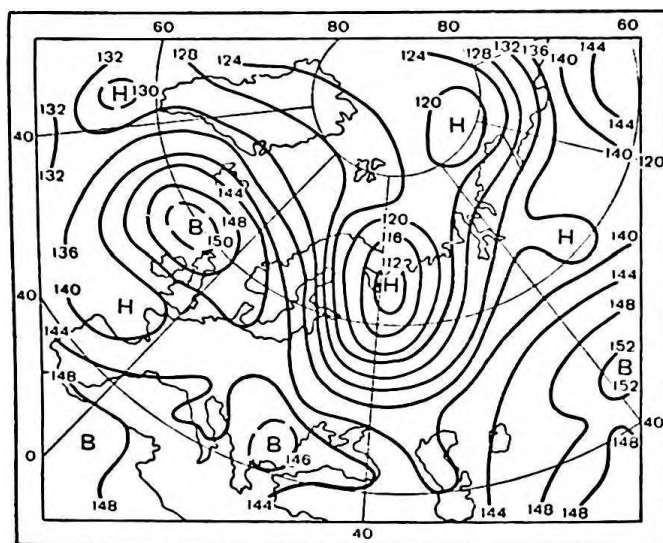


Рис. 6. Карта AT_{850} в 03 часа 10 марта 1964 г.
(по данным численного анализа).

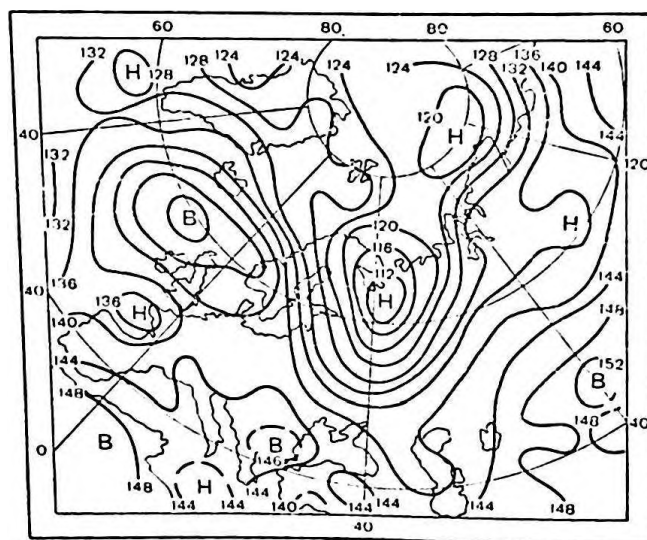


Рис. 7. Карта AT_{850} в 03 часа 10 марта 1964 г.
(синоптический анализ).

Для качественного сопоставления мы приводим на рис. 4 и 5 соответственно карту AT_{1000} за 03 часа 10 марта 1964 г., построенную по данным численного анализа в узлах сетки, и карту приземного барического поля, проанализированную по данным наблюдений синоптических станций; на рис. 6 и 7 представлены соответственно численный и синоптический анализ карты AT_{850} того же срока.

8. Применение рассмотренной схемы численного анализа

Разработанная схема численного анализа аэрологических данных, основанная на принципе построения карт барической топографии, применяется в работе отдела краткосрочных прогнозов погоды и мезометеорологии Мирового метеорологического центра при расчете оперативных прогнозов по полным уравнениям гидродинамики. На основе этой же схемы анализа в Вычислительном центре СО АН СССР составляются для Западно-Сибирского управления гидрометслужбы оперативные краткосрочные прогнозы по пятнуровенной квазигеострофической модели [12]. Кроме того, указанная схема анализа применяется в исследовательской работе. В частности, проведенный в экспериментальном порядке анализ составляющих скоростей ветра позволил провести первые опыты по использованию реального ветра наряду с геопотенциалом, в качестве начальных данных для прогноза по полным уравнениям гидродинамики.

VI. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА ОПЕРАТИВНЫХ ПРОГНОЗОВ С ПОМОЩЬЮ ПОЛНЫХ УРАВНЕНИЙ

В течение почти двухлетнего периода проведения оперативных расчетов с помощью полных уравнений был накоплен достаточный материал для того, чтобы сделать выводы о достоинствах и недостатках прогностических моделей, установить характерные ошибки прогнозов и внести в дальнейшем необходимые изменения в расчетные схемы. Для суждения о качестве прогностических карт вычислялись следующие объективные оценки:

- 1) средняя относительная ошибка ϵ прогноза давления (геопотенциала), равная отношению средней абсолютной ошибки к среднему абсолютному изменению этой величины;
- 2) величина ρ , равная отношению разности числа совпадений знака изменения давления (геопотенциала) и числа несовпадений этого знака к общему числу случаев.

Обе оценочные величины вычислялись по данным 50 пунктов, расположенных главным образом в Европе.

Хотя одних этих оценок, по-видимому, недостаточно, чтобы дать исчерпывающую характеристику качества прогностических карт, однако в известной степени они могут дать представление о том, насколько удачен тот или иной прогноз, и позволяют судить о достоинствах и недостатках разных прогностических моделей.

Остановимся вначале на результатах расчета прогностических карт с помощью полных уравнений по трехуровневой модели [12].

Уже первые примеры прогнозов приземного барического поля, рассчитанные в оперативных условиях с помощью полных уравнений, привлекли внимание синоптиков-прогнозистов к трехуровневой модели, так как в ряде случаев по этой модели сравнительно неплохо прогнозировались резкие перестройки барического поля, улавливались процессы цикло- и антициклогенеза. В качестве примеров можно привести удачные прогнозы циклогенеза в районе Москвы с 20 на 21 мая 1964 г., резкой перестройки барического поля над Европой и Западной Сибирью с 22 по 23 сентября 1964 г. и др., когда качество прогностических карт, рассчитанных с помощью полных уравнений, оказалось лучше качества прогностических карт, построенных синоптическим методом, а также рассчитанных по квазигеострофической модели. Однако по мере накопления примеров прогноза можно было иногда даже визуально усмотреть наличие некоторого фона в предсказанном поле приземного давления. Это, естественно, сказалось на оценках прогностических карт. Средняя относительная ошибка приземных прогностических карт, полученных с помощью первоначального варианта расчетной схемы по трехуровневой модели за период с мая 1964 г. по январь 1965 г. (всего 58 оцененных случаев), оказалась значительно большей (0,94), чем для карт, построенных обычным синоптическим способом (0,66). Знак изменения давления по трехуровневой модели предсказывался правильно в 68% случаев, а синоптическим способом — в 78%; лишь в центрах барических образований знак изменений давления прогнозировался несколько лучше по трехуровневой модели, чем синоптическим способом. Следует однако отметить, что полной идентичности условий составления прогнозов численным и синоптическим методом не было, а именно:

- 1) прогноз численным методом составлялся по данным за 03 часа, а синоптики-прогнозисты при построении будущей карты использовали приземную карту за 06 час., т. е. прогноз синоптическим методом давался с меньшей заблаговременностью (на 21 час вперед, а не на 24 часа вперед);
- 2) при построении будущей карты синоптическим методом привлекалась дополнительная информация в виде барической тенденции;

3) при составлении численных прогнозов использовались в качестве начальных данных и прогнозировались высоты изобарической поверхности 1000 мб, а переход к выдаче будущих величин приземного давления осуществлялся при постоянном значении барической ступени, тогда как синоптики при построении будущих карт пользовались данными приземного давления. Последнее давало им также преимущество в количестве использованных станций.

Для того чтобы добиться улучшения качества прогностических карт, потребовалось дальнейшее усовершенствование трехуровневой модели, которое в основном сводилось к следующему.

1) изменению некоторых параметров задачи и уточнению технических деталей решения прогностических уравнений;

2) учету трения в пограничном слое атмосферы;

3) ликвидации фона в предсказанном поле геопотенциала, обнаруженного при анализе качества прогностических карт.

Однако основной эффект в улучшении качества приземных прогностических карт был достигнут в результате «выделения климата», т. е. учета так называемых климатических поправок. Процедура выделения климата, идентичная косвенному учету неадиабатичности атмосферных процессов, уже применялась и дала определенный эффект при расчетах по оперативным моделям гидродинамического долгосрочного прогноза погоды. Эта процедура заключается прежде всего в том, что климатические поля геопотенциальных высот для каждого месяца и рассчитанные по ним поля геострофического ветра берутся в качестве начальных данных при прогнозе. Таким образом, в результате этих расчетов для данного месяца определяются климатические поправки — тенденции изменения геопотенциала, которые при прогнозе вычитаются из реальных прогностических полей. Естественно было ожидать, что выделение климата даст наибольший эффект при прогнозах приземного барического поля в зимние месяцы года. Учет климатических поправок для 22 прогнозов (в октябре, ноябре и декабре 1964 г.) позволил, например, уменьшить среднюю относительную ошибку прогноза поля приземного давления, рассчитанного по трехуровневой модели, на 14%.

Проведенные автором трехуровневой модели экспериментальные расчеты на оперативном материале позволили отработать методику прогноза приземных карт. Оценки прогнозов по этой уточненной методике за некоторые месяцы 1964—1965 гг. представлены в табл. 2.

Согласно этим оценкам, качество приземных карт, рассчитываемых с помощью полных уравнений, уже достигло точности синоптических прогнозов.

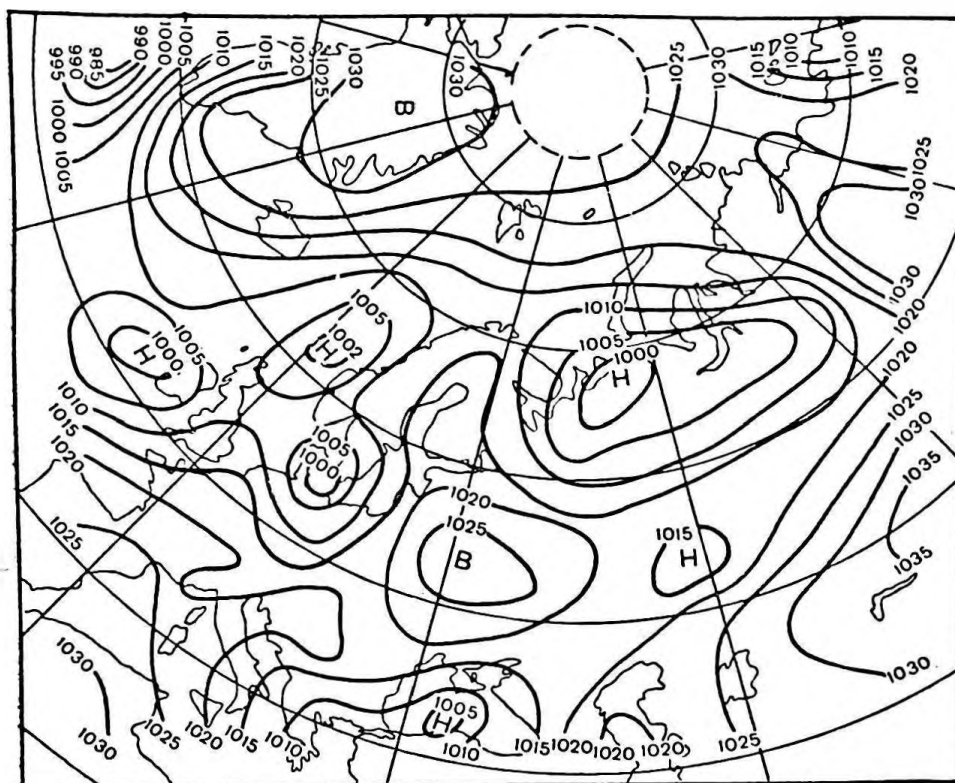


Рис. 9. Приземная карта в 03 часа 25 ноября 1965 г.

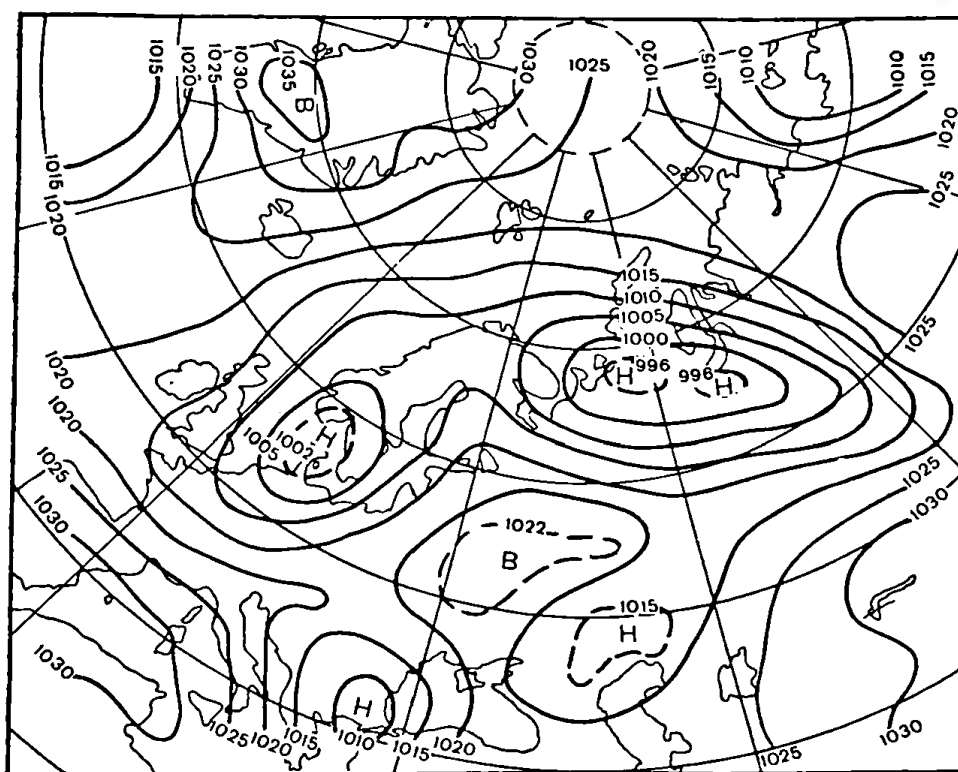


Рис. 10. Предвычисленная приземная карта на 03 часа 25 ноября 1965 г. (полные уравнения).

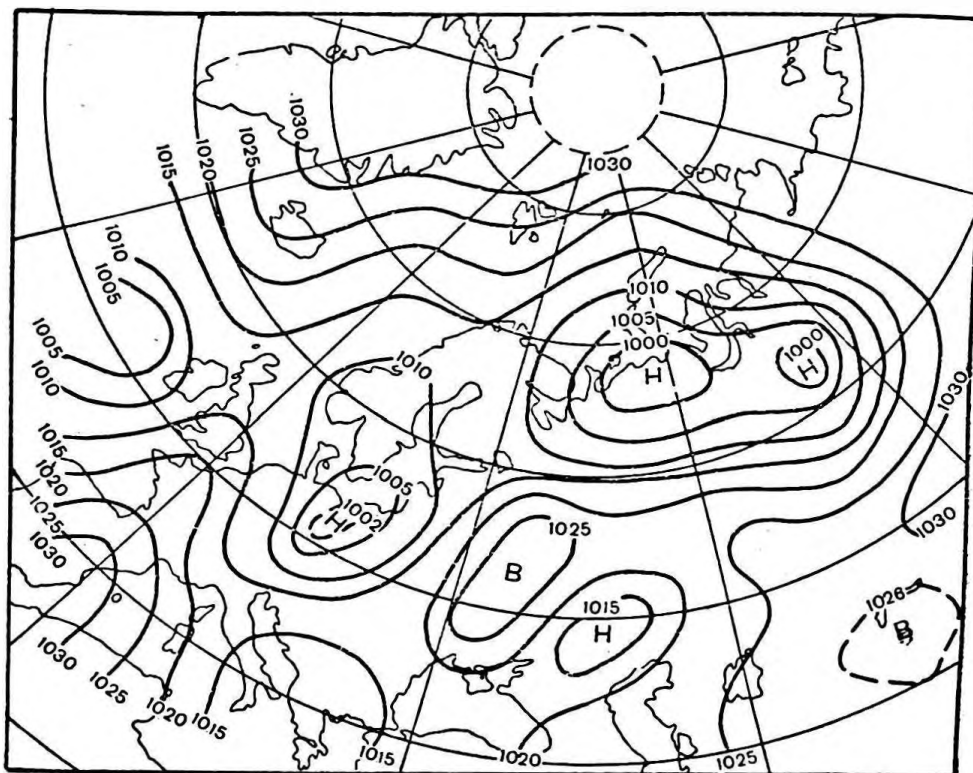


Рис. 11. Прогностическая приземная карта на 03 часа 25 ноября 1965 г. (синоптический метод).

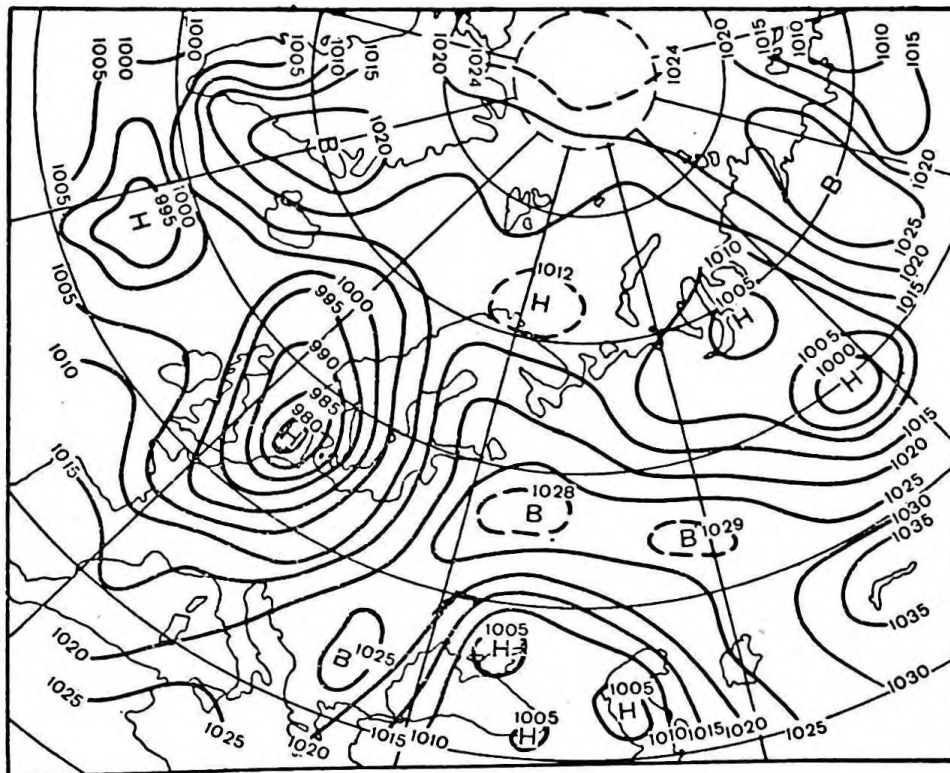


Рис. 12. Приземная карта в 03 часа 26 ноября 1965 г.

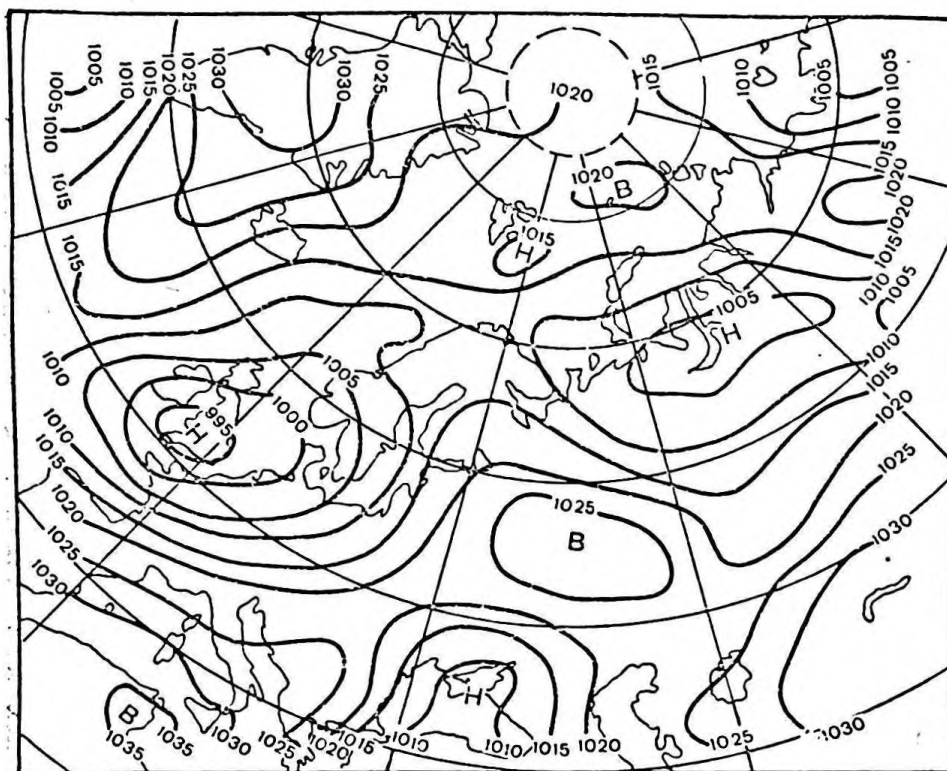


Рис. 13. Предвычисленная приземная карта на 03 часа 26 ноября 1965 г. (полные уравнения).

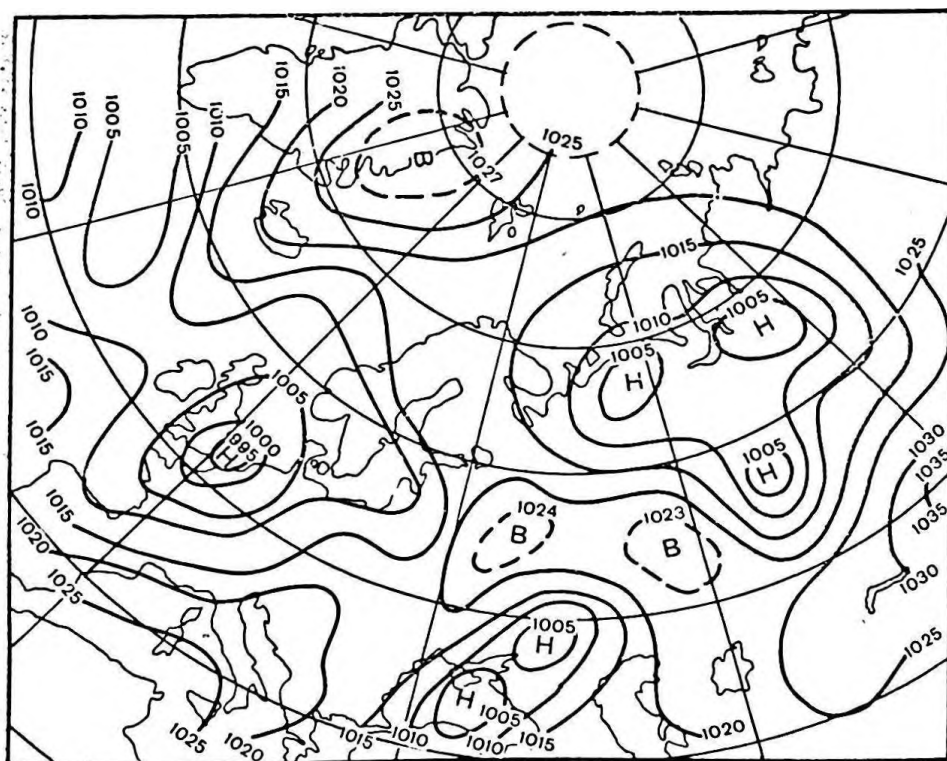


Рис. 14. Прогностическая приземная карта на 03 часа 26 ноября 1965 г. (синоптический метод).

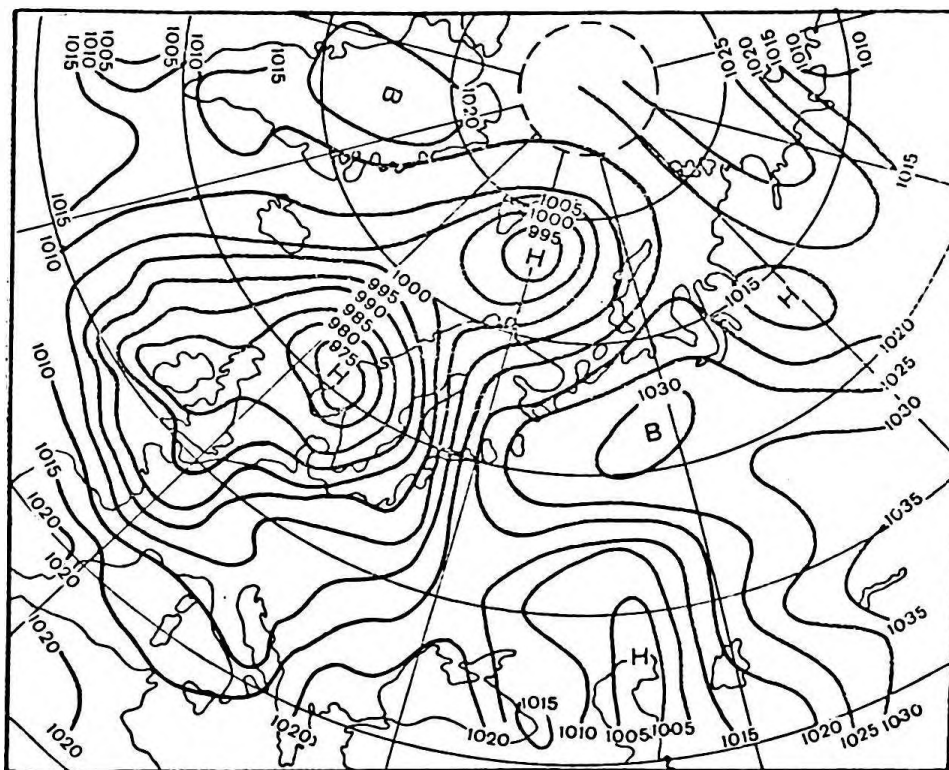


Рис. 15. Приземная карта в 03 часа 27 ноября 1965 г.

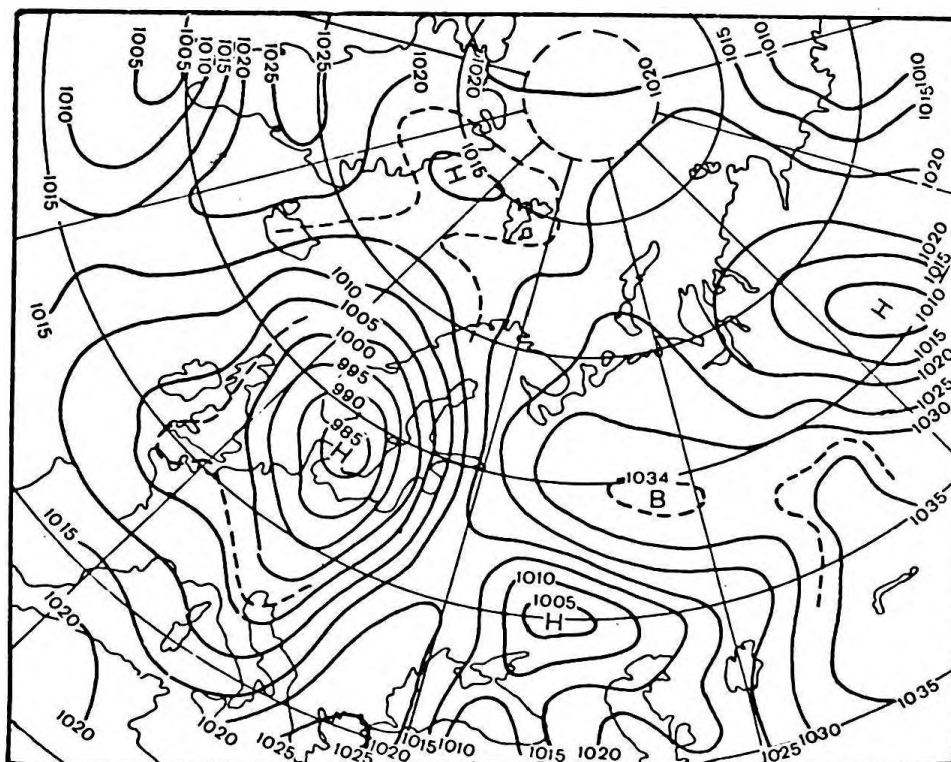


Рис. 16. Предвычисленная приземная карта на 03 часа 27 ноября 1965 г. (полные уравнения).

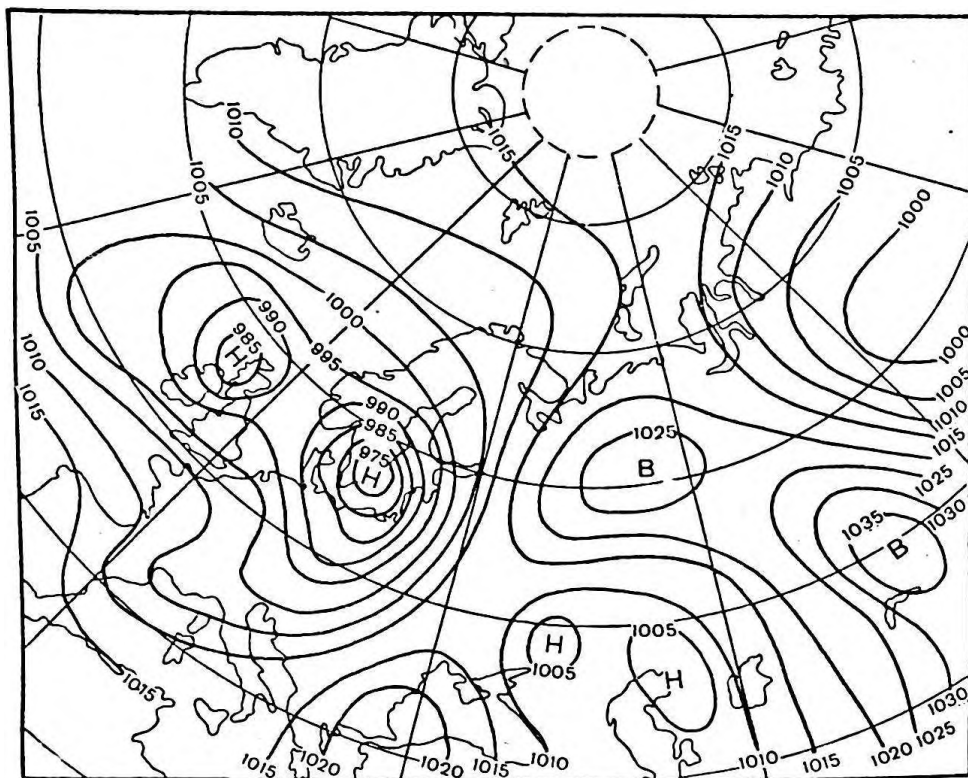


Рис. 17. Прогностическая приземная карта на 03 часа 27 ноября 1965 г. (синоптический метод).

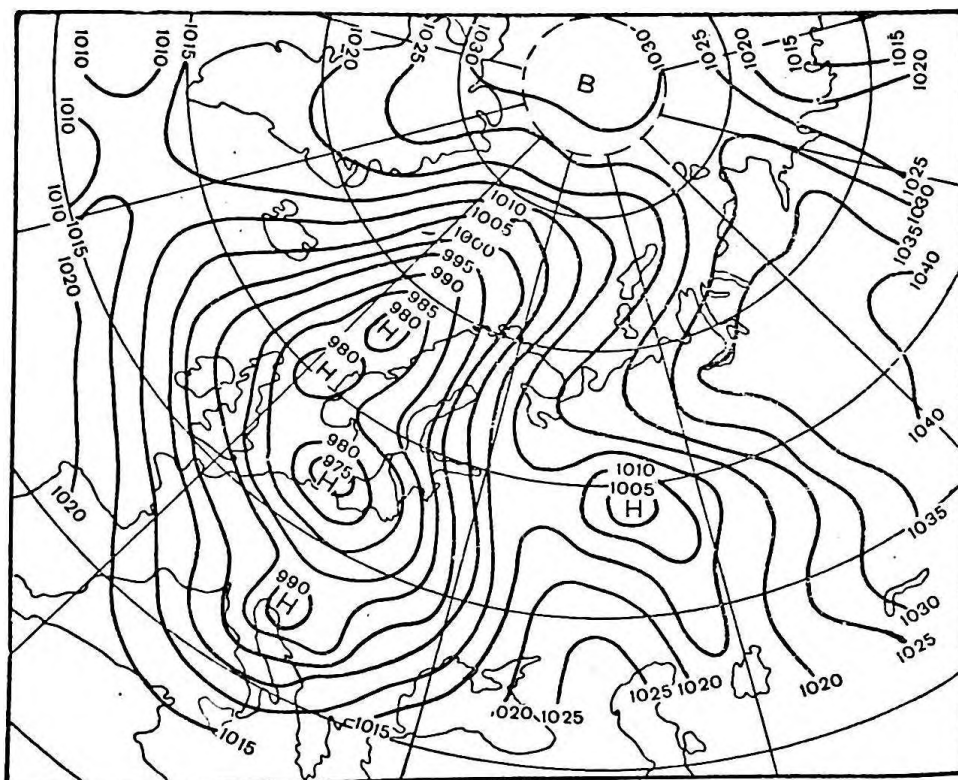


Рис. 18. Приземная карта в 03 часа 28 ноября 1965 г.

Таблица 4

Оценки приземных прогностических карт, представленных на рис. 10, 11, 13, 14, 16, 17, 19 и 20

Виды оценок	25 XI		26 XI		27 XI		28 XI	
	ε	ρ	ε	ρ	ε	ρ	ε	ρ
Трехуровневая модель (полные уравнения)	0,74	0,46	0,59	0,52	0,63	0,56	0,48	0,76
Синоптический метод	0,89	0,42	0,76	0,50	0,74	0,74	0,45	0,84

Полная замена в оперативной работе будущих приземных карт численными упирается в основном в технические детали, связанные со сбором к определенным срокам необходимой аэрологической информации из некоторых районов, и будет осуществлена в недалеком будущем.

В заключение заметим, что дальнейшая задача в области краткосрочных численных прогнозов погоды заключается в том, чтобы на основе полных уравнений добиться дальнейшего уточнения прогнозируемых величин, а также перейти от прогноза общей метеорологической ситуации к численному прогнозу локальной погоды. Последняя задача, связанная с отказом от гипотезы квазистатичности, уже поставлена [8] и успешно разрешается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бортников С. А. Учет влияния орографии при краткосрочном прогнозе погоды на основе решения полной системы уравнений гидротермодинамики. Труды ВМЦ, вып. 1, 1963.
2. Бортников С. А. Об использовании ветра в качестве начальных данных при прогнозе по полным уравнениям. Труды ММЦ, вып. 6, 1965.
3. Bushby F. H., Huckle V. M. Objective Analysis in Numerical Forecasting. Q. J. Roy. Met. Soc., 83, No. 356, 1957.
4. Быков В. В., Курбаткин Г. П. Анализ метеорологических и аэрологических данных с помощью электронной вычислительной машины. ДАН СССР, 134, № 5, 1960.
5. Быков В. В., Курбаткин Г. П., Горелышева И. В. Опыт построения многоуровневой схемы численного анализа аэрологических данных. Труды ММЦ, вып. 4, 1964.
6. Быков В. В., Горбунова О. К. Применение принципа построения карт барической топографии к численному анализу аэрологических данных. Метеорология и гидрология, № 5, 1965.
7. Corby G. A. Some Experiments in the Objective Analysis of Contour Charts. Q. J. Roy. Met. Soc., 87, No. 371, 1961.
8. Кибель И. А. Некоторые новые задачи гидродинамического краткосрочного прогноза погоды. Труды ММЦ, вып. 3, 1964.

9. Крылов А. Н. Лекции о приближенных вычислениях. Гостехиздат, М.—Л., 1950.
10. Gilchrist B., Cressman G. P. An Experiment in Objective Analysis. *Tellus*, 6, No. 4, 1954.
11. Johnson D. H. Preliminary Research in Objective Analysis. *Tellus*, 9, No. 3, 1957.
12. Кадышников В. М. Применение метода интегральных соотношений при решении полных прогностических уравнений метеорологии. Изв. АН СССР, серия геофиз. № 8, 1962.
13. Марчук Г. И. [и др.]. Оперативная квазигеострофическая схема краткосрочного прогноза погоды для пяти уровней атмосферы. Изв. АН СССР, серия физики атмосферы и океана, т. 1, № 2, 1965.
14. Шнголев Б. М. Математическая обработка наблюдений. Физматгиз, М., 1960.

МНОГОУРОВЕННАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ОПЕРАТИВНОГО ЧИСЛЕННОГО ПРОГНОЗА ПОГОДЫ, ОСНОВАННАЯ НА РЕШЕНИИ ПОЛНЫХ УРАВНЕНИЙ

Ф. Г. ШУМАН и др.

ВВЕДЕНИЕ

Для обсуждения данного вопроса собраны три более или менее независимые статьи. При усовершенствовании модели с полными уравнениями в численные методы было вложено по крайней мере столько же усилий, сколько и в метеорологию модели. Первые две статьи, написанные в соавторстве с Дж. Д. Стэкпулом и Л. В. Вандерманом, посвящены развитию существующих численных методов. Эти статьи содержат недавно полученные результаты, но они являются продолжением и дальнейшим развитием предшествующих исследований Шумана [1]. Основной способ численного горизонтального дифференцирования был впервые получен и испытан на наиболее простой одномерной физической системе Стэкпула. Этот метод был затем обобщен на двумерный случай и проверен на атмосферных моделях, состоящих из автобаротропных слоев. Только после этого он был испытан на полной системе метеорологических уравнений.

Значение первых двух статей состоит в том, что они показывают возможность интегрирования на длительный срок при использовании относительно простой численной схемы. В третьей статье описывается применение этой численной схемы к общим метеорологическим гидростатическим уравнениям. В силу необходимости в этом методе применяются конечные разности по вертикальной координате, которая совершенно отличается от горизонтальных координат в гидростатических уравнениях. Были рассмотрены некоторые способы разностного представления производных по вертикальной координате, но они оказались не вполне пригодными при неограниченном увеличении срока интегрирования. Мы проинтегрировали два случая продолжительностью несколько дней (восемь и пятнадцать) и для таких периодов используемые методы представляются приемлемыми. Однако в этих случаях

наблюдается систематический рост средней квадратической дивергенции, который указывает, что эти методы не столь пригодны, как метод Вандермана.

Что касается численного прогноза на более длительный срок, то здесь мы не сдвинулись с места. Мы можем давать такие прогнозы по моделям, состоящим из автобаротропных слоев, но остается проблемой прогноз с помощью полной системы уравнений. Представляется ясным, что в этой проблеме основное внимание должно быть сосредоточено на способе расписывания производных по вертикальной координате.

Численные методы для многоуровневых моделей развивались с помощью численных экспериментов, метода «проб и ошибок», хотя линейная теория в ряде случаев служила некоторым ориентиром. Полная система метеорологических гидростатических уравнений настолько сложна, что такая программа исследований в целом вряд ли выполнима с помощью численных экспериментов. Эти уравнения допускают слишком много возможных разностных формулировок и требуют для расчетов много машинного времени и, следовательно, больших материальных затрат.

Рациональная рабочая гипотеза состоит в том, что приближенная схема, не дающая удовлетворительных результатов для физических систем, более простых, чем атмосфера, не может успешно применяться к метеорологическим уравнениям и к сложной структуре атмосферы. Мы допускаем, что это предположение может быть и неверным. В частности, присутствие в метеорологических уравнениях кориолисова ускорения допускает преобразование энергии «несбалансированных» гравитационных колебаний в «сбалансированные» метеорологические модели движений и тем самым, вероятно, смягчает трудности, связанные с вычислительной неустойчивостью гравитационных колебаний, которая в противном случае может возникнуть. Однако, что мы потеряем, если примем эту гипотезу и найдем численную схему, удачно описывающую отдельно гравитационные колебания. В этом случае мы, возможно, затратим больше усилий, чем необходимо, для отыскания приемлемой схемы. Однако вряд ли это так, поскольку мы обошли вопрос о том, допустимо ли фиктивное «питание» сбалансированного движения фиктивными источниками энергии гравитационных колебаний. Эта проблема, естественно, представляет большие трудности, чем проблема отыскания численной схемы, удовлетворительно описывающей гравитационные волны. Во всяком случае, схема, хорошо описывающая обособленные гравитационные колебания, дает некоторую гарантию правильного отражения гравитационно-метеорологических воздействий, а характерная тенденция метеорологических уравне-

ний к уравниванию гравитационных движений дает наилучшую гарантию от вычислительной неустойчивости.

Такой подход, когда мы сначала рассматриваем изолированные гравитационные волны, в определенном смысле меняет местами причину и следствие. Достигнутый в настоящее время прогресс в области численных прогнозов погоды объясняется тем, что ученые сумели исключить гравитационные колебания из механизма движений тех масштабов, с которыми они хотели оперировать. Это было решающим открытием на раннем этапе, когда вычисления, связанные с решением полных уравнений, были непосильными для тогдашних вычислительных устройств. Мы по-прежнему не интересуемся интегрированием гравитационных колебаний как таковых, поэтому вполне естественно спросить, отчего усилия не должны быть в первую очередь обращены на определение метеорологических квазисбалансированных компонент атмосферной системы.

Вопрос этот при исследованиях в Национальном метеорологическом центре (НМЦ) связывался с масштабами явления и интересующим нас сроком прогноза, в первую очередь с прогнозом на сутки вперед. За 24 часа макромасштабные атмосферные системы смещаются лишь на часть длины волны, тогда как гравитационные волны — на расстояние, превышающее их длину волны во много раз. Внешние гравитационные волны длиной 3000 км совершают два цикла в сутки; число циклов для более коротких волн обратно пропорционально их длине волны. Большая скорость гравитационных волн накладывает более жесткие условия на численную схему, потому что в течение данного периода времени имеются большие возможности для накопления погрешности вычислений. Действительно, теперь хорошо известно, что следует с большой тщательностью конструировать численные схемы для фильтрованных уравнений (из которых удален механизм гравитационных колебаний), чтобы успешно проводить интегрирование на сроки, превышающие несколько дней. Это есть прямое указание на то, что усложнение численной схемы должно связываться с числом циклов за время интегрирования. Последнее свойство является следствием нелинейности основных уравнений и должно приниматься во внимание наряду с линейной неустойчивостью, исследованной Курантом, Фридрихсом и Леви.

Хотя численный эксперимент должен быть заключительным этапом работы в этой области численного анализа, большинство метеорологов-исследователей предпочитает ему теоретические рассуждения. Теория и в самом деле оказывается здесь наиболее полезным ориентиром. Прекрасный пример тому дает критерий устойчивости линейной теории. Хотя он выводится из линейных уравнений, однако, насколько мне известно, он всегда

оправдывал себя в качестве необходимого условия для вычислительной устойчивости и в их нелинейных аналогах. Следует, однако, заметить, что указанный критерий непригоден в качестве достаточного для вычислительной устойчивости в случае нелинейных уравнений, несмотря на то, что он достаточен для линейных уравнений.

Отсюда следует, что численная схема, являющаяся неудовлетворительной для более простых уравнений, в данном случае линейных, будет также неудовлетворительной и для более сложных уравнений, т. е. нелинейных. Этот вывод не содержит ничего нового и полезного, он является лишь перефразированием изложенной ранее рабочей гипотезы, лежащей в основе трех данных работ. Нарушение критериев линейной устойчивости сказывается, по-видимому, прежде всего в полном искажении найденных значений тенденций. Этот результат — малой или, во всяком случае, сомнительной полезности, если учесть, что наша цель заключается в увеличении допустимого времени интегрирования сверх периода, на котором возможно интегрирование нелинейных численных систем, удовлетворяющих критерию линейной устойчивости.

Широко распространены попытки развития численных методов на основе использования законов сохранения. Методы эти состоят в построении такой конечно-разностной системы, в которой конечно-разностные уравнения могли бы быть скомбинированы аналогично тому, как комбинируются дифференциальные уравнения при выводе законов сохранения. Здесь возникает фундаментальная проблема. Уравнение неразрывности само по себе есть закон сохранения. Оно может быть скомбинировано с каждым из остальных уравнений тенденции для получения законов сохранения. Таким образом, каждое уравнение тенденции можно рассматривать как закон сохранения. Далее вся полная система метеорологических уравнений может быть скомбинирована в закон сохранения энергии.

Законов сохранения оказывается, таким образом, на один больше, чем уравнений тенденции. Для того чтобы все эти законы сохранения могли быть получены из конечно-разностных аналогов дифференциальных уравнений, необходимо (и это легко показать), чтобы они были полностью неявными. Но даже и тогда эта неявность не является достаточной. Хотя ряд авторов, особенно в СССР, показали, что квазинеявные формы могут быть использованы и имеют определенные преимущества в экономичности, перейти к полной неявности — значит погрузиться в бездонную пучину численных затруднений и вычислительной расточительности.

Есть еще три известных закона сохранения, которые могут быть выведены из метеорологических уравнений. Два из них не представляют какой-либо проблемы, поскольку мы рассмат-

риваем полные уравнения. Это законы сохранения вихря и дивергенции. Уравнения вихря и дивергенции получаются из полных уравнений путем линейных комбинаций уравнений движения, соответствующим образом продифференцированных по координатам в каждом случае, и следовательно, не могут рассматриваться как самостоятельные. Третий закон, являющийся законом сохранения потенциального вихря, получается в результате нелинейного комбинирования полных уравнений таким же образом, как получают законы сохранения энергии, моментов количества движения и осредненной по массе потенциальной температуры. Вместе с последним законом число законов сохранения на два больше, чем число уравнений тенденции. Быть может, их еще больше. Если бы законов сохранения было не больше, чем уравнений тенденции, мы могли бы добиться выполнения законов сохранения путем их непосредственного использования, т. е., например, путем применения уравнений моментов количества движения вместо уравнений движения и уравнения для осредненной по массе потенциальной температуры вместо термодинамического уравнения. Большинство исследователей действительно использует последние из упомянутых законов сохранения, выдвигая в качестве довода, что в них хоть что-то сохраняется точно. Мы не видим особых достоинств в таком аргументе и предпочитаем простоту уравнений движения и термодинамики.

Не может быть никаких сомнений в том, что нужно точно выполнить все законы сохранения, чтобы расчеты не оказались абсурдными. Мы утверждаем, однако, что не следует требовать, чтобы законы сохранения выполнялись с большей точностью, чем та, которая обеспечивается обычным методом расчета. Поскольку это утверждение негативно, оно оставляет нам меньше ориентиров при выборе численных схем, соответствующих нашим целям. Однако оно в то же время оставляет нам более обширное поле для исследований. Не следует допускать, чтобы на численную схему налагалось так много не вполне обязательных ограничений, что все возможности оказались бы исчерпанными и исключенными еще до того, как мы приступим к реализации нашего плана.

В настоящих работах приведена численная схема, которая вполне жизнеспособна на срок в 100 дней для простой баротропной модели атмосферы (метод Вандермана). Есть все основания полагать, что срок этот может быть с успехом увеличен по крайней мере еще на несколько сот дней. Методы продленного интегрирования Стэкпула (один из них, здесь не излагаемый, успешно применялся на срок почти в два года) исследовались на простейших физических моделях, имеющих хоть какое-то малое сходство с атмосферными. Эти исследования указывают, что рассматриваемая численная схема может

оказаться непригодной (хотя и не дают ответа на вопрос, когда это произойдет), если неограниченно увеличивать сроки расчета по моделям, способным отражать переход энергии неуравновешенных гравитационных колебаний в энергию уравновешенных метеорологических компонентов. Весьма вероятно, что в этих моделях такой «выход из строя» численной схемы никогда не произойдет. Во всяком случае, его, по всей видимости, можно легко избежать в расчетах, вводя просто периодические сглаживания. Следует подчеркнуть, что при вычислениях по указанной схеме никогда не наблюдалось вычислительной неустойчивости, однако были «сбои» за счет того, что четные и нечетные шаги по времени переставали быть связанными, что при использовании по времени схемы «чехарды» или «скачущей лягушки» (leap-frog) приводило расчеты к физическому абсурду.

ЛИТЕРАТУРА

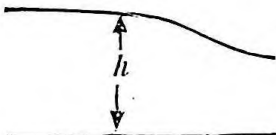
1. Shuman F. G. Numerical Experiment with the Primitive Equations. Proceedings of the International Symposium on Numerical Weather Prediction in Tokyo, November 7—13, 1960. Meteorological Society of Japan, Tokyo, 1962.

Ф. Г. ШУМАН И ДЖ. Д. СТЭКПУЛ

К ВОПРОСУ О ПОСТРОЕНИИ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ
С УЧЕТОМ МАСШТАБА КАРТЫ

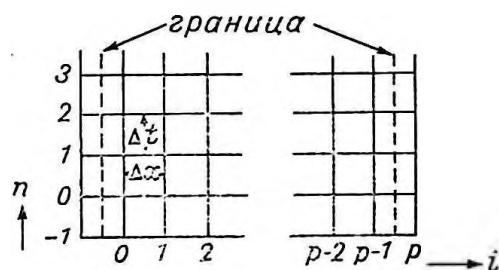
Несколько лет тому назад Шуман [1] исследовал нелинейную вычислительную неустойчивость различных конечно-разностных аналогов уравнений, описывающих внешние гравитационные волны в однородной несжимаемой жидкости в продольно ограниченной области с неограниченной боковой протяженностью. Его исследование было первым шагом в более общих исследованиях с полными уравнениями, основанных на численном эксперименте, и ставило своей целью выяснить, какова наиболее рациональная конечно-разностная формулировка полной системы прогностических уравнений на полусфере. В табл. 1 и 2, заимствованных из статьи [1], приведены дифференциальные уравнения, конечно-разностная сетка и определения, граничные условия, тригонометрическое представление волн (табл. 1) и различные конечно-разностные уравнения, исследованные Шуманом (табл. 2). В его работе показано, что лишь полумоментные формы конечно-разностной записи уравнений и формы записи с фильтрующим множителем достаточно пригодны для применения их к полным пространственным прогностическим уравнениям.

Таблица 1

Дифференциальные уравнения	
$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0$	
$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial u}{\partial x} = 0$	
	

Продолжение

Конечно-разностная сетка



$$i = \frac{x}{\Delta x} \quad n = \frac{t}{\Delta t}$$

Определения:

$$\bar{u}^x = \frac{1}{2} (u_{i+\frac{1}{2}} + u_{i-\frac{1}{2}})$$

$$u_x = \frac{1}{\Delta x} (u_{i+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2}})$$

$$\bar{u}^t = \frac{1}{2} (u_{n+\frac{1}{2}} + u_{n-\frac{1}{2}})$$

$$u_t = \frac{1}{\Delta t} (u_{n+\frac{1}{2}} - u_{n-\frac{1}{2}})$$

Граничные условия:

$$\bar{u}^x = h_x = 0 \quad \text{при} \quad i = -\frac{1}{2}, \quad p - \frac{1}{2}$$

Предполагается тригонометрическое представление в форме:

$$u = \sum_{k=1}^p U_k \sin \frac{\pi k (i + \frac{1}{2})}{p}$$

$$h = \sum_{k=0}^{p-1} H_k \cos \frac{\pi k (i + \frac{1}{2})}{p}$$

Таблица 2

Моментная форма

$$(\overline{hu})_t^t + (\overline{huu})_x^x + g\overline{h}h_x^x = 0$$

или

$$(\overline{hu})_t^t + (\overline{huu})_x^x + \frac{1}{2} g (\overline{hh})_x^x = 0$$

$$\overline{h}_t^t + (\overline{hu})_x^x = 0$$

Полумоментная форма

$$\overline{u}_t^t + \frac{1}{2} (\overline{uu})_x^x + g\overline{h}_x^x = 0$$

$$\overline{h}_t^t + (\overline{hu})_x^x = 0$$

Адвективная форма

$$\overline{u}_t^t + u\overline{u}_x^x + g\overline{h}_x^x = 0$$

$$\overline{h}_t^t + u\overline{h}_x^x + h\overline{u}_x^x = 0$$

Форма с фильтрующим множителем

$$\overline{u}_t^t + \overline{u}^{xx} \overline{u}_x^x + g\overline{h}_x^x = 0$$

$$\overline{h}_t^t + \overline{u}^{xx} \overline{h}_x^x + \overline{h}^{xx} \overline{u}_x^x = 0$$

Форму с фильтрующим множителем можно записать так:

$$\overline{u}_t^t + \frac{1}{2} (\overline{u} \overline{u})_x^x + g\overline{h}_x^x = 0$$

$$\overline{h}_t^t + (\overline{h} \overline{u})_x^x = 0$$

Полная система уравнений, записанная на полусфере, содержит масштабный множитель, соответствующий применяемой проекции. Способ включения этого множителя в конечно-разностные уравнения не регламентировался никакими особыми соображениями, кроме стремления записать пространственные уравнения, насколько это возможно, в виде, аналогичном одномерным уравнениям. Трудности, связанные с интегрированием уравнений на полусфере на продленные сроки, навели на мысль о необходимости дальнейшего, более детального исследования для получения точного способа учета масштабного множителя. С этой целью в уравнения внешних гравитационных волн был включен масштабный множитель и численно было исследовано несколько способов их конечно-разностной записи.

Уравнения в табл. 1, записанные в проекциях с масштабным множителем m , имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + m \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} - gh \right) = 0,$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + m \frac{\partial}{\partial x} (uh) = 0.$$

В табл. 3 приведены исследованные варианты конечно-разностных уравнений. Первый полумоментный способ записи наиболее близок к виду, в котором записываются пространственные уравнения, второй полумоментный способ представляет собой один из возможных способов упрощения первого.

Таблица 3

Конечно-разностные способы записи

Первая полумоментная форма:

$$\bar{u}_t^t + \bar{m}^{\overline{x-x}} \bar{u}^{\overline{x-x}} \bar{u}_x^x + g \bar{m}^{\overline{x-x}} \bar{h}_x^x = 0$$

$$\bar{h}_t^t + \bar{m}^{\overline{x-x}} \bar{u}^{\overline{x-x}} \bar{h}_x^x + \bar{m}^{\overline{x-x}} \bar{h}^{\overline{x-x}} \bar{u}_x^x = 0$$

Вторая полумоментная форма:

$$\bar{u}_t^t + \bar{m}^{\overline{x,x}} \bar{u}^{\overline{x,x}} \bar{u}_x^x + g \bar{m}^{\overline{x,x}} \bar{h}_x^x = 0$$

$$\bar{h}_t^t + \bar{m}^{\overline{x,x}} (\bar{h} \bar{u})_x^x = 0$$

Первая форма с фильтрующим множителем:

$$\bar{u}_t^t + \bar{m}^{\overline{x,x}} \bar{u}^{\overline{x,x}} \bar{u}_x^x + g \bar{m}^{\overline{x,x}} \bar{h}_x^x = 0$$

$$\bar{h}_t^t + \bar{m}^{\overline{x,x}} \bar{u}^{\overline{x,x}} \bar{h}_x^x + \bar{m}^{\overline{x,x}} \bar{h}^{\overline{x,x}} \bar{u}_x^x = 0$$

Вторая форма с фильтрующим множителем:

$$\bar{u}_t^t + \bar{m}^{\overline{x,x}} \bar{u}^{\overline{x,x}} \bar{u}_x^x + g \bar{m}^{\overline{x,x}} \bar{h}_x^x = 0$$

$$\bar{h}_t^t + \bar{m}^{\overline{x,x}} \bar{h}^{\overline{x,x}} \bar{u}_x^x + \bar{m}^{\overline{x,x}} \bar{h}^{\overline{x,x}} \bar{u}_x^x = 0$$

Форма с моментами Смагоринского:

$$(\bar{h} \bar{u})_t^t + \bar{m}^{\overline{x,x}} (\bar{h} \bar{u} \bar{u})_x^x + \frac{g}{2} \bar{m}^{\overline{x,x}} (\bar{h}^2)_x^x = 0$$

$$\bar{h}_t^t + \bar{m}^{\overline{x,x}} (\bar{h} \bar{u})_x^x = 0$$

Форма с моментами Аракавы:

$$(\bar{h} \bar{u})_t^t + \bar{m}^{\overline{x,x}} (\bar{h} \bar{u} \bar{u})_x^x + \frac{g}{2} \bar{m}^{\overline{x,x}} (\bar{h}^2)_x^x = 0$$

$$\bar{h}_t^t + \bar{m}^{\overline{x,x}} (\bar{h} \bar{u})_x^x = 0$$

Для полноты включены еще формы записи с фильтрующим множителем. Наконец, способы записи с помощью моментов Смагоринского и моментов Аракавы включены как способы, использованные некоторыми исследователями, занимавшимися интегрированием уравнений атмосферных моделей на длительные сроки.

Эти различные способы записи были запрограммированы (на языке ФОРТРАН) для машины IBM 7094-II с различными начальными условиями, аналогичными тем, какие рассматривались Шуманом, т. е. начальная высота жидкости постоянная и равна 25 000 футов, шаг по времени Δt равен 10 мин., шаг по координатам Δx равен 381 км, число точек сетки между границами (p) равно 24. Для описываемых здесь вычислений масштабный множитель брался равным тому значению, какое для полярной стереографической проекции справедливо на широте $60^\circ N$,

$$m = \frac{\sin 60^\circ + 1}{1 + \sin \varphi},$$

где φ — широта; это значение было выбрано для того, чтобы точки, расположенные непосредственно за границами (т. е. $p = -1$ и $p = 24$ в табл. 1), проектировались на полюс и экватор. В таком случае координата x в уравнениях может рассматриваться как координата север — юг на невращающейся Земле. При начальном шаге по времени бралась нецентрированная конечно-разностная формула «вперед», а начальные скорости заготавливались в виде таблицы из 24 компонентов ряда Фурье U_k , которые затем складывались с различными весами в соответствии с формулой табл. 1 (без масштабного множителя) для получения скорости ветра u в точках расчетной сетки. Использовались четыре типа начальных полей ветра: «первая волна высокой энергии», где $U_1 = 54,6$ м/сек., а все остальные компоненты ряда Фурье равны нулю; «половина первой волны высокой энергии», где $U_1 = 25$ м/сек., а $U_k = 0$ ($k = 2, \dots, 24$); «белый шум», где все U_k равны 2,18 м/сек., и «белый шум #24» — то же самое, что «белый шум», но с условием $U_{24} = 0$.

Программа была составлена таким образом, что счет велся до тех пор, пока не выполнялось 50 000 шагов по времени (это примерно 347 дней, что, видимо, достаточно большой срок), или не появлялась вычислительная неустойчивость. Последнее обнаруживалось потому, что глубина жидкости становилась отрицательной (после этого дифференциальная задача становится неустойчивой), или потому, что высота или скорость ветра начинала в 100 раз превышать их начальные либо средние квадратические значения соответственно.

Быть может, наиболее эффективный путь изучения и сравнения методов интегрирования при различных начальных дан-

ных заключается в сравнении энергий потоков. С этой целью вычислялись наличная потенциальная энергия (на единицу массы)

$$P = \frac{1}{2} g \frac{\Delta x}{m} \sum_{i=0}^p (h_i - H_0)^2$$

и кинетическая энергия (на единицу массы)

$$K \cong \frac{1}{2} H_0 \frac{\Delta x}{m} \left(\sum_{i=0}^p u_i^2 - \frac{1}{4} p U_p^2 \right) + \frac{1}{2} \frac{\Delta x}{m} \sum_{i=0}^p (h_i - H_0) u_i^2$$

(формулы заимствованы из работы Шумана [1]), где g — ускорение силы тяжести; p — число точек сетки (24); h_i — глубина жидкости в i -той точке сетки; H_0 — спектральная амплитуда нулевого волнового числа, т. е. среднее значение начальной высоты жидкости; u_i — скорость в i -той точке сетки и U_p — спектральная амплитуда скорости для волнового числа p (на эту величину оказывают влияние ошибки аппроксимации и поэтому речь о ней будет идти отдельно). Программа была составлена таким образом, что машина наносила графически распределение энергий. На рис. 1 приведено такое распределение для первых двухсот шагов (~ 33 часа) при интегрировании с помощью второго полумоментного способа конечно-разностной записи уравнений и с начальным полем в виде «первой волны высокой энергии #1». Столбец полной энергии получается как алгебраическая сумма P и K и обозначается как T . Полная энергия остается постоянной в этот период с высокой точностью, а прямая и первоначально почти полный переход кинетической энергии в потенциальную и обратно рассматривается как следствие ботания жидкости туда и обратно. Существование нелинейных взаимодействий, влияющих, помимо начальных условий, на поведение жидкости, видно из слабого «дрожания» графиков P и K вблизи шага #170. Исследования соответствующих графиков для этих же начальных данных, но для других конечно-разностных схем показали, что они за этот период аналогичны, равно как и серии графиков для других начальных данных.

Близкое сходство графиков, однако, сохраняется недолго. На рис. 2 изображены графики на следующие 200 шагов для первого и второго полумоментных способов, а также для способа с моментами Аракавы. Опять-таки второй полумоментный способ дает вполне удовлетворительное сохранение общей энергии, чего нельзя сказать ни о первом полумоментном способе, ни о способе моментов Аракавы. В случае моментов Аракавы критерий неотрицательности глубины жидкости был нарушен на 477-м шаге, после чего счет был прекращен; пер-

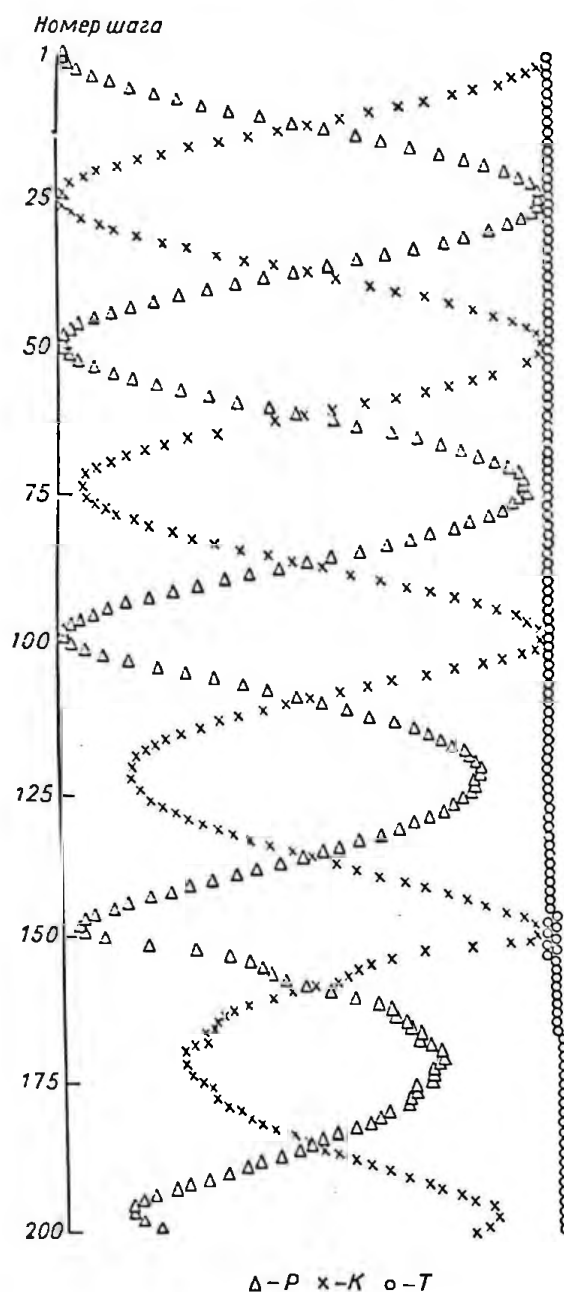
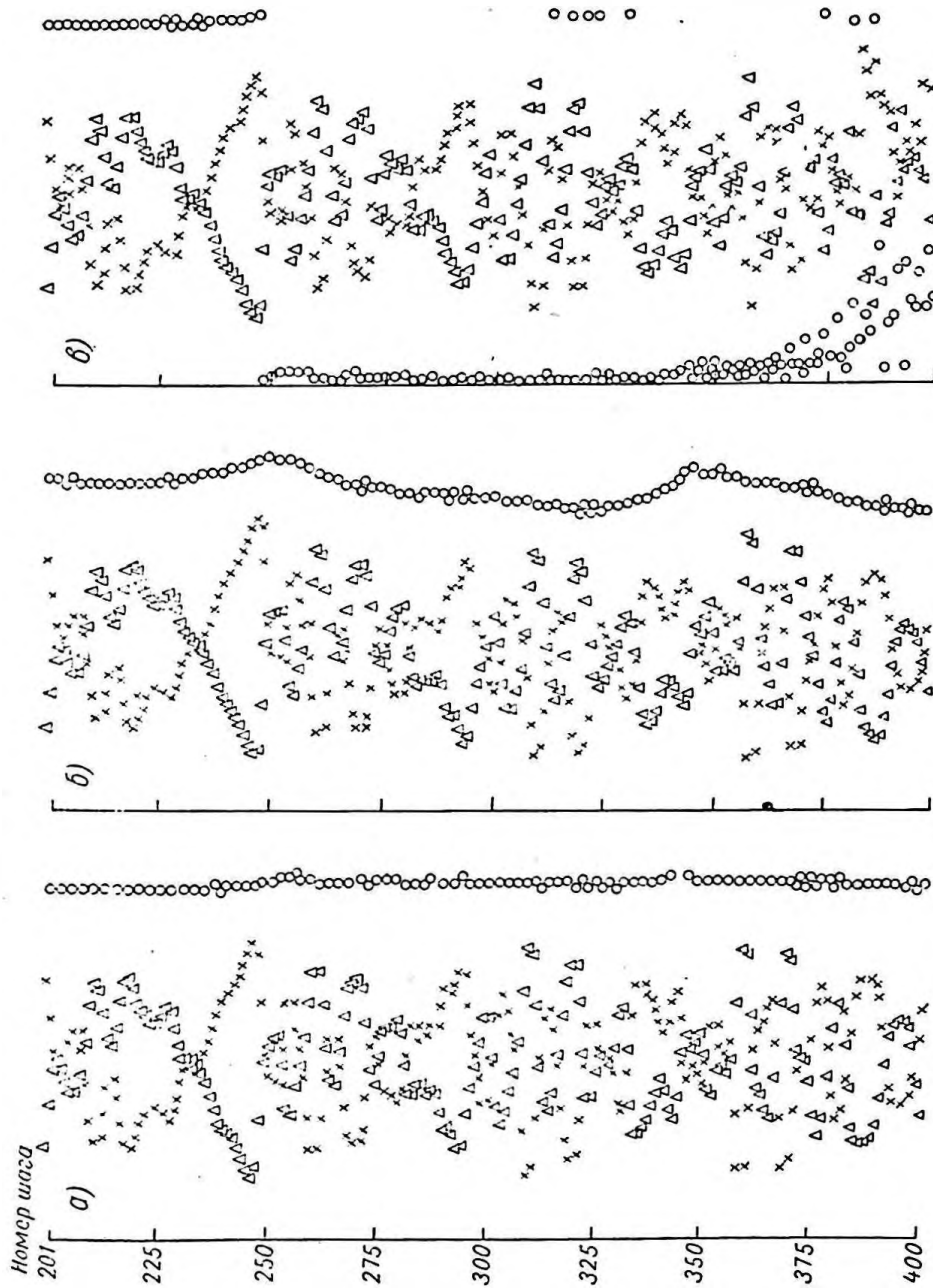


Рис. 1. Сравнительный график энергий на шагах 1—200 (масштаб линейный). Вторая полумоментная форма записи уравнений.
 P — потенциальная энергия; K — кинетическая;
 T — общая.

вый полумоментный способ оказался пригоден до 6032-го шага, где был нарушен этот же критерий, тогда как счет по второму полумоментному способу без труда продолжался 50 000 шагов.

Нельзя сказать, чтобы прогноз на 50 000 шагов имел какой-нибудь физический смысл. К 2000-му шагу счет по второму полумоментному способу привел к заметному расхождению в величинах общей (и покомпонентной) энергий на четных и нечетных шагах. Этот же эффект виден на последних шагах счета по методу моментов Аракавы, изображенному на рис. 2. К 50 000-му шагу энергетические графики были совсем не связанными, причем общая энергия менялась от шага к шагу почти в два раза. Однако, и это важнее, средняя энергия возросла за время интегрирования не более чем на 15%, что указывает на присущую данной конечно-разностной схеме устойчивость.

В табл. 4 приведены данные об устойчивости конечно-разностных схем при исследованных начальных данных. Обозна-



Δ—Р х—К о—Т

Рис. 2. Сравнительный график энергий на шагах 201—400.

а — вторая полумоментная форма записи; б — первая полумоментная форма записи; в — запись с помощью моментов Аракань. Усл. обозначения см. рис. 1

Таблица 4

Способ записи уравнений	Начальные условия			
	высокая энергия : 1	1/2 высокой энергии : 1	белый шум	белый шум : 24
Первый полумоментный	Сухой на 6032-м шаге	Сухой на 22 404-м шаге	Сухой на 17 986-м шаге	Сухой на 14 301-м шаге
Второй полумоментный	Устойчив 50 000-м шагов	Устойчив 50 000 шагов	Устойчив 50 000 шагов	Устойчив 50 000 шагов
Первый с фильтрующим множителем	Сухой на 6784-м шаге	Сухой на 18 373-м шаге	Устойчив 50 000 шагов Энергия возрастает на 2—3 порядка	Устойчив 50 000 шагов Энергия возрастает на 2—3 порядка
Второй с фильтрующим множителем	Сухой на 5172-м шаге	Сухой на 16 148-м шаге	$u > u_{\max}$ на 44 317-м шаге Энергия возрастает на 2—3 порядка	$u > u_{\max}$ на 42 851-м шаге Энергия возрастает на 2—3 порядка
Моменты Смагоринского	Сухой на 1411-м шаге	Сухой на 6275-м шаге	$u > u_{\max}$ на 11 006-м шаге	$u > u_{\max}$ на 11 340-м шаге
Моменты Аракавы	Сухой на 477-м шаге	Сухой на 1970-м шаге	$u > u_{\max}$ на 297-м шаге	$u > u_{\max}$ на 289-м шаге

чение «сухой» свидетельствует что на указанном шаге глубина жидкости становилась отрицательной. Замеченное сильное возрастание энергии при использовании двух способов с фильтрующим множителем, которое иногда наблюдалось почти до 50 000 шагов, согласуется с наблюдением Шумана о том, что его способ записи с фильтрующим множителем обнаруживает возрастание энергии за рассмотренные им относительно короткие периоды интегрирования. Очевидно, что при построении конечно-разностной схемы для пространственных уравнений, в которых учет гравитационных волн может оказаться существенным при отсутствии остальных ограничений на характер потока и предполагается интегрирование на длительный срок, должен быть выбран второй полумоментный способ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Shuman F. G. Numerical Experiments with the Primitive Equations. Proceedings of the International Symposium on Numerical Weather Prediction in Tokyo, November 7—13, 1960. Meteorological Society of Japan, Tokyo, 1962.

Ф. Г. ШУМАН И Л. В. ВАНДЕРМАН

**КОНЕЧНО-РАЗНОСТНАЯ СИСТЕМА И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ
ДЛЯ БАРОТРОПНОГО ПРОГНОЗА С ПОМОЩЬЮ
ПОЛНЫХ УРАВНЕНИЙ**

1. Введение

В Национальном метеорологическом центре (НМЦ) разрабатывается система краткосрочного крупномасштабного прогноза погоды в тропиках. Эта работа выполняется в соответствии с нашими обязанностями как подразделения по анализу и прогнозу Мирового центра погоды (Вашингтон), организованного в декабре 1964 г. Система состоит из сбора данных, их машинной обработки, численного анализа и численного прогноза погоды. В данной работе, посвященной прогностической модели, особый упор делается на возможность интегрирования на длительные сроки. При разработке настоящей модели не ставилась цель придать ей такую направленность. Однако, уже разработав эту основную модель, трудно было удержаться от большого искушения оценить степень ее устойчивости, так как эта модель весьма экономична в смысле ее реализации на вычислительной машине. Хотя используемая здесь численная схема была описана уже давно [1], она оставалась мало известной и лишь изредка упоминалась авторами, имеющими дело с интегрированием на длительный срок и, насколько нам известно, никогда не испытывалась при интегрировании на указанный срок. Эта схема в НМЦ применяется уже более шести лет, но только для краткосрочного прогноза. Тем не менее уже и в более ранней работе [1] содержится ясное указание на то, что эта численная схема была бы устойчива и при продленном счете, поскольку она испытывалась на экстремальных начальных данных.

2. Прогностическая модель

Баротропная модель со свободной поверхностью, основанная на полных уравнениях, была разработана для меркаторской проекции тропического пояса. Использовалась сетка с шагом, равным 5° долготы. Примерно вдоль 46° северной и юж-

ной широты помещались жесткие стенки. Восточный и западный края расчетной сетки, охватывающей весь тропический пояс, склеивались, чтобы сделать поля непрерывными в направлении с востока на запад. Все время использовалась разностная система, предложенная Шуманом в [1]. Начальные данные в основном представляли собой третью волновую компоненту, наложенную на восточный поток, хотя другие волновые компоненты также присутствовали в начальном поле. Просчитывались опытные прогнозы с различными граничными условиями, согласованными с разностной системой. Было найдено, что приближенные краевые условия порождают гравитационные волны и что для успешного долгосрочного прогноза необходимо, чтобы граничные условия были согласованы с физической моделью. При выполнении этого условия и при шаге по времени, равном 10 мин., прогноз был просчитан на 100 дней. Вычисления не корректировались сглаживанием или учетом вязкости и результаты, приведенные здесь, также не сглаживались.

Дифференциальные уравнения, описывающие механику нашей модели, имеют в декартовых координатах на меркаторской проекции следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - fv + m \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial gh}{\partial x} \right) = 0, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + fu + m \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial gh}{\partial y} \right) = 0, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + m \left[u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} + h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] - hv \frac{\partial m}{\partial y} = 0, \quad (1.3)$$

где x , y , и t — независимые пространственно-временные координатные переменные; f — параметр Корнолиса; g — ускорение силы тяжести; u и v — восточная и северная компоненты скорости соответственно; h — высота свободной поверхности и m — масштабный множитель, который для меркаторской проекции равен секансу широты.

Для удобства записи конечно-разностных аналогов приведенных выше уравнений примем обозначения, предложенные в работе [1]. Например, если точки расчетной сетки занумерованы в направлении возрастания x при фиксированных y и t как $0, 1, 2, \dots, i-1, i, i+1$, то

$$u_x \equiv \frac{1}{\Delta x} \left(u_{i+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2}} \right), \quad (2.1)$$

$$\bar{u}^x \equiv \frac{1}{2} \left(u_{i+\frac{1}{2}} + u_{i-\frac{1}{2}} \right). \quad (2.2)$$

Аналогичные обозначения используются для других функций и независимых переменных. Дополнительные индексы сверху или снизу имеют следующий смысл:

$$u_{xx} = (u_x)_x, \quad (3.1)$$

$$\overline{u}^{xy} = (\overline{u}^x)^y. \quad (3.2)$$

Рассмотрим теперь уравнения для одномерных гравитационных волн в однородном несжимаемом слое с изменениями лишь вдоль одной пространственной переменной:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial gh}{\partial x} = 0, \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (4.2)$$

Конечно-разностный аналог этих уравнений, названный Шуманом «полумоментным», имеет вид

$$\overline{u}_t' + \frac{1}{2} (\overline{u^2})_x^x + g \overline{h}_x^x = 0, \quad (5.1)$$

$$\overline{h}_t' + (\overline{hu})_x^x = 0. \quad (5.2)$$

Прежде чем обобщить эти уравнения на двумерный случай, заметим, что они могут быть записаны так:

$$\overline{u}_t' + \overline{(\overline{u}^x u_x + gh_x)}^x = 0, \quad (6.1)$$

$$\overline{h}_t' + \overline{(\overline{u}^x h_x + \overline{h}^y u_y)}^x = 0. \quad (6.2)$$

По этим соотношениям производятся первые оценки тенденций в промежуточных точках, которые затем осредняются для определения тенденций в самих точках сетки. Применение этого метода к нашей двумерной задаче приводит к соотношениям:

$$\overline{u}_t' + \overline{[-f^{xy} \overline{v}^{xy} + \overline{m}^{xy} (\overline{u}^{xy} \overline{u}_x^x + \overline{v}^{xy} \overline{u}_y^x + g \overline{h}_x^x)]}^{xy} = 0, \quad (7.1)$$

$$\overline{v}_t' + \overline{[\overline{f}^{xy} \overline{u}^{xy} + \overline{m}^{xy} (\overline{u}^{xy} \overline{v}_x^x + \overline{v}^{xy} \overline{v}_y^x + g \overline{h}_y^x)]}^{xy} = 0, \quad (7.2)$$

$$\begin{aligned} \overline{h}_t' + \overline{[-\overline{h}^{xy} \overline{v}^{xy} \overline{m}_y^x]}^{xy} + \\ + \overline{[\overline{m}^{xy} (\overline{u}^{xy} \overline{h}_x^x + \overline{v}^{xy} \overline{h}_y^x + \overline{h}^{xy} (\overline{u}_x^y + \overline{v}_y^x))]}^{xy} = 0. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Таковы конечно-разностные аналоги уравнений, используемые в настоящем исследовании. Заметим, что масштабный множитель m и параметр Корнолиса f зависят только от y , так что

применение к ним оператора $(\overline{\quad})^x$ оставляет их без изменения

$$\overline{m}^x = m \quad (8.1)$$

и аналогично

$$\overline{f}^x = f. \quad (8.2)$$

Начальные значения компонент скорости ветра u и v были заданы. Поле начальных высот при этом было получено путем решения уравнения баланса для h

$$\begin{aligned} [\overline{h}_{xx}^{yy} + \overline{h}_{yy}^{xx}] = -\frac{1}{g} \left[\overline{u}^{xy} \overline{u}_x^{xy} + \overline{v}^{xy} \overline{u}_y^{xy} - \frac{\overline{v}^{xy} \overline{f}^y}{\overline{m}^y} \right]_x - \\ - \frac{1}{g} \left[\overline{u}^{xy} \overline{v}_x^{xy} + \overline{v}^{xy} \overline{v}_y^{xy} - \frac{\overline{u}^{xy} \overline{f}^y}{\overline{m}^y} \right]_y. \end{aligned} \quad (9.1)$$

Перед тем как найти величину h , значения правой части уравнения (9.1) нормализуются относительно двух четко различимых множеств точек, чтобы избежать в альтернативных точках рассогласованности решения, порождаемой применением конечно-разностной процедуры. Уничтожение потока обоих направлений через границу области достигается применением первоначально условия (11.2). Во время релаксации при решении уравнения (9.1) допускалось смещение границы области в результате наложения геострофического потока у стенки после каждой итерации. При решении уравнения для h используются те же соображения, что и при выводе корректных граничных условий для прогностических уравнений. В вычислениях принималось $\Delta x = \Delta y = 555,55$ км (5° долготы на экваторе), $\Delta t = 10$ мин., а среднее значение $h = 2500$ м. При расчетах на первом шаге бралась по времени конечная разность вперед, при последующих шагах использовались центрированные конечные разности.

3. Граничные условия

Одна группа граничных условий для северной и южной стенок области (на половине расстояния между первым внутренним и самым последним внешним рядом точек) имела вид

$$u_y = 0, \quad (10.1)$$

$$\overline{v}^y = 0, \quad (10.2)$$

$$h_y = 0. \quad (10.3)$$

Практически значения u и h по внешнему ряду точек полагались равными их значениям в соседних точках первого внут-

ренного ряда. Значения v во внешнем ряду полагались равными их значениям с обратным знаком в соседних точках первого внутреннего ряда. Доводом в пользу применения этих граничных условий служит то, что они полностью сохраняют эффект отражения чистых гравитационных волн от стенок. Мы исходим из того, что инерционные эффекты (возникающие благодаря наличию в уравнении параметра f) гораздо медленнее влияют на гравитационные колебания, чем эти последние меняются сами по себе, и что поэтому при попытке получить набор граничных условий, не дающих при вычислениях

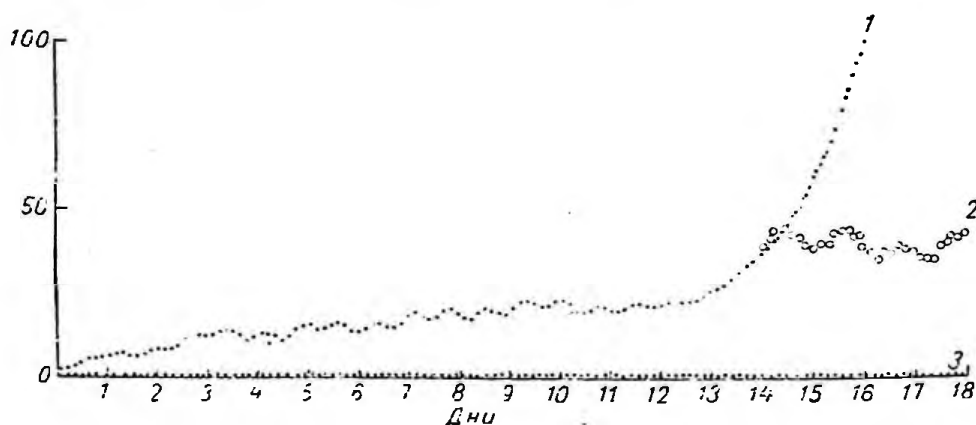


Рис. 1. Значения средней квадратической дивергенции (единица масштаба по ординате 10^{-6} сек. $^{-1}$, по абсциссе время в днях) при прогнозе с разными граничными условиями, указанными над каждой кривой.

1 — уравнение (10), 2 — уравнения (10) и (11), 3 — уравнение (11).

отрицательных эффектов, инерционные эффекты могут не учитываться, по крайней мере в течение ограниченного времени. Как мы увидим, такое предположение в значительной степени справедливо, но время, в течение которого можно пренебрегать инерционными эффектами на граничной стенке, оказывается равным всего нескольким дням. Эти граничные условия порождают гравитационные волны, которые «взрываются» примерно через 13 дней (рис. 1). Хотя эти условия, очевидно, не вполне логичны, простота применения служит дополнительным стимулом для проведения с ними экспериментов.

Корректные граничные условия имеют вид

$$\overline{u}_t^y + \overline{m}^y (\overline{u}^{xy} \overline{u}_x^y + g \overline{h}_x^y) = 0, \quad (11.1)$$

$$\overline{v}^y = 0, \quad (11.2)$$

$$\overline{f}^y \overline{u}^y + \overline{m}^y g h_y = 0. \quad (11.3)$$

Уравнение (11.1) применяется к полю тенденций u . Уравнение (11.2) применяется к полю v и препятствует возникновению потока через стенку в любой точке. Уравнение (11.3) применяется к полю h и обеспечивает вдоль стенки геострофический поток.

4. Результаты прогноза

Прогноз без сглаживания на срок 100 дней рассчитывался с применением граничных условий по уравнениям (11) с использованием третьей волновой компоненты в качестве начальных данных (рис. 2—6). Были выданы начальные поля u , v и h , а затем через каждые 12 час. прогноза. На каждом шаге по времени вычислялась средняя квадратическая дивергенция

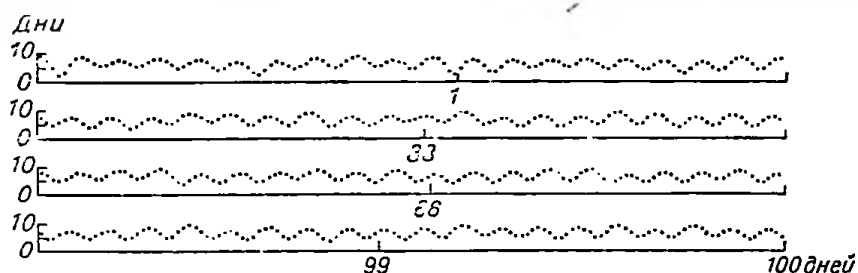
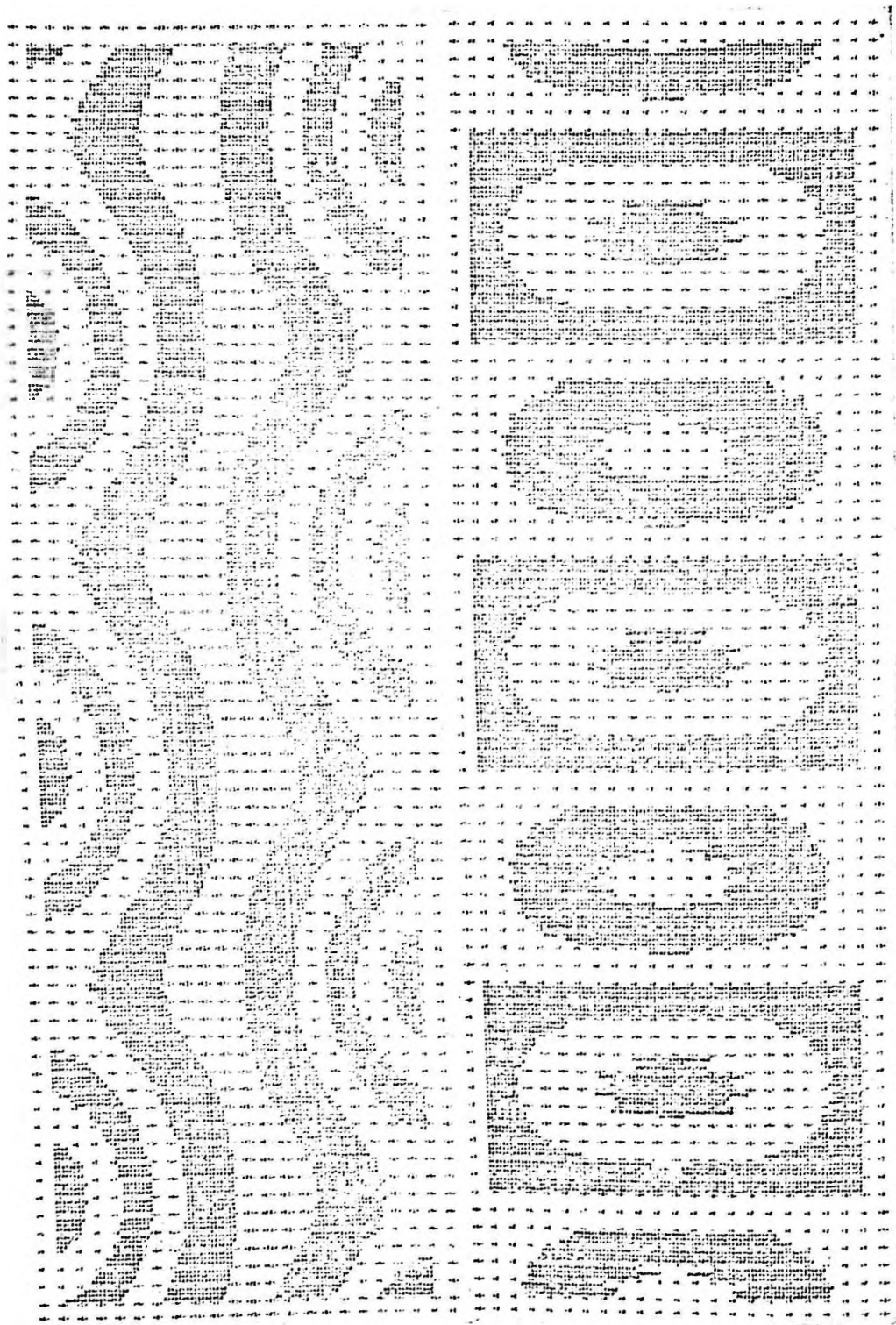


Рис. 2. Значения средней квадратической дивергенции (единица масштаба по ординате 10^{-7} сек $^{-1}$, по абсциссе время в днях) для граничных условий, задаваемых уравнениями (11).

Каждый график соответствует примерно двухдневному периоду, от первого до нижнего они центрированы вокруг 1, 33, 66 и 99-го дней соответственно.

(по значениям поля дивергенции, рассчитываемого при решении уравнения (7.3)) и средняя высота. Средняя квадратическая дивергенция была малой в течение всех 100 дней прогноза и менялась с периодом примерно 13 шагов по времени (2 часа 10 мин.). Средняя высота колебалась не более чем на 1 м в течение всех 100 дней. В порядке интересного побочного эксперимента прогноз, который начал «взрываться» через 13 дней, был продолжен с 14-го дня с корректными граничными условиями по уравнениям (11). Значения средней квадратической дивергенции (см. рис. 1) при этом эксперименте указывают, что никакого дальнейшего ухудшения прогноза не произошло.

Наиболее интересные прогностические поля — поля высоты — приведены на рис. 3—6. Барические системы в основном восточном потоке перемещаются на запад со скоростью, несколько превосходящей скорость волн Россби, что находится в приемлемом согласии с выводами линейной теории переноса. Антициклоны в верхних широтах разрушаются и восстанавливаются; волны имеют тенденцию к окклюзии и затем вновь



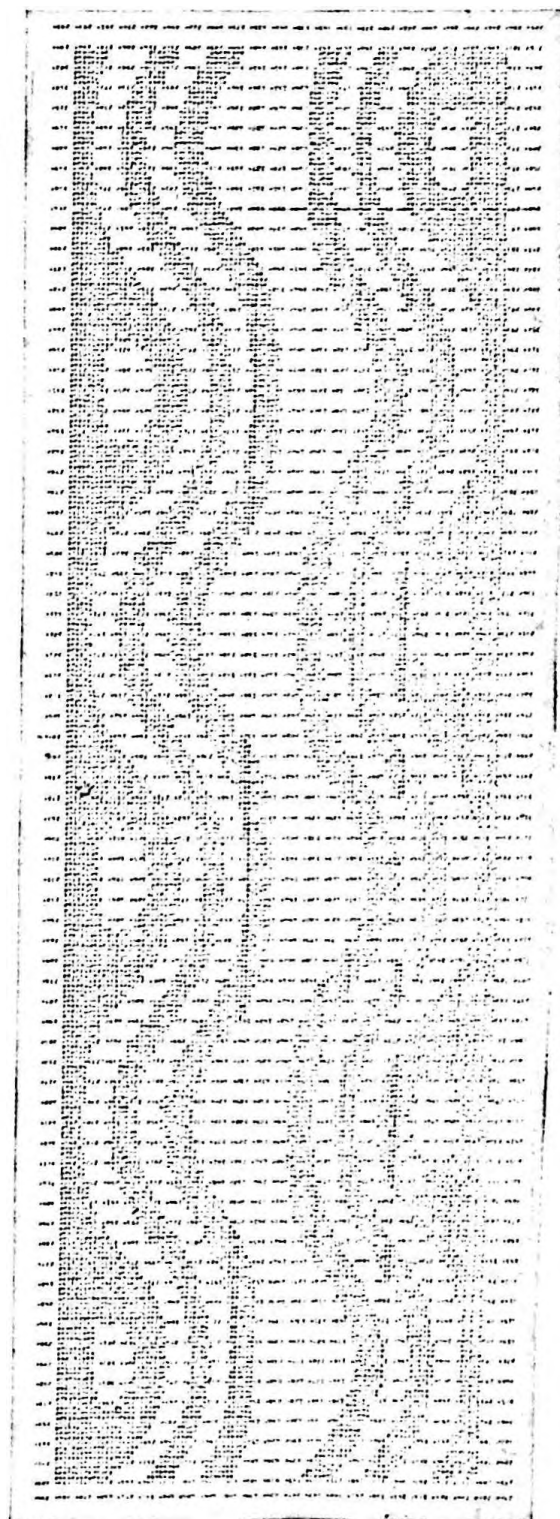
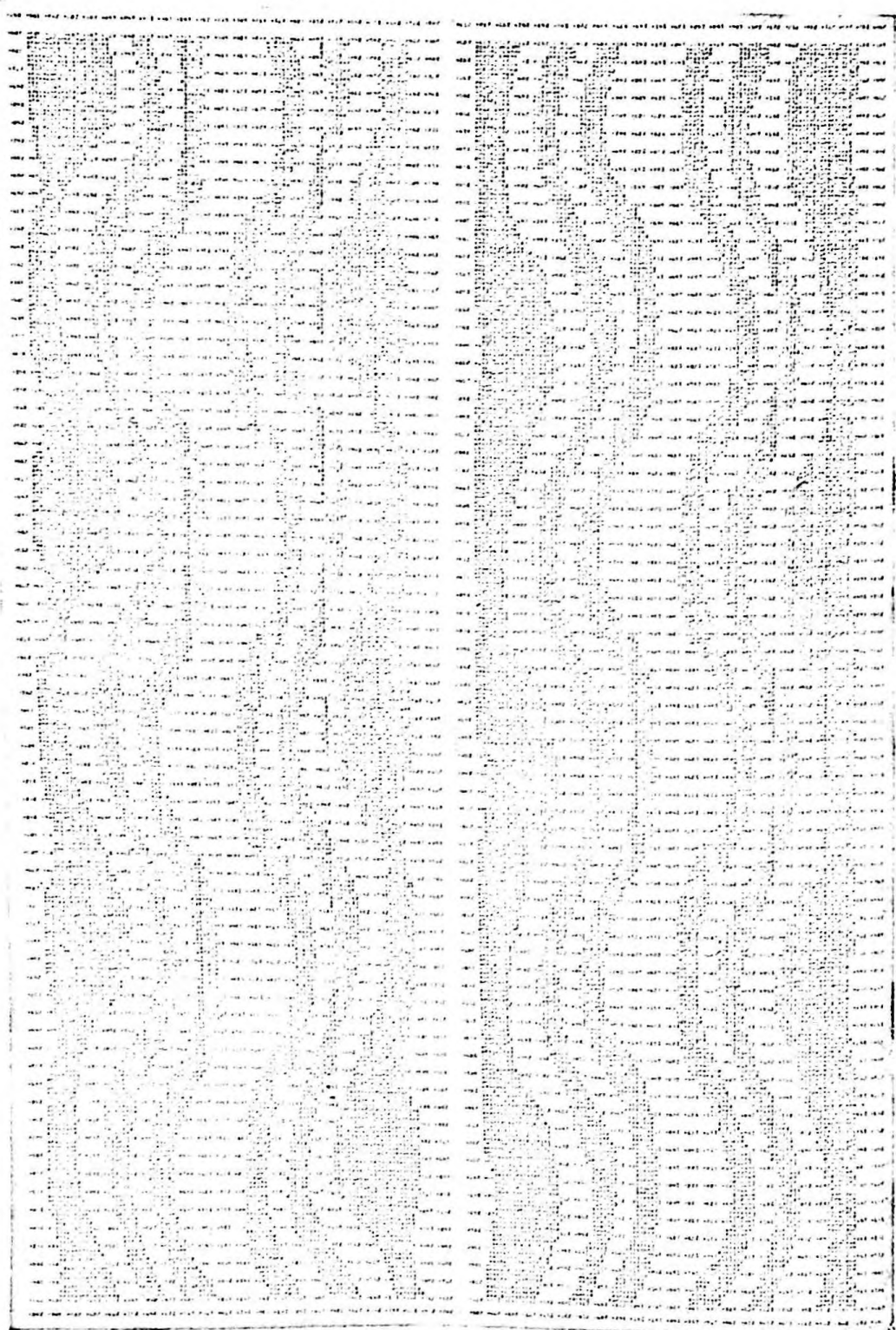


Рис. 3. Начальные поля u , v и h (сверху вниз).



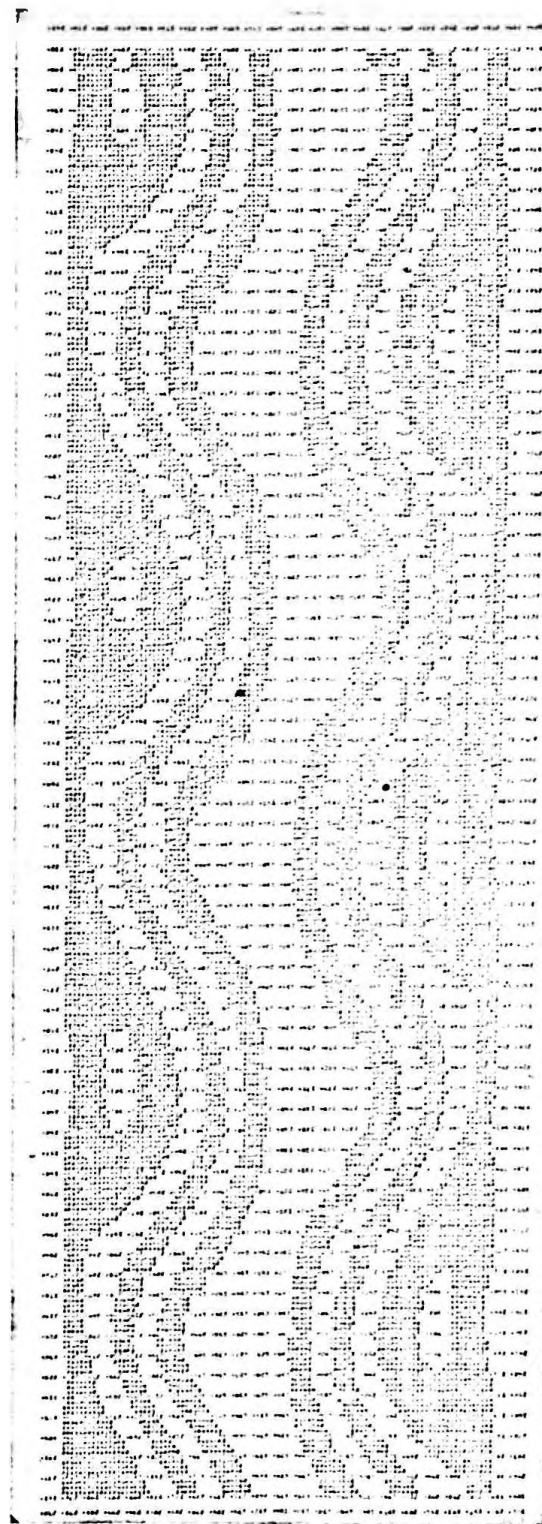


Рис. 4. Прогноз поля h на 1, 2 и 3-й дни (сверху вниз).

[illegible]

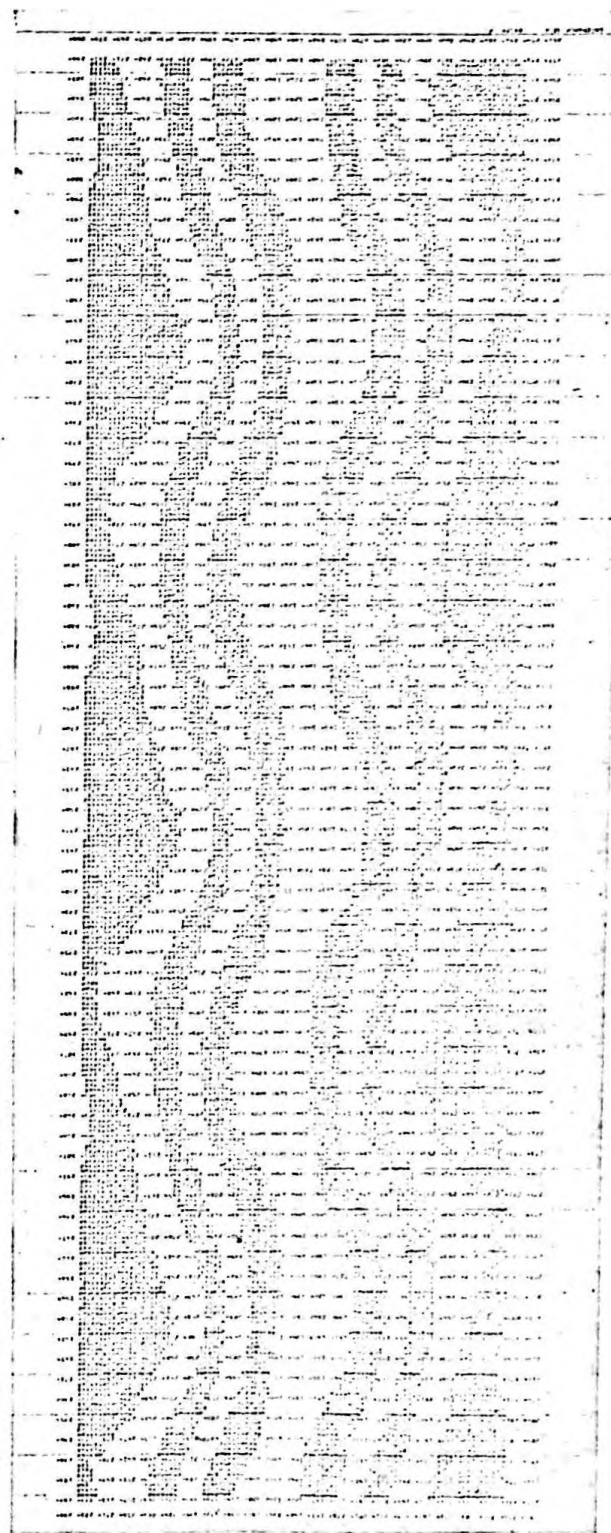
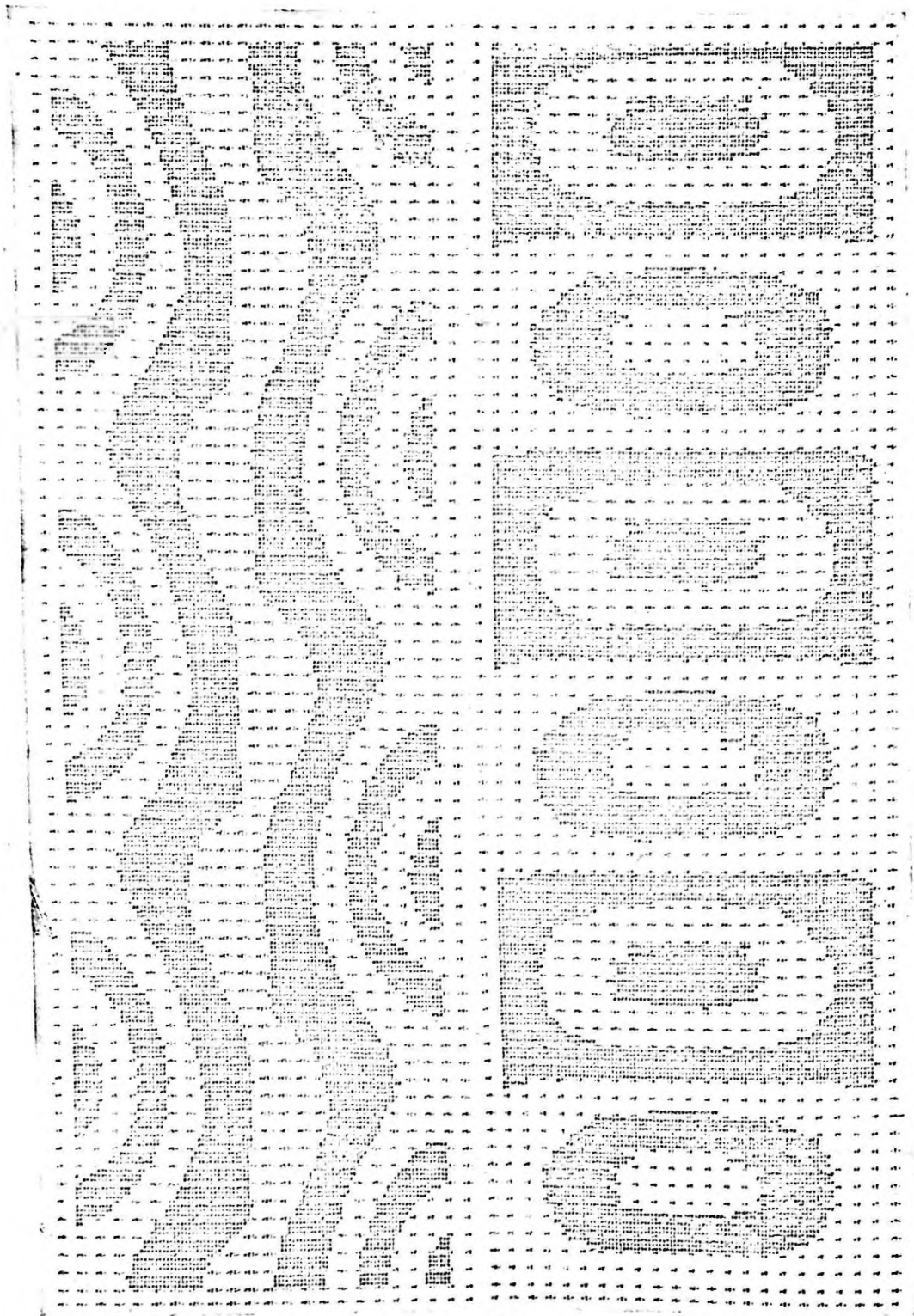


Рис. 5. Прогноз поля h на 4, 33 и 66-й дни (сверху вниз).



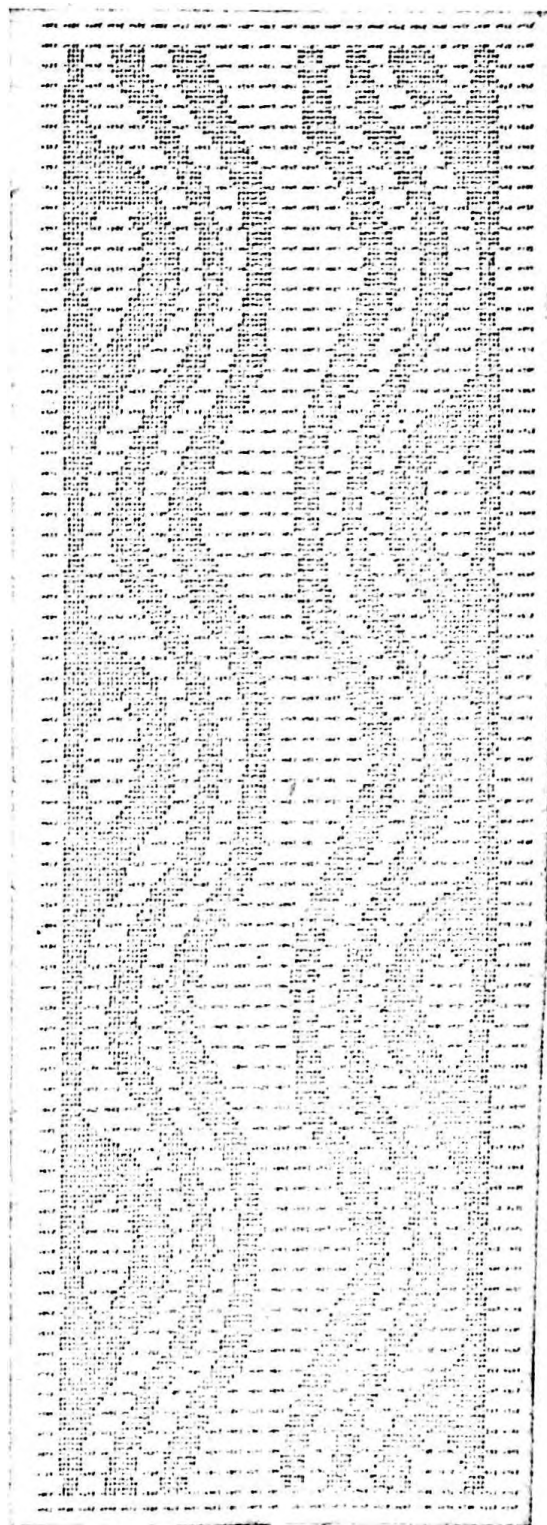


Рис. 6. Прогноз на 100 дней полей u , v и h (сверху вниз).

к восстановлению своей первоначальной формы. Эти процессы указывают на устойчивость прогностических вычислений, а также на существование в поле потока иных волновых компонент, помимо третьей.

5. Заключение

Баротропный прогноз по полным уравнениям весьма чувствителен к граничным условиям, а также к виду конечно-разностной системы уравнений. Корректные граничные условия, согласованные с разностными системами, необходимы для того, чтобы избежать засорения прогноза гравитационными волнами и обеспечить успешность длительных вычислений. Представляется, что при хорошо поставленных граничных условиях обобщенная «полумоментная» форма записи, приведенная в уравнениях (7), вполне пригодна для продленного интегрирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Shuman F. G. Numerical Experiments with the Primitive Equations. Proceedings of the International Symposium on Numerical Weather Prediction in Tokyo, November 7—13, 1960. Meteorological Society of Japan, Tokyo, 1962.

Ф. Г. ШУМАН

МНОГОУРОВЕННАЯ МОДЕЛЬ ПО ПОЛНЫМ УРАВНЕНИЯМ

1. Дифференциальные уравнения и расслоение задачи по вертикали

В полярной стереографической проекции полные гидростатические уравнения могут быть записаны в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \dot{\sigma} \frac{\partial u}{\partial \sigma} - f v + m \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g z}{\partial x} + c_p \theta \frac{\partial \pi}{\partial x} \right) + F_x = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \dot{\sigma} \frac{\partial v}{\partial \sigma} + f u + m \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial g z}{\partial y} + c_p \theta \frac{\partial \pi}{\partial y} \right) + F_y = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial g z}{\partial \sigma} + c_p \theta \frac{\partial \pi}{\partial \sigma} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \dot{\sigma} \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} + m \left(u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) - H = 0, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial p}{\partial \sigma} + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial p}{\partial \sigma} \dot{\sigma} \right) + m \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial \sigma} u \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial p}{\partial \sigma} v \right) \right] - \\ - \frac{\partial p}{\partial \sigma} \left(u \frac{\partial m}{\partial x} + v \frac{\partial m}{\partial y} \right) = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\pi = \left(\frac{p}{P} \right)^{R/c_p}. \quad (6)$$

Здесь x и y — две горизонтальные декартовы координаты в плоскости проекции; t — время; u и v — компоненты скорости по осям x и y ; θ — потенциальная температура; z — высота над плоскостью проекции; p — давление; $P=1000$ мб; R — газовая постоянная для воздуха; c_p — удельная теплоемкость воздуха при постоянном давлении; σ — вертикальная координата, а $\dot{\sigma}$ — ее полная производная; m — масштабный множитель; f — параметр Корнолиса. F_x и F_y — ускорения силы трения, связанные в описываемой модели с коэффициентом торможения

Крессмана [1] и поэтому участвующие только в уравнениях для нижнего слоя. Их точная формулировка будет дана в дальнейшем. H — вклад в тенденцию потенциальной температуры от внешних источников тепла, один из которых будет рассмотрен позже.

В приведенных шести уравнениях имеется семь зависимых переменных: u , v , σ , θ , z , π и p . Мы до сих пор не определили вертикальную координату — все шесть уравнений справедливы при произвольной вертикальной координате. Для того чтобы замкнуть систему, нам понадобится седьмое уравнение, которое

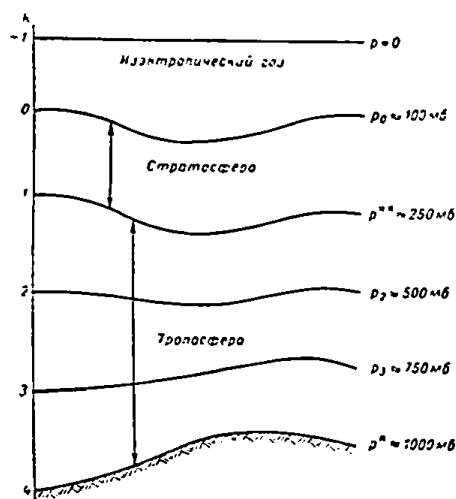


Рис. 1. Схема деления атмосферы в четырехслойной модели по полным уравнениям.

должно служить для определения вертикальной координаты. Выбор вертикальной координаты связан со способом расчленения атмосферы по вертикали и будет определен ниже.

На рис. 1 схематически представлена вертикальная структура модели. Нижняя граница совпадает с поверхностью Земли. Одна звездочка (*) обозначает поверхность Земли. Две звездочки (**) обозначают тропопаузу, рассматриваемую как материальную поверхность, p_0 — давление на этой материальной поверхности, выше которой реальная атмосфера заменена изэнтропическим газом. Это просто сделано для того, чтобы

избежать неопределенностей на бесконечности в разностной системе. Уровень $p=0$, следовательно, находится на конечной высоте. Поверхность p_0 выбрана так, что изэнтропический верхний слой покоится, т. е. он неподвижен, в нем нет горизонтальных градиентов давления и ускорений. Так как его начальное состояние неподвижности устраняет любое сходство между ним и реальной атмосферой, то верхний слой исключается из рассмотрения, и, таким образом, рис. 1 относится к четырехслойной модели.

Во всех опытах с этой моделью изэнтропический верхний слой считался неподвижным в процессе вычислений. Это ограничение является отклонением от физической реальности, поскольку то, что происходит в жидкости, находящейся под поверхностью p_0 , возбуждает движение в верхнем слое. Однако это ограничение не нарушает ни одного из законов сохранения

и практически не влияет на развитие движения жидкости под поверхностью p_0 . Ограничение вводилось из-за того, что память машины IBM 7094-II, для которой модель была запрограммирована, слишком мала, чтобы хранить дополнительные поля u , v и p_0 при снятии указанного ограничения. Однако это ограничение требует продолжительного итерационного процесса для определения p_0 в каждой точке на каждом шаге по времени. Тем самым мы экономим машинную память за счет машинного времени. В новой программе модели для СДС-6600 указанное ограничение снимается. Упомянутый итерационный процесс не будет здесь описан, так как он используется временно и существенного значения не имеет.

2. Вертикальная координата и конечно-разностные уравнения

Вертикальная координата определяется по-разному в стратосфере и в тропосфере. В обоих случаях, однако, она незначительно отличается от σ -координаты Филлипса [2] и выбирается так, чтобы поверхности p_0 , p^{**} и p^* были координатными поверхностями. В тропосфере вертикальная координата имеет вид

$$\sigma_T = \frac{p - p^{**}}{p^* - p^{**}},$$

в стратосфере

$$\sigma_S = \frac{p - p_0}{p^{**} - p_0}.$$

Следовательно, в тропосфере $\sigma_T = 1$ при $p = p^*$ и $\sigma_T = 0$ при $p = p^{**}$. В стратосфере $\sigma_S = 1$ при $p = p^{**}$ и $\sigma_S = 0$ при $p = p_0$. Поверхности p_2 и p_3 таковы, что $\sigma_T = \frac{1}{3}$ при $p = p_2$ и $\sigma_T = \frac{2}{3}$ при $p = p_3$.

Все пять дифференциальных уравнений записываются в разностном виде для четырех слоев газа, ограниченных поверхностями p_0 , p_1 , p_2 , p_3 и p_4 . Для удобства и экономии записи разностных уравнений введем два обозначения. Рассмотрим точки сетки, равномерно удаленные по оси x при постоянных y , σ и t . Занумеруем точки сетки по порядку $(0, 1, 2, 3, \dots, i-1, i, i+1, \dots)$. Определим следующие операции над зависимой переменной f :

$$f_x = \frac{f_{i+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}}}{x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}}, \quad (7)$$

$$\bar{f}^x = \frac{f_{i+\frac{1}{2}} + f_{i-\frac{1}{2}}}{2}. \quad (8)$$

Дополнительный верхний или нижний индекс означает следующее:

$$f_{.xx} = (f_x)_{.x}, \quad (9)$$

$$\bar{f}^{.xx} = \overline{(\bar{f}^x)^x}. \quad (10)$$

Аналогичные определения справедливы для остальных координат y, σ и t .

Заметим, что f_x и $\bar{f}^x$ определены не в точках сетки, а между ними. Чтобы в дальнейшем избежать путаницы, покажем несколько примеров комбинирования операций. Обычное центрированное первое разностное отношение можно записать в виде

$$\bar{f}^x = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}},$$

так же может быть записана и обычная вторая разность

$$f_{xx} = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\left(x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}\right)^2}.$$

Оставшаяся комбинация двух операторов представляет собой обычный трехточечный симметричный сглаживающий оператор:

$$\bar{f}^{.xx} = \frac{f_{i+1} + 2f_i + f_{i-1}}{4}.$$

Используя эти обозначения, можно записать все пять разностных аналогов всех пяти дифференциальных уравнений следующим образом:

$$\begin{aligned} & \bar{u}_t^t + \overline{\left(\bar{\sigma}^{\sigma} \bar{u}_{\sigma}^{xy} - \bar{f}^{xy} \bar{v}^{xy} + F_x \right)}^{xy} + \\ & + \overline{m^{xy} \left[\bar{u}^{xy} \bar{u}_x^{xy} + \bar{v}^{xy} \bar{u}_y^{xy} + \left(g \bar{z}_x + c_p \bar{\theta}^{xy} \bar{\pi}_x \right) \right]}^{xy} = 0, \quad (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \bar{v}_t^t + \overline{\left(\bar{\sigma}^{\sigma} \bar{v}_{\sigma}^{xy} + \bar{f}^{xy} \bar{u}^{xy} + F_y \right)}^{xy} + \\ & + \overline{m^{xy} \left[\bar{u}^{xy} \bar{v}_x^{xy} + \bar{v}^{xy} \bar{v}_y^{xy} + \left(g \bar{z}_y + c_p \bar{\theta}^{xy} \bar{\pi}_y \right) \right]}^{xy} = 0, \quad (12) \end{aligned}$$

$$g \bar{z}_{\sigma} + c_p \bar{\theta}^{\sigma} \bar{\pi}_{\sigma} = 0, \quad (13)$$

$$\bar{\theta}_t^t + \overline{\left[\bar{\sigma}^{\sigma} \bar{\theta}_{\sigma}^{xy} + \overline{m^{xy} \left(\bar{u}^{xy} \bar{\theta}_x^{xy} + \bar{v}^{xy} \bar{\theta}_y^{xy} \right)} - H \right]}^{xy} = 0, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} & \bar{p}_{\sigma t}^t + \overline{\left\{ \bar{p}_{\sigma}^{xy} \bar{\sigma}_{\sigma} + \overline{m^{xy} \left[\bar{u}^{xy} \bar{p}_{\sigma x}^{xy} + \bar{v}^{xy} \bar{p}_{\sigma y}^{xy} \right]} \right\}}^{xy} + \\ & + \overline{p_{\sigma}^{xy} \left[\overline{m^{xy} \left(\bar{u}_x^{xy} + \bar{v}_y^{xy} \right)} + \bar{u}^{xy} \bar{m}_x^{xy} + \bar{v}^{xy} \bar{m}_y^{xy} \right]}^{xy} = 0. \quad (15) \end{aligned}$$

Подобная разностная система по горизонтали и по t уже использовалась Шуманом и Вандерманом для баротропной модели [3]. Она является обобщением так называемой полумоментной формы Шумана [4]. Зависимость неизвестных функций от вертикальной координаты в уравнениях (1)–(6) создала новые проблемы, для преодоления которых придумана новая методика. Последняя будет описана ниже.

В эту систему вносилось много небольших изменений, однако они незначительно влияли на прогнозы, и, по существу, это та самая схема, которая запрограммирована и в настоящее время.

В уравнении неразрывности $\rho_s = \rho^* - \rho^{**}$ в тропосфере, $\rho_s = \rho^{**} - \rho_0$ в стратосфере и $\rho_s = \rho_0$ в изэнтропической части. Помимо этих трех величин, в процессе вычислений предсказываются u , v — поля $\bar{u}^s$, $\bar{v}^s$, $\bar{\theta}^s$ для каждого из пяти слоев, показанных на рис. 1 (изэнтропического верха, слоя стратосферы и трех тропосферных слоев). Как указывалось ранее, существующий вариант программы ограничивает изэнтропическую часть условиями $u=v=0$ и $z_{-1}=\text{const.}$, что приводит к итерационному нахождению ρ_0 . Ничего здесь более не нужно предсказывать, но, так как ограничения скоро будут сняты, опишем ту процедуру, которая будет проводиться при снятых ограничениях. В любом случае, пока верх изэнтропичен, величину $\bar{\theta}^s$ там предвычислять не нужно.

Итак, получены разности по времени для величин $\bar{u}^s$, $\bar{v}^s$, $\bar{\theta}^s$. Значения этих средних по вертикали величин могут быть поэтому прямо сосчитаны для нового момента времени. Но для дальнейших вычислений нужны также разности по вертикали u_s , v_s , θ_s для каждого слоя. Поэтому необходимо как-то определить u , v , θ при $k=1, 2, 3, 4$ по средним их значениям для слоев, ограниченных рассматриваемыми поверхностями. Ясно, что прямо это сделать невозможно. Для каждой из величин u , v , θ можно написать уравнение для каждого слоя, однако при любом количестве слоев число неизвестных будет на единицу больше числа уравнений. Это, однако, не так уж плохо, так как имеющейся степенью свободы можно с пользой распорядиться.

Поскольку данная процедура приводит к системам уравнений, число которых меньше числа неизвестных, то задача недоопределена. Решение существует, но оно не является единственным. Поэтому будем стремиться выбрать решение в каком-то смысле наиболее «гладкое». Там, где можно построить $\bar{u}^{ss}$, $\bar{v}^{ss}$ и $\bar{\theta}^{ss}$, они будут очевидно гладкими в любом смысле, но они не будут удовлетворять системе уравнений, т. е., например, $\bar{\theta}^{ss} \neq \bar{\theta}^s$. Можно, однако, замкнуть нашу систему усло-

внем, чтобы выбранное решение было бы насколько возможно близко к $\bar{u}^{\sigma\sigma}$, $\bar{v}^{\sigma\sigma}$ и $\bar{\theta}^{\sigma\sigma}$. Это условие действительно дополняет каждую систему для u , v и θ еще одним независимым уравнением, т. е. замыкает их. Мы делаем это путем минимизации. Например, в случае θ минимизируем выражение

$$\sum (\theta - \bar{\theta}^{\sigma\sigma})^2,$$

где суммирование производится по тем σ -поверхностям, для которых можно построить $\bar{\theta}^{\sigma\sigma}$ (т. е. верхняя и нижняя поверхности исключены из суммы). Условие минимума приводит к простым для программирования и экономичным в смысле машинного времени расчетам, которые здесь описаны не будут.

Из уравнений тенденций (11), (12), (14) и (15) нельзя прямо определить тенденции, так как каждое из них содержит неизвестную величину $\dot{\sigma}$. Так как p — линейная функция σ , то $p_{,\sigma} = 0$. Это позволяет нам исключить член тенденции из уравнения (15), применив к этому уравнению операцию разностного дифференцирования по σ , после чего получаем для $\dot{\sigma}$ разностное уравнение второго порядка:

$$\begin{aligned} \bar{p}_{\sigma}^{\sigma y} \dot{\sigma}_{\sigma\sigma} + \bar{m}^{\sigma y} [\bar{u}_{\sigma}^{\sigma y} \bar{p}_{\sigma x}^{\sigma y} + \bar{v}_{\sigma}^{\sigma y} \bar{p}_{\sigma y}^{\sigma y} + \bar{p}_{\sigma}^{\sigma y} (\bar{u}_{\sigma x}^{\sigma y} + \bar{v}_{\sigma y}^{\sigma y})] - \\ - \bar{p}_{\sigma}^{\sigma y} (\bar{u}_{\sigma}^{\sigma y} \bar{m}_x^{\sigma y} + \bar{v}_{\sigma}^{\sigma y} \bar{m}_y^{\sigma y}) = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Оператор $(\bar{\quad})^{\sigma y}$ опущен в уравнении (16), что допустимо, так как он применяется ко всему уравнению после того, как операция $(\quad)_{\sigma}$ была проведена и первый член уравнения (15) тем самым исключен. Заметим что $\dot{\sigma}$ определена не в точках сетки, а в центре каждого горизонтального квадрата сетки. Разностное уравнение (16) второго порядка для $\dot{\sigma}$, и оно решается в тропосфере при граничных условиях $\dot{\sigma}^* = \dot{\sigma}^{**} = 0$. Его не нужно решать для стратосферы, так как там $\bar{\dot{\sigma}} = \dot{\sigma}_{\sigma} = 0$, а только таким образом $\dot{\sigma}$ входит в систему разностных уравнений. Если, однако, стратосфера расслоена, то и для нее уравнение (16) нужно решать так же, как в тропосфере, с крайними условиями $\dot{\sigma}_0 = \dot{\sigma}^{**} = 0$. Между прочим, эти условия возникли не из определения вертикальной координаты σ , а, скорее, из условия отсутствия переноса массы через материальные поверхности.

Вычисления для одного шага по времени проводятся следующим образом. Шаг по времени начинается с использования предшествующих данных о предсказываемых величинах. Это $\bar{u}^{\sigma}$, $\bar{v}^{\sigma}$, $\bar{\theta}^{\sigma}$ и p_{σ} . Давление p на поверхностях $k=0, 1, 2, 3, 4$ вычисляется суммированием (дискретным аналогом интегрирова-

ния) p_σ от известного $p_{-1}=0$. Затем из уравнения (6) вычисляется на тех же поверхностях функция $\pi(p)$. Используется отношение $\frac{R}{c_p} = \frac{2}{7}$ в соответствии с рекомендацией ВМО. По уравнению (13) с помощью известной величины z^* — высоты поверхности земли — определяем z на каждой σ -поверхности. Теперь z и π , нужные в уравнениях движения, известны.

Для вычисления u , v , θ на σ -поверхностях по известным для слоев значениям $\bar{u}^z$, $\bar{v}^z$ и $\bar{\theta}^z$ применяется ранее описанный способ. Теперь можно вычислить вертикальные разности u_σ , v_σ и θ_σ , которые входят в члены вертикальной адвекции. Отметим, что в выражение горизонтальных градиентов давления в уравнениях (11) и (12) входит θ на σ -поверхностях. Из уравнения (16) находим σ на σ -поверхностях. Этим заканчиваются промежуточные расчеты дополнительных величин, и теперь тенденции прямо вычисляются и прибавляются к соответствующим значениям на предыдущем шаге по времени, чтобы найти значения искомых величин в следующий момент времени.

3. Источники и стоки энергии

В данном варианте модели члены F_x , F_y и H в уравнениях (11), (12), и (14) присутствуют только в уравнениях для нижнего слоя между $\sigma_T = \frac{2}{3}$ и $\sigma_T = 1$. Вне этого слоя они равны нулю.

Члены F_x и F_y , учитывающие трение, описывают торможение атмосферы шероховатостью земной поверхности. Для правильного учета торможения пограничного слоя атмосферы необходимо явно включить в модель пограничный слой как дополнительный слой, ибо прямое воздействие шероховатости проявляется только в слое толщиной порядка 100 мб (а не 250 мб, что составляет толщину нижнего слоя рассматриваемой модели). Такой тонкий пограничный слой действительно добавляется при перепрограммировании модели для СДС-6600. Аналогичные соображения позволяют включить H в уравнение (14) только в пограничном слое толщиной порядка 100 мб. Пока же они включены, как и описано ниже, в нижний слой четырехслойной модели.

Величина F_x в уравнении (11) определяется следующим выражением:

$$F_x = \frac{g^2}{\Delta p} C_D [(\bar{u}^{xy})^2 + (\bar{v}^{xy})^2]^{\frac{1}{2}} \bar{u}^{xy},$$

где ρ — стандартная плотность на уровне моря, а $\Delta p = 100$ мб. Коэффициент торможения C_D , взятый по Крессману [1], значительно меняется по горизонтали, будучи позитивно скоррелиро-

ванным с высотой поверхности земли. Аналогично определяется F_v в уравнении (12), нужно только заменить в последнем множителе u на v .

Тепловой член H в уравнении (14) имеет особенно простой вид. С его помощью учитываются только диабатические эффекты при сильном нагревании холодного воздуха над теплой водой, и поэтому он стремится к нулю над сушей и над водой, когда температура воды меньше потенциальной температуры $\bar{\theta}$ в нижнем слое. Выражение для H имеет вид

$$H = K(\bar{\theta} - T_w)^{1/2},$$

где T_w — температура воды, а $K = 10^{-4}$ сек. $^{-1}$. Вид этого выражения и константа взяты из работы Лоренца [5]. Работа по учету притока тепла проведена Дж. Д. Стэкпулом из отдела разработок НМЦ. Он показал, что учет теплового члена существенно улучшает краткосрочный прогноз в случае значительного притока тепла, и сейчас готовится опубликовать эти результаты.

В настоящее время мы вводим в модель диабатические эффекты при сильном радиационном охлаждении над снежным покровом в течение полярной ночи и пытаемся учесть скрытую теплоту конденсации. С помощью этих уточнений мы надеемся получить хороший прогноз на срок порядка 5—7 дней.

4. Боковые граничные условия

Модель ограничена по бокам твердыми вертикальными стенками с прямоугольным основанием на плоскости полярной стереографической проекции. Стенка располагается между двумя крайними рядами точек сетки (рис. 2). Использование граничных условий, соответствующих условиям Шумана и Вандермана, приводит к очень сложным вычислениям из-за криволинейности вертикальной координаты σ . Однако они становятся очень простыми, если стенка «липкая», т. е. такая, на которой и нормальная, и тангенциальная компоненты скорости становятся равными нулю. В данной модели боковые стенки поэтому считаются липкими. Корректные граничные условия на стенке, для которой $y = \text{const}$, принимают тогда вид

$$\bar{u}^y = \bar{v}^y = \theta_y = p_{xy} = 0.$$

В этом случае на стенке должно быть выполнено условие $z_y^* = 0$. Аналогичные простые граничные условия имеют место на стенке, для которой x постоянно.

Боковые граничные условия используются для определения u , v , θ и p , в точках сетки, находящихся за стенкой, по их значениям во внутренних точках сетки, непосредственно примыка-

ющих к границе. Например, для определения скорости u во внешней точке сетки нужно только взять ее значение в ближайшей соседней внутренней точке и поменять знак.

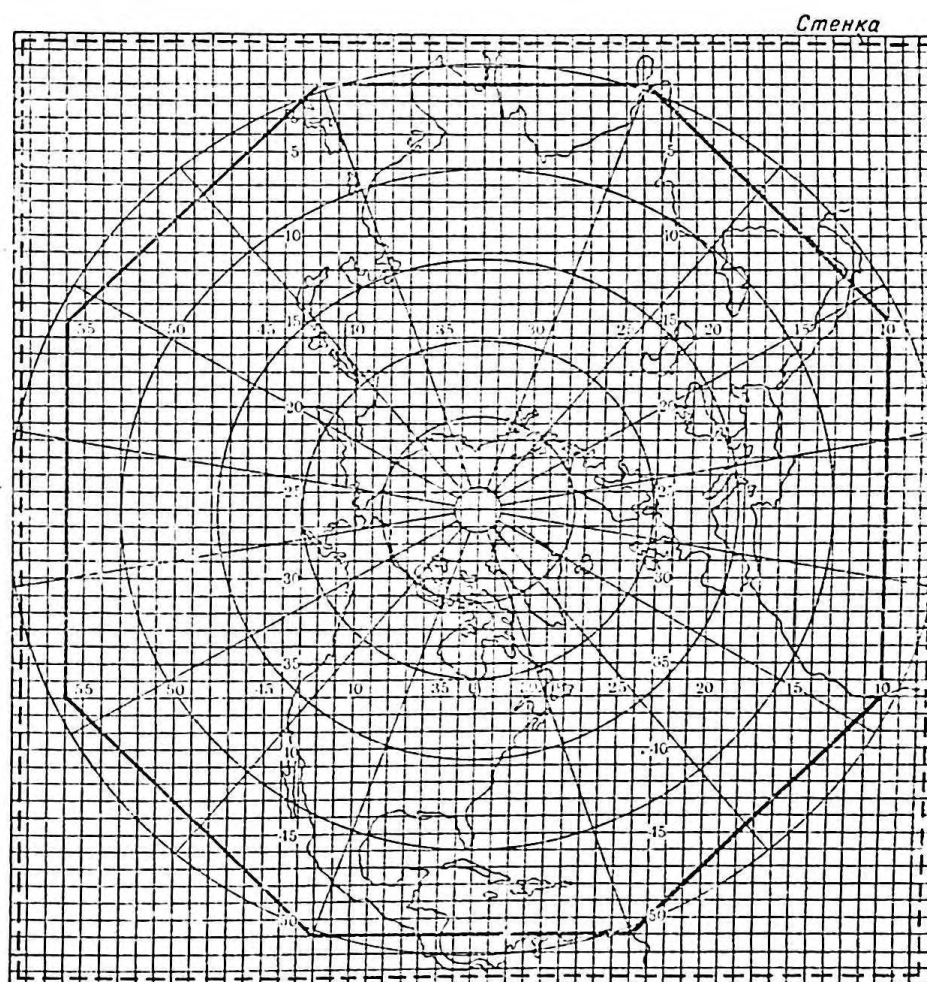


Рис. 2. Сетка точек для четырехслойной модели по полным уравнениям. Пунктирной линией обозначена вертикальная жесткая стенка, ограничивающая модель по бокам. Сплошная линия — граница так называемой JNWP восьмиугольной сетки, с которой проанализированные данные берутся в качестве начальных.

5. Начальные данные

Боковая граница модели — жесткая вертикальная стенка с прямоугольным основанием на плоскости полярной стереографической проекции. Так называемая восьмиугольная сетка точек JNWP [6] является частью прямоугольного основания

модели. Исходными данными служат проанализированные для узлов этой сетки значения давления и температура тропопаузы, высоты поверхности 1000 мб, высоты и температуры поверхностей 850, 700, 500, 400, 300, 200, 150 и 100 мб. Давление и температура тропопаузы анализируются по методу, разработанному Густафсоном [7], анализ высот и температур стандартных поверхностей давления проводится оперативно два раза в сутки.

Каждая из проанализированных величин с помощью устойчивой экстраполяционной процедуры расписывается в прямоугольнике размером 53×57 . На рис. 2 показаны восьмиугольник $JNWP$ и прямоугольник четырехуровневой модели по полным уравнениям.

Экстраполяция состоит в определении среднего значения анализируемой величины на границе восьмиугольника в качестве первого шага, и это среднее значение приписывается точкам прямоугольника, находящимся вне восьмиугольника. Значения функции на границе прямоугольника далее закрепляются, а значения внутри восьмиугольника и вне его «подгоняются» друг под друга с помощью сглаживания. Процесс сглаживания состоит из серии кольцевых просмотров с операцией слабого сглаживания. Сглаживание проводится по Шуману [8] путем применения двух пятиточечных двумерных сглаживающих элементов с индексами сглаживания $v_1 = 0,25$ и $v_2 = -0,25$.

Первое кольцевое уточнение состоит в применении вдоль границы восьмиугольника сглаживающего оператора. Второй шаг состоит в применении этого оператора не только вдоль границы восьмиугольника, но и вдоль двух линий точек, параллельных границе восьмиугольника с той и другой стороны. Каждый следующий шаг содержит еще два кольца точек с обеих сторон кольцевой области предыдущего шага. Выполняется примерно десять таких шагов. Значения на границе прямоугольника остаются постоянными.

Следующий этап состоит в интерполяции данных с тропопаузы и поверхностей постоянного давления на семейство σ -поверхностей. Для определения высоты σ -поверхности интерполируются как высоты, так и температуры изобарического анализа. После того как высоты σ -поверхностей определены, осредненная потенциальная температура слоев $\bar{\theta}$ определяется из уравнения (13). При интерполяции высот изобарических поверхностей предполагается линейное изменение температуры в зависимости от $\ln p$ между соседними поверхностями. Так как при этом предположении знание двух высот и двух температур на вертикали переопределяет задачу, одну часть информации приходится отбрасывать. Каждая из последовательностей двух высот и двух температур дает среднее значение температуры

столба воздуха между соседними изобарическими поверхностями. Процедура анализа в НМЦ не может, да и не должна обеспечивать точного совпадения этих двух значений средней температуры. При интерполяции берется средняя температура, определенная по высотам, а другая отвергается. Единственная информация, которая используется из данных анализа температуры, — это разность между значениями температуры на соседних изобарических поверхностях. Она используется для определения хода изменения температуры в зависимости от $\ln p$.

После того как высоты σ -поверхностей найдены и, следовательно, определены значения температуры θ для каждого слоя, по уравнению баланса находится функция тока. По функции тока затем определяются начальные компоненты ветра $\bar{u}^0$ и $\bar{v}^0$. Согласно предложению Г. Экланда, сделанному во время посещения НМЦ, к ним добавляется дивергентная часть ветра, чтобы получить гладкий начальный поток над горами и над изгибами тропопаузы.

На этом краткий обзор процедуры определения начальных данных заканчивается. Подобная процедура интерполяции используется для построения прогностических карт барической топографии. Мы понимаем, что наш метод определения начальных данных имеет много слабых сторон, главное, что в нем отсутствует полный метеорологический баланс между ветром и полем давления. Эта проблема, однако, еще более сложна, чем проблемы, встречающиеся при построении модели прогноза. К проблеме баланса надлежало бы подходить, как к части проблемы анализа. В НМЦ мы начинаем заниматься этой проблемой, но пройдет еще некоторое время прежде, чем будет найдено ее общее решение. Мы надеемся много почерпнуть из работ других авторов по этой проблеме.

6. Результаты

За последние несколько лет было рассчитано около трех дюжины 36-часовых тестовых прогнозов. Статистическая проверка их качества систематически не проводилась для всех циклов расчета в основном из-за того, что модель подвергалась непрерывным изменениям, касающимся исходных данных, процедуры определения начальных данных, расслоения по вертикали и численной процедуры, связанной с вертикальным расслоением. В табл. 1 приведена средняя квадратическая ошибка высот изобарических поверхностей для серии из 11 случаев, просчитанных в период, когда в модели прогноза не производилось существенных изменений. Эти 11 случаев показаны не как окончательное подтверждение качественных выводов, а как

примеры того, что при выбранных статистических оценках модель успешно конкурирует с оперативной трехуровневой моделью НМЦ [9]. Из 11 случаев примерно половина взята наугад, а вторая половина представляла в известной степени особый интерес.

Таблица 1

Средняя квадратическая ошибка прогноза высот изобарических поверхностей (в футах) над Соединенными Штатами и Канадой для 11 случаев

Уровень, мб	24 часа		36 час.	
	оперативная модель	по полным уравнениям	оперативная модель	по полным уравнениям
850	118	126	172	198
500	174	155	263	260
300	248	227	388	379

Во всех случаях эти прогнозы сравнивались с прогнозами по оперативной модели квалифицированными специалистами, которые давали субъективную оценку их качеству. Обычно с помощью модели по полным уравнениям даются более смелые прогнозы развития барических образований, чем прогнозы по оперативной модели, и в этом отношении она является более точной. При этом тенденции к переоценке развития не имеется. С другой стороны, оперативная модель точнее предсказывает перемещение, возможно, из-за имеющегося в ней контроля ошибок аппроксимации.

Субъективные оценки резко отличаются от статистических в весьма важном отношении. Оперативные прогнозы для уровня 850 мб обычно рассматриваются как наиболее слабая часть оперативной модели, тогда как прогнозы на этом уровне по модели, основанной на полных уравнениях, качественно такие же, как и на других уровнях. Однако статистика табл. 1 противоречит этой оценке, что следует воспринимать как критику в адрес статистических оценок. Хотя нам и нравится считать эти оценки объективными, в них в скрытом виде заложен субъективный подход. Система статистических оценок сама должна быть выбрана субъективно для оценки того, что мы хотим оценить. Поэтому средняя квадратическая ошибка высот изобарических поверхностей плоха для сравнения двух серий прогнозов на уровне 850 мб.

К этому можно добавить следующее. Можно показать, что средняя квадратическая ошибка будет мала при предвычислении малой амплитуды, если имеется небольшая ошибка в фазе. Оперативное предсказание на уровне 850 мб по субъективным оценкам является ошибочным главным образом потому, что

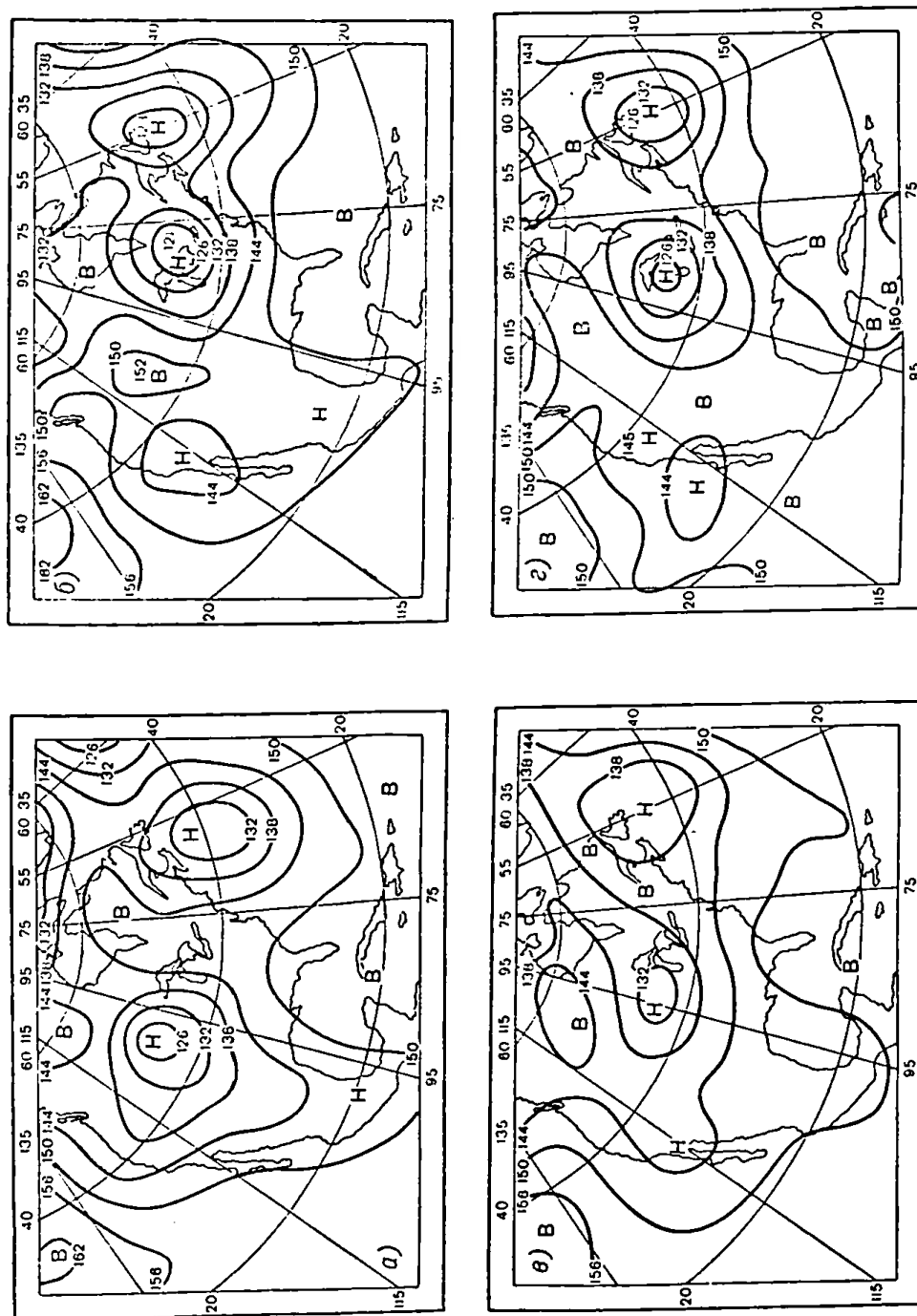


Рис. 3. Прогноз на 36 час. для 00 час. гринвичского времени 11 апреля 1965 г., поверхность 850 мб.
 а — исходная карта высот изобарической поверхности; б — фактическая карта высот через 36 час.; в — прогностическая карта (на 36 час.), рассчитанная по трехуровневой модели; г — прогностическая карта (на 36 час.), рассчитанная по полным уравнениям.

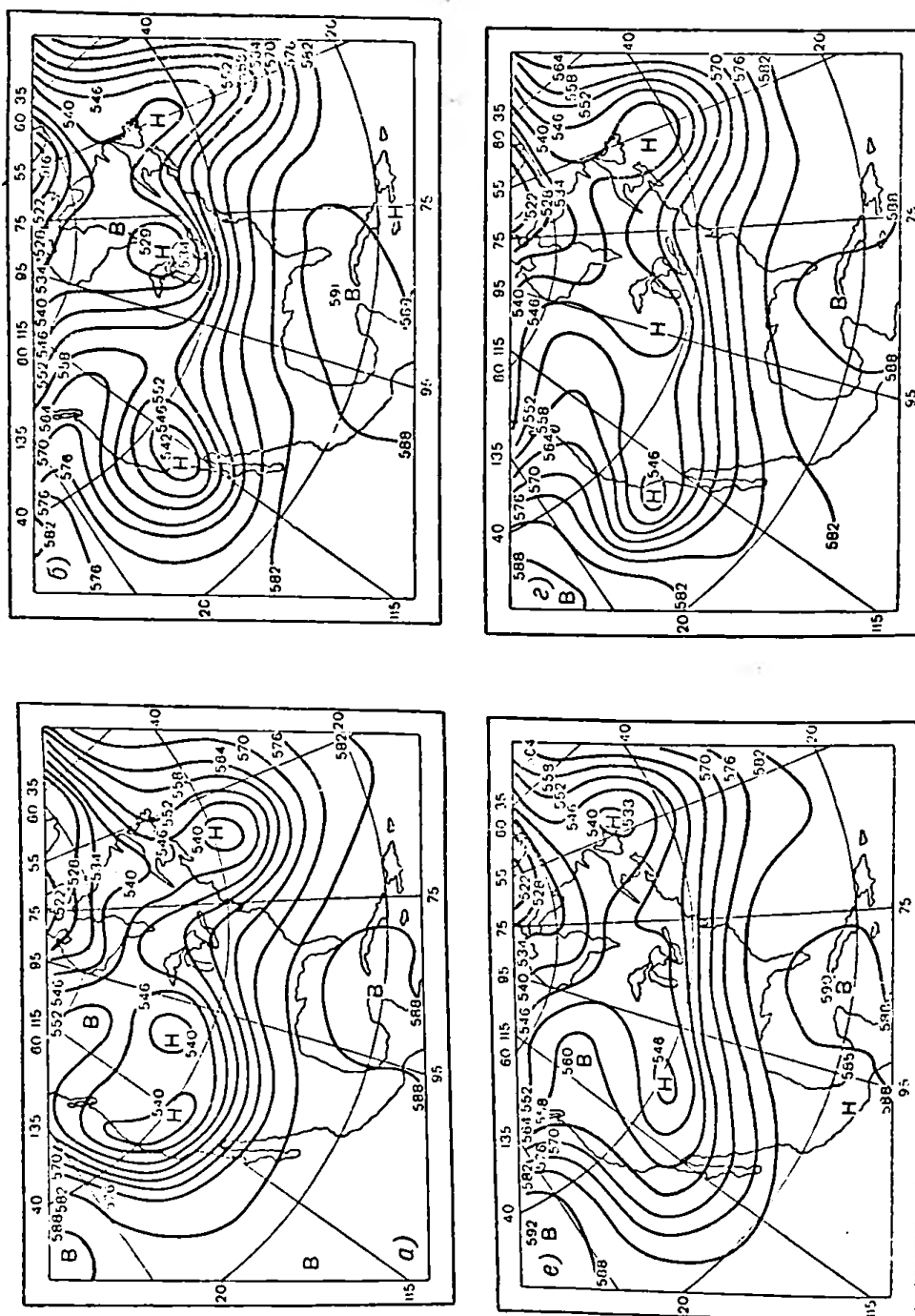


Рис. 4. Прогноз на 36 час. для 00 час. гриничского времени 11 апреля 1965 г., поверхность 500 мб.
Усл. обозначения см. рис. 3.

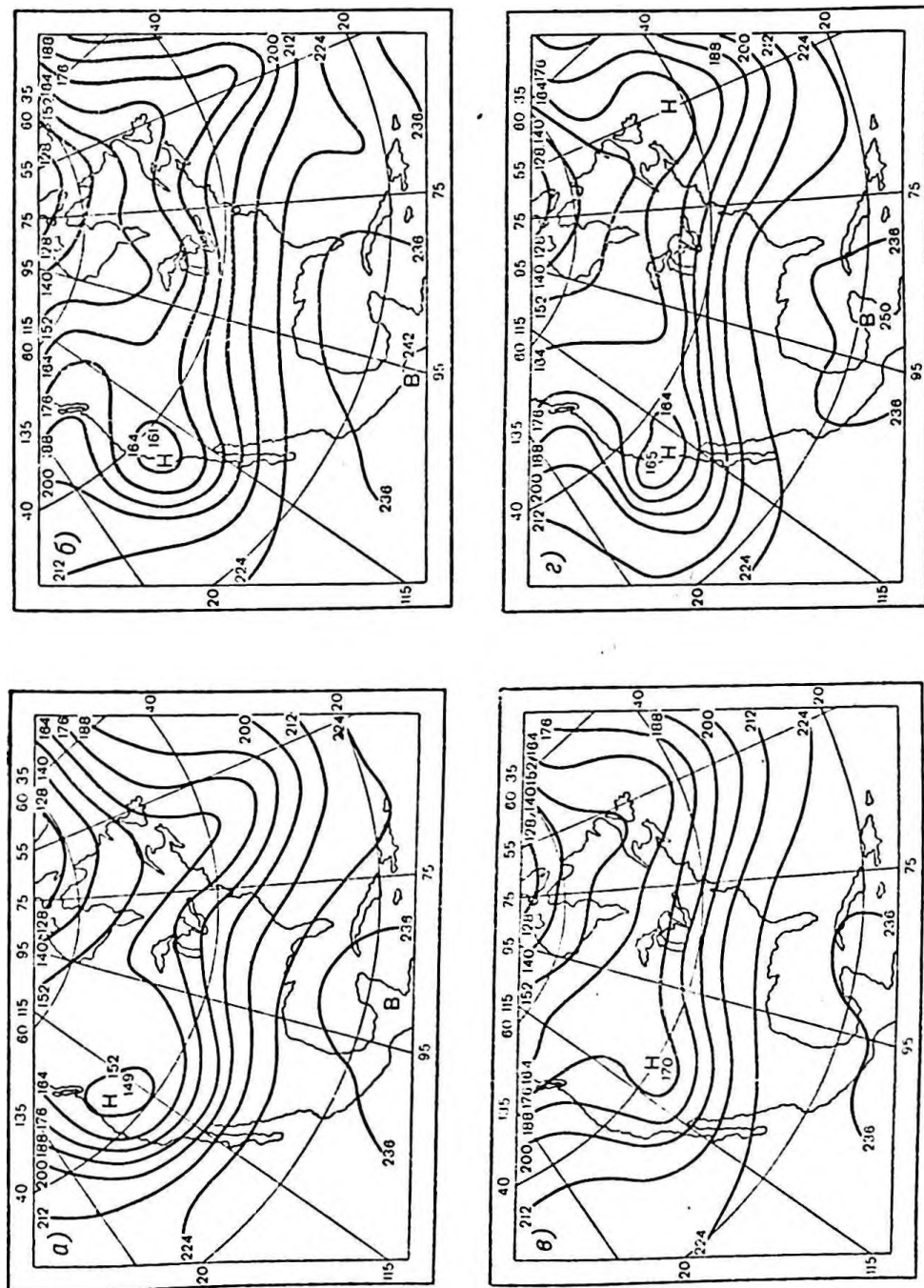


Рис. 5. Прогноз на 36 час. для 00 час. гринвичского времени 11 апреля 1965 г., поверхность 200 мб.
Усл. обозначения см. рис. 3.

дает систематически заниженные амплитуды. Так как прогнозы по полным уравнениям не страдают этим недостатком, то средняя квадратическая ошибка представляет их в невыгодном свете, как это видно из табл. 1.

Рисунки 3, 4 и 5 иллюстрируют 36-часовой прогноз для 00 час. гринвичского времени 11 апреля 1965 г. Модель по полным уравнениям хорошо предсказала изоляцию циклона над Южной Калифорнией, тогда как оперативная (трехуровневая) модель этого не уловила.

Из рис. 3 видно, что оперативная (трехуровневая) модель, как и следовало ожидать, предсказала заполнение циклонов на уровне 850 мб над Великими озерами и Ньюфаундлендом. В этом случае проверками подтверждается субъективная оценка: прогноз по полным уравнениям дает лучший результат, чем прогноз по оперативной модели.

В табл. 2 для описанного случая приведены средние квадратические ошибки высот изобарических поверхностей и вектора геострофического ветра. Здесь можно только сказать, что по этим оценкам модель, основанная на полных уравнениях, дает лучшие результаты на всех уровнях.

Таблица 2

Средние квадратические ошибки прогноза высот изобарических поверхностей (в футах) и вектора геострофического ветра (в узлах) над Соединенными Штатами и Канадой на 24 часа вперед по исходным данным в 00 час. гринвичского времени 11 апреля 1965 г.

Уровень, мб	Ошибки высоты		Ошибки вектора геострофического ветра	
	оперативная модель	по полным уравнениям	оперативная модель	по полным уравнениям
850	157	136	14	13
500	239	180	22	18
200	265	182	23	19

7. Выводы

Четырехслойная модель по полным уравнениям, обсуждающаяся здесь, вновь запрограммирована для СДС-6600 как шестислойная модель. Один из двух добавляемых слоев — пограничный слой, другой входит в стратосферу в качестве дополнительного слоя при ее расслоении.

НМЦ планирует оперативное применение шестиуровневой модели вместо трехуровневой фильтрованной модели Крессмана [9]. Планы эти зависят от испытаний шестиуровневой модели. Эта модель будет запрограммирована и отлажена, когда будут готовы оборудование и вспомогательные подпрограммы, вероятнее всего в январе 1966 г.

Мы намеряем учесть в модели радиационное охлаждение над снежным покровом в течение полярной ночи, пользуясь методикой, разработанной Д. Дж. Буманом из Нидерландов во время его недавнего посещения НМЦ. Мы развиваем методы, учитывающие скрытую теплоту. Мы начали опыты с четырехслойной моделью по прогнозу на недельный срок, но пока еще слишком рано говорить об определенных результатах. Ориентировочные планы, однако, предусматривают составление недельных оперативных численных прогнозов.

В будущем мы хотим улучшить процедуру определения начальных данных, но рассматриваем это как проблему численного анализа.

С момента получения Вандерманом [3] недавних результатов по счету на 100 дней (баротропная модель) мы не можем более удовлетворяться вычислительным поведением четырехслойной модели. При прогнозах наблюдается медленный, но систематический рост среднего квадратического значения σ , которое примерно соответствует среднему квадратическому значению дивергенции, ведущей себя так хорошо в вычислениях Вандермана. Я полагаю, что многоуровневая модель должна вести себя не хуже, чем более простая. Я также считаю, что мы в НМЦ успешно разделили проблему построения устойчивых конечно-разностных схем на две части — горизонтальные разности, для которых мы имеем прямо-таки превосходное решение (и имели его уже много лет), и вертикальные разности, для которых мы имеем решение, о котором можно сказать только, что оно соответствует нашим насущным целям.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cressman G. P. Improved Terrain Effects in Barotropic Forecasts. *Monthly Weather Review*, 88, No. 9—12, 1960.
2. Phillips N. A. A Coordinate System Having Some Special Advantages for Numerical Forecasting. *J. Met.* 14, No. 2, 1957.
3. Shuman F. G. and Vanderman L. W. Difference System and Boundary Conditions for the Primitive Equation Barotropic Forecast. См. стр. 466.
4. Shuman F. G. Numerical Experiments with the Primitive Equations. *Proceedings of the International Symposium on Numerical Weather Prediction in Tokyo, November 7—13, 1960. Meteorological Society of Japan, Tokyo, 1962.*
5. Lorenz E. N. Simplified Dynamic Equations Applied to the Rotating-Basin Experiments. *J. Atm. Sci.*, 19, No. 1, 1962.
6. Fawcett E. B. Six Years of Operational Numerical Weather Prediction. *J. Appl. Met.*, 1, No. 3, 1962.
7. Gustafson A. F. Objective Analysis of the Tropopause. Technical Memorandum No. 33, National Meteorological Center, U. S. Weather Bureau, Washington, 1963.
8. Shuman F. G. Numerical Methods in Weather Prediction: II. Smoothing and Filtering. *Monthly Weather Review*, 85, No. 11, 1957.
9. Cressman G. P. A Three-Level Model Suitable for Daily Numerical Forecasting. Technical Memorandum No. 22, National Meteorological Center, U. S. Weather Bureau, Washington, 1963.

ПРОГНОЗ ОБЛАЧНОСТИ И ОСАДКОВ

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ДВУХУРОВЕННАЯ МОДЕЛЬ ПРОГНОЗА ГИГРОСКОПИЧЕСКОЙ РАЗНОСТИ, ОБЛАЧНОСТИ И ОСАДКОВ

Как известно, облака и осадки образуются в результате конденсации и сублимации водяного пара в атмосфере. Состояние насыщения, необходимое для начала процесса конденсации, достигается в атмосфере или благодаря притоку водяного пара к данному объему воздуха, или вследствие изменения температуры и давления, от которых зависит максимальная удельная влажность. Процессы переноса тепла и влаги в атмосфере, приводящие к образованию и последующей эволюции облаков, описываются уравнениями

$$\frac{dq}{dt} = g^2 \frac{\partial}{\partial p} \left(\nu \rho^2 \frac{\partial q}{\partial p} \right) - \frac{m}{\rho}, \quad (1)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = g^2 \frac{\partial}{\partial p} \left(\nu \rho^2 \frac{\partial \theta}{\partial p} \right) + \frac{Lm}{c_p \rho}, \quad (2)$$

где q — удельная влажность воздуха; θ — потенциальная температура; m — абсолютная скорость конденсации водяного пара, т. е. количество воды и кристаллов льда, образовавшихся в единице объема за единицу времени; g — ускорение силы тяжести; ρ — плотность воздуха; ν — кинематический коэффициент турбулентной вязкости; p — давление воздуха; L — скрытая теплота конденсации; c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении; t — время;

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + \tau \frac{\partial}{\partial p},$$

u, v, τ — составляющие ветра в системе координат x, y, p, t .

Для облака система уравнений (1) — (2) дополняется соотношением

$$q = q_m = 0,622 \frac{E(T)}{p}, \quad (3)$$

где q_m — максимальная удельная влажность; $E(T)$ — максимальная упругость водяного пара (вне облака $m=0$).

Система уравнений (1) — (3) в принципе позволяет по заданным в начальный момент t_0 значениям удельной влажности, потенциальной температуры и составляющим ветра определить значения q и θ в следующий момент времени $t_0 + \Delta t$ и вычислить мощность «стоков» водяного пара.

М. Е. Швец [5], исключая последовательно из уравнений (1) — (3) q и m , q и $\frac{\partial T}{\partial t}$, получил соответственно уравнения для $\frac{\partial T}{\partial t}$ и m .

Мы не будем останавливаться на выводе этих уравнений, поскольку, как показала работа Швеца, прямой метод решения системы уравнений переноса тепла и влаги сопряжен с большими трудностями. Одна из этих трудностей заключается в том, что при решении системы (1) — (3) требуется точно разграничивать случай, когда в воздухе не содержится твердой или жидкой фазы и фазовые превращения отсутствуют (ненасыщенное состояние, $m=0$), и случай, когда достигается состояние насыщения ($m \neq 0$).

При решении системы (1) — (3) о степени приближения воздуха к состоянию насыщения можно судить по величине $\delta = q - q_m$ ($\delta < 0$ — состояние ненасыщенное, $\delta \geq 0$ — состояние насыщенное). Однако при вычислении этой величины могут возникнуть большие погрешности, так как в выражении для δ каждый из членов обычно на порядок больше их разности.

Если даже величина погрешности в определении q и q_m будет на порядок меньше, чем величина самих членов, то ошибка в расчетах δ будет того же порядка, что и δ . В связи с этим для целей численного прогноза облачности более целесообразно применять уравнение переноса относительной влажности или дефицита влажности ($q - q_m$). Вместо последней величины удобнее использовать разность

$$S = T - t_d, \quad (4)$$

где t_d — так называемая точка росы, т. е. температура, до которой следует охладить воздух при неизменных давлении и удельной влажности, чтобы наступило насыщение. Очевидно, что состояние насыщения, а следовательно, начало процесса конденсации наступает при $S \leq 0$. Величину S принято называть дефицитом точки росы или гигроскопической разностью. Последний термин нам кажется более удачным. Ввиду сложности проблемы прогноза облачности первые прогностические схемы были разработаны при некоторых достаточно существенных упрощающих предположениях.

В холодную половину года турбулентное перемешивание ослаблено, и в первом приближении членом $g^2 \frac{\partial}{\partial p} \left(\gamma^2 \frac{\partial q}{\partial p} \right)$ в урав-

нении (1) можно пренебречь. При отсутствии конденсации $m = 0$. После этих упрощений уравнение (1) примет вид

$$\frac{dq}{dt} = \frac{d \ln q}{dt} = 0. \quad (5)$$

Присоединим к уравнению (5) соотношение, связывающее удельную влажность с упругостью водяного пара,

$$q = 0,622 \frac{e}{p} \quad (6)$$

и формулу Магнуса

$$e = e_0 10^{\frac{at_d}{b+t_d}}, \quad (7)$$

где e_0 — упругость насыщения водяного пара при $t_d = 0$; e — упругость водяного пара; t_d — точка росы в градусах Цельсия; a , b — некоторые константы, которые в зависимости от того, достигается ли насыщение над водой или льдом, принимают следующие значения:

	Вода	Лед
a	7,63	9,5
b	241,9	265,5

Логарифмируя обе части соотношения (6) и (7), получим

$$\ln q = \ln 0,622 + \ln e - \ln p; \quad (8)$$

$$\ln e = \ln e_0 + M \frac{at_d}{b+t_d}, \quad (9)$$

где $M = \ln 10$.

Подставляя в равенство (8) вместо $\ln e$ его значение из (9), мы получим

$$\ln q = \ln 0,622 + \ln e_0 + M \frac{at_d}{b+t_d} - \ln p. \quad (10)$$

Перепишем далее уравнение (5) в виде

$$\frac{d \ln q}{dt} = \frac{d_h \ln q}{dt} + \tau \frac{\partial \ln q}{\partial p} = 0, \quad (11)$$

где

$$\frac{d_h}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y},$$

$\tau = \frac{dp}{dt}$ — аналог вертикальной скорости в системе координат x, y, p, t .

Исключим теперь из уравнения (11) $\frac{d_h \ln q}{dt}$ и $\frac{\partial \ln q}{\partial p}$, используя для этого соотношение (10).

Применяя оператор $\frac{d_h}{dt}$ к обеим частям равенства (10), получаем

$$\frac{d_h \ln q}{dt} = M \frac{a \frac{d_h t_d}{dt} (b + t_d) - a t_d \frac{d_h t_d}{dt}}{(b + t_d)^2} = \frac{Mab}{(b + t_d)^2} \frac{d_h t_d}{dt}. \quad (12)$$

Аналогично, дифференцируя обе части равенства (10) по p , имеем

$$\frac{\partial \ln q}{\partial p} = \frac{Mab}{(b + t_d)^2} \frac{\partial t_d}{\partial p} - \frac{1}{p}. \quad (13)$$

С учетом соотношений (12) и (13) уравнение (11) запишется в виде

$$\frac{Mab}{(b + t_d)^2} \frac{d_h t_d}{dt} + \left[\frac{Mab}{(b + t_d)^2} \frac{\partial t_d}{\partial p} - \frac{1}{p} \right],$$

или окончательно

$$\frac{d_h t_d}{dt} = \frac{(b + t_d)^2}{Mab} \frac{1}{p} - \frac{\partial t_d}{\partial p}. \quad (14)$$

Чтобы получить уравнение для гигроскопической разности S , запишем уравнение притока тепла в адиабатической форме

$$\frac{d_h T}{dt} = \frac{z-1}{z} \frac{T}{p} - \frac{\partial T}{\partial p} \quad \left(z = \frac{c_p}{c_v} = 1,44 \right) \quad (15)$$

и вычтем (14) из (15), тогда

$$\frac{d_h S}{dt} = \left[\frac{z-1}{z} T - \frac{(b + t_d)^2}{Mab} \right] \frac{1}{p} - \frac{\partial S}{\partial p}. \quad (16)$$

Последнее соотношение, впервые полученное М. Е. Швецом [6], было использовано П. К. Душкиным, Е. Г. Ломоносовым и Ю. И. Луниным [2] для численного прогноза гигроскопической разности.

Строго говоря, для прогноза гигроскопической разности, основанного на решении уравнения (16), необходимо иметь прогноз температуры и составляющих ветра, а также задать подобающим образом граничное условие для S по вертикали.

Однако, как показали исследования вышеупомянутых авторов, выражение

$$\alpha = \frac{z-1}{z} T - \frac{(b-t_d)^2}{Mab}$$

в пределах возможных значений T и t_d в нижней и средней тропосфере можно приближенно считать постоянным для каждой изобарической поверхности 850, 700 и 500 мб. Используя климатические данные за холодную половину года для умеренных широт Европейской территории СССР, авторы получили

$$\alpha_{850} = 63,92 \text{ град.}, \quad \alpha_{700} = 62,73 \text{ град.}, \quad \alpha_{500} = 60,53 \text{ град.}$$

В излагаемой схеме прогноза гигроскопической разности было сделано еще одно упрощение уравнения (16). В результате статистического исследования было установлено, что второе слагаемое в правой части уравнения (16) примерно в 40 раз меньше первого. Это позволяет отбросить в правой части второй член уравнения (16), т. е. считать уравнение (16) квазигоризонтальным.

После этих упрощений уравнение для прогноза гигроскопической разности принимает вид

$$\frac{d_h S}{dt} = \alpha \frac{\tau}{p} \quad \text{или} \quad \frac{\partial S}{\partial t} = - \left(u \frac{\partial S}{\partial x} + v \frac{\partial S}{\partial y} \right) + \alpha \frac{\tau}{p}. \quad (17)$$

Уравнение (17) значительно проще, чем уравнение (16), оно позволяет, в отличие от уравнения (16), решать задачу прогноза гигроскопической разности автономно на каждой изобарической поверхности. В квазигеострофическом приближении

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{g}{f} J(S, H) + \frac{\alpha}{p} \tau, \quad (18)$$

где H — высота изобарической поверхности.

Расчеты S производились для прямоугольной сеточной области размером 22×18 узлов, расстояние между соседними узлами равно 300 км. На границе области гигроскопическая разность принималась постоянной в течение всего срока прогноза (одни сутки). Прогноз геопотенциала (H) и вертикальной скорости осуществлялся по трехуровневой квазигеострофической модели [3], теоретические основы которой были разработаны Н. И. Булеевым и Г. И. Марчуком [1].

По вычисленному полю давления и тенденциям геопотенциала на каждом шаге по времени определяются вертикальные токи на изобарических поверхностях 850, 700 и 500 мб. Последние определяются из уравнения притока тепла (см. [4])

$$\tau(\tau) = -\alpha \tau^2 \frac{g}{f} \left(H, \frac{\partial H}{\partial \tau} \right) - \alpha \tau^2 \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial H}{\partial t} \right), \quad (19)$$

где

$$\zeta = \frac{p}{P} (P = 1000 \text{ мб}), \quad a = \frac{gP}{m^2 f^2}, \quad m^2 = \frac{R^2 T}{g f^2} (\gamma_a - \gamma).$$

Используя найденные вертикальные токи и поля H и S , определяем тенденцию гигроскопической разности, а затем шагом по времени Δt вычисляем S в следующий момент времени:

$$S(t + \Delta t) = S(t) + \frac{\partial S}{\partial t} \Delta t.$$

При практической реализации схемы шаг по времени Δt был принят равным одному часу.

Поле геопотенциала на изобарической поверхности 700 мб определялось по интерполяционной формуле с привлечением условия политропности

$$H_{700} = 0,3764 H_{300} + 0,6236 H_{850}.$$

В связи с тем, что влажность воздуха в свободной атмосфере измеряется с большими погрешностями, начальные поля гигроскопической разности сглаживались. Для узла сетки i, j сглаживание производилось по формуле

$$\begin{aligned} \bar{S}_{i,j} = & \beta_1 S_{i,j} + \beta_2 (S_{i+1,j} + S_{i,j+1} + S_{i-1,j} + S_{i,j-1}) + \\ & + \beta_3 (S_{i+1,j+1} + S_{i-1,j+1} + S_{i-1,j-1} + S_{i+1,j-1}), \end{aligned} \quad (20)$$

где $\beta_1 = 0,625$, $\beta_2 = 0,0625$, $\beta_3 = 0,03125$.

В процессе счета производилось сглаживание на каждом шаге по времени по формуле (20), но при этом коэффициенты β_1 , β_2 , β_3 имели следующие значения: $\beta_1 = 0,904$, $\beta_2 = 0,016$, $\beta_3 = 0,008$. Схема комплексного прогноза H , τ , S была реализована на электронной вычислительной машине.

Совершенно очевидно, что прогноз гигроскопической разности не решает однозначно прогноз облачности и осадков. В то же время опыт и теоретические соображения показывают, что между гигроскопической разностью и вертикальными токами, с одной стороны, и такими явлениями погоды, как облачность и осадки, с другой стороны, должна существовать корреляционная связь.

Льюис [7] впервые построил номограмму связи между вертикальными токами, гигроскопической разностью на поверхности 700 мб и явлениями погоды. Используя идею Льюиса, авторы работы [2] построили аналогичную номограмму (рис. 1), однако, в отличие от номограммы Льюиса, для ее построения были использованы: 1) более обширный экспериментальный материал, 2) более совершенная схема расчета вертикальных токов (Льюис рассчитывал вертикальные токи по термотропной

модели только на одной изобарической поверхности 700 мб), 3) данные о влажности не только на 700 мб поверхности, но и на более низких уровнях, влияние которых в процессе облакообразования зачастую может оказаться решающим.

В качестве исходного материала для построения номограммы было использовано около 500 случаев, в каждом из которых имелись рассчитанные (диагностические) величины вертикальных токов и фактические значения гигроскопической разности.

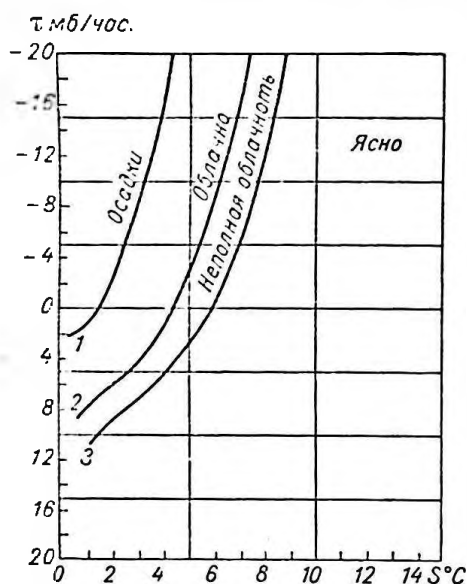


Рис. 1. Номограмма для определения явлений погоды.

Каждой паре значений τ и S ставилось в соответствие одно из следующих явлений погоды: * — осадки; ☉ — облачно (7—10 баллов); × — небольшая облачность (4—6 баллов); ○ — ясно (меньше 4 баллов).

Приведенные выше значки явлений погоды наносились на график, по оси абсцисс которого отложены значения гигроскопической разности, а по оси ординат — значения вертикальной скорости, выраженные в мб/час. После этого были проведены демаркационные линии, отделяющие области осадков и значительной облачности с обеспеченностью около 80% и промежуточную область небольшой облачности с обеспеченностью примерно 50%.

Демаркационные линии номограммы для поверхности 850 мб с удовлетворительной точностью могут быть аппроксимированы (по Л. А. Кузнецову) соотношениями вида

$$\tau_{oc} = -1,1522S^2 - 0,1805S + 2,4152;$$

$$\tau_{0,5} = -0,6182S^2 + 1,0090S + 6,9140;$$

$$\tau_{исч} = -0,4691S^2 + 1,1889S + 9,0277.$$

Проверка диагностических возможностей номограмм показала, что по номограмме для поверхности 850 мб оправдываемость явлений погоды несколько лучше, чем по номограмме для поверхности 700 мб. Это, по-видимому, объясняется тем, что явления погоды на этом уровне определяются по данным приземной карты погоды с большими ошибками.

Оправдываемость прогнозов по этой методике составляет примерно 80%.

ЛИТЕРАТУРА

1. Булеев Н. И., Марчук Г. И. О динамике крупномасштабных атмосферных процессов. Труды ИФА АН СССР, № 2, 1958.
2. Душкин П. К., Ломоносов Е. Г., Лунин Ю. Н. Опыт численного прогноза влажности, облачности и осадков на вычислительной машине. Метеорология и гидрология, № 12, 1960.
3. Душкин П. К., Ломоносов Е. Г., Татарская М. С. Прогноз цикло- и антициклогенеза с помощью вычислительной машины. Метеорология и гидрология, № 6, 1959.
4. Душкин П. К., Ломоносов Е. Г. О вертикальных токах в тропосфере. Метеорология и гидрология, № 1, 1960.
5. Швец М. Е. О конденсации водяного пара в атмосфере. Изв. АН СССР, серия геофиз., № 6, 1955.
6. Швец М. Е. К вопросу предвычисления поля относительной влажности. Труды ГГО, вып. 81, 1959.
7. Lewis W. Forecasting 700mb Dewpoint Depression by a Three-Dimensional Trajectory Technique. Monthly Weather Review, 85, No. 9, 1957.

II. МЕТОДЫ ПРОГНОЗА ОБЛАЧНОСТИ И ОСАДКОВ, ОСНОВАННЫЕ НА ИСПОЛЬЗОВАНИИ ИНВАРИАНТОВ

В холодную половину года, когда турбулентное перемешивание ослаблено, процессы переноса тепла и влаги при отсутствии конденсации можно приближенно описать уравнениями

$$\frac{dq}{dt} = \frac{d \ln q}{dt} = 0; \quad (1)$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{A}{c_p} \frac{dp}{dt} = 0, \quad (2)$$

где T — температура воздуха; A — термический эквивалент работы. Пояснения к остальным обозначениям даны в разделе I.

Так как

$$\ln q = \text{const} + \ln e - \ln p, \quad (3)$$

то уравнение (1) можно преобразовать к виду

$$\frac{d \ln e}{dt} - \frac{d \ln p}{dt} = 0. \quad (4)$$

Обозначим через r относительную влажность. Тогда

$$e = rE, \quad \ln e = \ln r + \ln E. \quad (5)$$

Подставляя в (4) вместо $\ln e$ его значение из (5), получим

$$\frac{d \ln r}{dt} + \frac{d \ln E}{dT} \frac{dT}{dt} - \frac{d \ln p}{dt} = 0. \quad (6)$$

С учетом уравнения (2) последнее уравнение примет вид

$$\frac{d \ln r}{dt} + \frac{d \ln E}{dT} \frac{A}{c_p} \frac{dp}{dt} - \frac{d \ln p}{dt} = 0. \quad (7)$$

Так как

$$\frac{1}{\rho} = \frac{RT}{p}, \quad \frac{AR}{c_p} = \frac{c_p - c_v}{c_p} = \frac{\kappa - 1}{\kappa},$$

где c_v — удельная теплоемкость при постоянном объеме, $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$, то уравнение (7) преобразуется к виду

$$\frac{d \ln r}{dt} + \lambda \frac{d \ln p}{dt} = 0, \quad (8)$$

где

$$\lambda = \frac{d \ln E}{dT} \frac{\kappa - 1}{\kappa} T - 1. \quad (9)$$

Выражение $\frac{d \ln E}{dT}$ может быть вычислено по формуле Клаузиуса — Клапейрона $\frac{d \ln E}{dT} = \frac{L}{AR_w T^2}$, где R_w — газовая постоянная водяного пара.

Вообще говоря, λ является функцией температуры, но в первом приближении, как это следует из данных, приводимых в [5], λ можно считать величиной постоянной. В силу этого уравнение (8) запишем в виде

$$\frac{d}{dt} [\ln r p^\lambda] = 0. \quad (10)$$

Это означает, что вдоль траектории воздушной частицы должно выполняться соотношение

$$r p^\lambda = \text{const} = r^0 (p^0)^\lambda, \quad (11)$$

где r^0 , p^0 , r и p — соответственно относительная влажность и давление в начальной и конечной точках траектории. Так как в адиабатическом приближении вдоль траектории

$$\frac{p}{T^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}} = \text{const},$$

то соотношению (11) можно придать вид

$$r T^{\frac{\lambda \kappa}{\kappa-1}} = \text{const}. \quad (12)$$

Полученные инвариантные соотношения позволяют в принципе вычислять относительную влажность в момент времени $t + \delta t$, если известно ее значение в момент времени t .

Однако для практических расчетов соотношениям (11) и (12) целесообразно придать несколько иной вид. Дело в том, что для предвычисления относительной влажности по формуле (11) и (12) необходимо строить пространственную траекторию воздушных частиц.

Для построения пространственной траектории необходимо вычислять вертикальную составляющую скорости ветра. Формулы, по которым вычисляется вертикальная скорость ветра, достаточно громоздки. Чтобы избежать построения пространственных траекторий, перепишем уравнение (8) в виде

$$\frac{d_h \ln r}{dt} + \left(p \frac{\partial \ln r}{\partial p} + \lambda \right) \frac{z}{p} = 0. \quad (13)$$

Как показано в работе [5],

$$p \frac{\partial \ln r}{\partial p} \ll \lambda.$$

В силу этого с приемлемой для практических целей точностью уравнению (13) можно придать вид

$$\frac{d_h \ln r}{dt} + \lambda \frac{z}{p} = 0. \quad (14)$$

Для исключения из уравнения (14) вертикальной скорости присоединим к уравнению (14) уравнение переноса вихря скорости ветра

$$\frac{d_h \ln (\Omega + f)}{dt} = \frac{\partial z}{\partial p}, \quad (15)$$

где $\Omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$, f — параметр Кориолиса.

Положим

$$z = \bar{z}(x, y, t) F(p). \quad (16)$$

С учетом последнего равенства уравнения (15) и (16) перепишем в виде

$$\frac{d_h \ln r}{dt} = -\lambda \bar{z} \frac{F}{p}, \quad (17)$$

$$\frac{d_h \ln (\Omega + f)}{dt} = \bar{z} F', \quad (18)$$

где

$$F' = \frac{\partial F}{\partial p}.$$

Умножим теперь уравнение (17) на $K = \frac{pF'}{fF}$ и результат сложим с (18). Тогда получим

$$K \frac{d_h \ln r}{dt} + \frac{d_h \ln (\Omega + f)}{dt} = 0$$

или

$$\frac{d_h}{dt} [r^K (\Omega + f)] = 0. \quad (19)$$

Из (19) следует, что вдоль плоской траектории должна оставаться постоянной величина

$$r (\Omega + f)^{\frac{1}{K}} = \text{const} = r^0 (\Omega^0 + f^0)^{\frac{1}{K}}. \quad (20)$$

Инварианты (11), (12) и (20) впервые были получены М. Е. Швецом [5]. В формуле (20) r^0 , Ω^0 , r и Ω — соответственно относительная влажность и вихрь скорости в начальной и конечной точках плоской траектории.

Величина K слабо зависит от вертикального профиля τ . В работе [5] были рассмотрены три профиля τ :

$$\text{I. } \tau = \sqrt{2} \bar{\tau} \sin \left[\frac{\pi}{2} \frac{p_0 - p}{p_0 - p_e} \right];$$

$$\text{II. } \tau = \frac{4}{3} \bar{\tau} \left[2 \frac{p_0 - p}{p_0 - p_e} + \left(\frac{p_0 - p}{p_0 - p_e} \right)^2 \right];$$

$$\text{III. } \tau = \bar{\tau} \cdot 2 \frac{p_0 - p}{p_0 - p_e}.$$

Здесь p_0 — давление у поверхности земли (1000 мб); p_e — давление на бездивергентном уровне (500 мб); $\bar{\tau}$ — вертикальная скорость на изобарической поверхности $\bar{p} = \frac{p_0 + p_e}{2} = \text{const}$.

Профиль I был введен в работе [6], профиль II — в работе [8]. Значения K для трех профилей, приведенные в табл. 1, подтверждают слабую зависимость K от вида функции $F(p)$.

Таблица 1

Уровень, мб	Профиль τ			Среднее значение
	I	II	III	
900	-1,8	-1,6	-1,8	-1,7
850	-1,0	-0,94	-1,1	-1,0
700	-0,32	-0,27	-0,47	-0,35

Инвариантные соотношения (11), (12) и (20) получены в предположении адиабатичности процессов. Аналогичные инварианты, как показано в работе [4], можно получить и без этого ограничения. Перепишем уравнение (4) в виде

$$\frac{d_h \ln e}{dt} + \tau \frac{\partial \ln e}{\partial p} - \frac{d \ln p}{dt} = 0. \quad (21)$$

Так как

$$\frac{\partial \ln e}{\partial p} = \frac{\partial \ln r}{\partial p} + \frac{\partial \ln E}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial p} = \frac{\partial \ln r}{\partial p} + \frac{\partial \ln E}{\partial T} \frac{\gamma R}{g} \frac{T}{p},$$

где γ — вертикальный градиент температуры и $\frac{d \ln p}{dt} = \frac{\tau}{p}$, то уравнение (21) преобразуется к виду

$$\frac{d_h \ln e}{dt} = - \left[p \frac{\partial \ln r}{\partial p} + \lambda_1 \right] \frac{\tau}{p} = 0, \quad (22)$$

где

$$\lambda_1 = \left[\frac{\partial \ln E}{\partial T} \frac{\gamma R}{g} T - 1 \right]. \quad (23)$$

Но

$$\frac{\gamma R}{g} = \frac{\gamma}{\gamma_a} \frac{\gamma_a R}{g} = \frac{\gamma}{\gamma_a} \frac{g}{c_p} \frac{R}{g} = \frac{\gamma}{\gamma_a} \frac{z-1}{z},$$

тогда

$$\lambda_1 = \frac{\gamma}{\gamma_a} \frac{\partial \ln E}{\partial T} \frac{z-1}{z} T - 1 \quad (24)$$

или окончательно с учетом (9)

$$\lambda_1 = \frac{\gamma}{\gamma_a} \lambda + \left(\frac{\gamma}{\gamma_a} - 1 \right); \quad (25)$$

λ_1 при средних значениях γ имеет тот же порядок малости, что и λ ($\lambda_1 \approx 0,5\lambda$). Ранее уже указывалось, что $p \frac{\partial \ln r}{\partial p} \ll \lambda$. Поэтому уравнению (22) можно придать вид

$$\frac{d_h \ln e}{dt} = - \lambda_1 \frac{\tau}{p}. \quad (26)$$

Полагая, как и прежде,

$$\tau = \bar{\tau}(x, y, t) F(p)$$

и исключая из уравнения (26) τ с помощью уравнения вихря скорости (15), получим

$$\frac{d_h}{dt} [e (\Omega + f)^n] = \text{const}. \quad (27).$$

Следовательно, вдоль плоской траектории должна оставаться постоянной величина

$$e(\Omega + f)^n = \text{const} = e^0(\Omega^0 + f^0)^n. \quad (28)$$

Здесь $n = \frac{\lambda_1 F}{pF'}$ в первом приближении для каждой изобарической поверхности является величиной постоянной.

Инвариантное соотношение (28) было использовано в работе [4] при разработке схемы прогноза полей влажности на 12 и 24 часа.

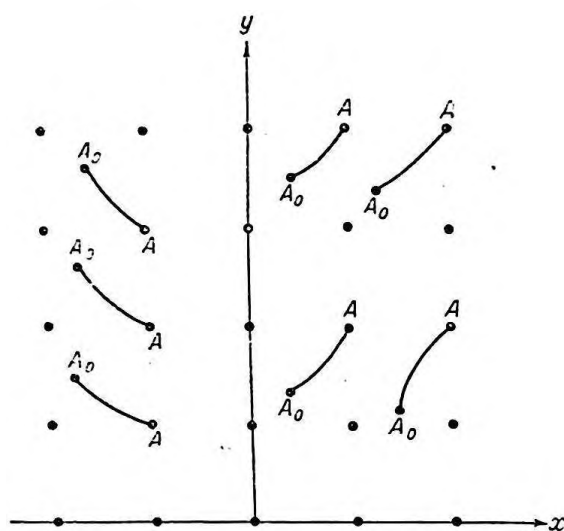


Рис. 2. Элементы изобарических траекторий.

Пусть A_0A — элемент изобарической траектории, соответствующий промежутку времени δt . Здесь A — конечная точка траектории, совпадающая с одной из точек регулярной сетки; A_0 — начальная точка траектории (рис. 2); e^0 , Ω^0 , e , Ω — упругость водяного пара и вихрь скорости ветра в начальной и конечной точках траектории соответственно.

Прологарифмировав обе части равенства (28), получим

$$\ln e + n \ln(\Omega + f) = \ln e^0 + n \ln(\Omega^0 + f^0). \quad (29)$$

Из формулы Магнуса следует, что

$$\ln e = \ln e_0 + \frac{Mat_d}{b + t_d}; \quad (30)$$

$$\ln e^0 = \ln e_0 + \frac{Mat_d^0}{b + t_d^0}. \quad (31)$$

Подставляя в (29) вместо $\ln e$ и $\ln e^0$ их значения из (30) и (31), получим рабочую формулу для предвычисления t_d

$$t_d = \frac{bR}{1 - R}, \quad (32)$$

где

$$R = \frac{n}{Ma} \ln \frac{\Omega^0 + f^0}{\Omega + f} + \frac{t_d^0}{b + t_d^0}. \quad (33)$$

Как следует из формул (32) и (33), для того чтобы вычислить в какой-либо точке регулярной сетки значение t_d в момент времени $t + \delta t$, необходимо знать значения точки росы и вихря скорости в начальной точке траектории в момент времени t (t_d^0 и Ω^0) и вычислить каким-либо способом величину вихря скорости в точке регулярной сетки в момент времени $t + \delta t$.

Кратко опишем схему прогноза влажности, основанную на использовании инвариантного соотношения (20). Координаты начальной точки траектории x^0 , y^0 и вихрь скорости на каждом шаге по времени вычислялись по формулам

$$x^0 = x - u(x, y, t) \delta t - f v' \frac{(\delta t)^2}{2};$$

$$y^0 = y - v(x, y, t) \delta t + f u' \frac{(\delta t)^2}{2};$$

$$\Omega = \frac{g}{f} \left[\Delta H + \frac{2g}{f} (H_{xy}^2 - H_{xx} H_{yy}) \right],$$

где

$$u = u_g + u', \quad v = v_g + v',$$

u_g и v_g — компоненты геострофического ветра;

$$f u' = - \frac{d_h v_g}{dt}, \quad f v' = \frac{d_h u_g}{dt};$$

δt — шаг по времени; H — высота изобарической поверхности.

Вычисление высот изобарических поверхностей производилось по трехуровневой схеме [3], теоретические основы которой были разработаны Н. И. Булевым и Г. И. Марчуком [1].

Значения t_d^0 и Ω^0 в начальной точке траектории вычислялись путем интерполяции по их значениям в ближайших четырех узловых точках.

В качестве исходной информации используются высоты изобарических поверхностей 850, 500 и 300 мб в 572 (26×22) точках регулярной сетки и значения гигроскопической разности $t - t_d$ в 396 (22×18) точках на изобарических поверхностях 850 и 700 мб. Прогностические значения t_d получаются в 252 точках (18×14). В граничных точках значения точки росы полагаются неизменными в течение всего срока прогноза. Так как в схеме прогноза высот изобарических поверхностей не

предусмотрено предвычисление высоты H_{700} , последняя вычислялась по интерполяционной формуле

$$H_{700} = 0,6236H_{850} + 0,3764H_{500}.$$

В схеме прогноза высот изобарических поверхностей шаг по времени был принят равным одному часу, в схеме прогноза влажности — двум часам. Шаг по горизонтальным координатам 300 км. В конце каждого временного шага производится «фильтрация» вычисленных значений t_d . Если $t_d > t$, то t_d заменяется на t , тем самым устраняются искажения поля влажности, связанные с учетом возможного процесса конденсации. Если $t_d < t - 15$, то t_d заменяется $t - 15$. Такое ограничение ставилось в работе (7). Оно устраняет t_d , соответствующие очень большой сухости воздуха. При этом частично учитываются процессы увлажнения воздуха за счет испарения с облачных капель. Значения температуры воздуха, необходимые для такого фильтрации на каждом шаге по времени, вычисляются по эмпирическим формулам.

$$t_{850} = 0,696 (H_{500} - H_{850}) - 283;$$

$$t_{700} = 0,657 (H_{500} - H_{850}) - 275.$$

Коэффициенты этих формул были получены методом наименьших квадратов по значениям температуры и геопотенциала в 640 точках регулярной сетки аэрологических карт для двух сроков зимнего периода. Проверка на независимом материале, в качестве которого были взяты прогностические значения геопотенциала, показала, что средние квадратические ошибки температуры, вычисленной по этим формулам, составляют $1,4^\circ$ на поверхности 700 мб и $2,5^\circ$ на поверхности 850 мб.

Схема была реализована на электронной вычислительной машине. Анализ результатов расчетов показал, что по сравнению с ранее рассмотренной схемой [2] успешность прогнозов поля влажности на поверхности 700 мб по изложенной схеме повысилась на 10%, на поверхности 850 мб — на 4%.

Прогноз явлений погоды по градациям: осадки, полная облачность (7—10 баллов), неполная облачность (4—6 баллов), ясно (меньше 4 баллов) осуществлялась с помощью номограммы, описание которой дано в разделе I. Оценка прогнозов производилась путем сопоставления прогностической градации явления погоды с фактической, определяемой по синоптической карте. Несмотря на то что успешность прогнозов влажности по методике, описанной здесь, несколько выше, чем по методике, изложенной в разделе I, успешность прогнозов явлений погоды двух методов оказалась примерно одинаковой. Это говорит о том, что процессы облакообразования и

выпадения осадков нельзя достаточно точно описать с помощью корреляционных связей между влажностью и вертикальной скоростью воздуха, с одной стороны и явлениями погоды, с другой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Булеев Н. И., Марчук Г. И. О динамике крупномасштабных процессов. Труды ИФА АН СССР, № 2, 1958.
2. Душкин П. К., Ломоносов Е. Г., Лунин Ю. Н. Опыт численного прогноза влажности, облачности и осадков на вычислительной машине. Метеорология и гидрология, № 12, 1960.
3. Душкин П. К., Ломоносов Е. Г. Результаты прогноза барического поля на трех уровнях с помощью вычислительной машины. Труды ЦИП, вып. 106, 1960.
4. Кузнецов Л. А. Об одном методе прогноза полей влажности, облачности и осадков. Метеорология и гидрология, № 12, 1962.
5. Швец М. Е. К вопросу предвычисления поля относительной влажности. Труды ГГО, вып. 81, 1959.
6. Estoque M. L. A Prediction Model for Cyclone Development Integrated by Fjortoft's Method. J. Met., 13, No. 2, 1956.
7. Lewis W. Forecasting 700mb Dewpoint Depression by a Three-Dimensional Trajectory Technique. Monthly Weather Review, 85, No. 9, 1957.
8. Smagorinsky J., Collins G. O. On the Numerical Prediction of Precipitation. Monthly Weather Review, 63, No. 3, 1935.

III. СХЕМА ЧИСЛЕННОГО ПРОГНОЗА СЛОИСТООБРАЗНОЙ ОБЛАЧНОСТИ С УЧЕТОМ ТУРБУЛЕНТНОСТИ И КОНДЕНСАЦИИ

Рассмотренные выше схемы прогноза облачности были разработаны в предположении, что конденсация отсутствует и турбулентным перемешиванием можно пренебречь. Между тем оценки, проведенные Л. Т. Матвеевым [4], показывают, что роль турбулентного обмена в переносе тепла и влаги вполне сравнима с ролью всех других факторов не только в пограничном слое, но и в пределах всей тропосферы. В системе координат x, y, z члены, описывающие перенос влаги за счет вертикальных движений и турбулентности, как известно, имеют вид

$$w \frac{\partial q}{\partial z} \quad \text{и} \quad v \frac{\partial^2 q}{\partial z^2}.$$

Введем характерные значения высоты (H), вертикальной скорости ($\tilde{w}$) и коэффициента турбулентности ($\tilde{v}$). Тогда

$$w \frac{\partial q}{\partial z} = \frac{\tilde{w}}{H} w_1 \frac{\partial q}{\partial z_1};$$

$$v \frac{\partial^2 q}{\partial z^2} = \frac{\tilde{v}}{H^2} v_1 \frac{\partial^2 q}{\partial z_1^2},$$

где $w_1 = \frac{w}{\tilde{w}}$, $v_1 = \frac{v}{\tilde{v}}$, $z_1 = \frac{z}{H}$ — безразмерные величины порядка единицы.

Если считать, что безразмерные множители в этих членах имеют один и тот же порядок малости, то турбулентный приток влаги будет играть такую же роль, как и перенос вертикальными токами, если

$$\tilde{v} = \tilde{w}/H.$$

При $H = 10^4$ м (толщина тропосферы) и $\tilde{w} = 0,1 \div 1,0$ см/сек. получаем, что $\tilde{v} = 10 \div 100$ м²/сек.

Расчеты коэффициента турбулентности по данным о перегрузках самолетов, выполненные многочисленными авторами, дают именно такие значения коэффициента турбулентности. Так, например, по данным Л. Т. Матвеева, в облаках наиболее часто коэффициент турбулентности принимает значения 50 м²/сек., вне облаков 20—30 м²/сек.; нередки случаи, когда коэффициент турбулентности в свободной атмосфере превосходит 100 м²/сек. Из сказанного следует, что пренебрегать турбулентными притоками тепла и влаги, вообще говоря, нельзя.

После этих замечаний о роли турбулентного переноса тепла и влаги перейдем к изложению темы лекции. Как уже указывалось, процессы образования и последующей эволюции облака математически описываются дифференциальными уравнениями.

$$\frac{dq}{dt} = g^2 \frac{\partial}{\partial p} \left(v p^2 \frac{\partial q}{\partial p} \right) - \frac{m}{p}; \quad (1)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = g^2 \frac{\partial}{\partial p} \left(v p^2 \frac{\partial \theta}{\partial p} \right) + \frac{Lm}{c_p p}. \quad (2)$$

Пояснения к обозначениям даны в разделе I.

Основной физической предпосылкой метода, который будет здесь рассмотрен [4], служит представление о достаточно полном увлечении облачных элементов (капель воды и кристаллов льда) частицами воздуха, которые участвуют в турбулентном обмене. Л. Т. Матвеев [6—8], исходя из основных представлений статистической теории турбулентности и экспериментальных данных по микропульсациям температуры и вертикальной скорости, нашел, что увлечение облачных элементов турбулентными молями составляет:

$$\begin{array}{ll} 100\% & \text{при } r \leq 40 \text{ мк,} \\ 65 - 85\% & \text{при } r \approx 100 \text{ " } \\ 4 - 15\% & \text{при } r \approx 1000 \text{ " } \end{array}$$

(здесь r — радиус капель).

Согласно опытным данным, облака до того момента, пока из них не начинают выпадать осадки, состоят из облачных

элементов, размеры которых не превосходят 40—50 мк. Таким образом, облачные элементы участвуют в турбулентном движении воздушных частиц в такой же мере, как и молекулы водяного пара.

Введем теперь понятие удельного влагосодержания

$$S = q + \delta, \quad (3)$$

где δ — удельная водность облака, т. е. количество капель воды и кристаллов льда в 1 г воздуха.

Так как механизм переноса облачных элементов не отличается от механизма переноса водяных паров, то перенос удельного влагосодержания описывается таким же дифференциальным уравнением, каким описывается перенос удельной влажности до начала конденсации:

$$\frac{dS}{dt} = g^2 \frac{\partial}{\partial p} \left(v_r^2 \frac{\partial S}{\partial p} \right). \quad (4)$$

Умножим теперь уравнение (1) на $\frac{L}{c_p}$ и сложим с уравнением (2). В результате получим

$$\frac{d\Pi}{dt} = g^2 \frac{\partial}{\partial p} \left(v_r^2 \frac{\partial \Pi}{\partial p} \right), \quad (5)$$

где

$$\Pi = \theta + \frac{L}{c_p} q. \quad (6)$$

Функции S и Π инварианты по отношению к процессу конденсации: уравнения (4) и (5) имеют один и тот же вид независимо от того, происходит ли процесс облакообразования или нет. Для облака, где водяной пар находится в состоянии насыщения, система уравнений (4) и (5) дополняется соотношением

$$q = q_m = 0,622 \frac{E(T)}{p}. \quad (7)$$

Преобразуем несколько правые части уравнений (4) и (5).

В свободной части атмосферы (выше пограничного слоя) коэффициент турбулентного перемешивания практически остается постоянным. В силу этого слагаемые, описывающие турбулентный поток S и Π , можно привести к виду

$$g^2 \frac{\partial}{\partial p} \left(v_r^2 \frac{\partial S}{\partial p} \right) = g^2 v_r \left[2 v_r \frac{\partial v_r}{\partial p} \frac{\partial S}{\partial p} + v_r^2 \frac{\partial^2 S}{\partial p^2} \right]. \quad (8)$$

Так как

$$\varphi = \frac{p}{RT}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial p} = \frac{1}{R} \left[\frac{T - p \frac{\partial T}{\partial p}}{T^2} \right] =$$

$$= \frac{p}{RT} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial p} \right) = \varphi \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial p} \right), \quad (9)$$

то

$$g^2 \frac{\partial}{\partial p} \left(v \varphi^2 \frac{\partial S}{\partial p} \right) = a_1 \frac{\partial^2 S}{\partial p^2} + a_2 \frac{\partial S}{\partial p}, \quad (10)$$

где

$$a_1 = v g^2 \varphi^2, \quad a_2 = 2a_1 \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial p} \right). \quad (11)$$

Введя для удобства новую независимую переменную $\xi = \frac{p}{P}$, где $P = 1000$ мб, и вспоминая, что $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + \tau \frac{\partial}{\partial p}$, приведем уравнения (4) и (5) к виду

$$\frac{\partial S}{\partial t} = b_1 \frac{\partial^2 S}{\partial \xi^2} + \left(b_2 - \frac{\tau}{P} \right) \frac{\partial S}{\partial \xi} - \left(u \frac{\partial S}{\partial x} + v \frac{\partial S}{\partial y} \right); \quad (12)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} = b_1 \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \xi^2} + \left(b_2 - \frac{\tau}{P} \right) \frac{\partial \Pi}{\partial \xi} - \left(u \frac{\partial \Pi}{\partial x} + v \frac{\partial \Pi}{\partial y} \right), \quad (13)$$

где

$$b_1 = v \left(\frac{g \xi}{RT} \right)^2, \quad b_2 = 2b_1 \left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial \xi} \right).$$

Коэффициенты b_1 и b_2 в первом приближении можно считать лишь функциями ξ . Их значения приведены в табл. 2.

Таблица 2
Значения коэффициентов b_1 и b_2 при $v = 10$ м²/сек.

10 ⁴ час ⁻¹	ξ				
	1,0	0,85	0,7	0,5	0,3
b_1	6,12	4,7	3,4	1,9	0,76
b_2	13,3	13,0	11,5	8,6	5,4

Систему уравнений (12) и (13) решают при следующих начальных и граничных условиях.

В начальный момент значения функций S и Π известны

$$\left. \begin{aligned} S(x, y, \zeta, 0) &= S^0(x, y, \zeta), \\ \Pi(x, y, \zeta, 0) &= \Pi^0(x, y, \zeta). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Вне облаков функции S и Π определяются по данным измерений; в облаках q полагаем равным максимальной удельной влажности q_m , а водность облака δ , поскольку массовые измерения ее отсутствуют, вычисляем по эмпирической формуле, построенной по данным многочисленных измерений,

$$\delta = 0,201 \cdot 10^{-6} \frac{T}{\zeta} e^{\alpha},$$

где

$$\alpha = 17,86 \left(1 - \frac{258}{T} \right).$$

В качестве первого граничного условия по вертикальной координате принимается равенство нулю вертикальных градиентов температуры и удельной влажности на тропопauзе, т. е. $\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial q}{\partial z} = 0$. Отождествляя тропопauзу с некоторой изобарической поверхностью $\tilde{\zeta} = \text{const}$ и учитывая, что

$$\Pi = \theta + \frac{L}{c_p} q = \frac{T}{\tilde{\zeta}^{0,285}} + \frac{L}{c_p} q,$$

получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=\tilde{\zeta}} &= -\frac{0,285 \tilde{T}}{\tilde{\zeta}^{1,285}}, \\ \frac{\partial S}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=\tilde{\zeta}} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Второе граничное условие по ζ запишем в виде

$$\left. \begin{aligned} S|_{\zeta=1} &= \bar{S}, \\ \Pi|_{\zeta=1} &= \bar{\Pi}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Граничное условие (16) означает, что у поверхности земли функции S и Π в каждый момент времени определяются не из системы уравнений (12)–(13), а каким-либо независимым способом.

У поверхности земли ($\zeta=1$) $\theta=T$, $\delta=0$ и, следовательно, $\bar{S}=q$, $\Pi=T+\frac{L}{c_p} q$.

Изменение температуры у поверхности земли определяется горизонтальным переносом (адвекцией) и неадиабатическим прогреванием или охлаждением от подстилающей поверхности. Согласно эмпирическим графикам А. А. Бачуриной [2] и И. З. Лутфулина [3], неадиабатические изменения температуры пропорциональны адвективным. Привлекая эти графики, Л. Т. Матвеев придал формуле для расчета изменений температуры у поверхности земли следующий вид:

$$T(t + \delta t) = T(t) - \left(u_g \frac{\partial T(t)}{\partial x} + v_g \frac{\partial T(t)}{\partial y} \right) (1,36 - 0,004 c_g(t)) \delta t. \quad (17)$$

Для вычисления удельной влажности в любой момент времени используется зависимость между изменениями температуры и точкой росы, полученная в результате обработки материалов наблюдений. Эта зависимость имеет вид

$$t_d(t + \delta t) = t_d(t) + 1,26 [T(t + \delta t) - T(t)]. \quad (18)$$

Зная t_d , по формуле Магнуса можно вычислить упругость водяного пара, а следовательно, и удельную влажность. Таким образом,

$$\left. \begin{aligned} \bar{S} &= \frac{0,622}{P} 10^{\frac{a' t_d}{b + t_d}}, \\ \bar{\Pi} &= T + \frac{L}{c_p} \bar{S}, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

где T и t_d определяются по формулам (17) и (18).

Система уравнений (12)–(13) решалась методом расщепления многомерных операторов на одномерные [9, 10]. Прогноз составляющих ветра (u , v , τ) осуществлялся по пятиуровневой квазигеострофической модели [11]. На боковых границах функции S и Π полагаются неизменными в течение всего срока прогноза. Шаг по времени был принят равным одному часу, по горизонтальным координатам 300 км.

Если S и Π известны, то путем сравнения S с $q_m(T)$ можно определить наличие или отсутствие облачности. При $S \geq q_m$ облачность вблизи данного уровня образовалась, при $S < q_m$ облачность отсутствует. По распределению S и q_m с высотой можно определить высоту верхней и нижней границы облаков. По известным S и Π легко определить такие важные в рассматриваемой задаче величины, как температуру и удельную влажность.

Вне облака $\delta = 0$, $S = q$ и из (6) следует

$$\theta = T \tau^{-0,285} = \left(\Pi - \frac{L}{c_p} S \right)$$

или

$$T = \zeta^{0,285} \left(\Pi - \frac{L}{c_p} S \right). \quad (20)$$

Внутри облака $q = q_m = \frac{0,622E(T)}{P\zeta}$.

Тогда

$$\Pi = \zeta^{-0,285} T + 0,622 \frac{L}{c_p} \frac{E}{P\zeta}. \quad (21)$$

Продифференцировав обе части полученного выражения по времени, получим

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} = \zeta^{-0,285} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{0,622L}{Pc_p\zeta} \frac{dE}{dT} \frac{\partial T}{\partial t} = \left(\zeta^{-0,285} + \frac{0,622L}{Pc_p\zeta} \frac{dE}{dT} \right) \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (22)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\frac{\partial \Pi}{\partial t}}{\zeta^{-0,285} + \frac{0,622L}{Pc_p\zeta} \frac{dE}{dT}}.$$

Согласно уравнению Клаузиуса — Клапейрона,

$$\frac{dE}{dT} = \frac{LE}{AR_\omega T^2}. \quad (23)$$

Подставляя в (22) $\frac{LE}{AR_\omega T^2}$ вместо $\frac{dE}{dT}$ и заменяя производные по времени конечными разностями, получим

$$T(t + \delta t) = \frac{\Pi(t + \delta t) - \Pi(t)}{\zeta^{-0,285} + \frac{0,622L^2}{P\zeta AR_\omega c_p} \frac{E(t)}{T^2(t)}}. \quad (24)$$

Расчеты, проведенные, по этой схеме, дали обнадеживающие результаты. Описанная выше схема прогноза облачности была реализована на ЭВМ.

На рис. 3 изображена сеточная область для объективного анализа и прогноза. Объективный анализ поля геопотенциала производился в сеточной области размером 26×22 , расстояние между узлами сетки равно 300 км. Прогноз облачности производился для области размером 18×14 (внешний пунктирный контур). Оценка успешности прогноза облачности осуществлялась в области размером 14×10 (внутренний контур). Шаг по времени был принят равным одному часу.

Поскольку прогноз облачности существенным образом зависит от успешности прогноза составляющих ветра, для иллюстрации на рис. 4 и 5 приведены фактическая и прогностическая карты АТ₅₀₀ за 03 часа 15 января 1960 г.

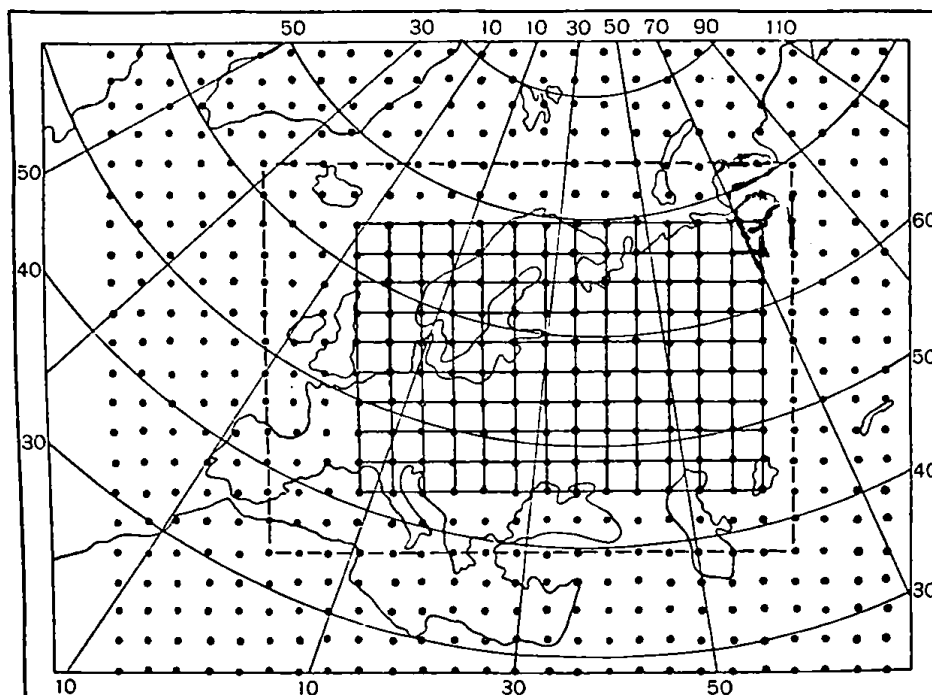


Рис. 3. Сеточная область для объективного анализа и прогноза.

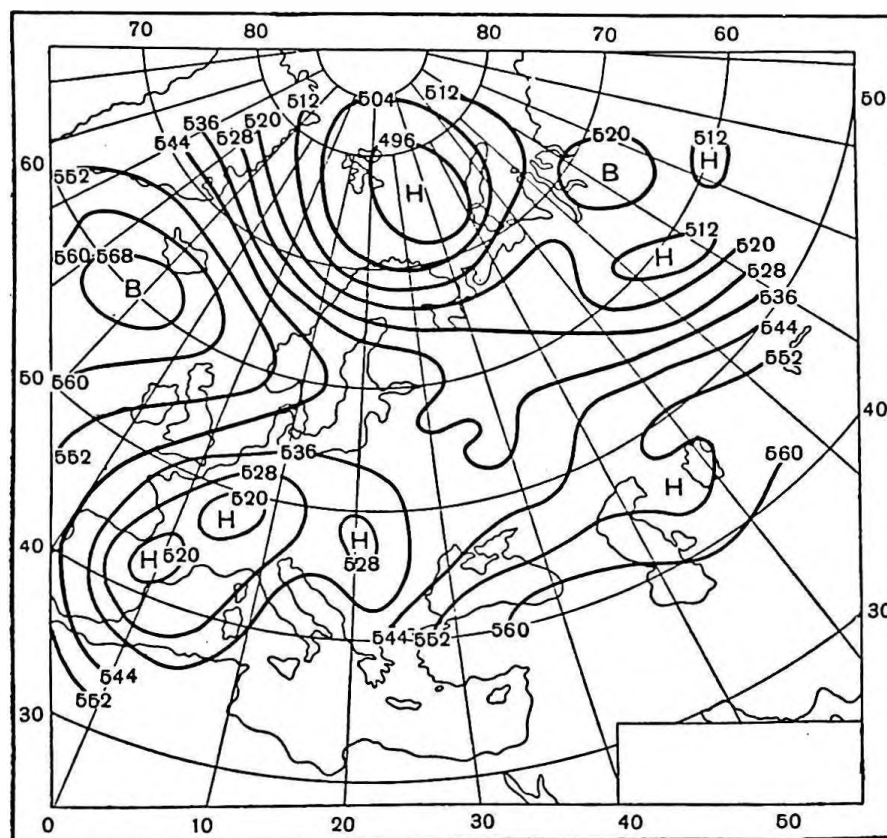


Рис. 4. Карта AT_{500} за 03 часа 15 января 1960 г.

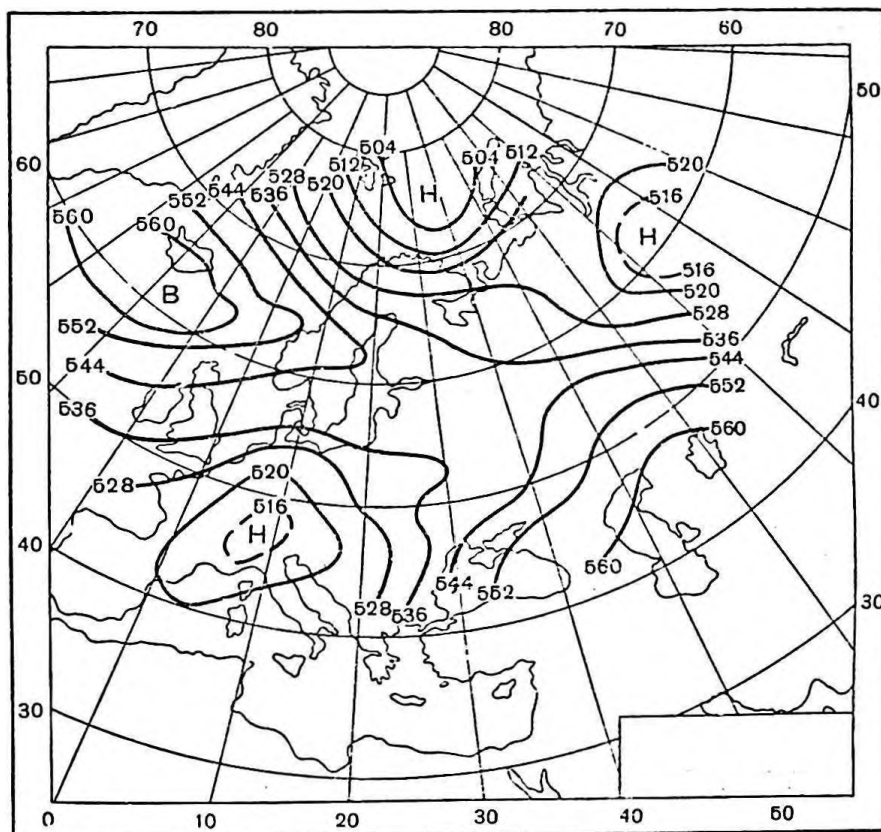


Рис. 5. Прогностическая карта AT_{500} за 03 часа 15 января 1960 г.

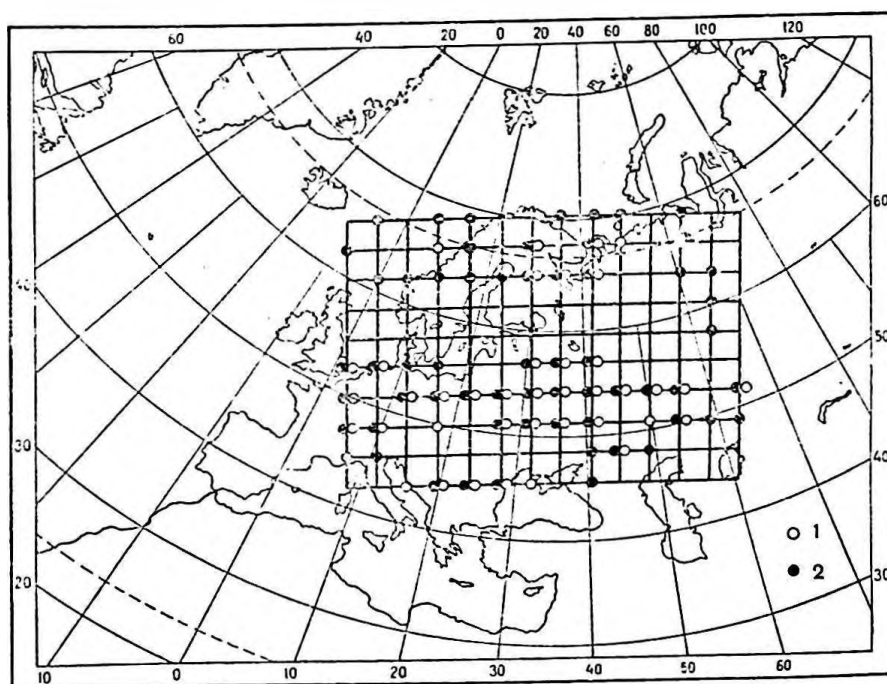


Рис. 6. Карта фактических (1) и прогностических (2) облачных полей за 03 часа 15 января 1960 г. (850 мб).

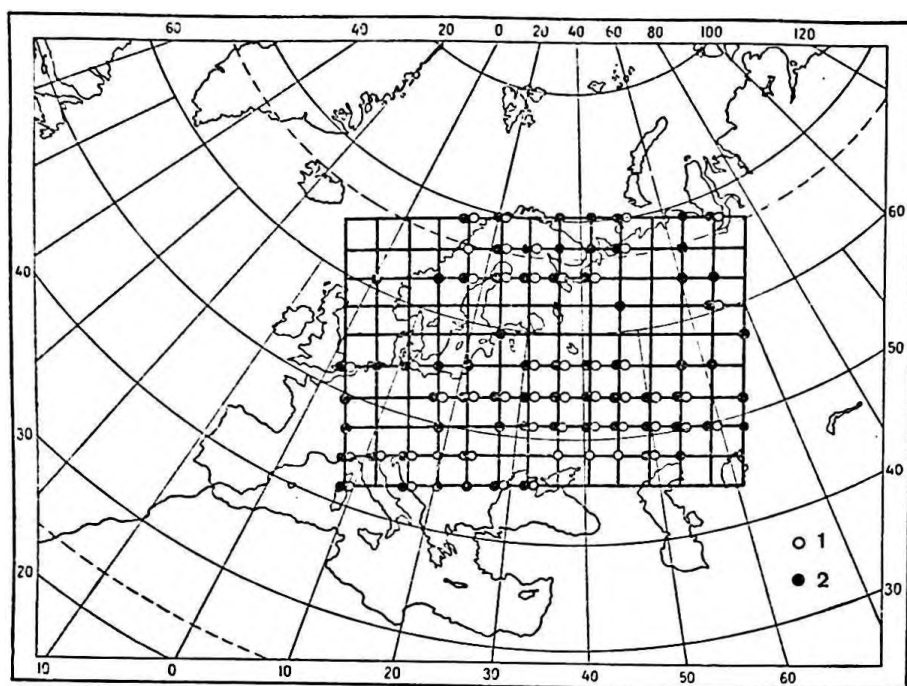


Рис. 7. Карта фактических (1) и прогностических (2) облачных полей за 03 часа 15 января 1960 г. (700 мб).

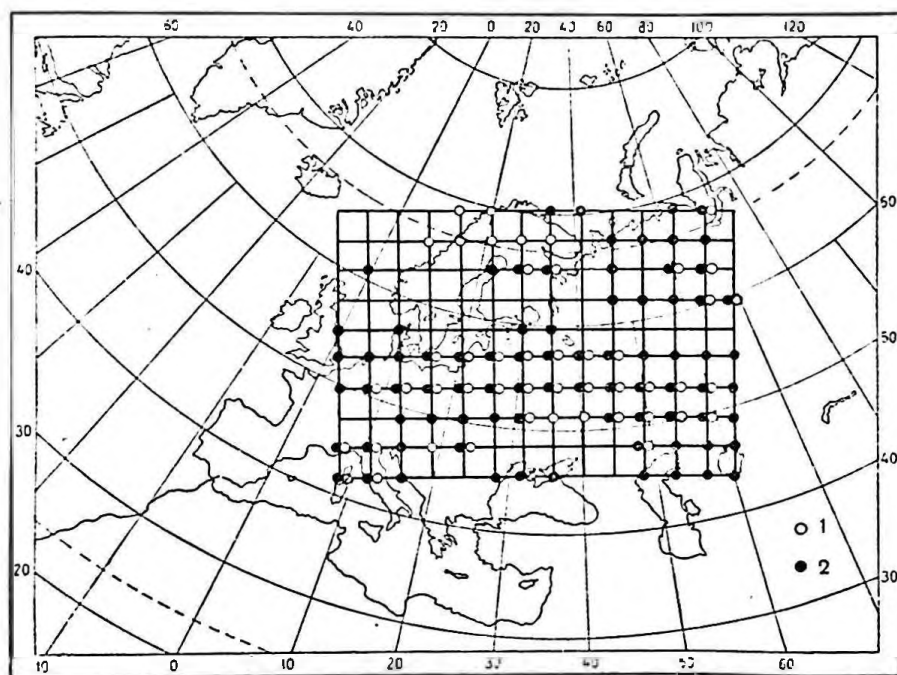


Рис. 8. Карта фактических (1) и прогностических (2) облачных полей за 03 часа 15 января 1960 г. (500 мб).

Типичные примеры прогноза облачности на некоторых изобарических поверхностях приведены на рис. 6—9. На этих рисунках зачерненные кружки означают, что в данной узловой

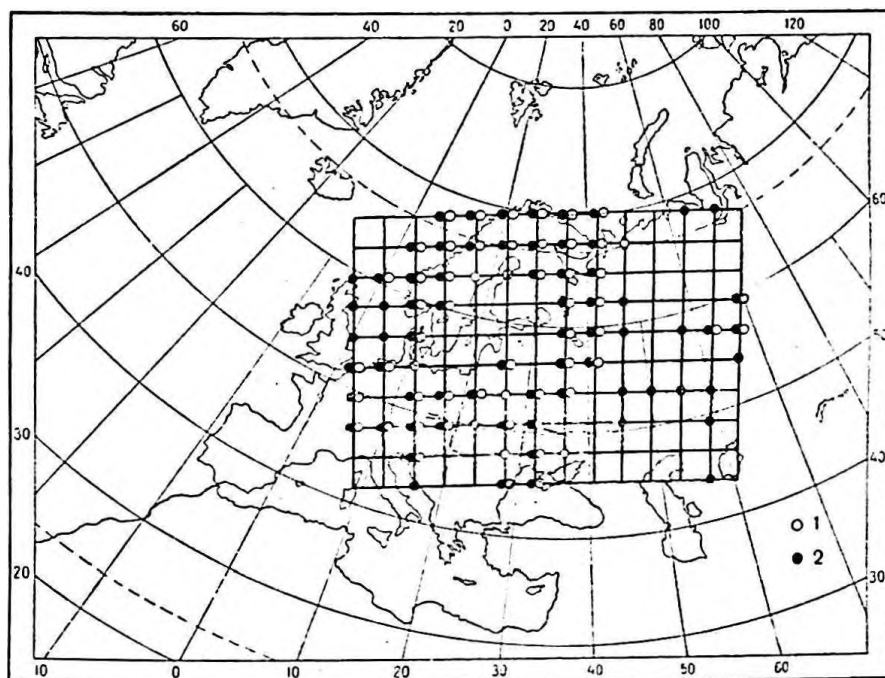


Рис. 9. Карта фактических (1) и прогностических (2) облачных полей за 03 часа 12 января 1959 г. (850 мб).

точке предсказывалось наличие облачности; незачерненные кружки означают, что в данной узловой точке наличие облачности подтверждено данными наблюдений.

Таким образом, четыре возможные комбинации из зачерненных и незачерненных кружков означают следующее:



наличие облачности предсказывалось и подтверждено данными наблюдений,



наличие облачности предсказывалось, но не подтверждалось данными наблюдений,



наличие облачности не предсказывалось, но подтверждено данными наблюдений,



отсутствие облачности предсказывалось и подтверждено данными наблюдений.

Отсутствие или наличие облачности в каждой узловой точке соответствующей изобарической поверхности определялось по величине гигроскопической разности ($S = T - T_d$), а для поверхности 850 мб, помимо этого, также по данным об облачности на приземных картах погоды. В среднем оправдываемость прогноза по этому методу составила, по данным анализа в 3360 точках, около 81%, что указывает на возможность применения метода для практического использования. Схема в настоящее время совершенствуется. Вместе с тем анализ результатов расчетов показал, что для повышения успешности прогнозов необходимо существенно повысить точность измерений температуры и особенно влажности в свободной атмосфере. Изложенная схема более полно описывает основные физические факторы, определяющие процессы облакообразования, хотя в ней не учитываются лучистый приток тепла и выпадение осадков.

В заключение отметим, что гидродинамические методы прогноза полей влажности и облачности разрабатывались также В. П. Мелешко [12, 13], В. В. Овсянниковым [14], Б. Д. Успенским [15], Е. Фишером и П. Капланом [17] и рядом других авторов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арраго Л. Р., Швец М. Е. К теории образования и эволюции неконвективной облачности. Труды ГГО, вып. 121, 1961.
2. Бачурина А. А. Расчет тепловой трансформации в приземном слое атмосферы. Материалы совещания координационной комиссии по численным методам прогноза. Гидрометеониздат, Л., 1961.
3. Лутфуллин И. З. Влияние турбулентного обмена и неоднородной адвекции на образование и разрушение облачных слоев. Труды ЦИП, вып. 121, 1963.
4. Лушев Ю. Г., Матвеев Л. Т. Динамическая модель прогноза слоистообразной облачности. Изв. АН СССР, серия физики атмосферы и океана, т. 2, № 1, 1966.
5. Матвеев Л. Т., Кожарин В. С. Роль турбулентного перемешивания в формировании структуры слоистообразных облаков. Изв. АН СССР, серия геофиз., № 11, 1956.
6. Матвеев Л. Т. Некоторые вопросы теории образования и эволюции слоистообразной облачности. Труды ААНИИ, т. 228, 1959.

7. Матвеев Л. Т. Условия образования и эволюции облаков под влиянием вертикальных токов и турбулентного обмена. Изв. АН СССР, серия геофиз., № 1, 1961.
8. Matweyew L. T. On the Formation and Development of Layer Clouds. *Tellus*, 16, No. 2, 1964.
9. Марчук Г. И. Новый подход к численному решению задачи прогноза погоды. *Метеорология и гидрология*, № 5, 1964.
10. Марчук Г. И. Теоретическая модель прогноза погоды малой заблаговременности. Изв. АН СССР, серия геофиз., № 5, 1964.
11. Марчук Г. И. [и др.]. Оперативная квазигеострофическая схема краткосрочного прогноза погоды для пяти уровней атмосферы. Изв. АН СССР, серия физики атмосферы и океана, т. 1, № 2, 1965.
12. Мелешко В. П. Численный прогноз дефицита точки росы. Труды ГГО, вып. 124, 1962.
13. Мелешко В. П. К вопросу о численном прогнозе облачности и осадков с учетом трансформации воздушных масс. Труды ГГО, вып. 151, 1964.
14. Овсянников В. В. О гидродинамическом методе прогноза влажности, облачности и атмосферных осадков. Труды ЦИП, вып. 81, 1961.
15. Успенский Б. Д. Опыт оперативного численного прогноза обложных осадков. *Метеорология и гидрология*, № 2, 1965.
16. Фейгельсон Е. М. Радиационные процессы в слоистообразных облаках. Изд. «Наука», М., 1964.
17. Fisher E. L., Caplan P. An Experiment in Numerical Prediction of Fog and Stratus. *J. Atm. Sci.*, 20, No. 5, 1963.

К. А. СЕМЕНДЯЕВ

ОБЩИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МАШИН И ОСНОВЫ ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В настоящих лекциях рассматриваются в самой общей форме принципы устройства и использования электронных вычислительных машин. Предполагается, что знакомство с этими принципами облегчит изучение конкретных машин и применение их для решения различных метеорологических задач. Автор счел возможным придерживаться конспективной формы изложения, поскольку читателю неизбежно придется обратиться к более подробному руководству для той машины, которой он будет пользоваться.

1. Общее представление о вычислительных машинах

Современные исследования в самых различных областях науки требуют производства вычислений весьма большого объема. При этом вычисления являются лишь простейшей формой переработки числовой информации, тогда как природа и общество поставляют информацию самого разнообразного характера, например, в виде зрительных и звуковых образов, радиосигналов и т. п., требующую специфического подхода к ее переработке и использованию.

Задача механизации вычислений занимала таких выдающихся мыслителей, как Паскаль и Лейбниц. Возможность автоматического управления вычислительным процессом была указана еще свыше ста лет тому назад Г. Бэббиджем в Англии, но была реализована только в начале сороковых годов этого столетия. Мощный прогресс, последовавший за этим как в развитии самой вычислительной техники, так и в расширении областей ее применения, во многом связан с пониманием того, что машина, построенная для выполнения простейшей задачи переработки информации — вычислений, обладает значительно большими возможностями. Эти идеи были развиты Дж. фон Нейманом (США) в середине сороковых годов, и влияние их ощущается до самого последнего времени.

Быстрый прогресс электроники сделал возможной реализацию этих идей, и в настоящее время существуют вычислитель-

ные машины, на которых можно решать параллельно несколько задач и выполнять миллионы арифметических действий в секунду. Они могут воспринимать информацию одновременно из нескольких десятков источников и выдавать результаты вычислений в виде таблиц и графиков с весьма большой скоростью.

Мы рассмотрим общие принципы работы автоматических цифровых вычислительных машин (АЦВМ) и общие методы решения с помощью АЦВМ различных задач переработки информации.

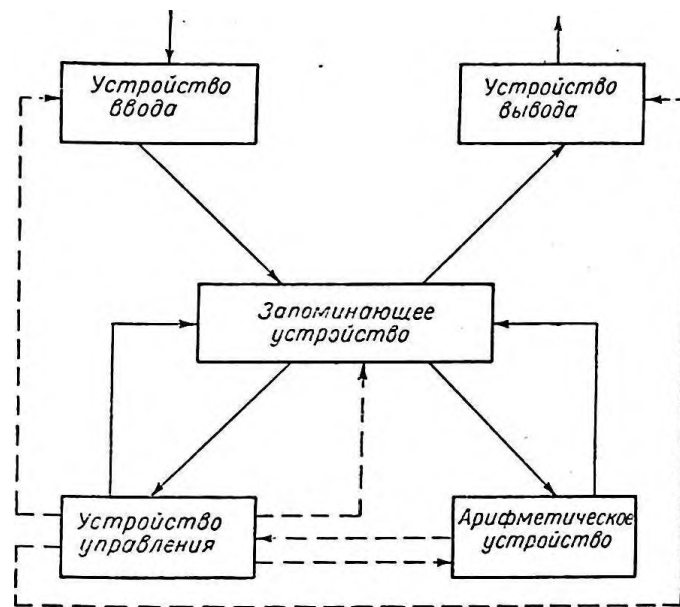


Рис. 1

В каждой АЦВМ можно выделить следующие основные блоки, по большей части разделенные и как физические объекты:

- 1) устройство для ввода информации,
- 2) устройство для хранения информации (запоминающее устройство),
- 3) устройство для вывода информации,
- 4) устройство непосредственной переработки информации (вычислительное устройство),
- 5) управляющее устройство.

Эти устройства связаны между собой, как это схематически показано на рис. 1. Сплошные линии показывают пути передачи информации, пунктирные — пути передачи управляющих

сигналов. Далее будет рассмотрен характер работы каждого из устройств и их взаимодействие.

Для ввода в машину информация должна быть закодирована. Широко известна, например, международная система кодирования, принятая для телеграфных сообщений с помощью телетайпа. Имеется набор символов (цифры, буквы, знаки препинания и т. д.), каждый из которых изображается комбинацией из пяти возможных отверстий на бумажной ленте (так называемой перфоленте). Такой способ кодирования информации при помощи элементов, каждый из которых может принимать только два значения, является наиболее простым. Каждый из таких элементов содержит минимальную информацию. Объем информации можно измерять числом этих простейших элементов (числом битов), необходимых для ее записи. Легко видеть, что при помощи n битов можно изобразить величину, могущую принимать 2^n значений. Одним из основных видов информации, вводимой в АЦВМ, являются числа. Мы привыкли изображать числа с помощью цифр в десятичной системе. Этот же способ мы можем применить и для АЦВМ. Поскольку для изображения одной цифры нам потребуется 4 бита (с помощью 3 битов мы можем изобразить лишь цифры от 0 до 7), то для изображения k -значного числа нам потребуется $4k$ битов. Этот способ не является экономичным и приводит к нерациональной загрузке запоминающего устройства. К тому же выполнение арифметических операций при таком способе кодировки (называемом двоично-десятичным) довольно сложно и требует значительного усложнения конструкции АЦВМ.

В более общей постановке можно рассмотреть систему счисления с основанием a . В этой системе счисления употребляются символы (цифры) $0, 1, \dots, a-1$. Если целое число N представить в виде

$$N = b_0 + b_1a + b_2a^2 + \dots + b_ma^m,$$

что возможно единственным образом, то записью числа N в системе с основанием a будет набор из $m+1$ цифры:

$$N = b_mb_{m-1}b_{m-2} \dots b_1b_0.$$

При $a=2$ имеем двоичную систему с цифрами 0 и 1. Аналогично с помощью разложения по отрицательным степеням a (которое может быть и бесконечным) можно изображать и дробные числа.

Использование двоичной системы счисления для изображения чисел в машине позволяет существенно упростить ее конструкцию. Поэтому в большинстве машин числа в машине представляются в двоичной системе, однако для устройств ввода и вывода применяется двоично-десятичная система, ко-

торая была описана выше. Перевод из одной системы в другую выполняется без труда машиной.

Естественно, что числа в машине, как вводимые, так и получающиеся в результате вычислений, не могут иметь неограниченную точность и изображаться любым числом знаков. При этом существует два принципиально различных способа записи чисел в машине, при которых все числа имеют приблизительно одинаковую абсолютную или относительную погрешность. При первом способе все числа в машине не должны превосходить по абсолютной величине некоторую заданную величину (чаще всего 1 или 2) и иметь фиксированное число знаков после знака дробности (фиксированная запятая). При другом способе всякое число представляется в виде ba^m , где a — основание системы счисления (чаще всего 10 или 2), m — целое число и $|b| < 1$, причем число b имеет фиксированное число значащих цифр (плавающая запятая). При этом m называется порядком числа, b — его мантиссой. Обычно для соблюдения единственности формы представления числа дополнительно требуют, чтобы было выполнено условие $|b| \geq \frac{1}{a}$ (нормальная форма)

Так, например, для числа

$$0,273 \cdot 10^{-3} = 0,0273 \cdot 10^{-2} = 0,000273 \cdot 10^0,$$

только первая форма записи является нормальной.

Машины с фиксированной запятой имеют несколько более простую конструкцию, но алгоритмы решения задачи на них усложняются, поскольку должно предусматриваться введение масштабов, обеспечивающих сохранение всех величин в надлежащих границах, и тщательно продумываться организация хода вычислений.

Используя элементы, имеющие характер двоичного разряда, можно закодировать любую дискретную информацию. При этом каждому простейшему элементу информации будет поставлено в соответствие некоторое двоичное число. Легко видеть, например, что для кодирования букв любого алфавита (если число этих букв не превосходит 32) достаточно 5 битов. Если имеется не более восьми алфавитов, то их можно различить, используя еще 3 бита.

2. Хранение информации в машине

В процессе переработки информация должна храниться в машине. Специальные устройства для хранения информации называются обычно запоминающими устройствами (ЗУ). Они состоят из большого числа элементов, могущих принимать два значения. ЗУ должны допускать запись информации и выборку информации. Чтобы иметь возможность ориентироваться в ЗУ,

их элементы объединяют в «слова» фиксированной длины и каждому слову приписывают порядковый номер, называемый адресом слова. Обычно адреса пишутся в двоичной (восьмеричной)¹ системе.

Совокупность элементов ЗУ, служащих для записи одного слова, называется ячейкой памяти. Чтение и запись информации в АЦВМ осуществляются целыми ячейками.

При этом при записи новой информации в ячейку ее старое содержание уничтожается (стирается). Однако при выборке информации из ЗУ его содержание не изменяется.

Если ячейка памяти используется для хранения чисел, то чаще всего в каждой ячейке хранится одно число и вычислительные устройства машины приспособлены для такой стандартной записи чисел. Так, например, в машине «Урал-4» слово состоит из 40 разрядов. Числа могут быть в этой машине представлены в двух формах. Числа с фиксированной запятой в этой машине должны быть по абсолютной величине меньше единицы и иметь 39 двоичных разрядов после знака дробности. Один разряд используется для изображения знака числа. У чисел с плавающей запятой на мантиссу занято 32 бита, один бит изображает знак мантиссы, шесть битов отведено на порядок, один — на знак порядка. Таким образом, при пользовании плавающей запятой в этой машине могут появляться числа от $\pm \frac{1}{2} \cdot 2^{-63}$ до $\pm 2^{53} \approx \pm 10^{19}$ с относительной погрешностью $2^{-32} \approx 0,2 \cdot 10^{-9}$. Однако возможно и другое использование разрядов ячейки памяти. Так, для ввода и вывода употребляется двоично-десятичная запись; числа, задаваемые с малой точностью, могут быть помещены по два-три в ячейку, телеграфные коды также могут быть помещены по несколько знаков в ячейку. Однако вызов из памяти в устройство переработки возможен только целыми ячейками. В случаях когда требуется высокая точность, используют для хранения одного числа две ячейки.

Следует заметить, что в некоторых наиболее сложных современных машинах используются ЗУ с переменной длиной слова.

Основными параметрами ЗУ являются их объем и время, нужное для чтения или записи одного числа. Время выборки из ЗУ является одним из основных факторов, определяющих производительность АЦВМ.

Наиболее быстрыми ЗУ являются триггерные ячейки — ламповые или транзисторные схемы, имеющие два устойчивых положения равновесия. Такие ячейки являются одной из весьма

¹ Легко видеть, что, группируя в двоичной записи числа двоичные разряды по 3 и заменяя каждую тройку битов на соответствующую цифру (не превосходящую 7), мы получим запись числа в восьмеричной системе счисления.

существенных деталей АЦВМ, в частности, из них можно собрать ЗУ на одно слово, так называемый регистр, однако такие ЗУ оказываются очень дорогими.

В большинстве случаев процесс переработки информации протекает так, что в каждый момент нужна только сравнительно небольшая часть информации. Это обстоятельство позволяет строить многоуровневую систему памяти. Сверхбыстродействующая система памяти, объединяющая несколько десятков или сотен слов, может быть использована для хранения локальных промежуточных результатов при переработке небольшого объема информации. Этот объем в свою очередь извлекается из оперативного ЗУ достаточно большой емкости (несколько тысяч или десятков тысяч слов), допускающего выборку каждого отдельного слова. Наконец, для хранения большой по объему исходной или результатной информации применяются более дешевые ЗУ большего объема, чтение и запись в которые производится уже целыми страницами (или «зонами»). В таких ЗУ непосредственный поиск отдельного слова невозможен. АЦВМ конструируется так, чтобы обмен информацией между различными уровнями ЗУ мог происходить параллельно с процессом переработки информации (в другой части ее).

При разумном выборе объемов сверхбыстрой и оперативной памяти и хорошей организации алгоритма переработки удается почти полностью избежать влияния на общую скорость работы АЦВМ малой скорости выборки из «медленных» ЗУ.

В настоящее время подавляющее большинство ЗУ строится на магнитных элементах, обладающих способностью намагничиваться под воздействием импульса тока. В зависимости от направления тока возникает магнетизм той или иной полярности, соответствующий 0 или 1 двоичного разряда. При считывании, основанном на электромагнитной индукции, удается получать импульс тока, знак которого зависит от полярности магнита.

Для оперативного ЗУ наиболее употребительными элементами являются магнитные ферритовые сердечники в виде кольца диаметром 0,5—5 мм. Из таких ферритов монтируются ЗУ объемом в несколько тысяч слов. Время обращения к таким ЗУ составляет чаще всего несколько микросекунд, хотя уже существуют ферритовые ЗУ с временем обращения 0,7—0,6 мксек.

Другими видами магнитных ЗУ являются магнитные диски, барабаны (МБ) и ленты (МЛ). Во всех этих устройствах используется магнитное покрытие, наносимое на некоторый носитель, при движении которого мимо электромагнитных головок оказывается возможной запись или считывание. Время обращения к таким ЗУ складывается из непосредственного

времени записи (чтения) (0,05—0,5 мсек.) и времени поиска нужной зоны (от нескольких миллисекунд для МБ до нескольких секунд для МЛ). Для машины небольшой производительности (порядка 100 операций в секунду) МБ иногда используют в качестве оперативной памяти.

Для первоначального ввода информации в АЦВМ используются более простые способы фиксации информации — перфоленты и перфокарты. Перфолента — 5—8-дорожечная бумажная лента, в каждой строке размещается 5—8 битов информации. По каждой дорожке может быть пробито отверстие, что соответствует значению 1. Отсутствие пробивки означает 0. Аналогичным образом фиксируется информация на перфокарте — стандартном куске плотной бумаги, в котором могут быть пробиты отверстия. При вводе в читающее устройство эти карты или ленты прощупываются электромеханическим путем или с помощью фотоэлемента, и возникающие при этом импульсы поступают в ЗУ машины. Скорости такого ввода достигают нескольких тысяч битов в сек. Иногда такие вводные устройства допускают автономную работу, позволяя записать без помощи машины информацию с перфоленты (или карт) на МЛ. В этом случае ввод в АЦВМ производится уже непосредственно с МЛ.

Для вывода информации из машины используются в первую очередь печатающие устройства, которые бывают весьма многообразны. В тех случаях, когда переработанная информация должна допускать обратный ввод в машину, необходимо ее выдать на перфоленту или перфокарту, однако такой вывод обычно очень медленен (несколько сот битов в секунду). Как правило, операции вывода (а иногда и ввода) удается совмещать с работой других устройств АЦВМ.

Возможны автономные устройства вывода, реализующие вывод с магнитных носителей на печать вне машины. Существуют устройства, позволяющие получать результаты в графической форме, что особенно ценно для метеорологических задач.

3. Алгоритмы переработки информации

Как уже говорилось, вычислительная машина есть устройство переработки информации. Решение любой вычислительной задачи сводится к тому, чтобы по известной исходной информации получать некоторые окончательные результаты, пользуясь какими-то определенными правилами. Совокупность этих правил и представляет собой то, что мы называем алгоритмом. Это понятие является весьма общим и употребляется при рассмотрении не только вычислительных процессов, но и для других видов обработки информации, например для переводов текстов с одного языка на другой.

Для того чтобы алгоритм мог быть тем или иным способом реализован, он должен быть, естественно, описан и притом достаточно полно и точно. Для описания алгоритма необходимо воспользоваться каким-либо языком. В простейшем случае это может быть тот язык, на котором мы говорим, дополненный, например, языком математических обозначений. Каждый, кто встречался с необходимостью передачи какого-либо алгоритма другому лицу, знает, сколь трудно обеспечить как полноту описания, так и его однозначность. Обычно алгоритм удается разбить на отдельные этапы, более или менее крупные (так называемые блоки). Каждый отдельный блок может быть разбит на более мелкие этапы, которые могут быть описаны более подробно. Для грубого описания алгоритмического процесса применяют так называемые блок-схемы, на которых изображают отдельные этапы алгоритма в виде прямоугольников, кружков или других фигур с указанием логической связи этих отдельных этапов между собой. В качестве примера приведем блок-схему нахождения корня уравнения $f(x) = 0$ методом Ньютона (рис. 2). Первые два блока в этой

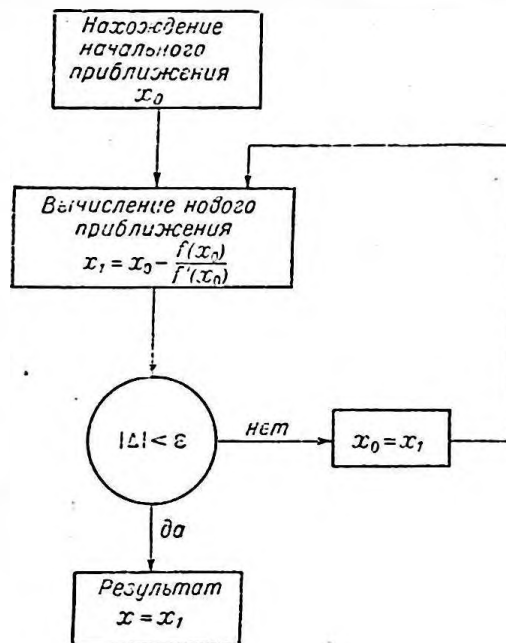


Рис. 2.

схеме могут быть дополнительно описаны при помощи блок-схемы, детализирующей алгоритмы для этих блоков.

Блок-схемы позволяют наглядно видеть структуру алгоритма и оказываются весьма полезными при описании алгоритмов. Однако для полного описания сколько-нибудь сложного алгоритма язык блок-схем не представляется достаточно удобным.

Для реализации алгоритма с помощью АЦВМ необходимо иметь описание его на языке, доступном для понимания машиной. Всякая АЦВМ имеет такой язык. Отдельные слова этого языка называются командами. Каждая команда описывает элементарный акт переработки информации, выполняемый машиной. Любой алгоритм должен быть разбит на простейшие элементарные операции, описываемые с помощью команд.

Совокупность команд, позволяющая реализовать на АЦВМ заданный алгоритм, называется программой. Создание описания алгоритма на языке команд (внутреннем языке машины) и называется программированием.

Как мы увидим в дальнейшем, описание алгоритма с помощью внутреннего языка машины неудобно для его чтения человеком. Этот язык громоздок и недостаточно нагляден. Поэтому программирование обычно распадается на два этапа: создание алгоритма и его описание на каком-либо удобном языке и перевод этого описания на язык машины. Разработка достаточно удобных алгоритмических языков, позволяющих точно и наглядно описывать алгоритмы, существенно облегчает программирование. Для некоторых классов алгоритмов созданы языки, завоевавшие международное признание, — ФОРТРАН, АЛГОЛ, КОБОЛ и др.

При процессах переработки информации с помощью АЦВМ программа алгоритма входит в исходную информацию и хранится в ЗУ машины наряду с другими видами информации. Как правило, команда изображается одним словом в памяти, выполнение ее требует одного такта машины. Продолжительность такта в большинстве современных машин бывает переменной — регулируется устройством управления.

При размещении в ЗУ каждая команда приобретает определенный адрес. Устройство управления выбирает поочередно команды из программы и обеспечивает выполнение соответствующей элементарной операции. В зависимости от объема информации, который может нести команда, различают трех-, двух- и одноадресные системы команд.

Основной информацией в команде является так называемый код операции, определяющий функции элементарной операции. По характеру операций команды в основном могут быть разбиты на арифметические, логические, управляющие и обменные. Кроме кода операции, команда несет и другую информацию, смысл которой зависит от кода операции. В первую очередь эта информация определяет те слова в ЗУ, которые будут служить исходной информацией для данной элементарной операции. Так, для выполнения арифметических действий над числами можно указать два адреса, определяющие ячейки ЗУ, в которых хранятся числа, с которыми должно выполняться соответствующее действие. В команде может находиться и третий адрес, указывающий ячейку, в которую должен быть помещен результат. Такова обычная структура трехадресных команд. Если в машине допустимо представление чисел как с плавающей, так и с фиксированной запятой, то, очевидно, должны предусматриваться и различные команды арифметических операций, по-разному воспринимающие содержание кодов, выбираемых из ЗУ.

При выполнении вычислений по сложным формулам часто промежуточные результаты сразу используются в дальнейших вычислениях и нет нужды хранить их в ЗУ. Поэтому некоторые АЦВМ конструируются с двухадресной системой команд. Такая система предполагает наличие в машине регистра, позволяющего хранить такие промежуточные результаты. При этом увеличивается число вариантов команд для выполнения одноклассовых операций. Например, для сложения и умножения очевидны две модификации:

$$\langle a \rangle * \langle b \rangle \rightarrow p \quad \text{и} \quad \langle a \rangle * p \rightarrow \langle b \rangle$$

(здесь * — знак операции, $\langle a \rangle$ — число с адресом a , p — содержимое регистра). Иногда в машине существует несколько регистров, которым присваиваются свои «короткие» адреса. Трехадресную систему команд, в которой один из адресов коротких, называют $2\frac{1}{2}$ -адресной.

Возможна еще более простая система команд, при которой в команде указывается только один адрес. В этом случае каждая пересылка в ЗУ или на регистр выделяется в отдельную операцию, а в арифметических действиях один из аргументов должен быть всегда взят с регистра. За последние годы именно одноадресная система стала вытеснять другие. Хотя количество команд при одноадресной системе возрастает, однако это, как правило, не приводит ни к увеличению загрузки ЗУ, ни к снижению быстродействия. Практика показывает, что в программах, описывающих одинаковые алгоритмы, число одноадресных команд примерно вдвое больше числа трехадресных. Так как длина трехадресной команды также примерно вдвое больше длины одноадресной, то суммарный объем памяти на программу не увеличивается.

Время выполнения команды существенно зависит от количества обращения к ЗУ. Трехадресная команда требует четырех обращений к ЗУ (в том числе одно на чтение самой команды), тогда как одноадресная только двух. Поэтому время работы программы в машине с одноадресными командами оказывается примерно таким же, как и в трехадресной машине.

Структура логических команд близка к структуре команд арифметических. К логическим командам относят обычно все те команды, которые преобразуют информационные слова, рассматривая их не как числа. Сюда относят операции, выполняемые поразрядно по правилам алгебры логики, операции сдвига, операции над командами и т. п.

Обменные команды служат для обеспечения обмена информацией между различными видами ЗУ, в одноадресной системе команд также для обмена между ЗУ и исполнительными регистрами. Операции обмена между внутренними и внешними ЗУ,

а также между машинной и внешним миром управляются обычно не одной командой, а группой из нескольких команд. Сюда относятся, в частности, команды ввода — вывода информации. Структура этих команд существенно зависит от конструктивных особенностей машины.

Управляющие команды будут рассмотрены в следующей лекции.

4. Основные элементы программы

Программа представляет собой последовательность команд. Устройство управления обеспечивает чтение этих команд, как правило, одну за другой, и их выполнение. Однако процесс переработки информации, в частности, любое сложное вычисление, редко может быть описан простой линейной последовательностью операций.

В большинстве случаев такой процесс может протекать тем или иным путем в зависимости от характера исходной информации или от получающихся промежуточных результатов. При описании алгоритма в этих случаях приходится вводить проверку каких-либо условий. В зависимости от выполнения этих условий процесс может пойти тем или иным путем. При этом может нарушаться непосредственный порядок выполнения элементарных операций (команд) и возникает необходимость в переходе к другим частям алгоритма. Такие переходы в машинном языке реализуются с помощью команд условного перехода, указывающих, какая часть программы должна выполняться в зависимости от того, удовлетворяется или нет заданное условие. Место перехода задается адресом команды в программе, на которую, как говорят, «передают управление». Иногда команда передачи управления может быть необходима и независимо от каких-либо условий. Такая команда называется командой безусловного перехода. Команды перехода являются простейшими управляющими командами. В некоторых АЦВМ применяются и более сложные управляющие команды.

Очевидно, что для задач с большим объемом вычислений программа не может быть написана так, чтобы каждой выполняемой операции соответствовала команда программы. Это привело бы к столь большой по объему программе, что один только ввод ее в АЦВМ потребовал бы во много раз больше времени, чем нужно на выполнение вычислений. Практически в этом нет необходимости, так как все значительные по объему вычисления строятся из частей, имеющих циклический характер. В одних случаях это процессы, имеющие характер последовательных приближений, которые повторяются, пока не будет удовлетворен какой-либо критерий точности. В других случаях циклический процесс возникает при выполнении дей-

ствий с массивами величин — векторами, матрицами и т. п., когда приходится выполнять однотипные вычисления над переменными величинами при различных значениях индексов.

В качестве примера рассмотрим алгоритм нахождения по методу Ньютона корня полиномиального уравнения

$$P(x) \equiv a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0.$$

при заданном начальном приближении x_0 .

В процессе итераций по методу Ньютона нужно вычислять значения $P(x)$ и $P'(x)$. Если воспользоваться схемой Горнера (синтетическим делением), то это можно записать так:

$$b_{n+1} = c_{n+1} = 0; \quad c_i = c_{i+1}x + b_{i+1}; \quad b_i = b_{i+1}x + a_i \quad (i = n, \dots, 1, 0)$$

При этом $b_0 = P(x)$, $c_0 = P'(x)$. Если обозначить через j номер итерации по методу Ньютона, то нужно еще добавить формулу

$$x_{j+1} = x_j - \frac{P(x_j)}{P'(x_j)}, \quad j = 0, 1, \dots$$

Итерации заканчиваются, если $|x_{j+1} - x_j| < \varepsilon$.

Заменим теперь это обычное описание алгоритма более формальным. При этом вместо знака равенства мы будем пользоваться знаком присвоения, означающим, что стоящей слева переменной присваивается значение выражения, стоящего справа. Кроме того, для облегчения описания операций перехода мы будем пользоваться метками (буквой и двоеточием), не имеющими оперативного значения. Заметим, что знак присвоения допускает запись вида $j := j + 1$, означающую, что текущее значение величины j увеличено на единицу. Теперь, учитывая, что числа c_i и b_i при $i > 0$ запоминать не надо, весь алгоритм полностью можно записать так:

$$x := x_0; \quad q: c := 0; \quad b := 0; \quad i := n;$$

$$m: c := c \times x + b; \quad b := b \times x + a_i; \quad i := i - 1.$$

Если $i \geq 0$, перейти к m .

$$\Delta := \frac{b}{c}; \quad x := x - \Delta.$$

Если $|\Delta| > \varepsilon$, перейти к q .

Эта компактная запись легко может быть переписана в машинном коде. При выполнении такой программы число операций во много раз превысит число команд. Мы имеем здесь типичный пример двух вложенных друг в друга циклов. Число повторений цикла в одном случае зависит от счетчика (i), в другом — от выполнения условия ($|\Delta| > \varepsilon$).

Очевидно, что при записи алгоритма данного примера на языке машины возникает одна переменная команда — при вычислении b (адрес a_i должен быть переменным).

Значит, при переводе записи алгоритма на машинный язык этот алгоритм должен быть дополнен (или чаще говорят расширен) путем введения операций изменения команд. Если числа a_i расположены в памяти подряд, то каждое изменение i на единицу потребует соответственного изменения на единицу адреса a_i . Эта операция переадресации должна быть среди возможных операций машины. При каждом возврате к метке q команда вычисления a_i должна принять свой первоначальный вид. Расширенный алгоритм должен содержать соответствующую операцию восстановления. Количество переадресуемых и восстанавливаемых команд может оказаться значительным, что приводит к заметному увеличению программы. С этим обстоятельством удастся бороться путем введения в машину так называемых индекс-регистров. Индекс-регистр представляет собой регистр, на котором фиксируется переменная часть адреса. В нашем примере, если предположить, что все коэффициенты a_i расположены в памяти подряд, начиная с адреса a , адрес a_i будет равен $a+i$. В машине, снабженной индекс-регистром, мы можем использовать его для хранения переменной величины i , а в команде, содержащей прибавление a_i , поместить постоянный адрес a и признак использования индекс-регистра. Тогда при выполнении этой команды ее операнд будет выбираться из ЗУ не по программному адресу a , а по исполнительному адресу, равному сумме программного адреса a и содержания индекс-регистра i .

Использование индекс-регистров существенно облегчает программирование циклических процессов. В новейших машинах, как правило, имеется несколько индекс-регистров. Команды таких машин состоят из кода операции, адресной части и призначной части, указывающей, как с помощью индекс-регистров формируются исполнительные адреса.

При составлении программы часто применяется разбиение ее на отдельные части, которые могут быть запрограммированы независимо. В ряде случаев удастся использовать какие-либо программы, составленные ранее, которые могут быть включены в программу в качестве подпрограммы. Для некоторых часто встречающихся простейших задач составляются специальные стандартные подпрограммы, которые могут быть включены в более сложные программы. Наличие обширной библиотеки подпрограмм может очень существенно облегчить процесс программирования. При этом процесс подключения подпрограмм допускает некоторую автоматизацию. Это обеспечивается наличием в машине соответствующих вспомогательных программ. Существуют два основных способа использования подпрограмм.

При первом из них специальная составляющая (компилирующая) программа составляет из отдельных частей — подпрограмм — новую единую программу, которая в дальнейшем используется машиной. При другом способе в основной программе дается лишь необходимая для работы подпрограммы информация и специальная интерпретирующая программа обеспечивает выполнение подпрограммой необходимых функций. Ход выполнения основной программы прерывается, происходит передача управления хранящейся где-то подпрограмме, и только после ее работы вновь будет продолжаться выполнение основной программы.

Метод интерпретации более гибок и меньше загружает оперативное ЗУ, однако процесс интерпретации требует выполнения дополнительных действий и приводит к дополнительной затрате времени. Компиляция оправдывает себя для не очень больших, но многократно используемых программ.

Следует заметить, что метод интерпретации как бы расширяет внутренний язык машины. Действительно, каждое обращение к подпрограмме через интерпретирующую систему должно быть записано в виде команды (или нескольких команд), не имеющей уже смысла элементарной операции, однако могущей формально рассматриваться в качестве новой элементарной операции. Используя такие «псевдокоманды», при наличии соответствующей библиотеки подпрограмм легко, например, писать программы, в которых элементарные операции выполняются над более сложными объектами, чем обыкновенные числа, например над векторами, матрицами, комплексными числами, числами с удвоенным количеством знаков и т. п.

5. Процесс программирования

Процесс программирования распадается на несколько этапов. Предварительный этап — постановка задачи, выбор принципиальной схемы алгоритма ее решения. На этом этапе обычно автором создается краткое описание выбранного алгоритма на обычном математическом языке. При этом автор может даже и не иметь никакого представления об АЦВМ.

Первый и наиболее ответственный этап программирования — полное и точное описание алгоритма с помощью какого-либо алгоритмического языка. Это описание должно точно определить появление первичной информации, все этапы ее переработки, способы выдачи результатов, промежуточных и окончательных. Конечно, такое описание можно сделать, не прибегая к специальным языкам, однако применение детально разработанных и формализованных языков обеспечивает полноту и точность описания и облегчает дальнейший перевод этого описания на внутренний язык машины.

Иногда автор задания, программируя сам, стремится перескочить через этап подробного описания и составлять программу на языке машины, пользуясь лишь предварительным схематическим описанием. Это, как правило, заметно увеличивает время, затрачиваемое на программирование, а также и количество допускаемых ошибок. Даже в небольших по объему и простых задачах составление точного алгоритмического описания является совершенно необходимым.

Следующим этапом является перевод описания алгоритма на внутренний язык машины. Как уже отмечалось, при этом происходит расширение исходного алгоритма за счет введения дополнительных операций, связанных со спецификой реализации алгоритма на данной машине. При окончательной записи алгоритма на языке машины каждая команда, а также каждая величина, участвующая в вычислениях, должна получить свой адрес, свое место в ЗУ. Процесс выбора способа размещения информации в ЗУ называют распределением памяти. Эта операция для задач, связанных с переработкой большого объема информации, часто может быть завершена лишь путем ряда последовательных приближений и от удачного способа ее осуществления может значительно зависеть время решения задачи.

Для сложных задач обычно программирование начинают с составления грубой блок-схемы и предварительной схемы обмена информацией между внешними и оперативными ЗУ с учетом объема информации, нужной для работы каждого блока, и объема оперативного ЗУ. После этого происходит программирование отдельных блоков, которое ведется чаще всего в условных адресах или в буквенных обозначениях. Лишь при компоновке всей программы из отдельных блоков делается окончательное распределение памяти.

Как уже отмечалось, процесс программирования может быть значительно облегчен использованием библиотеки стандартных подпрограмм с помощью имеющейся на машине компилирующей или интерпретирующей системы.

Следует отметить, что перевод алгоритмического описания на язык машины отнюдь не является однозначным. Одни и те же результаты могут получаться многими различными способами. При этом, естественно, возникают задачи оптимизации, причем критерии оптимума могут быть различными: время решения задачи, объем необходимой памяти и т. п. Получение оптимальных программ является задачей весьма трудной и требует хорошего знания возможностей машины и известного опыта программирования.

Процесс написания программы на языке машин очень трудоемкий и редко может быть выполнен без внесения в программу значительного числа ошибок. Трудно даже представить себе все многообразие ошибок, встречающихся в программе,

начинная с элементарных описок и кончая тонкими логическими ошибками, связанными или с недостаточным пониманием исходного описания, или с его переработкой в целях оптимизации.

Поэтому необходимым следующим этапом программирования является отладка программы на машине. Отладка заключается в проведении с помощью написанной программы вычислений, результаты которых известны или легко могут быть проверены (так называемых тестов). При этом возникает потребность получения дополнительной информации, вообще говоря, ненужной при дальнейшем использовании готовой программы (промежуточные результаты, состояние переменных команд, содержание индекс-регистров и т. п.). Для такого вмешательства в работу программы применяются специальные диагностические программы либо из библиотеки стандартных программ, либо особо написанные программистом. Большую помощь при отладке может оказать ручной пульт управления машиной. Такой пульт может быть снабжен световой сигнализацией, позволяющей видеть содержание тех или иных внутренних регистров машины, а также специальных устройств, позволяющих прерывать работу машины в определенных случаях (например, при достижении какой-либо команды, засылке результата в заданную ячейку и т. п.). Иногда также остановки осуществляются с помощью ключей. В коде машины в этом случае имеются команды, вызывающие останов или передачу управления, если на пульте включен тот или иной ключ. Это позволяет видоизменять работу программы путем включения ключей, что может быть полезно не только для отладки.

Ошибки в программе в лучшем случае приводят к неверным результатам. Гораздо чаще ошибки приводят к нарушению нормального порядка выполнения операций, вследствие чего возникают недопустимые результаты, например, слишком большие числа, что вызывает так называемые аварийные остановки. Другим частым результатом ошибок является, наоборот, отсутствие останова, когда машина начинает повторять какой-либо кусок программы неограниченное число раз.

Проведение отладки, выявление и локализация ошибок являются делом очень сложным, требуют большого опыта; при написании программы важно помнить о необходимости отладки и заранее позаботиться о ее облегчении.

Необходимо иметь в виду, что нарушения в работе программы возможны и по вине машины. В современных машинах, арифметическое и управляющие устройства которых работают на полупроводниковых элементах, сбой в этих устройствах происходит крайне редко. Наиболее подвержены ошибкам процессы обмена информацией. Для контроля за этими

операциями применяются специальные меры. Во многих машинах машинное слово дополняется контрольными разрядами, позволяющими обнаружить единичную ошибку при пересылке слов внутри машины. Для контроля ввода и вывода информации применяются различного рода контрольные суммы, которые вводятся независимо и сравниваются с суммой, получаемой непосредственно при вводе. Введение подобного рода контрольных элементов позволяет значительно повысить надежность получаемых результатов. Тем не менее в ответственных случаях, а также на ламповых машинах, которые имеют существенно меньшую надежность, применяется двойной просчет задачи.

Для задач большого объема двойной просчет проводится для отдельных частей задачи с записью промежуточных результатов во внешнем ЗУ. Счет продолжается только в том случае, если совпадают результаты двух повторных просчетов.

6. Автоматизация программирования

Второй этап программирования — перевод описания алгоритма на внутренний язык машины — является весьма трудоемким, и именно на этом этапе делается большая часть ошибок. Однако этот этап работы носит в значительной степени технический характер и может быть алгоритмизирован. Следовательно, процесс переработки заключенной в исходном описании программируемого алгоритма информации в программу на языке машины может быть поручен самой машине. Для этого только необходимо разработать и описать (на языке машины) алгоритм перевода описания алгоритма с первичного языка на язык машины. Программы, реализующие такой перевод, принято называть трансляторами.

Для того чтобы такой транслятор мог быть создан, необходимо, чтобы первичный язык описания алгоритмов был точным, не допускал многозначных толкований и имел достаточно простой синтаксис. Кроме того, такой язык должен быть близким к общепринятому математическому языку, так чтобы текст, написанный на этом языке, достаточно легко читался и чтобы обучение языку не вызывало затруднений. Без выполнения этих условий такой алгоритмический язык не будет иметь преимуществ перед внутренним языком машины и задача автоматизации программирования потеряет смысл.

В настоящее время создано большое число алгоритмических языков, значительная часть которых имеет специальный характер и может служить для описания лишь узкого класса задач. Некоторые языки приспособлены к определенным машинам и имеют характер псевдокода (или иногда пользуются термином

«автокод»), т. е. на этих языках текст, излагающий алгоритм, состоит в основном из псевдокоманд.

Наиболее универсальными языками для описания вычислительных алгоритмов являются языки ФОРТРАН и АЛГОЛ. Первый широко распространен в США, в частности, все машины фирмы IBM имеют трансляторы с этого языка. АЛГОЛ появился позже ФОРТРАНа, на его разработку потратили много усилий ученые из разных стран. В 1964 г. язык АЛГОЛ был утвержден как стандартный международный алгоритмический язык организацией IFIP, и мы ограничимся кратким рассмотрением только этого языка.

Язык АЛГОЛ достаточно прост и близок к обычному языку, которым пользуются математики. Практика показывает, что научиться основам этого языка, достаточным для описания алгоритмов не слишком сложных, можно за 20—30 часов занятий.

Основными символами АЛГОЛа являются цифры, латинский алфавит, небольшое количество знаков операций, скобок и так называемых разделителей, а также 22 слова, рассматриваемых как основные символы языка.

Всякое описание алгоритмов на языке АЛГОЛ составляется из операторов, на которые расчленяется вычислительный процесс. Помимо простейших операторов присваивания, здесь могут быть употреблены операторы цикла и условные операторы, служащие для описания ветвящихся процессов, а также некоторые другие.

Программа расчленяется на отдельные блоки, которые могут писаться разными людьми до некоторой степени независимо. Это обеспечивается необходимостью давать в каждом блоке описания тех объектов, которые в этом блоке встречаются, т. е. объяснять характер встречающихся обозначений.

Синтаксис АЛГОЛа допускает использование понятия функции, причем каждая встречающаяся функция (за исключением простейших элементарных, как $\sin(x)$, $\exp(x)$ и т. п.) должна быть точно описана. Функции являются частным случаем понятия процедуры, позволяющим выделять отдельные части алгоритма как бы в независимо описанные подпрограммы.

Знакомство с алгоритмическим языком, в первую очередь с АЛГОЛом, следует признать сейчас совершенно необходимым для лиц, занимающихся вычислительными процессами.

Точное описание алгоритма с помощью алгоритмического языка помимо того, что облегчает возможность передачи этого алгоритма другому лицу или машине, помогает и самому автору лучше ориентироваться в алгоритме.

Для сообщения текста, написанного на языке АЛГОЛ, машине необходимо пользоваться стандартным оборудованием данной машины, которая может и не иметь полного набора символов, употребляемых в языке. Поэтому для каждой

машины возникает свое конкретное представление языка, доступное для машины. Кроме того, логические возможности АЛГОЛа очень велики, и не всегда удастся построить транслятор, позволяющий реализовать на машине все эти возможности. Почти все трансляторы могут переводить тексты, написанные с помощью не полного языка АЛГОЛ, а некоторого его подмножества. Существует даже официально утвержденное подмножество АЛГОЛа для машин средней мощности (Subset ALGOL). Помимо этого, всякий транслятор имеет, естественно, технические ограничения, связанные с ограниченным объемом ЗУ.

В принципе алгоритм трансляции может быть довольно простым, однако практически при реализации его встречается много трудностей. В процессе трансляции транслятор должен ограничиться существующим объемом ЗУ, давать правильную программу в машинном коде и оптимизировать ее в том или ином смысле. Опыт показывает, что если при построении транслятора не заботиться об оптимизации, то могут получаться программы, сильно перегружающие память или требующие при их работе слишком большого расхода времени. Безусловно, при реализации перевода алгоритма на язык машины вручную опытным программистом удастся осуществлять значительно большую степень оптимизации. Программы получаются более компактные, они лучше используют память, быстрее работают. Однако это достигается путем затраты больших усилий квалифицированного персонала. Такие усилия имеют смысл затрачивать для программирования хорошо изученного алгоритма, с помощью которого будет решаться большое число однотипных задач. При экспериментальной отработке алгоритма необходимо пользоваться автоматическим программированием, позволяющим быстро получать программу и легко вносить в нее различные изменения. Следует иметь в виду, что при автоматическом программировании сильно упрощается процесс отладки путем простого дополнения исходного алгоритма, не говоря уже о том, что число ошибок заметно уменьшается. Некоторые авторы считают, что потеря машинного времени из-за недостаточной оптимальности, а также расход времени на сам процесс трансляции для сложных программ (не для массового счета) компенсируются сохранением времени, затрачиваемого на отладку.

Несомненно, что алгоритмические языки будут и дальше совершенствоваться, будут появляться и более совершенные специальные языки, в частности, для процессов неарифметической переработки информации.

На этом мы закончим рассмотрение общих принципиальных вопросов, связанных с использованием АЦВМ. В лекциях С. Л. Белоусова рассмотрены некоторые конкретные примеры применения АЦВМ при решении метеорологических задач.

С. Л. БЕЛОУСОВ

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ МЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ ЭЛЕКТРОННЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МАШИН

В этой лекции будет дано представление об особенностях программ и об организации решения задач прогноза на машинах. Мы будем иметь в виду задачи, связанные с практикой оперативного прогноза, включая автоматическую подготовку исходных данных и объективный анализ. Попутно мы дадим представление о требованиях, предъявляемых подобными задачами к вычислительным машинам.

Начнем с программы собственно прогноза как наиболее простой из всего комплекса.

Для программ прогноза характерно широкое использование циклического построения (в виде повторяющихся циклов). Так, основная часть программы прогноза обычно повторяется столько раз, сколько шагов по времени необходимо проделать. Это оказывается возможным благодаря тому, что вычисления на каждом шаге в большинстве случаев однотипны. Таким образом, самый внешний цикл программы прогноза отвечает расчетам на одном шаге по времени.

В свою очередь расчет на одном шаге включает последовательность вычислений, имеющих характер обработки двумерных полей (реже трехмерных). Здесь применяются весьма характерные циклы. Это может быть, например, расчет поля оператора Лапласа от поля геопотенциала (или иного элемента) с записью результатов в ячейки другого поля или ячейки исходного поля (если для дальнейших вычислений оно уже больше не нужно); расчет якобиана двух полей (сюда относится расчет адвекции температуры по полям геопотенциала на двух смежных изобарических поверхностях) и др.

В качестве иллюстрации построения подобного рода циклов приведем схему программы для вычисления поля оператора Лапласа ΔH по полю геопотенциала H .

Пусть поле геопотенциала H имеется в узлах сетки, содержащей 37×27 точек (или 45×33 в восьмиричном исчислении).

Будем считать, что значения поля H в этих точках расположены построчно (начиная с верхнего левого угла) в ячейках памяти 2001, 2002, ..., 3747. Здесь, как обычно в программах, номера ячеек памяти записаны в восьмеричной системе счисления. Как нетрудно проверить, при использовании четырехразрядных восьмеричных чисел можно занумеровать адреса ячеек от 0 до 4095.

Расчет оператора Лапласа производим по формуле $\Delta H = \frac{1}{s^2}(H_1 + H_2 + H_3 + H_4 - 4H_0)$, где индекс 0 относится к точке, для которой ведется расчет, а остальные индексы — к четырем ближайшим к ней точкам; s — шаг сетки (примем $s=1$). Поле результатов состоит из 35×25 точек, т. е. имеет с каждой стороны на один ряд меньше по сравнению с полем геопотенциала H . Пусть требуется поместить это поле во внутренние точки поля, расположенного в ячейках 4001, 4002, ...

Поле H					Поле ΔH				
2001	2002	2003	...	2045	4001	4002	4003	...	4011 4015
*	*	*		*	*	*	*		*
2046	2047	2050	...	2112	4046	4047	4050	...	4111 4112
*	*	*		*	*	*	*		*
2113	2114	2115	...	2157	4113	4114	4115	...	4156 4157
*	*	*		*	*	*	*		*
...	...	...		...	...	...	...		...
3703	3704	3705		3747	5703	5704	5704	...	5746 5747
*	*	*		*	*	*	*		*

Программу разместим, например, на адресах 0101, 0102, ... Команды будем писать применительно к трехадресной машине. В этом случае каждая команда будет содержать:

- 1) код операции;
- 2) адреса трех ячеек, причем первый и второй адреса есть адреса исходных чисел, а третий адрес — адрес результата.

Код операции указывает характер выполняемого действия (арифметического, логического и др.), а также содержит указание на то, какие из адресов данной команды подлежат модификации с помощью индексных регистров. (Для простоты будем предполагать, что используется только один индексный регистр.) Поясним сказанное на примере команды, которая складывает содержимое ячеек 2002 и 2114, помещая результат в ячейку с адресом 0001. Кроме того, пусть эта команда содержит указание на то, что первые два ее адреса подлежат модификации с помощью индексного регистра (одного и того же для каждого из адресов). Вот условная запись этой команды:

110 + 2002 2114 0001

Здесь индекс 110, стоящий при знаке плюс, записан в двоичной системе и имеет тот смысл, что только первый и второй адреса

данной команды подлежат модификации. Модификация адресов состоит в следующем. Фактически выполняется не написанная команда, а та, которая получилась бы из этой команды, если к соответствующим ее адресам прибавить содержимое индексного регистра. Пусть, например, в индексном регистре находится число 0002. В этом случае будет произведено сложение чисел, находящихся в ячейках 2004 и 2116, хотя в памяти машины данная команда будет сохраняться в прежнем виде. Если в индексном регистре будет 0000, то сложатся числа из ячеек 2002 и 2114. Таким образом, использование индексных регистров позволяет легко модифицировать команды, что бывает необходимо при переходе от обработки одного узла сетки к следующему без изменения самой команды в памяти. С помощью индексного регистра легко осуществляется также подсчет числа циклов (в данном случае подсчет числа обработанных точек, строк и др.).

С учетом сказанного программу вычисления ΔH запишем следующим образом:

Адрес команды	Код операции	I адрес	II адрес	III адрес	
0101	0 → индексный регистр	—	—	—	Заслать нуль в индексный регистр
0102	110 +	2002	2114	0001	Сложение
0103	110 +	2046	2050	0002	Сложение
0104	000 +	0001	0002	0003	Сумма $H_1 + H_2 +$ $+ H_3 + H_4$
0105	100 ×	2047	4*	0004	$4H_0$
0106	001 —	0003	0004	4017	ΔH
0107	Команда окончания цикла				
0110					

Команда окончания цикла производит следующие действия:

а) увеличение содержимого индексного регистра на единицу;

б) сравнение величины индексного регистра с заданным числом повторения цикла — в данном случае это число есть число точек в строке результатов, т. е. 35 (или 0043 в восьмеричной системе). В случае, если индексный регистр достиг этой величины, передается управление на следующую команду (0110), в противном случае — команде 0102, т. е. к обработке следующей точки.

Очевидно, что команда окончания цикла должна содержать следующую информацию:

1) константу приращения величины индексного регистра, т. е. 0001;

- 2) максимальное значение индексного регистра, т. е. 0043;
- 3) адрес возврата на начало цикла, т. е. 0102.

Приведенный участок программы обеспечит расчет поля ΔH для точек первой строки этого поля. Цикл команд 0102—0107 будет повторен 35 раз, причем модифицируемые команды каждый раз будут обрабатывать значения H со все большими номерами адресов, хотя сами эти команды в памяти машины изменяться не будут.

Так будет вычислена первая строка в поле результатов ΔH . Для того чтобы были обработаны все строки поля, достаточно осуществить дополнительное приращение индексного регистра, а также подсчет числа обработанных строк (произвести замыкание внешнего цикла) с помощью команды типа той, которая находится на адресе 0107.

Имеются и другие способы организации циклических вычислений.

Операции над двумерными полями чисел характерны для задач прогноза. Условно подобные операции над полями чисел будем записывать так: $A * B \rightarrow C$, что означает: над двумя полями, находящимися соответственно в массивах ячеек A и B , произвести некоторую вычислительную операцию (ее обозначим символом $*$) и результат поместить в массив ячеек C . В частных случаях могут быть операции вида $A * A \rightarrow B$, $A * B \rightarrow B$ и др.

В ряде случаев, особенно в многоуровневых задачах прогноза, исходные значения берутся одновременно не из двух, а из большего числа полей, например,

$$A * \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{Bmatrix} \rightarrow C.$$

Подобная запись элементов программы позволяет легко выяснить, какие требования предъявляет задача к объему памяти на каждом этапе ее решения.

В качестве примера запишем последовательность операций для баротропного прогноза в геострофическом приближении:

1. Вычисление поля абсолютного вихря $\Delta H + f(\varphi)$ по полю геопотенциала H .

2. Вычисление адвекции вихря по полю H и полю $\Delta H + f(\varphi)$.

3. Нахождение приращений δH интегрированием уравнения Пуассона, например, методом итераций; в качестве начального приближения берутся значения δH предыдущего шага.

4. Расчет будущих значений геопотенциала $H_{i+1} = H_i + \delta H$.

5. Проба на число проделанных шагов: если оно меньше заданного, возврат к пункту 1. Если равно, — к пункту 6.

6. Выдача результатов на печать.

Запишем эти операции в символических обозначениях.

В начале очередного шага имеем поля: H — поле геопотенциала, полученное на предыдущем шаге, q — поле приращений δH предыдущего шага. Кроме того, потребуется иметь в памяти место для третьего поля, в котором будут храниться промежуточные результаты вычислений внутри шага. Его обозначим A .

Имеем:

1) расчет вихря $H * H \rightarrow A$;

2) расчет адвекции вихря $H * A \rightarrow A$;

3) решение уравнения Пуассона $q * A \rightarrow q$;

(Здесь по полям q и A вычисляются невязки и далее следующее приближение для q с записью новых значений q в те же адреса. Этот пункт повторяется до тех пор, пока максимальная невязка не станет меньше заданной.)

4) расчет нового значения H $H * q \rightarrow H$.

Нетрудно рассмотреть вариант этой задачи и с использованием уравнения баланса (квазисоленоидальное приближение).

Легко видеть, что для решения рассмотренной задачи достаточно иметь в памяти место для трех полей: H , q , A . Определим максимально возможные размеры этих полей, ориентируясь на использование только оперативного запоминающего устройства на 4096 чисел. Здесь же должна находиться программа и константы — всего примерно 400 слов. Следовательно, в памяти могут быть размещены три поля размером $40 \times 30 = 1200$ точек. При шаге сетки 300 км — это весьма большое поле.

В случае если необходима большая область прогноза, следует использовать внешнюю память (магнитный барабан или магнитную ленту). В таком случае для решения задачи в оперативной памяти достаточно иметь место для хранения всего лишь двух полей (свести число полей, одновременно находящихся в оперативной памяти, до одного нельзя). Изобразим схему расчета в этом случае. Операцию чтения поля из внешней памяти в оперативную память будем обозначать знаком $\uparrow$, а запись во внешнюю память из оперативной памяти знаком $\downarrow$. Два рабочих поля в оперативной памяти обозначим через A и B .

В начале очередного шага имеем во внешней памяти два поля: H и q (поле геопотенциала H и поле приращений δH на предыдущем шаге).

1. $H \uparrow A$ — чтение поля H в оперативную память,

2. $A * A \rightarrow B$ — счет поля вихря,

3. $A * B \rightarrow B$ — счет адвекции вихря,
4. $q \uparrow A$ — чтение поля приращений δH ,
5. $A * B \rightarrow A$ — счет приращений,
6. $A \downarrow q$ — запись поля приращений δH ,
7. $H \uparrow B$ — чтение поля H_i
8. $A * B \rightarrow A$ — счет $H_{i+\Delta i} = H_i + \delta H$,
9. $A \downarrow H$ — запись поля $H_{i+\Delta i}$.

В данном случае в оперативной памяти одновременно находятся два поля; размер каждого из них может быть доведен до 1800 точек (например, 45×40) вместо 1200 в прежнем варианте.

Однако для расширения сетки можно идти и по другому пути: все три величины (ранее хранившиеся в полях H , q и A), относящиеся к одной точке сетки, хранить упакованными в одну ячейку памяти. При разумном выборе масштабов это достигается без потери точности. Тогда в оперативной памяти размещается одно (строенное) поле. Его размер может быть до 3000 точек, т. е. все северное полушарие.

Хранение нескольких чисел упакованными в одной ячейке памяти широко применяется при решении прогностических задач как средство расширения оперативной памяти.

Дело в том, что в большинстве современных машин разрядность слов такова, что ею обеспечивается точность представления чисел, намного превосходящая ту, которая нужна при решении задач прогноза. Исключение может составлять только решение плохо обусловленных систем алгебраических уравнений, которые могут встретиться при использовании метода наименьших квадратов (и в том числе при объективном анализе). В этом случае ошибки округления желательно свести к минимуму. В остальных случаях достаточно гораздо меньшая точность задания начальных данных и точность вычисления промежуточных результатов. В связи с этим при решении прогностических задач широко практикуется хранение в одном слове памяти нескольких чисел, соответствующим образом упакованных. В частности, это оказывается особенно удобным при вводе и выводе информации в виде десятичных чисел в ненормализованном виде. Значения геопотенциальных высот и других величин в двоичной системе (как в нормализованном, так и в ненормализованном виде) также могут быть упакованы по нескольку в одну ячейку без ущерба для точности. Эти меры позволяют расширить объем оперативной памяти машины, хотя и приводят к дополнительным затратам времени для «распаковки» чисел перед выполнением арифметических действий над ними и для «упаковки» результатов после выполнения действия.

Аналогичные проблемы оптимального использования ресурсов памяти и арифметики решаются и в многоуровневых схе-

мах прогноза. Так, в нелинейной задаче трехуровневого прогноза для северного полушария оказалось целесообразным хранить в одной ячейке памяти значения геопотенциала в одной точке на всех трех уровнях (три числа).

Уже эти примеры, относящиеся в основном к решению простейших (для настоящего времени) задач прогноза указывают на то, что для оперативного прогноза по более совершенным методам необходимы машины с внутренней (оперативной) памятью от нескольких тысяч до нескольких десятков тысяч ячеек при малой разрядности.

Нетрудно оценить и требования к быстродействию машин, применяемых для счета оперативного прогноза. Для этого представим себе сетку из пяти уровней с 3000 точек на каждом уровне. Нынешние схемы прогноза требуют выполнения от 100 до 1000 операций для обработки одного узла сетки на каждом шаге по времени. Следовательно, для прогноза на 24 часа при шаге в один час число операций будет составлять от $3 \cdot 10^7$ до $3 \cdot 10^8$. Для того чтобы этот прогноз был сосчитан за 10 мин. (время, приемлемое в оперативных условиях), машина должна производить от $0,5 \cdot 10^5$ до $0,5 \cdot 10^6$ операций в секунду.

Отметим еще некоторые особенности программ прогноза.

1. Обычно для экономии места в оперативной памяти программа полностью хранится только во внешней памяти; в оперативной памяти постоянно находится лишь небольшая «ведущая» программа, которая последовательно вызывает из внешней памяти для работы программы отдельных этапов.

2. В программах предусматривается логический контроль разумности получаемых результатов для исключения ошибок вследствие дефектов в работе машины. Он применяется на каждом шаге и состоит в проверке некоторых статистических критериев, которым должны удовлетворять промежуточные результаты. Невыполнение этих критериев свидетельствует об ошибке, и тогда данный шаг пересчитывается снова. Такой способ предпочтительнее, чем двойной просчет всего прогноза в том случае, когда быстродействие машины не предоставляет больших резервов.

3. В ряде случаев для выдачи результатов прогноза в виде карт используются устройства графического представления результатов. В этих случаях необходимо предварительно рассчитать координаты точек на плоскости карты, через которые проходят изолинии прогнозируемого поля. Затем таблица координат должна быть упорядочена с тем, чтобы для графического представления выдавались координаты точек изолиний в той последовательности, которая обеспечивает наилучший режим работы регистрирующего устройства (непрерывное движение вдоль одной изолинии, переход кратчайшим путем к следующей изолинии и др.).

Для расчета координат изолиний с заданным значением того или иного элемента в ряде случаев предварительно путем интерполяции в памяти машины строится поле этого элемента с более густой сеткой по сравнению с той, которая фигурирует в прогнозе.

Теперь мы рассмотрим некоторые специфические особенности программ объективного анализа.

Напомним, что задача анализа — расчет значений метеорологических элементов в узлах регулярной сетки по данным наблюдений на станциях, расположенных нерегулярно, с учетом некоторых полей элементов, заданных в узлах сетки (например, климатических норм, результатов прогноза на срок анализа и др.). Исходными данными являются значения метеорологических элементов на станциях.

Очевидно, что при расчете значения некоторого элемента в узле сетки существенным этапом программы является поиск в памяти машины данных наблюдений на станциях, расположенных вблизи этого узла. Это специфическая операция, не укладывающаяся в рассмотренные ранее схемы взаимодействия полей чисел. Для подобного поиска данные наблюдений должны быть снабжены координатами той станции, к которой они относятся, — либо географическими, либо координатами, связанными с данной сеткой. Обычно координаты станций и некоторые другие данные о станциях (например, высота над уровнем моря и др.) хранятся в памяти в виде специального справочника (так называемого словаря). При этом поиск в словаре данных о некоторой станции производится либо по индексу станции, либо по ее месту в массиве исходных данных — в зависимости от принятого порядка ввода исходных данных.

После того как данным всех станций будут приписаны координаты, поиск ближайших к некоторому узлу станций производится путем просмотра координат станций и вычисления расстояния от узла. Однако этот просмотр должен быть организован так, чтобы каждый раз просматривались не все станции, а только те, которые действительно находятся вблизи данного узла. В противном случае будет непроизводительный расход машинного времени. Рационализация поиска достигается использованием различных специально составляемых информационных справочников о наличии поступивших к моменту счета анализа исходных данных. Так, один из вариантов системы поиска предусматривает предварительное формирование в памяти машины специального поля, каждая ячейка которого отвечает одному узлу сетки. Это так называемая машинная карта. Построение поля машинной карты состоит в следующем. В каждую ячейку этого поля заносятся сведения о наличии и местонахождении в памяти машины информации со станций,

расположенных в непосредственной близости от соответствующего узла сетки (а именно в пределах квадрата со стороной, равной шагу сетки, и с центром в узле сетки). Принадлежность той или иной станции данному квадрату устанавливается либо по заранее приписанному этой станции номеру квадрата (узла) в сетке (этот номер хранится в словаре вместе с другими призначными данными этой станции), либо по координатам станции. Первый случай относится к станциям с фиксированными координатами, а второй — к подвижным станциям. Очевидно, что некоторые ячейки машинной карты останутся незаполненными (пустыми) — это те, которые отвечают тем узлам, вблизи которых нет станций, сообщивших данные.

При наличии машинной карты поиск информации с ближайших к данному узлу станций осуществляется в следующем порядке. По координатам данного узла (в системе, связанной с сеткой точек) последовательно определяются координаты ближайших к данному узлу квадратов машинной карты. Отвечающие этим квадратам ячейки машинной карты просматриваются, и имеющаяся в них информация извлекается. После того как будет набрано необходимое для анализа число станций, производятся расчеты по принятому алгоритму интерполяции. Аналогичным образом производится извлечение данных для анализа не в узлы сетки, а на станции, что необходимо для предварительной проверки данных. Следует подчеркнуть, что рациональная организация поиска данных весьма существенна, так как обычно машинное время, расходуемое на поиск данных, сравнимо с временем арифметических расчетов.

Нам остается рассмотреть некоторые особенности программ автоматического извлечения и обработки информации. Это чисто логические программы, совершенно отличные от рассмотренных. Исходными данными для этих программ являются введенные в машину сведения, поступившие по обычным каналам связи в телеграфном коде и не подвергавшиеся какой-либо предварительной обработке вручную. Эта информация состоит из телеграфных знаков (цифр, букв и управляющих сигналов), каждый из которых представлен пятью двоичными разрядами.

При вводе в машину эта информация обычно «упаковывается» по несколько пятиразрядных знаков в одну ячейку памяти (соответственно длине слова в памяти машины).

Дальнейшая обработка информации состоит из следующих этапов:

1. Выделение групп — в основном пятизначных цифровых групп — с помещением каждой группы в отдельную ячейку памяти в последовательном порядке. Нахождение групп в тексте производится по соответствующим управляющим сигналам, имеющимся во введенной информации.

2. Поиск среди последовательности групп телеграмм определенного вида (например, аэрологических). Поиск производится по отличительным признакам, содержащимся как в заголовке телеграммы, так и внутри телеграммы. После того как телеграмма обнаружена, извлекается ее индекс. При нахождении подтверждения в словаре реальности этого индекса данные, содержащиеся в телеграмме, извлекаются и представляются в виде некоторого стандартного макета.

3. Гидростатический контроль телеграмм и исправление грубых ошибок (если это возможно).

После этого данные телеграмм могут быть использованы для объективного анализа или для других целей.

В используемой в Мировом метеорологическом центре (Москва) программе обработки данных при полной обработке одной телеграммы требуется порядка 10 000 операций. Полный объем необработанной аэрологической информации по северному полушарию за один срок занимает обычно несколько тысяч ячеек внешней памяти машины.

Из-за большого числа искажений, имеющих в телеграммах, и нечеткого соблюдения требований кодов при составлении телеграмм программы обработки содержат много различных проб весьма редко встречающихся ситуаций, обнаруживаемых по мере накопления опыта работы. Одновременно усложняются и сами программы.

Нынешние программы позволяют обнаруживать и правильно расшифровывать 95% сообщений из числа доступных правильной расшифровке вручную. Вместе с тем автоматическая обработка данных свободна от различных субъективных ошибок, неизбежно возникающих при обработке телеграмм вручную.

К. Г. ХИНКЕЛЬМАН

АВТОМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА СИНОПТИЧЕСКИХ И АЭРОЛОГИЧЕСКИХ СВОДОК

Введение

Программа автоматического раскодирования метеорологических сведений предназначена для обработки и контроля всех поступающих сообщений с целью их последующего использования в численном анализе, исключения ненужных данных и обработки полезной информации так, чтобы данные содержали возможно меньше ошибок и в упорядоченном виде поступали для использования в дальнейших этапах численного прогнозирования.

В том случае, когда поступающие сводки построены в соответствии с установленными правилами кодирования метеорологических сведений и передачи сообщений, автоматическая расшифровка сводок сравнительно проста. Однако даже в правильных сводках нередко отдельные метеорологические элементы не обнаруживаются на строго фиксированном месте, так как их кодирование и размещение не являются однозначными.

Наибольшие трудности при автоматической расшифровке связаны с обработкой неправильно закодированных или искаженных данных, и главная задача программы обработки состоит в обнаружении и исправлении таких данных при минимальном расходе машинного времени и времени на программирование.

В настоящее время имеется несколько различных вариантов программ автоматической обработки данных, причем в каждом центре используется своя собственная программа. Возможно, что это происходит из-за недостаточности публикаций в данной области.

Для того чтобы дать представление об обработке данных как о некоторой внутренне согласованной и непротиворечивой системе, ниже в основу изложения положена методика обработки, применяемая в Центре численного прогнозирования

в Оффенбахе. При этом ввиду сложности методики здесь рассматриваются и иллюстрируются примерами только лишь основные черты программы¹.

ГЛАВА I

ПЕРВИЧНАЯ ОБРАБОТКА СООБЩЕНИЙ

§ 1. Перепись информации с бумажных лент на магнитные

Мы будем предполагать, что данные, поступающие по национальным и международным каналам связи, автоматически пуншируются на бумажные перфоленты и затем в таком виде вводятся в вычислительную машину. Бумажная перфолента

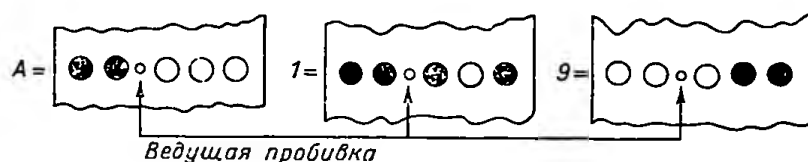


Рис. 1. Примеры представления различных знаков в пятипозиционном коде на бумажной перфорированной ленте.

содержит буквенно-цифровые знаки (буквы, цифры и специальные «служебные» знаки) в виде пятипозиционного (пятиразрядного) кода. Тогда каждый знак изображается последовательностью из пяти двоичных разрядов. К числу специальных (служебных) знаков относятся, в частности, сигналы перехода с буквенного регистра на цифровой (и обратно), знаки пробела, возврата каретки и перевода строки. Примеры представления различных знаков в пятипозиционном коде на бумажной перфорированной ленте приведены на рис. 1.

При вводе такой информации в машину производятся следующие действия.

1. В тех случаях, когда в используемой на соответствующей вычислительной машине системе программирования принято

¹ Описываемая здесь система автоматической обработки данных построена применительно к коду синоптических и аэрологических телеграмм, действовавшему до 1 января 1968 г.

С 1 января 1968 г. были внесены некоторые изменения в код для передачи данных аэрологического зондирования атмосферы.

При издании книги не было возможности внести соответствующие изменения в текст. Поэтому читатель должен иметь в виду, что определенная часть описываемой системы раскодирования сообщений может представлять только лишь методический интерес. (Прим. ред.).

представление знаков шестью двоичными разрядами, например с помощью шестизначного ВСД-кода¹, к пяти разрядам пятипозиционного кода данного знака добавляется спереди еще один разряд (ноль).

2. Для перевода знаков, представленных в пятипозиционном коде, в код ВСД используется специальная таблица (см. табл. 8 приложения). При этом перевод знаков производится соответственно одному из двух списков этой таблицы — списку букв или списку цифр — в зависимости от того, какой управляющий сигнал предшествовал на ленте данному знаку — сигнал перехода на буквенный регистр или сигнал перехода на цифровой регистр.

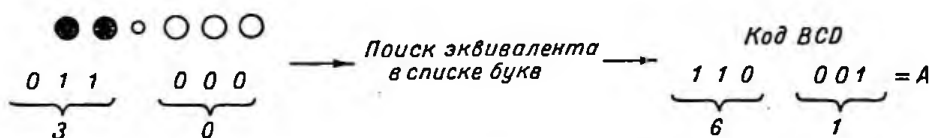


Рис. 2. Схема перевода пятиразрядного кода в код ВСД.

Схема перевода пятиразрядного кода в код ВСД дана на рис. 2.

Знаки, представленные в шестизначном коде, накапливаются в памяти машины. Как видно из табл. 8 приложения, в некоторых случаях различные знаки пятипозиционного телеграфного кода переводятся в один и тот же знак шестизначного кода, поскольку это оказывается целесообразным для дальнейшего.

3. Нередко без особой на то причины в сообщениях содержится большее, чем нужно, число знаков пробела. Для укорочения телеграммы излишние пробелы изымаются. При этом применяются следующие правила:

- а) один знак пробела, находящийся между одиночными знаками, исключается;
- б) несколько следующих друг за другом знаков пробела сводятся к одному.

Примеры исключения излишних знаков пробела:

а) S → M → D → L → → E → D → Z → W → → 101200
SMDL → EDZW → 101200

б) 12 → 3 → 4 → 5 → → 6 → 78 → 9 → 8 → → 76 → 54 → 3 → → 2 → → 1 → → 2 → → 3
12 345 → 67 898 → 76 543 → 2 → 1 → 2 → 3

(здесь символом → обозначен знак пробела).

¹ Шестизначный код для представления в ЭВМ цифр, букв и других знаков. (BCD — Binary Coded Decimals).

4. Сообщения для запоминания разбиваются на слова, а слова группируются в строки (зоны). Слово — это содержимое одной ячейки внутренней памяти машины. При 48-разрядных ячейках одно слово включает восемь знаков. Количество слов в строке (зоне) может быть различным. Знак возврата каретки воспринимается как окончание строки. Таким образом, каждая строка текста телеграммы запоминается в памяти машины в виде отдельной строки (последовательности ячеек — слов). В том случае, если более чем 72 знака шестизначного кода следуют один за другим без знака возврата каретки, знак окончания строки вырабатывается автоматически после 72-го знака.

5. Каждой строке приписывается ее порядковый номер. Он запоминается в первом слове строки.

6. Каждая строка дополняется необходимым числом знаков пробела, с тем чтобы в строке имелось 10 полных слов (10 ячеек памяти). При этом среди десяти слов строки должно быть: одно слово с номером строки и девять слов, содержащих либо информацию, либо знаки пробела.

7. В том случае, если в сообщении одна за другой следует несколько пустых строк, то число их уменьшается до одной. При этом число пустых строк запоминается.

§ 2. Перевод информации из первоначальной формы в рабочую

В процессе обработки телеграфные сообщения последовательно принимают различные формы. В табл. 9 приложения в качестве примера приведены различные формы одного и того же сообщения.

В результате выполнения действий, рассмотренных в предыдущем параграфе, сообщения приводятся к форме, близкой к исходной, а именно: каждая строка текста записана (на магнитную ленту) в виде одной зоны, каждая группа в телеграмме отделена от соседних только одним знаком пробела, каждая строка текста отделена от соседних значащих строк не более чем одной пустой строчкой.

Для дальнейшей обработки целесообразно несколько перегруппировать сообщения, дополнив их некоторой дополнительной информацией служебного характера. В этой рабочей форме информация имеет следующий вид:

1) Каждая строка текста телеграммы запоминается группой из 21 слова (ячейки памяти).

2) В каждом слове (вмещающем восемь шестизначных знаков) первые шесть знаков отводятся для значащей информации, а два последних — для служебной. Структура ячейки слова представлена на рис. 3.

3) Первое слово в строке отводится для хранения порядкового номера строки. Следующие 15 слов отводятся для запоминания значащей информации, 16-е слово — для запоминания специальных характеристик данной строки. Наконец, слова с 17-го по 21-е предназначены для накопления некоторых дополнительных сведений, возникающих в ходе обработки.



Рис. 3. Схема размещения информации в ячейке памяти.

В случае если некоторая группа в тексте телеграммы содержит менее семи знаков, то эти знаки размещаются в слове в пределах первых шести позиций (шестиразрядных), причем позиции, оказавшиеся не занятыми знаками, заполняются кодом пробела. Если группа содержит более шести знаков, то для хранения седьмого и последующих знаков отводятся шесть первых позиций следующей ячейки (или нескольких последующих ячеек). Пример размещения знаков в последовательных ячейках памяти приведен на рис. 4.

Для облегчения дальнейшей обработки в седьмой позиции слова запоминается число цифровых символов данной группы (включая и знаки). В восьмой позиции запоминается общее число

знаков данной группы. В том случае, если группа состоит более чем из шести знаков и, следовательно, занимает более чем одну ячейку памяти, сведения о числе знаков запоминаются в первом из слов, отвечающих данной группе, тогда как в последующих ячейках этой группы запоминается знак пробела в седьмой позиции и цифра нуль в восьмой. Эти признаки служат указателем того, что в данной ячейке размещено продолжение группы. В приведенном на рис. 4 примере размещения знаков в словах в соответствующих позициях указаны сведения о числе знаков. При этом, если в первых шести пози-

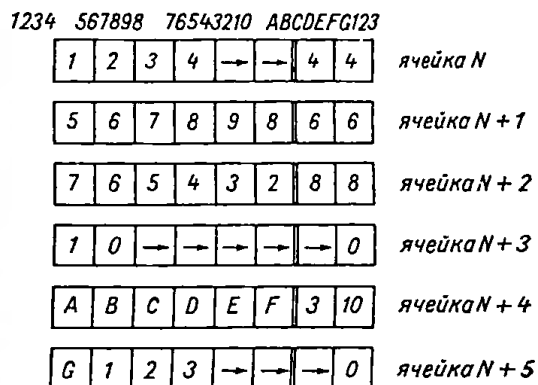


Рис. 4. Пример размещения знаков в последовательных ячейках памяти.

циях каждого слова информация хранится в шестиразрядном BCD-коде, то в седьмой и восьмой позициях — в двоичной системе. Те же сведения о числе знаков, но уже по строке в целом, равно как и сведения о числе предшествующих пустых строк, запоминаются в двоичной системе в 16-м слове каждой строки.

Приведем пример последовательного преобразования одного сообщения из исходной формы в рабочую.

А. Первоначальная форма сообщения на бумажной перфоленте.

(Три пустые строки)

SMDL EDZW 201200

(Одна пустая строка)

99910

(Одна пустая строка)

384 19904 50050 16606 00901 56806

866 03605 35850 15803 00900 53809

Б. Первоначальная форма сообщения, записанного на магнитную ленту.

00001 SMDL EDZW 201200

00002 99910

00003 384 19904 50050 16606 00901 56806

00004 866 03605 35850 15803 00900 53809

Пояснения.

1. Каждая строка (зона на ленте) содержит 80 знаков (десять слов).

2. Пробел между группами, изображенными на приведенной схеме, запоминается как знак пробела.

3. Числа 00001, 00002, ... обозначают порядковый номер строки.

В. Рабочая форма. В приводимой ниже записи каждый знак шестиразрядного кода изображен парой всемеричных цифр (см. табл. 8 приложения).

1-я строка, 1-е слово,	2-е слово	3-е слово
0000000001606060	6244244360600004	2524716660600004
0200010200000606	6060606060606060	6060606060606060
6060606060606060	6060606060606060	6060606060606060
6060606060606060	6060606060606060	6060606060606060
6060606060606060	6060606060606060	6060606060606060
0030000600000016	6060606060606060	6060606060606060
6060606060606060	6060606060606060	6060606060606060
2-я строка, 1-е слово	2-е слово	3-е слово
0000000002606060	1111110100600505	6060606060606060

Пояснения.

1. Первое и второе слова в первой строке соответственно включают следующую информацию:

0000000001606060 = 00001 → → → (номер строки)

6244244360600004 = SMDL → → 04 (группа SMDL и число знаков)

Здесь, например, S=62, M=44, D=24, → =60 и т. д. (см. табл. 8 приложения).

2. Шестнадцатое слово первой строки несет следующую информацию о данной строке в целом:

003 00006 000 00016

003 — число предшествующих пустых строчек — три;

00006 — число цифровых знаков в данной строке — шесть знаков;

00016 — общее число знаков (букв и цифр) в данной строке — четырнадцать.

Каждые 10 строк текста в рабочей форме (210 слов) образуют одну зону стандартной длины. Если вследствие окончания сообщений последняя зона не может быть заполнена до конца полезной информацией, то она дополняется знаками пробела. Строка, следующая за последним из сообщений, содержит специальный признак, который означает конец информации. Он воспринимается программой как указатель того, что дальше никаких сообщений не последует.

ГЛАВА 2

ПОДГОТОВКА СООБЩЕНИЙ К РАСШИФРОВКЕ

§ 1. Структура бюллетеней

Метеорологическая информация, распространяемая по каналам телесвязи, имеет единую структуру и единый код, согласованные в международном масштабе¹.

Каждая отдельная сводка (бюллетень) включает следующие четыре части: начальную строчку (сигналы начала сводки), заглавную строчку (сокращенный заголовок строчки), текст сводки, сигналы конца сводки.

Начальная строчка содержит последовательность из четырех сигналов

ЗЦЗЦ

или на буквопечатающих аппаратах с латинским алфавитом

ZCZC

Заголовок сводки имеет следующую структуру:

TTAA(i) CCCC (k) YYGGgg

Здесь

ТТ — двухбуквенный указатель вида сводки (обозначения указателей вида сводок см. в табл. 1—3 приложения);

АА — двухбуквенный указатель географического местонахождения источника информации (см. табл. 4 и 5 приложения);

¹ Структура сообщений и коды описаны в официальном издании Всемирной метеорологической организации (ВМО): World Meteorological Organization. Weather Reports, vol. B and C. WMO Publ., № 9, TP4, Geneva, 1964. Коды отдельных видов сообщений приведены в специальных изданиях Главного управления гидрометеорологической службы при СМ СССР. Например, «Код для составления ежедневных метеорологических телеграмм на сухопутных станциях КН-01». Гидрометеониздат, Л., 1954; «Код для передачи данных вертикального зондирования атмосферы КН-04». Гидрометеониздат, Л., 1954, и др. (Прим. перев.).

- (i) — номер списка станций (листа) в бюллетене одного и того же района (включается факультативно);
- CCCC — четырехбуквенный позывной центра телесвязи, передающего сводку;
- (k) — указатель системы обмена, к которой относится содержание данной сводки:
 - N — признак сообщений, включенных в обмен по северному полушарию;
 - A — то же для обмена между Европой и Америкой;
 - S — то же для обмена по южному полушарию;
- YYGGgg — шестизначная группа для обозначения даты и времени наблюдений:
 - YY — день месяца;
 - GGgg — время наблюдения (в часах и минутах) по Гринвичу.

Текст сводки может содержать сообщения только одной и той же формы кода и за один и тот же срок наблюдения. Первая строка текста сводки состоит из условного названия кодовой формы, например, **СИНОП** (**SYNOR**), **КЛИМАТ** и др. Каждое отдельное сообщение (телеграмма) внутри сводки должно начинаться с новой строки.

Сигнал конца сводки состоит из последовательности букв:

НННН или NNNN

§ 2. Синоптический и аэрологический коды

Существующие программы обработки информации в основном предназначены для расшифровки синоптических (код **СИНОП**) и аэрологических (код **ТЕМП**) сводок. Ниже приводятся схемы этих кодов и краткое описание символов кода.

1. Код СИНОП для сухопутных станций

Схема кода (структура сообщения):

СИНОП

(II)iii Nddff VVwwW PPPTT $N_h C_L h C_M C_H$ $T_d T_{dapp}$

(Далее следуют еще четыре группы, раскодирование которых в рассматриваемой программе не предусмотрено. Эти группы имеют в качестве первого знака назначенную цифру 7, 8, 9 и 2 соответственно.)

Значение отдельных символов кода:

(II) — номер района;

iii — номер станции в пределах района;

- N — часть небосвода, покрытая облаками (общее количество облаков);
 dd — направление ветра;
 ff — скорость ветра;
 VV — горизонтальная видимость;
 ww — погода во время наблюдений;
 W — погода между сроками наблюдений;
 PPP — давление воздуха (в десятых долях миллибара);
 TT — температура воздуха (в градусах Цельсия);
 N_h — часть небосвода, покрытая облаками нижнего (и среднего) яруса;
 C_L — характеристика облаков нижнего яруса;
 h — высота нижней границы облаков;
 C_M — характеристика облаков среднего яруса;
 C_H — характеристика облаков верхнего яруса;
 T_dT_d — температура точки росы;
 a — характеристика барической тенденции;
 pp — величина барической тенденции (в десятых долях миллибара).

2. Синоптический код для судовых станций

SHIP¹ YQL_aL_aL_a L_oL_oL_oGG Nddff VVwwW PPPTT N_hC_LhC_MC_H
 D_sV_sapp (OT_sT_sT_dT_d)

(Последующие группы данной программой не обрабатываются.)

Значение отдельных символов кода:

- Y — день недели (по Гринвичу) в момент наблюдения;
 Q — номер октанта земного шара, в котором находится корабль в момент наблюдения;
 L_aL_aL_a — географическая широта корабля (в десятых долях градуса) в момент наблюдения;
 L_oL_oL_o — географическая долгота корабля (в десятых долях градуса; сотни градусов опускаются);
 GG — время наблюдения в часах (по Гринвичу);
 D_s — направление движения корабля в момент наблюдения;
 V_s — скорость корабля;
 0 — отличительная цифра;
 T_sT_s — разность между температурой воды и температурой воздуха.

Остальные символы указаны выше в п. 1.

¹ На месте слова SHIP (корабль) здесь могут быть позывные корабля, сообщающего наблюдения.

3. Код TEMP (ТЕМП) для данных вертикального температурного зондирования атмосферы

TEMP (сухопутные станции)

часть А (сведения до высоты уровня 100 мБ)

$M_i M_i$ $IIIII$ $(99P_o P_o P_o \quad T_o T_o T_{d_o} T_{d_o} T_{x_o})$

или

TEMP SHIP (корабельные станции)

часть А (сведения до высоты уровня 100 мБ)

$M_i M_i$ $YQL_a L_a L_a \quad L_o L_o L_o GG$ $(99P_o P_o P_o \quad T_o T_o T_{d_o} T_{d_o} T_{x_o})$

Продолжение телеграммы, общее для обоих кодов:

GG
 00 $h_i h_i h_i \quad (T_i T_i T_{d_i} T_{d_i} T_{x_i}) \quad (0d_i d_i f_i f_i)$

$P_n P_n h_n h_n h_n \quad T_n T_n T_{d_n} T_{d_n} T_{x_n} \quad 0d_n d_n f_n f_n$ и т. д. ($n = 2, 3, \dots$)

(Телеграммы судовых станций содержат также группу местонахождения с номером квадрата Марсдена: $MMMU_{L_a} U_{L_o}$).

11122 $H_i I_i P_i P_i P_i \quad T_p T_p T_{d_p} T_{d_p} S_i \quad (Z_b d_b d_b f_f)$

или

11144 $S_i P_i P_i T_p T_p$

11100 $j_n H_m H_m H_m H_m \quad d_a d_a f_f f_f$

часть В (сведения об осевых точках ¹⁾)

55555 $00P_o P_o P_o \quad T_o T_o T_{d_o} T_{d_o} T_{x_o} \quad 0d_o d_o f_o f_o$

$h_n h_n P_n P_n P_n \quad T_n T_n T_{d_n} T_{d_n} T_{x_n} \quad 0d_n d_n f_n f_n$

66666 $P_n P_n P_n T_n T_n \quad (0d_n d_n f_n f_n)$

77777 $h_n h_n P_n P_n P_n \quad 0d_n d_n f_n f_n$

88888 (то же, что и при 55555)

22222 22233 $ChhHH$ 22244 $w_p hhhHH$ (визуальные наблюдения с самолета)

33333 (в соответствии с региональными кодами; в частности — сведения о толщине относительной топографии)

44444 $P_n P_n h_n h_n h_n \quad 0d_n d_n f_n f_n$

01010 $N_h C_L h C_M C_H$

¹ Раскодирование этих данных здесь не рассматривается.

ЧАСТЬ С (СВЕДЕНИЯ ВЫШЕ УРОВНЯ 100 МБ)

 $M_i M_i G G$ IIII — для сухопутных станций

 $M_i M_i Y Q L_a L_a L_a L_o L_o L_o G G$ — для судовых станций

Продолжение, общее для обоих кодов:

 $P_1 P_1 h_1 h_1 h_1 T_1 T_1 T_{d1} T_{d1} T_{x1} (0d_1 d_1 f_1 f_1)$
 $P_n P_n h_n h_n h_n T_n T_n T_{dn} T_{dn} T_{xn} (0d_n d_n f_n f_n)$ и т. д. ($n = 2, 3, \dots$)

(Телеграммы ТЕМП судовых станций включают также группу местонахождения корабля с номером квадрата Марсдена).

 $11122 P_t H_t P_t P_t P_t T_p T_p T_{dp} T_{dp} S_t (Z_b d_b d_b f_f)$

или

11144	$S_t P_t P_t T_p T_p$		
11100	$j_n H_m H_m H_m H_m$	$d_a d_a f_f f_f$	
55555			
66666			
77777			
88888			
22222			
33333			
44444			

Значения символов кода:

 $\left. \begin{matrix} P_o P_o P_o \\ P P P \end{matrix} \right\}$ — давление (соответственно у поверхности земли или на высоте особой точки) в целых миллибарах;

 $\left. \begin{matrix} T_o T_o \\ T T \end{matrix} \right\}$ — температура воздуха у поверхности земли или соответственно на высотах (на изобарических поверхностях и в особых точках) в градусах Цельсия;

 $\left. \begin{matrix} T_{d_o} T_{d_o} \\ T_d T_d \end{matrix} \right\}$ — температура точки росы у поверхности земли или на высотах;

 $\left. \begin{matrix} T_{x_o} \\ T_x \end{matrix} \right\}$ — сведения о десятых долях градуса;

 $\left. \begin{matrix} d_o d_o \\ d d \end{matrix} \right\}$ — направление ветра у земли и на высотах;

 $\left. \begin{matrix} f_o f_o \\ f f \end{matrix} \right\}$ — скорость ветра у земли и на высотах;

- hhh — высоты (над уровнем моря) главных изобарических поверхностей в геопотенциальных метрах или в декаметрах;
 PP — давление на главных изобарических поверхностях в десятках миллибар (отличительные цифры изобарических поверхностей);
 H_iH_i — высота тропопаузы в сотнях геопотенциальных метров;
 P_iP_iP_i — давление на уровне тропопаузы в миллибарах;
 T_pT_p — температура на уровне тропопаузы;
 T_dpT_dp — температура точки росы на уровне тропопаузы;
 S_t — характеристика вертикального градиента температуры вблизи тропопаузы;
 Z_b — характеристика сдвига ветра у тропопаузы;
 d_bd_b — направление ветра на высоте тропопаузы;
 11100 — отличительная группа сведений о максимальной скорости ветра (эти сведения включаются при скорости ветра более 30 м/сек.);
 j_n — толщина слоя, в пределах которого определен максимум скорости ветра и характеристика максимума (по специальной таблице);
 H_mH_mH_mH_m — высота уровня (в десятках метров), где отмечен максимум скорости ветра (превосходящий 30 м/сек.);
 d_ad_afff — направление и скорость максимального ветра выше уровня 500 мб (при скорости более 30 м/сек.);
 M_iM_i — указатель типа кода данного аэрологического сообщения (см. табл. 6 приложения);
 MMM — номер десятиградусного квадрата Марсдена, в котором находится корабль в момент наблюдения;
 U_{L_a} — число единиц градусов широты;
 U_{L_o} — число единиц градусов долготы;
 h_nh_n — высота изобарической поверхности в геопотенциальных декаметрах;
 пп — порядковый номер очередной особой точки (в части В) 00, 11, 22 и т. д.;
 22222 — отличительная группа сведений о визуальных наблюдениях с самолета, включая данные об облачности (22233), осадках (22244), болтанке (22255), обледенении (22266), о слоях тумана и мглы (22277), о числе облачных слоев (22288).

Данные об облачности (после 22233):

С — форма облака, пробиваемого самолетом;

hh — высота нижней границы облаков в сотнях метров над уровнем моря;

HH — то же для верхней границы облаков.

Данные об осадках (после 22244):

wp — вид осадков, выпадающих в зоне полета (по особой таблице);

hh, HH — соответственно высота нижней и верхней границ зоны осадков.

4. Код PILOT (ПИЛОТ) для шаропилотных наблюдений PILOT (сухопутные станции)

Часть А M_1M_1GG IIIII

или

PILOT SHIP (корабельные станции)

Часть А $M_1M_1 YQL_aL_aL_a L_oL_oL_oGG$

Продолжение телеграммы, общее для обоих кодов:

44444	8ddff	7ddff	5ddff	4ddff
	3ddff	2ddff	ddff	1ddff

(Телеграммы судовых станций содержат также группу с номером квадрата Марсдена: $MMMU_{L_a}U_{L_o}$).

Часть В $11100 j_nH_mH_mH_mH_m d_a d_a f f f$
 M_1M_1 IIIII

GGi _h Df _a	Hddff	1ddff		и т. д.
9999n	Hddff			
88888	1d ₁ d ₁ f ₁ f ₁	2d ₁ d ₁ f ₁ f ₁		
55555	H ₂ H ₂ H ₂ 11 ₂ Z			

Часть С	M_1M_1GG	IIIII			
44444	7ddff	5ddff	3ddff	2ddff	1ddff
11100	$j_nH_mH_mH_mH_m$	$d_a d_a f f f$			
GGi _h /i	9999n	Hddff	Hddff		
88888	1d ₁ d ₁ f ₁ f ₁	2d ₁ d ₁ f ₁ f ₁			
55555	H ₂ H ₂ H ₂ H ₂ Z				

Значение символов кода:

i_n — указатель числа последующих групп, в которых сообщаются сведения о скорости и направлении ветра;

D — направление ветра у земли (номер румба);

f_a — скорость ветра у земли (в десятках узлов);

- Н — указатель высоты, для которой сообщаются направление и скорость ветра (кодируется по специальной таблице);
- 9999п — п есть число трехкилометровых интервалов, на которое должны быть увеличены значения высот Н в последующих группах;
- 44444 — отличительная группа, указывающая, что далее следуют сведения о направлении и скорости ветра на уровнях, приближенно совпадающих с главными изобарическими поверхностями: 850, 700, 500, 400, 300, 200, 150 и 100 мб. Эти поверхности указаны цифрами 8, 7, 5 и т. д.;
- 88888 — отличительная группа, указывающая, что далее следуют сведения о термическом ветре;
- 1, 2, 3 — отличительные цифры, указывающие, что далее следуют сведения о термическом ветре в различных слоях над уровнем моря;
- $d_t d_t f_t f_t$ — направление и скорость термического ветра (кодируется так же, как и $ddff$);
- 55555 — отличительная группа сведений об особых точках профиля ветра;
- $H_z H_z H_z H_z$ — высота над уровнем моря особой точки вертикального профиля ветра в десятках метров;
- Z — характеристика особой точки (по специальной таблице).
- Остальные символы кода были объяснены выше.

§ 3. Каталог станций

Местоположение каждой станции, производящей наблюдения, характеризуется индексом (для сухопутных станций) или специальной группой (для подвижных станций). В последнем случае эта группа содержит непосредственно географические координаты.

В случае сухопутных станций, однако, номер района и индекс не определяют непосредственно местоположение станций: они нуждаются еще в преобразовании. Поэтому необходим каталог станций (словарь), позволяющий по индексу станции установить ее географические координаты. Словарь является частью программы обработки информации и хранится в памяти машины.

В каталоге отведено по две ячейки (или два слова) для каждой станции. Они содержат следующие данные:

1. Номер района.
2. Номер станции.
3. Географическая широта и долгота.

4а. Указатель того, в каких единицах измеряется скорость ветра на данной станции.

4б. Данные о высоте станции и об уровне, к которому приводится наблюдаемое давление (уровень моря, уровень 850 мб и др.).

4в. Принадлежность данных станции к той или иной системе обмена (например, обмен по северному полушарию).

4г. Тип наблюдений на станции (например, только синоптические наблюдения, радиозондирование, шаропилотное зондирование).

4д. Следует ли по данным радиозондирования строить аэрологическую диаграмму?

4е. Наносить ли данные по этой станции на карты погоды и др. сведения?

Информация пункта 4 бывает полезна при последующей обработке.

С помощью каталога можно определить местоположение источника каждого синоптического или аэрологического сообщения. Если же станция не может быть найдена в каталоге, то это означает, что либо искажен индекс, либо это новая станция, и тогда каталог должен быть дополнен сведениями об этой станции.

Число станций, сообщающих сведения о погоде, составляет несколько тысяч, так что отождествление каждого сообщения путем простого перебора словаря требует слишком много времени. Поэтому применяется следующая процедура поиска эквивалента в словаре, сводящая это время к минимуму. Все станции в словаре располагаются в порядке возрастания индексов. При поиске эквивалента индекс проверяемой станции сравнивается с индексом станции, находящейся в середине словаря. Это сравнение позволяет установить, к которой из двух половин словаря относится данная станция. Затем таким же делением пополам соответствующей половины словаря устанавливается, к какой части этой половины относится станция, и т. д.

§ 4. Проверка сведений о местоположении подвижных станций

Подвижные станции — корабли — сообщают свое местоположение непосредственно географическими координатами, и тогда описанная в § 3 процедура поиска в словаре не нужна. Тем не менее корабли погоды также включены в словарь, с тем чтобы их сведения обрабатывались в соответствии с упомянутыми выше указателями, содержащимися в словаре.

Проверку данных о местоположении подвижной станции (корабля) разумнее всего начать с установления того, действительно ли сообщаемые кораблем координаты принадлежат

пункту, находящемуся на море, а не на суше. Для такой проверки используется находящаяся в памяти машины специальная таблица из 720 ячеек, в которых каждый из 48 разрядов отвечает определенному участку поверхности земного шара. В зависимости от того, приходится ли этот участок поверхности на сушу или на море, в соответствующем разряде хранится единица или нуль. Ячейки таблицы распределены следующим образом. Поверхность Земли разбивается на 360 полос, каждая из которых ограничена двумя соседними меридианами, разделенными одним градусом долготы. Для каждой полосы отводится по две последовательные ячейки таблицы, причем разряды этих ячеек (от 47-го до нулевого) отнесены к одноградусным квадратам внутри полосы, как указано в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Распределение разрядов ячеек таблицы по одноградусным квадратам

Номер ячейки	Номер разряда				
	47	46	45	...	0
Первая . .	90° с. ш.	89—90°	88—89°	...	43—44° с. ш.
Вторая . .	42—43°	41—42°	40—41°	...	4—5° ю. ш.

С помощью таблицы из 720 слов легко обнаруживаются те корабли, которые ошибочно сообщили координаты, оказавшиеся принадлежащими поверхности суши. Такие сообщения из последующей обработки исключаются.

Другую возможность контроля данных о местоположении корабля, сообщаемых аэрологических сведениях, доставляет группа с номером десятиградусного квадрата Марсдена $МММУ_{L_0}U_{L_0}$, содержащая избыточную информацию о его местонахождении. В том случае, если информация группы координат корабля не согласуется с рассматриваемой группой, сообщение снабжается специальной отметкой, которая предупреждает последующие части программы о том, что сведения о местоположении корабля сомнительны.

ГЛАВА 3

РАСШИФРОВКА ИНФОРМАЦИИ

§ 1. Общие замечания

Все поступающие и обрабатываемые данные наблюдений целесообразно отнести к некоторым основным срокам. Такими являются сроки 0000Z и 1200Z (время по Гринвичу). Сведения об основных сроках сообщаются машине каждый день

вводом специальной перфокарты срока, которая содержит следующие данные: год, месяц, число, срок (00Z или 12Z), предыдущее число, день недели. Тогда срок каждой отдельной сводки может быть выражен через соответствующий основной срок. Например, сведения за 03Z, включенные в массив данных основного срока 00Z, отмечаются указателем времени +3; сведения за 06Z при основном сроке 00Z отмечаются временем +6, а те же сведения, включенные в массив за 12Z, будут иметь указатель —6. Данные за 18Z в массиве за срок 00Z следующих суток имеют указатель —6 и т. д.

Как отмечалось, каждый бюллетень начинается с заголовка. Поэтому программа расшифровки (рис. 5) пытается прежде всего обнаружить во введенной информации первый правильный заголовок сводки и затем расшифровать его. Эту часть программы мы будем называть тестом заголовка (см. § 2).

Пусть, например, заголовок указывает на то, что далее следует сводка **СИНОП**. Тогда программа пытается расшифровывать последующие строки по подпрограмме раскодирования синоптических телеграмм (§ 3), и так до того места, пока это возможно для указанной подпрограммы. Если же данная подпрограмма «отказывается» принять уже следующую за заголовком строку, то снова включается подпрограмма теста заголовка, которая начиная с этой строки продолжает поиск первого правильного заголовка. При обнаружении такового управление передается на подпрограмму расшифровки сводок соответствующего вида. Таким образом, программа расшифровки не относится ко всей сводке в целом, а обрабатывает по отдельности каждую ее строчку.

Если программа обнаруживает сводку некоторого типа, то признак кода этой сводки запоминается и хранится в памяти до тех пор, пока расшифровываемые строчки поддаются интерпретации. С того места, где они перестают расшифровываться, программа возвращается к тесту заголовка. В частности, если будет обнаружен признак сводки с данными анализа или прогноза, т. е. сводки, не обрабатываемой данной программой (бесполезной сводки), то будет продолжен поиск заголовка сводки нужного вида.

Расшифрованные полезные (нужные) сообщения далее поступают на сортировку (см. гл. 5).

Описываемая программа не предусматривает в ходе расшифровки исправление сообщений соответственно последующим повторным сообщениям, снабженным признаками типа COR, RPT, REP и др. Эти последние сообщения обрабатываются наряду с остальными по общей программе с той разницей, что они снабжаются специальным признаком, который укажет программе сортировки, что соответствующее неправильное сообщение должно быть заменено исправленным сообщением.

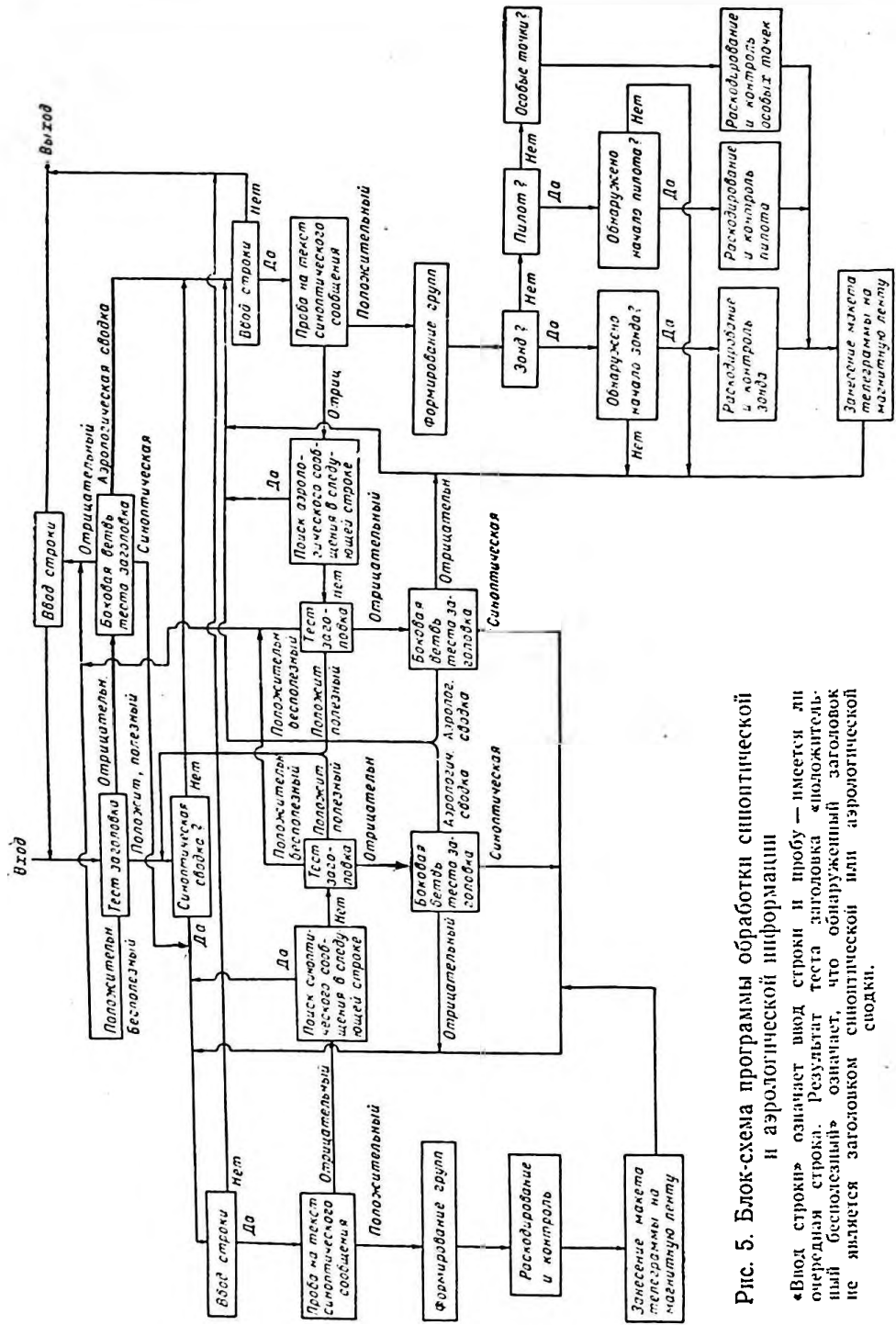


Рис. 5. Блок-схема программы обработки синоптической и аэрологической информации

«Ввод строки» означает ввод строки и пробел — имеется ли очередная строка. Результат теста заголовка «полезный/бесполезный» означает, что обнаруженный заголовок не является заголовком синтаксической или аэрологической строки.

§ 2. Тест заголовка

Как уже было описано выше (гл. 2, § 1) заголовок сводки содержит сведения о типе и географическом районе сообщений, о центре передачи сведений, о времени наблюдений и др.

Например, заголовок переданной из Оффенбаха синоптической сводки с данными сухопутных станций за основной срок имеет вид

SMDL EDZW 200600¹

Здесь SM — признак синоптической сводки за основной срок, DL — указатель географического района места наблюдений, EDZW — позывные метеорологического центра Оффенбах, 200600 — указатель срока наблюдения: 20-е число, 06 час 00 мин. по Гринвичу. Напомним кодовую форму заголовка:

TTAA CCCC YYGGgg

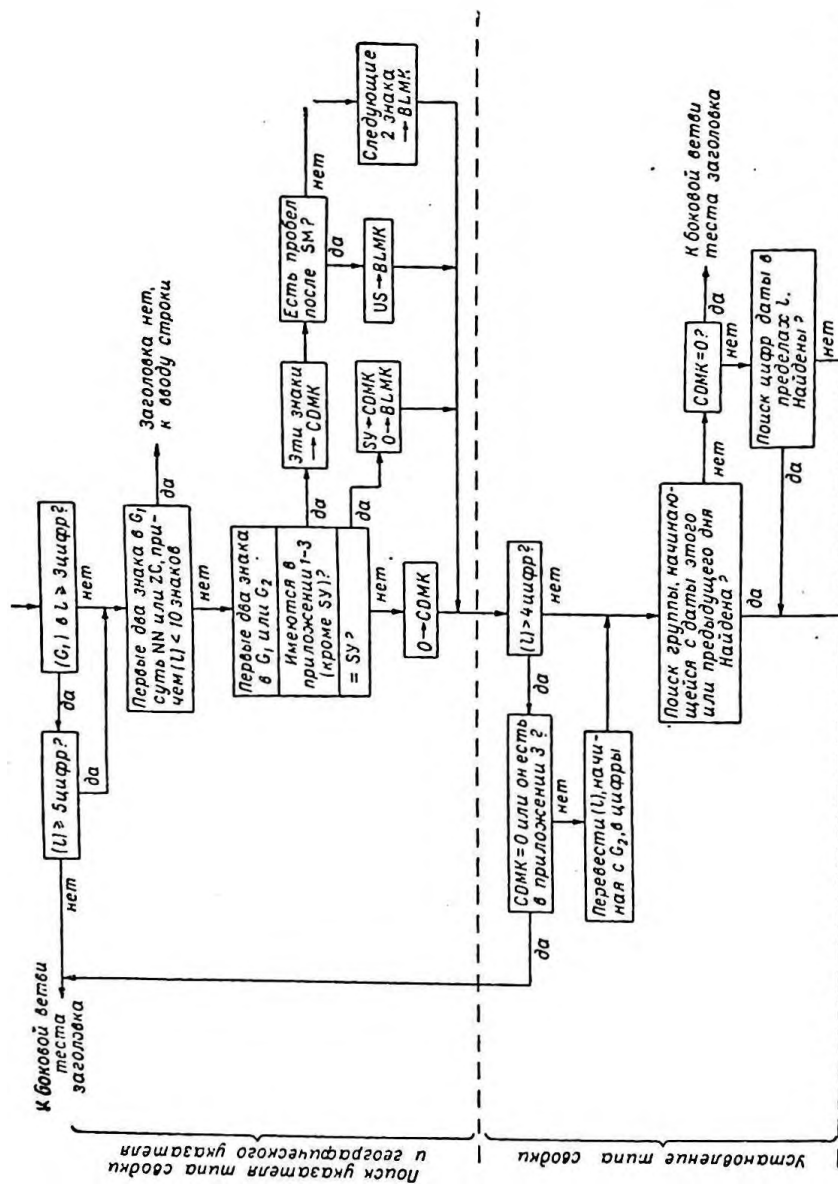
В программе обработки (см. блок-схему на рис. 6) учитываются только первая и последняя группы данного заголовка.

Прежде чем приступить к интерпретации некоторой строки в качестве возможного заголовка, программа отвергает (исключает из рассмотрения) строки, заведомо не являющиеся заголовком. В частности, к ним относятся строки, начинающиеся с букв NN или ZC (соответственно НН или ЗЦ в русском алфавите), т. е. строки с признаками конца или начала сводки (см. гл. 2, § 1). Не могут быть заголовком также слишком короткие строки. В том случае, если обследуемая строка содержит несколько цифр, а число букв в ней меньше восьми, эта строка может принадлежать тексту сводки. Такая строка далее обследуется специальным ответвлением программы теста заголовка, которое будет рассмотрено ниже (рис. 7).

После того как будут отвергнуты строки, заведомо не являющиеся заголовком, в строке, принимаемой в качестве возможного заголовка, проверяются на совпадение с одним из возможных признаков типа сводки (см. табл. 1—3 приложения) первые две буквы первой (или второй) группы. Если такое соответствие имеет место, то эти две буквы признака сводки запоминаются в специальной информационной ячейке программы, называемой здесь признаком кода (*Codemark* или сокращенно *CDMK*). Следующие две буквы извлекаются в другую информационную ячейку — признак географического района или блока (*Block-mark*, *BLMK*).

¹ При печати на телетайпе с русским алфавитом эта строка будет отпечатана в виде СМДЛ ЕДЗВ 200600.

Однако такое различие не имеет никакого значения для программы автоматической обработки, имеющей дело не с буквами на бумаге, а с комбинациями пробиток на перфоленте, которые для обоих текстов тождественны. (Прим. перев.).



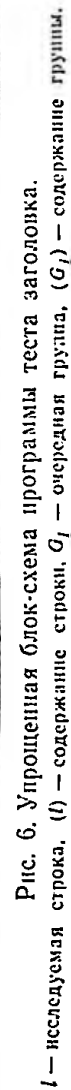


Рис. 6. Упрощенная блок-схема программы теста заголовка.

В последующем сведения о дате и сроке наблюдений поступят в ячейку даты и срока (*DTTM*). Все эти сведения используются при дальнейшей обработке сообщений.

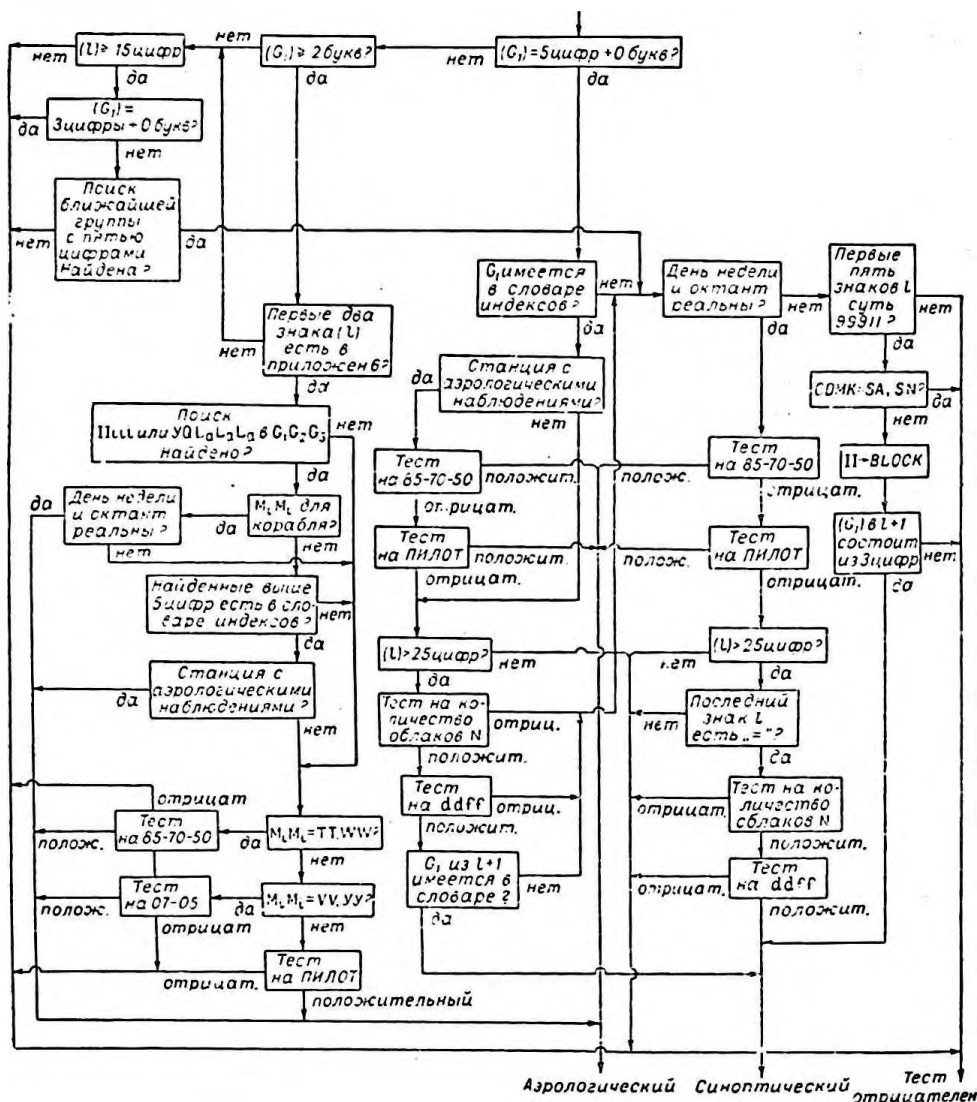


Рис. 7. Упрощенная блок-схема боковой ветви теста заголовка.

К этой программе имеются обращения из теста заголовка и тестов на синонимическую сводку. При обращении указывается та строка, для которой этот тест должен быть применен

По особой программе обрабатываются строки, в которых встречаются буквы *SM* в сочетании со знаком *. Они бывают в сводках из Америки, не содержащих географический указа-

тель. В таком случае в ячейку *BLMK* засылается географический указатель *US*.

Если в начале сводки встречается пара букв *SY*, что бывает, если некоторая строка начинается указателем типа сводки в виде слова *SYNOR*, а специальная строка-заголовок отсутствует, то в таком случае в ячейку *CDMK* засылаются буквы *SY* в качестве вспомогательного признака синоптических данных, а в ячейку *BLMK* посылается нуль.

В тех случаях, когда признаку типа сводки не находится эквивалент в табл. 1—3 приложения, в ячейку *CDMK* посылается нуль.

Исключаются из рассмотрения также строки, в которых имеется менее четырех цифр, а также такие, в которых признак типа сводки относится к сводкам, не обрабатываемым данной программой.

В том случае, когда после указанных проб в *CDMK* оказывается признак сводки нужного типа, для обеспечения правильности дальнейшей расшифровки заголовка, в частности для извлечения даты и срока наблюдения, производится «принудительный» перевод последующих букв в цифры. Это необходимо в связи с тем, что по той или иной причине может не произойти перевод на цифровой регистр перед соответствующей группой заголовка и тогда группа *YYGGgg* может быть потеряна. В рассматриваемом примере последняя группа строки *SMDL EDZW WPPYPP* при таком принудительном переводе будет превращена в группу *200600*.

После этого в группах, следующих за *TTAA*, отыскивается пара цифр, отвечающих дате текущего (или предыдущего) дня.¹ Если такой пары не имеется и в ячейке *CDMK* находится нуль, то включается ответвление программы теста заголовка, которое обследует, не принадлежит ли строка тексту сводки. Если же в *CDMK* находится нужный признак, то пара цифр, отвечающих дате, разыскивается где-либо в другом месте в пределах данной строки. Так, например, дата будет обнаружена и в том случае, если рассматриваемая строка имеет вид:

SMDL EDZW200600

Если такая проба на дату оказывается безрезультатной, то тогда производится поиск цифр, указывающих срок наблюдения. Именно, при наличии в *CDMK* признака *S1* (синоптическая сводка за промежуточный срок) разыскиваются пары цифр, отвечающих срокам *03* и *09* при основном сроке *00Z* (или соответственно *15* и *21* при основном сроке *12Z*). Если же в *CDMK* будет признак *SY*, то будет делаться проба на *00*, *03*,

¹ Даты текущего и предыдущего дней сообщаются машине специальной перфокартой срока (см. § 1).

06, 09 (при основном сроке 00Z). Наконец, при других признаках в *CDMK* проводится проба на 00 и 06 (при основном сроке 00Z). В частности, последняя проба даст положительный результат в случае заголовка

SMDL EDZWWP0600

В том случае, если и эта проба (проба на срок наблюдений) оказывается безуспешной, а предыдущий заголовок тоже не позволяет определить время наблюдений, то в ячейку даты и срока (*DTTM*) засылается 0000, что означает: «Время наблюдений неизвестно».

Если в последующих группах будет обнаружена дата текущего или предыдущего дня и если знаки, следующие за датой, являются цифрами, то программа возвращается к поиску срока наблюдений GG среди этих цифр. А именно, при наличии в *CDMK* признаков SI, SM, SY или нуля проводится проба на семь разных сроков, равных -12 , -6 , -3 , $+0$, $+3$, $+6$, $+9$ относительно основного срока, сообщенного в перфокарте даты и срока; при наличии других признаков в *CDMK* обследуются четыре различных срока: -12 , -6 , $+0$, $+6$ относительно основного срока. При положительном результате проб в ячейку *DTTM* засылаются сведения о дате и сроке наблюдений YYGG. При этом в случае, если в перфокарте даты и срока указан срок 00Z, то при сроке GG, лежащем между 12 и 24, в ячейку *DTTM* будет заслана дата предыдущего (по сравнению с сообщенным в YY) дня. Так будет исправлена дата, как не согласующаяся с временем поступления данных и сроком наблюдений GG.

Например, пусть перфокарта даты и срока содержит следующие данные: 2000, а в строке заголовка группа времени есть 201800. Тогда в *DTTM* группа времени поступит в виде 191800.

Если знаки, следующие за датой, не отвечают какому-либо возможному сроку GG, тогда в качестве срока принимаются данные ячейки *DTTM* предыдущего заголовка. Если это время реально, то оно поступает в ячейку *DTTM* данного заголовка. В противном случае в *DTTM* засылается ноль.

На этой стадии работы теста заголовка производится исключение из рассмотрения такой строки, которая ранее была отождествлена как заголовок, но содержит указатель типа сводки, не представляющей интерес (например, AS, FU). Исключение такой строки ранее, сразу же при обнаружении подобных указателей типа сводки, нецелесообразно по следующей причине. Формальное совпадение двух букв строки с каким-нибудь указателем типа сводки не является достаточным признаком того, что данная строка есть действительно заголовок. Прежде чем истолковать строку как заголовок, последняя должна быть

отождествлена по большому числу признаков, для чего, как мы видели, требуется обращение к другим частям программы, в частности, чтобы установить, не принадлежит ли данная строка тексту сводки. И только после того, как анализируемая строка будет совершенно однозначно интерпретирована в качестве заголовка ненужной сводки, она исключается из текста.

Строки, в которых опознана группа даты и срока, но не установлен указатель типа сводки (т. е. $CDMK=0$), подвергаются дальнейшим пробам с целью обнаружения этого указателя в пределах данной строки. В частности, возможно слияние группы ТТАА с какой-либо предыдущей группой:

ABCDSMDL EDZW 200600

В этом случае путем соответствующего поиска с перебором признак сводки может быть обнаружен, и после извлечения он засылается в ячейку $CDMK$. Соответственно две буквы, следующие за признаком типа сводки, интерпретируются как географический указатель и засылаются в $BLMK$.

Если же тем не менее поиск признака типа сводки окажется безуспешным, то проверяется, не начинается ли одна из двух последующих строк текста со слова «SYNOP». Если так, то эта строка начинает обрабатываться программой расшифровки синоптических телеграмм. В противном случае эти две строки исследуются уже упоминавшимся ответвлением программы теста заголовка на принадлежность сообщению того или иного типа.

На этом заканчивается процедура опознавания заголовка. В результате этой процедуры исследуемая на заголовок строка может быть теперь либо исключена, если она не требует дальнейших проб, либо тест заголовка признает ее полезной и разыскивает в ней дальнейшую нужную информацию.

Если в строке встречается группа вида 999II, то номер района II извлекается в специальную ячейку $BLOCK$. Если вслед за группой 999II имеются еще пятизначные группы и одна из групп является номером станции, подтверждаемым словарем, то все группы, следующие за 999II, перемещаются в начало новой строки. Пусть, например, имеем

SMDL EDZW 200600 99910 384 19904 50050 16606 ...

Тогда все группы, начиная с индекса станции 384, будут смещены в начало строки:

384 19904 50050 16606 ...

Если в $CDMK$ находится один из признаков SI, SM (или *), SY, то следующая за заголовком строчка (или та же строчка, если было произведено ее разбиение на две) интерпретируется

как синоптическая телеграмма. Если же в *CDMK* находятся иные признаки, то следующая строчка интерпретируется как начало аэрологического сообщения того или иного типа.

Ответвление программы теста заголовка

Если исследуемая строка не содержит достаточно информации, позволяющей признать ее заголовком, программа переходит на боковую ветвь теста заголовка (рис. 7), которая пытается установить, не принадлежит ли эта строка синоптическому или аэрологическому сообщению.

Если первая группа данной строки содержит последовательность из пяти цифр, совпадающую с индексом какой-либо станции аэрологического зондирования, то включается тест на аэрологическое сообщение, который ставит следующие вопросы:

1. Начинается ли одна из групп данной (или следующей) строки с цифр 85, а одна из последующих групп — с цифр 70, или соответственно одна из групп начинается с 70, а одна из последующих — с 50 (так называемый «тест на 85—70—50»)?

2. Содержит ли одна из групп последовательность цифр 4444 (тест на шаропилотное сообщение)?

3. Содержит ли одна из групп обеих строк последовательность цифр 9999, причем данные о направлении ветра в обеих группах сведений о ветре на низших уровнях находятся в пределах между 00 до 36¹ (тест на шаропилотное сообщение)?

Если хотя бы на один из этих вопросов последует положительный ответ, программа переходит к расшифровке аэрологического сообщения, начинающейся с ряда проб (§ 4). В противном случае включается тест на синоптическую телеграмму, который прежде всего проверяет, содержит ли строка более чем 25 цифр. Далее, принимая данную строку за синоптическую телеграмму, тест проверяет, отвечают ли предполагаемые сведения об облачном покрове, направлении и скорости ветра следующим условиям:

1) общее количество облаков (N) должно быть больше облаков нижних ярусов,

2) значение направления ветра (dd) должно быть в пределах между 00 и 36,

3) скорость ветра ff должна быть менее 40.

Если эти пробы положительны, а следующая строка начинается с группы, отвечающей, согласно словарю, индексу станции, то принимается решение о том, что обнаружены синоптические телеграммы, и включается программа расшифровки этих сообщений (§ 3).

¹ Т. е. величины dd в группах 8ddff и Hddff. См. схему кода шаропилотного сообщения на стр. 567. (Прим. перев.).

Если же какая-нибудь из перечисленных проб отрицательна, то делается предположение, что это сообщение с корабля. Тогда программа ставит следующие вопросы. Если предполагаемый день недели (Y) и номер октанта (Q), взятые из первой группы строки, реальные, то следует упомянутый выше краткий тест на аэрологическое сообщение (состоящий из трех вопросов). Если этот тест дает отрицательный ответ, то повторяется упомянутый краткий тест на синоптическое сообщение, но при этом верхний предел для величины скорости ветра V_f увеличивается до 55.

Если же проба дня недели и номера октанта дает отрицательный результат, проверяется, начинается ли строка с группы типа 999II. Если это так и если каждая из двух следующих строк начинается с трех цифровых групп, то считается, что обнаружены синоптические телеграммы.

Если одновременно имеют место следующие три условия:

1) первая группа не содержит пяти цифр и одновременно имеет менее двух букв,

2) строка содержит менее 15 цифр,

3) в строке нет пяти цифровых групп,

то строка не признается в качестве заголовка и исключается. Если же в первой группе будут обнаружены две и более буквы, то строка может принадлежать аэрологическому сообщению. Это предположение еще более оправдано, если строка начинается с букв типа LL, MM и др. (см. табл. 6 приложения).

Если такие группы букв не обнаруживаются, но строка содержит более 15 цифр и включает пятицифровую группу, то такая строка может быть сообщением с корабля, и тогда проводится упомянутый тест дня недели и октанта для цифр, извлекаемых из первой пятизначной группы.

Если встречается одна из признаков пар букв типа LL, MM и др., то соответственно обнаруженному признаку проверяется следующая строка. Так, если обнаружены признаки LL, MM, WW, YY, то проверяется день недели и октант. Если обнаружены другие признаки (т. е. признаки сообщения с сухопутной станции), программа пытается обнаружить индекс станции.

При наличии TT или WW следует «тест на 85, 70, 50», а при VV или YY — «тест на 07», т. е. проверяется, начинается ли одна из групп строки с 07. При наличии LL, MM, PP или QQ следует тест на шаропилотное сообщение (поиск 4444 или 9999 в группах данной и последующей строк).

Если эти тесты положительны, то допускается наличие аэрологической телеграммы. Если же все пробы рассматриваемого ответвления теста заголовка отрицательны, обрабатывается следующая строка.

На этом заканчивается ответвление программы теста заголовка. Результаты ее работы могут быть сведены к трем вариантам:

1. Обнаружен заголовок нужной сводки. Передается управление на расшифровку синоптической или аэрологической телеграммы начиная со следующей строки текста.

2. Данная строка признана принадлежащей синоптическому или аэрологическому сообщению. Передается управление на соответствующую программу расшифровки.

3. Строку не удалось интерпретировать как полезный заголовок. Строка запоминается внутри программы теста заголовка, который затем переходит к обработке следующей строки.

§ 3. Раскодирование синоптических телеграмм

1. Поиск начала синоптического сообщения

Программа раскодирования синоптических телеграмм прежде всего пытается по данным первой группы (или нескольких первых групп) установить индекс станции или координаты корабля. Для этого привлекается, в частности, извлеченный из заголовка сводки географический указатель, хранящийся в ячейке *BLMK*. Этот указатель сопоставляется со всеми возможными указателями (помещенными в табл. 4 и 5 приложения). В случае нахождения эквивалента в одной из этих таблиц географический указатель заносится в информационную ячейку *BLOCK+1*. При этом содержимое ячейки *BLOCK+1* формируется по следующей схеме:

Для сводок судовых данных	00	00	00	SS
Для сводок с данными сухопутных				
станций	$II_{\min}$	$II_{\max}$	BB	00

В этой схеме:

SS — географический указатель (табл. 4);

$II_{\min}$ — наименьший из всех номеров районов, отвечающих данному географическому указателю (табл. 5);

$II_{\max}$ — наибольший номер района, возможный для данного указателя;

$BB \neq 0$ — географический указатель (по табл. 5), если $II_{\min} = II_{\max}$;

$BB = 00$, если $II_{\min} < II_{\max}$ (в этом случае номер района не определяется однозначно географическим указателем).

Поиск начала сообщения производится следующим образом. Прежде всего проверяется первая группа строки на наличие в ней номера района, т. е. проверяется, не начинается ли эта группа с 999 или 99. Если таким путем номер района установить не удастся, то привлекаются данные из ячейки *BLOCK+1*. Если

здесь имеется географический указатель, однозначно определяющий номер района (т. е. $BB \neq 0$), то по нему устанавливается номер района. Если же $BB=0$ (т. е. район не мог быть однозначно определен с помощью географического указателя), то печатается информация о том, что номер района одного или нескольких синоптических сообщений неизвестен. Например, в сводке

SMDL	EDZW	20060
999 0		

номер района 10 однозначно определяется географическим указателем, а в сводке

SMAF	DAAG	200600
9996		

этого сделать нельзя, так как географическому указателю AF (Африка) отвечает не один, а несколько районов (60—65).

Если первая группа в строке содержит номер района, то он запоминается в ячейке *BLOCK*. Затем он проверяется сравнением с минимальным и максимальным возможным номерами района $II_{\min}$ и $II_{\max}$, хранящимися в *BLOCK+1*. Если такая проверка указывает на несоответствие номера района географическому указателю, сведения об этом выдаются на печать. Кроме того, отметка об этом заносится в ячейку *BLOCK*. Приводимые нами два примера иллюстрируют такое несоответствие:

SMDL	EDZW	200600
99911		

Здесь номер района 11 не соответствует $BLMK=DL$ ($DL=10$).

SMAF	DAAG	200600
99948		

Номер района 48 не соответствует $BLMK=AF$ ($AF=60-65$).

После выполнения этих действий последующие группы в данной строке (или в начале следующей строки) проверяются на наличие в них некоторых определенных сочетаний букв. В частности, если здесь обнаруживаются последовательности типа COR или RPT, то допускается, что далее следует исправление сообщения. Если новая строка начинается с букв SHI или 4Y (или 4 Y), то принимается, что далее следует сообщение с корабля. Аналогично последовательность букв SP (или соответственно СП) указывает на то, что далее следует сообщение с одной из советских дрейфующих станций «Северный полюс», местоположение которой сообщается географическими координатами (как в сообщениях судовых станций).

Далее исследуется следующая группа рассматриваемой строки (или первая группа следующей строки). Обычно здесь бывает трех- или пятизначная группа (в случае сообщения сухопутной станции) или пятизначная (в случае сообщения судовой станции). Если эти группы могут быть превращены в цифровые, то это делается, и далее они обрабатываются как обычные цифровые группы.

Трехцифровая группа интерпретируется как возможный индекс станции и запоминается в соответствующей ячейке. Номер района из ячейки *BLOCK* присоединяется спереди к трехзначной группе. Если в ячейке *BLOCK* нет признака несоответствия номера района и географического указателя, то сформированная пятизначная группа *IIii* проверяется по словарю станций. При обнаружении там эквивалента соответствующая телеграмма может расшифровываться дальше, но только если в ячейке *DTTM* имеется информация о сроке наблюдений ($DTTM \neq 0$). В противном случае на печать выдается информация о том, что время наблюдений одного или нескольких сообщений неизвестно.

В том случае, если имеется несоответствие номера района и географического указателя, делается следующая проба. Составляются два различных пятизначных индекса *IIii*, причем для одного из них номер района *II* берется из ячейки *BLOCK* (т. е. по данным одной из групп анализируемого сообщения), а для второго — из ячейки *BLOCK+1* (если $BB \neq 0$, т. е. если географический указатель заголовка позволяет однозначно указать номер района). Если оба эти индекса, согласно словарю, оказываются реальными, то информация об этом выдается на печать. В противном случае сообщению приписывается тот из двух индексов, который будет подтвержден словарем.

Пятицифровая группа признается началом судового сообщения. При этом должны еще быть выполнены следующие условия: до этой группы должны быть найдены буквы *SHI* или *4Y* (или *4 Y*), а первая пятицифровая группа следующей строки не является индексом станции (не подтверждается словарем). Если же одновременно и рассматриваемая пятицифровая группа, и такая же группа следующей строки оказываются индексами, то данное сообщение признается сообщением с сухопутной станции, несмотря на то что в этом сообщении имеются соответствующие указатели судовой станции.

В случае если индексная группа пятизначна, а перед ней нет указателей судовой станции, сообщение относится к сухопутной станции СССР, если также будет $SS=0$ в *BLOCK+1*. В противном случае в этой группе проверяется реальность дня недели и номера октанта. Если они реальны, станцию относят к судовым, а иначе — к сухопутным.

В тех случаях, когда рассматриваемая группа не является

трех- или пятизначной, проводится серия дополнительных проб, которая позволяет обнаружить индекс станции и при наличии различных искажений. Ниже приводится ряд примеров преобразования искаженных групп, содержащих индекс станции

- | | |
|---------------|---------------|
| 1) IiiiiNddff | → Iiii Nddff |
| 2882581816 | → 28825 81816 |
| 2) iiiNddff | → iii Nddff |
| 50983110 | → 509 83110 |
| 3) II iii | → Iiii |
| 28 825 | → 28825 |
| 4) ii i | → iii |
| 50 9 | → 509 |
| 5a) Iiii | → Iiii |
| Y 28825 | → 28825 |
| 5b) iii | → iii |
| Y 509 | → 509 |
| 6) iXii | → iii |
| 5X09 | → 509 |
| 7) IiiXi | → Iiii |
| 2882X5 | → 28825 |
| 8) iiiXNddff | → iii Nddff |
| 509X83110 | → 509 83110 |
| 9) IiiiXNddff | → Iiii Nddff |
| 28825X81816 | → 28825 81816 |

Здесь через X обозначен любой буквенный знак, а Y — произвольный одиночный знак. Трех- или пятизначные индексные группы, получающиеся путем указанных разбиений или объединений цифровых групп, а также путем исключения одиночных букв, находящихся внутри цифровых групп, далее проверяются на реальность рассмотренным выше способом.

Если окажется, что первые два знака исследуемой на индекс группы являются парой букв из числа признаков аэрологических сообщений, указанных в табл. 6 приложения, то программа переходит на специальный тест заголовка, который осуществляет пробу на возможное аэрологическое сообщение. Если эта проба отрицательна, анализируются последующие группы — не являются ли они пятицифровыми (или могут быть сделаны таковыми путем соответствующего объединения соседних групп, но только если впереди имеется указатель судовой станции). Если нет указателя судовой станции, то первая же правильная трех- или пятицифровая группа (из числа не более чем пяти первых групп строки) проверяется на индекс станции или на координатную группу корабля. В зависимости от результата этой пробы дальнейшая обработка сообщения ведется соответствующей программой. Если же оба теста отрицательны, программа переходит к обработке следующей строки.

2. Формирование групп

Итак, начало синоптического сообщения установлено. Теперь можно сформировать группы (рис. 8), следующие за индексом станции (или за группой местоположения судна). При этом для групп из пяти цифр трудностей не возникает. Однако

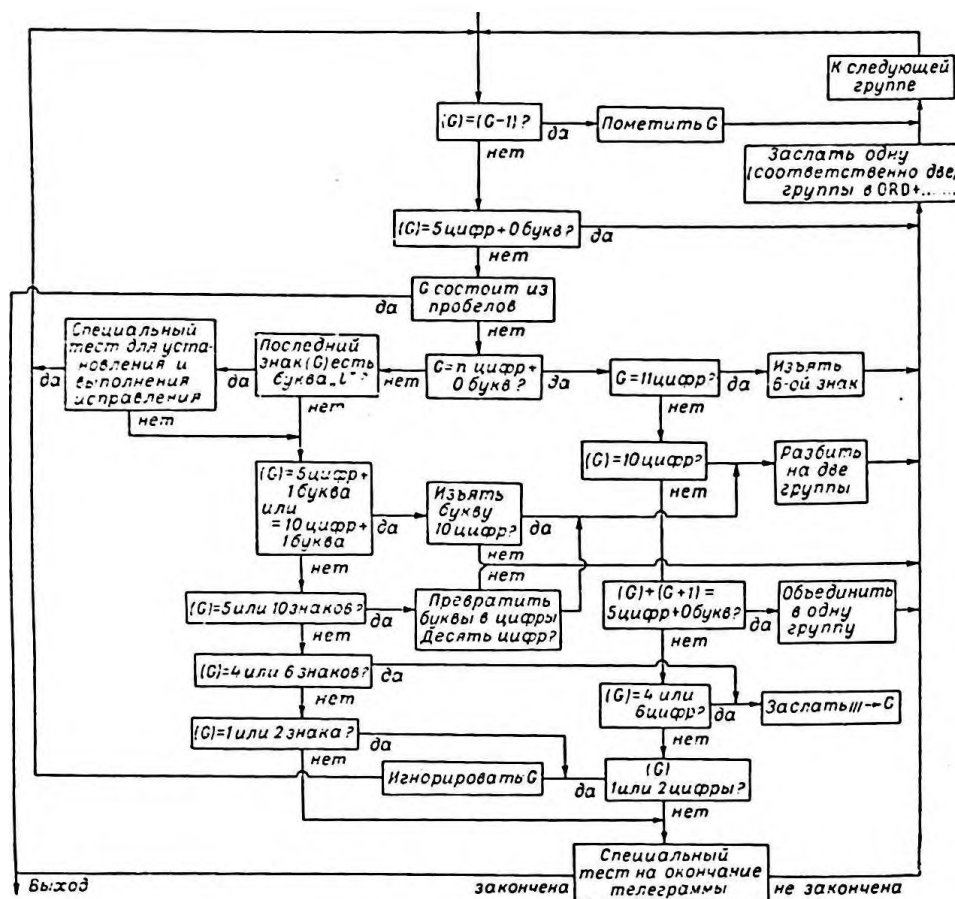


Рис. 8. Упрощенная блок-схема программы формирования групп.
Здесь опущены все те части программы формирования групп, которые действуют только при обработке аэрологических сообщений.
G — очередная группа, (G) — содержание группы.

по отношению к другим группам должны быть приняты некоторые решения. Если группа содержит менее трех цифр, то она отбрасывается. Группа из 3, 7, 8, 9 или более 11 цифр замещается на группу отсутствия данных /////, а сообщение на этом обрывается. Группа из 10 цифр разбивается на две группы по пять цифр. Группа из 11 цифр также разбивается на две.

причем шестой знак отбрасывается. По этим же правилам отбраковываются и буквенно-цифровые группы. Чисто буквенные группы частью превращаются в цифровые и далее обрабатываются, как указано выше.

По-иному интерпретируются группы, оканчивающиеся на «е» или состоящие из букв «е». Такая группа указывает на то, что предшествующие ей одна или несколько групп ошибочны и должны быть исправлены. В таких случаях по телеграфным правилам последняя правильная группа повторяется после группы с «е» и за ней следует остальная часть сообщения.

Примеры.

12345	<u>67898</u>	(7643e	eee	<u>67898</u>)	76543	...
12345	<u>67898</u>	(7643e)	76543	...		

Здесь взяты в скобки те группы, которые следует исключить.

Для обнаружения и выполнения исправлений программа прежде всего отыскивает группу, оканчивающуюся на «е». Далее разыскивается ближайшая последующая группа из пяти цифр. Если она тождественна с той, которая предшествовала группе с «е», то все последующие группы сдвигаются на место отбрасываемых (см. первый из приведенных примеров). Если же такого соответствия нет, то указанная пятицифровая группа признается первой правильной группой после ошибочной группы (см. второй пример).

В том случае если обнаружено сообщение с судовой станции, то для дальнейшего должны быть проведены некоторые уточнения. Укажем их.

На отдельных судах не могут производиться определенные метеорологические измерения и наблюдения. В этих случаях для обозначения соответствующих укороченных сообщений с таких судов к указателю времени наблюдения GG прибавляется некоторое число: 30 или 60. Так, GG+30 означает, что в данном сообщении пропущена группа с тенденцией, GG+60 — пропущены группы облачности и тенденции. При обнаружении указателя времени в виде GG+30 или GG+60 программа соответственно вычитает из него 30 или 60 и запоминает это обстоятельство для дальнейшего.

Если сообщаемое время наблюдения не совпадает ни с одним из возможных сроков, то допускается возможность появления какой-нибудь ошибочной цифры. Указатель GG=24 заменяется на GG=00. Если имелся присланный указатель времени в предыдущем судовом сообщении, причем последние цифры GG в обоих сообщениях совпадают, то принимается правильным GG предыдущего сообщения. Если же рассматриваемому сообщению не предшествовало другое судовое сообщение, то аналогичное сравнение производится с DTTM, т. е.

с содержимым ячейки, запоминающей время наблюдения, указанное в заголовке сводки. Если время наблюдения не может быть установлено, то сообщение далее не обрабатывается.

Сообщения типа судовых, поступающие из высоких широт (севернее 70° с. ш.), рассматриваются как сообщения с советских дрейфующих станций «Северный полюс». В этом случае сообщаемое время наблюдений — московское — должно быть уменьшено на 3 часа¹.

Далее проверяются сообщаемые координаты судна. Во всех случаях, когда эти координаты нереальны (в том числе, если они указывают, что судно находится на суше или в южном полушарии), на печать выдается соответствующая информация.

В связи со сделанными замечаниями становится ясно, что программа формирования групп в случае судовых сообщений должна быть несколько продолжена. Прежде всего в укороченные сообщения с судов, на которых не производятся некоторые наблюдения, в соответствующие места вводятся группы отсутствия данных. Далее программа разыскивает начинающуюся с нуля группу OT_sT_sTdTd . Ее положение внутри синоптического сообщения не может быть строго фиксировано, так как эта группа следует после нескольких необязательных групп. В данных судовых сообщениях данная группа может оказаться даже в следующей строке. При обнаружении указанной группы сведения о температуре воды и о температуре точки росы извлекаются в соответствующую ячейку.

После работы программы формирования групп синоптическое сообщение оказывается размещенным в памяти машины в виде следующего макета (табл. 3.1).

Таблица 3.1

Макет синоптической телеграммы, образованный программой формирования групп (первичная форма).

Условное обозначение последовательных ячеек макета	Содержание ячеек макета
<i>OBSTIME</i>	AAGGS 10 (разряды 47—18) (разряды 14—00)
<i>ZLNR</i>	Порядковый номер данной строки
<i>ORD</i> +0	} Первая и вторая ячейки из словаря со сведениями по данной станции
+1	
+2	
+3	
+4	Nddff
	VVwwW
	PPPTT

¹ Начиная с 1 января 1966 г. в сообщениях всех советских станций указывается время по Гринвичу. (Прим. перев.).

Продолжение

Условное обозначение последовательных ячеек макета	Содержание ячеек макета
+5	$N_h C_L h C_M C_n$
+6	$T_d T_d \text{app}$
+7	(Ячейка будет заполнена позднее см. § 3.3)

Примечание. AA — географический указатель; S — СИНОП;
10 — указатель числа групп в макете. Все знаки
в коде BCD.

3. Идентификация метеорологических элементов

Теперь может быть произведена проверка реальности величин отдельных метеорологических элементов. Проверяются следующие элементы: направление и скорость ветра (ddff), количество облаков (N; N_h), давление (PPP), температура (TT), точка росы ($T_d T_d$) и тенденция (app).

а. Направление и скорость ветра (ddff)

Для направления ветра возможны значения dd от 00 до 36, а также dd=99 (ветер переменных направлений). При dd=99 сила ветра ff не должна превышать 10; при dd=00 (штиль) должно быть ff=00. Если эти условия не выполняются, сведения о ветре признаются недостоверными и помечаются соответствующим признаком недостоверности. Так же помечаются и сведения о ветре, указывающие скорость более 80 узлов.

б. Сведения о количестве облаков (N; N_h)

Установление достоверности этих сведений ограничивается проверкой условия $N \geq N_h$. При $N=9$ должно быть $N_h=N$. При невыполнении указанных условий запоминается признак недостоверности сведений об облачности.

в. Давление (PPP)

Для установления величины сообщаемого давления (в миллибарах) необходимо установить, больше оно или меньше 1000 мб. При этом предполагается, что наблюдаемое давление на уровне моря всегда находится в пределах от 932,5 до 1070 мб. При $PPP > 700$ считается, что давление всегда меньше 1000 мб, а при $PPP < 325$ — больше 1000 мб. Для определения давления в промежуточных случаях (т. е. при $700 > PPP > 325$) в качестве вспомогательных средств привлекаются сведения о количестве облаков N и скорости ветра ff. Так, принимается, что при PPP между 325 и 550 давление может быть высоким

(более 1000 мб) только, если $N < 6$. Если же $N \geq 6$, давление считается высоким только при скорости ветра менее 30 узлов; при скорости ветра более 30 узлов давление считается низким (менее 1000 мб). В случае когда PPP заключено между 550 и 700, а $N > 3$, допускается, что возможно только низкое давление. В случае если $N < 3$, а скорость ветра более 10 узлов, давление также считается низким; при меньшей скорости ветра давление считается высоким. Возможные случаи неправильной расшифровки давления в этом способе (например давление 1056 мб при низких слоистых облаках с $N=8$) мы рассмотрим в дальнейшем.

Приведем сформулированные правила определения давления:

PPP	N	ff (узлы)	Давление (мб)
>700	—	—	ниже 1000
<325	—	—	свыше 1000
325—550	≤ 6	—	1000
325—550	≥ 6	< 30	1000
325—550	≥ 6	≥ 30	ниже 1000
550—700	> 3	—	1000
550—700	≤ 3	> 10	1000
550—700	≤ 3	≤ 10	свыше 1000

Если, однако, в качестве вспомогательных средств раскодирования имеется карта с анализом или прогнозом на уровне моря (см. гл. 4 § 3), то, принимая ее как «начальное приближение», произвести привязку сообщаемого давления PPP к 900 или 1000 мб оказывается значительно проще. Можно, например, принять правило, что если разность между начальным приближением и $PPP+1000$ мб больше 50 мб, то считать давление равным $900\text{мб}+PPP$; в противном случае оно равно $1000\text{мб}+PPP$. Отклонение сообщаемого давления от начального приближения в соответствующем пункте запоминается в макете телеграммы в специальной ячейке *ORD +7*.

г. Температура (ТТ)

При расшифровке значений температур, лежащих между -49°C и $+49^\circ\text{C}$, никаких трудностей не возникает, так как отрицательные температуры (от -0°C до -49°C) кодируются с прибавлением 50 к абсолютной величине температуры. Трудности могут быть только при распознавании температур ниже -49°C . В северном полушарии такие температуры встречаются только в СССР. Поэтому принимается следующее правило. Если в зимние месяцы на некоторой станции одного из районов 21, 23, 24, 25, 28, 29 или 30 при скорости ветра менее 10 узлов будет сообщено значение температуры, раскодированное как равное или большее 00°C (причем $T_a T_a$ в цифрах кода больше 50), то считается, что температура воздуха ниже -49°C . При

наличии карты начального приближения привязка температур осуществляется с учетом отклонения последней от этого приближения по следующим правилам:

Разность $ТТ - ТТ_{нач}$	ТТ (сообщено)	Сумма $ТТ + ТТ_{нач}$	ТТ _{действ}
1) от -25° до $+25^{\circ}$ C	—	—	Сообщенное ТТ не менять
2) $< -25^{\circ}$ C	≥ 0	—	То же
3) $> +25^{\circ}$ C	< 0	—	То же
4) $< -25^{\circ}$ C	< 0	$\begin{cases} -26^{\circ} \geq ТТ + ТТ_{нач} \geq 26^{\circ} \\ -26^{\circ} < ТТ + ТТ_{нач} < 26^{\circ} \end{cases}$	$(50 - ТТ) = (50 + ТТ)$ Сообщенное ТТ не менять
5) $> +25^{\circ}$ C	> 0	$\begin{cases} -26^{\circ} \geq ТТ - ТТ_{нач} \geq 26^{\circ} \\ -26^{\circ} < ТТ - ТТ_{нач} < 26^{\circ} \end{cases}$	$(-50 - ТТ) = -(50 + ТТ)$ Сообщенное ТТ не менять

Здесь $ТТ_{нач}$ — начальное приближение для температуры.
Примеры к некоторым правилам

- | | |
|---|---|
| <p>2) $ТТ = 5^{\circ}$ C
 $ТТ_{нач} = 31^{\circ}$ C
 $ТТ_{действ} = 5^{\circ}$ C</p> <p>4а) $ТТ = -5^{\circ}$ C
 $ТТ_{нач} = 32^{\circ}$ C
 $ТТ_{действ} = 50 - ТТ = 55^{\circ}$ C</p> <p>5а) $ТТ = 1^{\circ}$ C
 $ТТ_{нач} = -29^{\circ}$ C
 $ТТ_{действ} = -50 - ТТ = -51^{\circ}$ C</p> | <p>3) $ТТ = -5^{\circ}$ C
 $ТТ_{нач} = -32^{\circ}$ C
 $ТТ_{действ} = -5^{\circ}$ C</p> <p>4б) $ТТ = -5^{\circ}$ C
 $ТТ_{нач} = 28^{\circ}$ C
 $ТТ_{действ} = -5^{\circ}$ C</p> <p>5б) $ТТ = 1^{\circ}$ C
 $ТТ_{нач} = -25^{\circ}$ C
 $ТТ_{действ} = 1^{\circ}$ C</p> |
|---|---|

д. Температура точки росы ($T_d T_d$)

При раскодировании точки росы используется только что расшифрованное значение температуры. Если температура ниже -25° C, то температура точки росы заведомо отрицательна и, следовательно, берется в виде $(50 - T_d T_d)$. В тех случаях, когда температура точки росы окажется выше температуры воздуха, запоминается признак ненадежности данных о температурах. Этот же признак вырабатывается и в том случае, если разность между температурой воздуха и точкой росы превышает 50° C при температуре ниже 25° C или превышает 40° C, если температура воздуха заключена между 0 и 30° C.

е. Тенденция (app)

При $a=9$ эти данные не принимаются во внимание, так как характеристика тенденции, равная 9, означает, что сообщено изменение давления за последние 24 часа (в тропиках). Если $pp=99$, то проверяется, не начинается ли следующая группа с 99. Если так, то в качестве тенденции берутся следующие за

99 три цифры (тенденция превышает 10,0 мб/3 часа). При $a < 4$ тенденция положительна, а при $a > 4$ — отрицательна. Если $a = 4$ (давление в момент наблюдения то же, что и 3 часа тому назад) и pp больше 10, то данные о тенденции во внимание не принимаются.

4. Обнаружение пропуска групп и лишних групп

При поиске таких групп (блок-схема программы дана на рис. 9) в качестве вспомогательного средства используются признаки ненадежности данных, вырабатывавшиеся предыдущими частями программы при соответствующих ситуациях.

В нормальном случае, т. е. когда на месте разряда ненадежности всюду стоит нуль, макет телеграммы поступает непосредственно на дальнейшую обработку. При этом в случае судовых телеграмм данные о температуре воды, о скорости и направлении движения судна заносятся в специальные ячейки макета.

А. Обнаружение пропуска групп

Для обнаружения таких групп используется сопоставление данных (в частности, о давлении и температуре) с начальным приближением, а также просмотр признаков ненадежности. Если отклонение от начального приближения находится в допустимых пределах (например, для давления 30 мб, а для температуры 20°С) и нет признаков ненадежности, сообщение считается нормальным. Если же отклонения как давления, так и температуры от начального приближения выше допустимых, предполагается наличие лишней группы. Программа приходит к такому же результату, если слишком велико отклонение только для одного из двух названных элементов, но имеются признаки ненадежности в группах ветра и количества облаков (см. раздел Б).

Если в телеграмме были признаны ненадежными данные о ветре, облачности или температуре (как с учетом начального приближения, так и без него), то не исключено, что эти ошибки возникли вследствие того, что в предыдущей части программы была вычеркнута группа, следовавшая за тождественной ей. Если такое вычеркивание имело место, делается предположение, что обе тождественные группы правильны, вычеркнутая группа восстанавливается на прежнем месте и программа повторяет проверку надежности данных.

Если в группе, находящейся на месте группы давления и температуры, не может быть обнаружена температура (на месте для ТТ нет двух цифр), а сообщение, судя по числу групп в нем, заканчивается группой облачности $N_h C_L h C_M C_N$, то де-

лагается предположение о возможном пропуске группы PPPTT и производится соответствующее передвижение групп.

Пример.

	ORD + 2	ORD + 3	ORD + 4	ORD + 5	ORD + 6
	Nddff	VVwwW	PPPTT	N _h C _L hC _M C _H	T _d T _d app
Сообщено:	82410	40050	874//	10400	
Должно быть:	82410	40050		874//	10400

Подозрение на пропуск группы делается и тогда, когда группа, находящаяся на месте, отведенном для PPPTT, начинается с цифр 009, весьма характерных для начала группы облачности. В этом случае вспомогательным признаком служит количество облаков N. Если N=0, а вслед за 009 не обнаруживается 00, значит, пропущена группа ветра.

Пример:

	Nddff	VVwwW	PPPTT	N _h C _L hC _M C _H	T _d T _d app
Сообщено:	05444	20020	00902	19400	
Должно быть:		00444	20020	00902	19400

Если бы в данном случае было N≠0, то для принятия решения о пропуске группы ветра потребовались бы дальнейшие пробы.

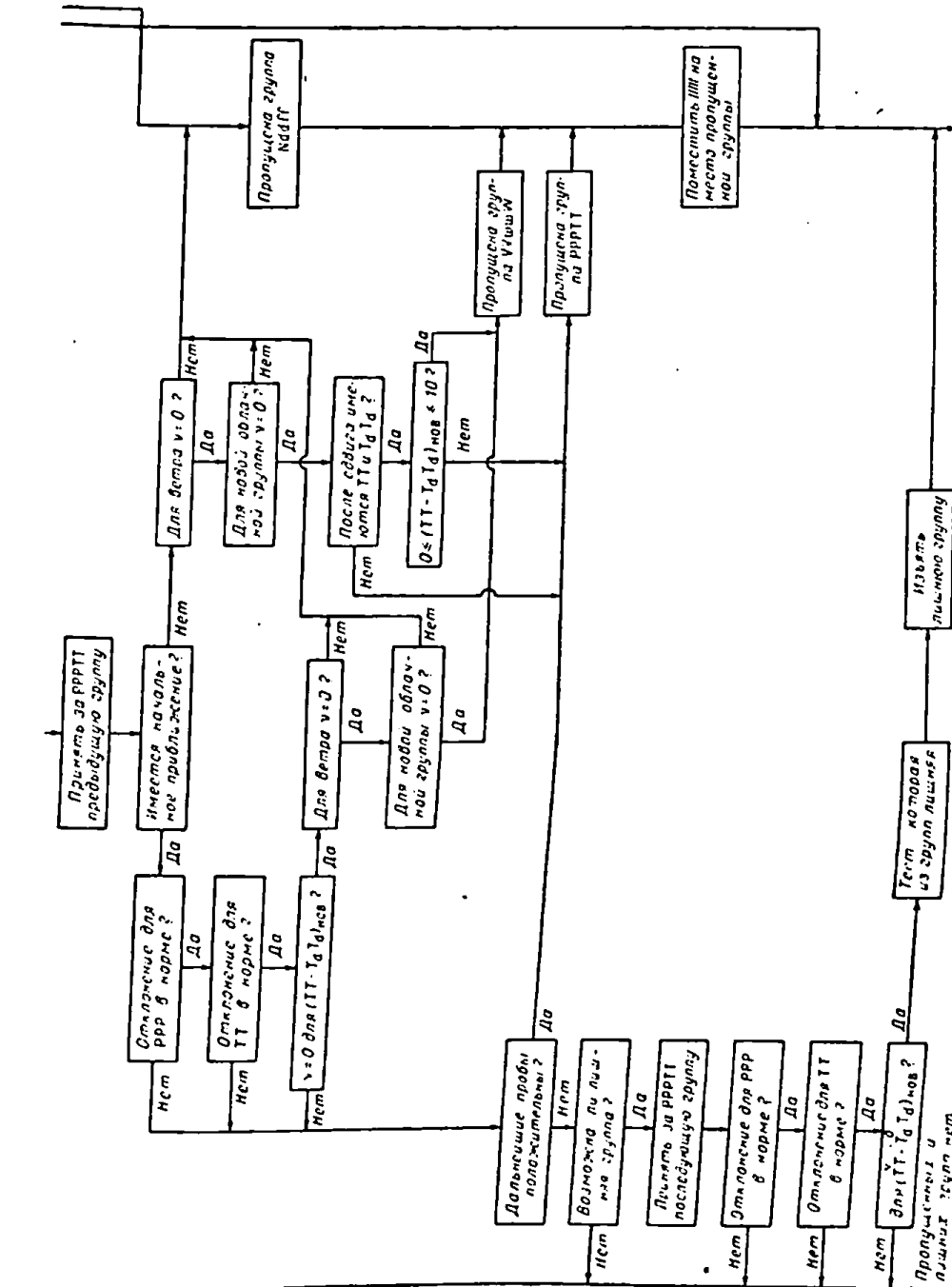
При всех подобных проверках существенны признаки ненадежности данных. Так, группа типа 009... без всякого сомнения может быть признана как PPPTT, если при таком предположении признаки ненадежности равны нулю, а группа с точкой росы в сообщении имеется.

Если имеется подозрение на то, что некоторая группа в сообщении пропущена и, следовательно, все последующие группы сдвинуты, то делается попытка интерпретировать группу, предшествующую группе PPPTT, т. е. находящуюся на месте VVwwW, как группу давления. Для дальнейшего исследования производится сдвиг групп, отвечающий указанному предположению. При этом, если нет начального приближения, возможны следующие варианты:

1) если имеется признак ненадежности ветра, то допускается, что пропущена группа ветра (рис. 10 а);

2) если нет признака ненадежности ветра, но при сдвиге групп вправо, отвечающем принятию в качестве группы давления той группы, которая стоит на месте VVwwW, появляется признак ненадежности количества облаков, то допускается, что пропущена группа ветра (рис. 10 б);

3) если после указанного сдвига групп оказывается, что не может быть найдена температура или точка росы или же точка росы выше температуры, то допускается, что пропущена группа давления (рис. 10 в);



Обозначения в программе:
РРРТ - предыдущая группа;
ТТ - текущая группа.

Рис. 9. Упрощенная блок-схема программы обнаружения пропущенных и излишних групп в синоптическом сообщении.

γ -- признак недовосстановленности; γ = 0, 1.

	Nddff	VVwwW	PPPTT	$N_h C_L h C_M C_H$	$T_d T_d app$
(a)	80010	20014	70957	12400	
	пропущена группа Nddff				
(б)	62606	20014	70957	12400	
	пропущена группа Nddff				
(в)	82410	62605	70957	12400	
	пропущена группа PPPTT				
(г)	82410	20014	70957	12400	
	пропущена группа VVwwW				

Рис. 10. Примеры обнаружения пропуска групп.

	Nddff	VVwwW	PPPTT	$N_h C_L h C_M C_H$	$T_d T_d app$
(a)	52410	(615;5)	62606	95014	35657
(б)	(54400)	52410	62606	95014	35657
(в)	52410	(62616)	62305	95014	35657

Рис. 11. Примеры обнаружения лишних групп.

4) если после сдвига групп не возникает признаков ненадежности или других свидетельств дефектности сообщения, то допускается, что пропущена группа видимости VVwwW (рис. 10 г).

В том случае, если доступно начальное приближение, подобные пробы выполняются следующим образом:

1) если после сдвига групп отклонения давления и температуры от начального приближения находятся в пределах нормы и не возникает признаков ненадежности, допускается, что пропущена группа видимости (рис. 10 г);

2) если после сдвига групп признак ненадежности не возникнет при температуре, а при скорости ветра или количестве облаков такой признак будет, то допускается пропуск группы ветра (рис. 10 а и б);

3) если отклонения от начального приближения больше допустимых, а в ячейке макета *ORD +6* нет никакой группы (телеграмма обрывается на $N_h C_L h C_M C_N$), то допускается пропуск группы давления (рис. 10 в).

Б. Обнаружение лишних групп

Если обнаружены признаки возможного присутствия лишних групп (они были указаны выше, в начале раздела А) и сообщение содержит не менее шести групп (ячейка *ORD +6* в макете заполнена какой-то группой), то производится поиск лишней группы. Для этого делается попытка интерпретировать как *PPPTT* группу, стоящую в сообщении после группы давления (т. е. на месте группы облачности). Такая проба производится, если нет указаний на пропуск группы *PPPTT*, а именно $PPP \neq 009$, первый знак в *PPP* не есть 7 или 8 (что может быть N), первый знак группы в *ORD +6* не равен 7, 8 или 9, т. е. призначной цифре седьмой, восьмой или девятой групп, включаемых в телеграммы факультативно. Если при этой пробе оказывается, что новые значения давления и температуры слишком сильно отклонены от начального приближения и появляется признак ненадежности для температуры, то сообщение исправить невозможно и оно приводится к его прежнему виду. Если же исследуемая группа действительно может быть группой *PPPTT* (нет больших отклонений от начального приближения и нет признака ненадежности при температуре), то предстоит установить, какая именно из групп, предшествующих группе давления, является лишней. Возможны следующие варианты:

1) если одна из трех групп, находящихся в *ORD +2*, *+3* или *+4*, имеет где-либо знак /, то такая группа считается лишней (см. рис. 11 а);

2) если имеется признак ненадежности ветра, то считается лишней группа ветра (рис. 11 б);

3) если нет других признаков, то лишней считается та группа, которая имеет по крайней мере три одинаковых с последующей группой знака (рис. 11 в);

Наконец, если не действуют эти правила, то лишней признается группа в ячейке *ORD+3* (т. е. считается, что группа видимости передана дважды).

В том случае если рассмотренные программы обнаружат пропущенную или лишнюю группу, то после замены пропущенной группы на *////* или исключения лишней группы (с последующим сдвигом остальных групп) программа возвращается к идентификации и контролю метеорологических элементов. При этом делаются пометки обо всех внесенных исправлениях, так что повторные пробы на пропущенные или лишние группы исключены.

В ходе выполнения всех указанных действий макет телеграммы (табл. 3.1) пополняется дополнительной информацией. В частности запоминаются признаки ненадежности для ветра, количества облаков и температуры (в ячейке *ORD+2*). В ячейке *ORD+7* запоминаются отклонения давления и температуры от начального приближения, разность между сообщаемым временем наблюдения и предварительно установленным временем, а для сообщений судовых станций — еще и сведения о скорости и курсе корабля и о температуре воды. Дополненный макет телеграммы приведен в табл. 3.2 и табл. 9 приложения (часть д). В таком виде сообщение поступает на сортировку.

Таблица 3.2

Дополненный макет синоптической телеграммы
(окончательная форма)

Порядковый номер ячейки	Условное обозначение ячейки	Содержание ячеек макета
1	<i>OBSTIME</i>	AAGGS 10
2	<i>ZLNR</i>	Порядковый номер данной строки
3	<i>ORD+0</i>	Первая и вторая ячейки из словаря со сведениями по данной станции
4	<i>ORD+1</i>	В коде <i>BCD</i>
5	<i>ORD+2</i>	(разряды 47—18) Nddff
6	<i>ORD+3</i>	VVwwW
7	<i>ORD+4</i>	ppPTT

В двоичном коде
dd (разряды 17—12); ff (разряды 11—03). Признаки ненадежности данных о ветре, облачности, температуре в разрядах 2, 1, 0.
pp (разряды 17—00)
PPP (разряды 17—00)

Продолжение

Порядковый номер ячейки	Условное обозначение ячейки	Содержание ячеек макета	
8	ORD + 5	$N_h C_L h C_n C_n$	ТТ (разряды 17--09); $T_d T_d$ (разряды 08--00).
9	ORD + 6	$T_d T_d app$	D_s (разряды 17--14); V_s (разряды 13--10); $T_w T_w$ (разряды 09--03).
10	ORD + 7		Разность: (OBSTIME) — срок по начальному приближению (разряды 32--27) Отклонение температуры от начального приближения (разряды 26--18) Отклонение давления от начального приближения (разряды 17--00)

Примечание. AA — географический указатель, S — СИНОП; 10 — указатель числа групп в макете.

На этом обработка синоптической телеграммы заканчивается.

§ 4. Раскодирование аэрологических телеграмм

1. Установление начала аэрологического сообщения

Началом аэрологического сообщения может быть либо группа из пяти цифр, либо группа, начинающаяся двумя буквами. Если началом сообщения окажется группа из пяти цифр, то эта группа будет признана первой группой сообщения. Если в начале сообщения обнаружена группа, состоящая из двух букв (из числа указанных в табл. 6 приложения), то так будет установлен тип наблюдений, и программа переходит к осмотру следующей группы. Если же за двумя упомянутыми буквами следуют еще две цифры (конструкция $M_i M_i GG$), то эти цифры запоминаются как срок наблюдения в специальную ячейку, называемую далее *GGMERK*, и затем программа переходит к осмотру следующей группы. Если за группой, содержащей две буквы, следует пятицифровая группа, то она признается первой группой сообщения.

Аэрологическое сообщение может также начинаться с COR, RPT, REP, ИСПР (исправленное сообщение), с SP, СП (сообщение с дрейфующей станции) или с 4Y (сообщение с корабля). При обнаружении указанных признаков делаются специальные пометки, и программа продолжает поиск первой пятицифровой или двухбуквенной группы. При этом встретившаяся группа из пяти букв будет превращена в цифровую группу.

В том случае, если первая группа содержит число цифр, не равное пяти, выполняются следующие действия:

- 1-я группа: 2 цифры Обе цифры есть GG и они заносятся в GGMERK
- 1-я группа: 10 цифр Группа разделяется на две по пять цифр в каждой
- 1-я группа: 11 цифр Шестая цифра заменяется пробелом
- 1-я группа: 10 цифр, 1 буква Буква исключается, если она является шестым знаком
- 1-я группа: 5 цифр, 1 буква Исключается буква
- 1-я группа: 2 цифры, 1 буква Две цифры заносятся в GGMERK
- 1-я и 2-я группы: 5 цифр Объединяются в одну группу
- 1-я группа: 1 знак Этот знак исключается

Если обнаруживается несколько групп, содержащих 1—3 цифры или несколько букв, то строка в целом проверяется на возможный заголовок. Если первая группа никак не может быть исправлена перечисленными действиями (содержит большое число цифр или букв), то к рассматриваемой строке и следующей за ней применяется специальный аэрологический тест, куда входит тест на 85—70—50, шаропилотный тест и др. При положительном результате такого текста на печать выдается информация, указывающая на то, что начало данного аэрологического сообщения искажено.

2. Определение вида аэрологического сообщения и времени наблюдения

В результате предыдущих проб мы теперь знаем первую (или первую и последующую пятицифровую) группу сообщения. Если к тому же известен и тип сообщения, программа приступает к поиску и формированию групп в тексте телеграммы (см. § 3.2).

Обычно аэрологическое сообщение занимает несколько строк, и поэтому в данном случае программа формирования групп включает еще специальную часть для обнаружения конца сообщения. Как правило, конец сообщения помечается знаком «=». Поэтому в том случае, если последний знак рассматриваемой строки не есть «=», а следующая строка отделена от данной не более чем одной пустой строчкой и начинается с пятицифровой группы, принимается, что телеграмма не кончена, и формирование групп в тексте данного сообщения продолжается. Если же перед следующей строкой имеются две пустые строчки и более, то для этой следующей строки делается тест на 85—70—50. При положительном результате последнего принимается, что установлен конец предыдущего сообщения и обнаружено начало следующего. В тех случаях, когда в ходе формирования групп будет обнаружено, что очередная строка начинается со знаков исправления (CORR, RPT, REP и т. п.), необходимо внести поправки в предыдущие, уже сформированные группы. Однако внесение исправления в такой ситуации

оказывается возможным только, если следующая группа той же строки (или первая группа следующей) повторяет одну из ранее сформированных групп. При этом заново проделявается формирование групп начиная с группы, повторенной в дальнейшем.

Пример.

Строка Z: 20145 0410 02745... и т. д. ... 02914 112
 Строка Z + 1: REPEAT
 Строка Z + 2: 02914 11122 97662 и т. д.

Если следующая строка (Z + 1) не начинается ни с пятицифровой группы, ни с указателей типа COR и др., то принимается, что сообщение закончено, если строке Z + 1 предшествует не менее двух пустых строчек или же строка Z + 1 начинается с признаков типа сообщения M₁M₁ (табл. 6 приложения). Если же оба эти условия окончания сообщения не выполнены, то формирование групп анализируемого сообщения по данным строки Z + 1 будет продолжено лишь при выполнении одного из двух следующих условий:

1. Если в строке Z + 1 среди первых четырех групп имеется по крайней мере две пятицифровые группы, а пятая и шестая группы являются цифровыми.

Примеры.

Строка Z: TT 54337 и т. д. ... 50919
 Строка Z + 1: 7 998 03329 40099 ... и т. д.

(Здесь искажена группа температуры 7998. Все последующие группы будут нормально сформированы. Конца сообщения здесь нет).

Строка Z: TT 51828 и т. д. ... 50714

Строка Z + 1: 873) 40340 и т. д.

(Результат тот же, что и в предыдущем примере. Искажена группа с температурой.)

2. Если первая группа является пятизначной (условие действует только в случае, если строка Z + 1 укороченная).

Пример.

Строка Z: TT 56146 и т. д. ... 30901

Строка Z + 1: 9 990 0292 =

(Здесь искажены группа температуры и группа ветра. Эти группы не будут сформированы, так как принадлежат к укороченной строке, не начинающейся пятицифровой группой. Конец сообщения).

Теперь рассмотрим те случаи, когда будет обнаружено, что последний знак в строке есть =. Для подтверждения предположения о конце сообщения испытывается еще и следующая строка. Если окажется, что первая группа этой строки не является пятицифровой, то действительно найден конец сообщения. Если это не так, то подтверждением окончания сообщения может быть либо наличие двух и более пустых строк перед следующей строчкой, либо положительный результат теста на 85—70—50, примененного к ближайшим последующим строкам.

По-особому разыскивается конец телеграммы при раскодировании аэрологических сообщений для высоких уровней (часть *C*), поступающих из Китая (районы 50—59). Здесь подтверждением начала следующего сообщения будет то, что первая группа строки $Z + 1$ является пятицифровой, а вторая группа этой же строки (или строки $Z + 2$) начинается с цифр 20 (часть *C* радиозондовых телеграмм Китая содержит сведения по уровням 200 и 100 мб)¹.

Пример.

Строка Z : 51133 20156 15990 10588 08994

Строка $Z + 1$: 51243 20164 15996 10597 08998

(Между строками Z и $Z + 1$ имеется не более одной пустой строки.)

Обработка первой группы сообщения состоит в следующем. Для судовых сообщений после формирования групп проверяются географические координаты. Время наблюдения *GG* из второй координатной группы засылается в ячейку *GGMERK*. Затем по данным координатных групп рассчитываются величины MM и $U_L U_{L_0}$, входящие в марсденову группу.

Для сухопутных станций производится поиск эквивалента в словаре индексов. Если эквивалент не обнаруживается, то делается предположение, что это судовое сообщение, и программа проверяет реальность октанта и дня недели. Сообщение окончательно признается судовым при выполнении следующих условий:

- 1) октант и день недели реальны;
- 2) в ячейке *BLMK* имеется указатель из числа приведенных в табл. 4 приложения либо станция расположена севернее 70° с. ш. (возможно, дрейфующая станция СП).

Во всех остальных случаях печатается информация о том, что машина не в состоянии установить местоположение станции.

Если в начале работы программы установления начала аэрологического сообщения (§ 4.1) не был обнаружен указатель типа сообщения $M_1 M_1$ из числа приведенных в табл. 6 приложения, то сообщение снова анализируется специальными тестами (тест на 85—70—50, тест на 07 и др.). При положительном результате одного из тестов производится формирование групп сообщения и далее программа устанавливает тип станции (сухопутная или корабль) с помощью указанных выше проб. Дополнительно анализируются первые два знака третьей группы, которые в случае судового сообщения должны быть 00 (см. группу 00 $h_1 h_1 h_1$ в части *A* кода судовых радиозондовых сообщений). При отрицательном результате названных специальных тестов рассматриваемая строка проверяется на возможный заголовок.

¹ С сентября 1966 г. эти сообщения включают данные по уровням 300, 200 и 100 мб. (Прим. перев.).

В ином порядке должны расшифровываться части *C* аэрологических сообщений из Китая (районы 50—59). Признаками таких сообщений являются следующие: первая группа должна начинаться цифрой 5, а вторая группа — цифрами 20 (200 мб); географический указатель должен быть *C1*. Однако программа находит эти сообщения, если и не обнаружит все указанные признаки. Так как эти сообщения не содержат указатель срока *GG*, то время наблюдения должно быть извлечено из ячейки *DTTM* (срок наблюдения по заголовку) или из перфокарты основного срока. После выполнения указанных действий производится формирование групп этих сообщений обычным образом.

Если к этому моменту еще не определен срок наблюдения, то он извлекается из соответствующих групп сообщения (см. коды **ТЕМП**). Именно, в случае сухопутных станций извлекаются первые две цифры второй группы (если же на этом месте окажется 99, то будут извлечены первые две цифры из четвертой группы); в случае судового сообщения извлекаются последние две цифры второй пятицифровой группы. Эти данные помещаются в ячейку *GGMERK*.

Далее производится контроль сведений о времени наблюдений. Допустимыми считаются сроки отклоняющиеся не более чем на -1 час или $+2$ часа от основных сроков (00, 06, 12, 18). Сообщения со сроками, не укладывающимися в эти пределы, снабжаются признаком ненадежности срока и им приписывается время наблюдения либо предыдущего сообщения, либо взятое из заголовка сводки (см. ниже случаи, когда $GG \geq 24$).

Теперь содержимое ячейки *GGMERK* сравнивается с временем заголовка (*DTTM*) или с временем предыдущего сообщения (*UTIME*). Если данному сообщению не предшествует аэрологическое сообщение ($UTIME=0$), а *GG* отличается от срока, указанного в заголовке, то в сообщении делается пометка о ненадежности и эти же сведения выдаются на печать. Если же оба указателя срока совпадают, то *YYGG* из ячейки *DTTM* заносится в *UTIME*. Если же нет данных о сроке по заголовку ($DTTM=0$), то *GG* сравнивается с перфокартой основного срока, и установленное при этом время поступит в *UTIME*.

Если рассматриваемому аэрологическому сообщению предшествует другое аэрологическое сообщение, то *GGMERK* сравнивается как с *UTIME*, так и с *DTTM*. Если проба на сходство будет положительна при сравнении с *UTIME* и отрицательна — с *DTTM*, то *DTTM* будет погашено (время, указанное в заголовке, будет признано ошибочным). В противоположном случае время из *DTTM* заносится в *UTIME*. Если *GG* не согласуется ни с *UTIME*, ни с *DTTM*, то время наблюдения признается ненадежным, о чем делается пометка в телеграмме, а также сообщается оператору с помощью текста, выданного на печать.

Признак ненадежности времени наблюдения вырабатывается также и тогда, если GG в GGMERK будет больше или равно 24. В таком случае время наблюдения будет взято из *UTIME* или из *DTTM*. Если обе ячейки не содержат нужных сведений (пусты), то машина отказывается расшифровывать данное сообщение, и соответствующая информация выдается на печать.

Пр и м е р.

Заголовок: ULEU1 LFPW N 110000

18-я строка: VV23 16080 07801 ... и т. д.

19-я строка: SNKVV23 16320 07813 ... и т. д.

Здесь 23 в 19-й строке не может быть опознано как указатель срока GG, так как этот указатель замаскирован наличием трех лишних знаков (SNK) в соответствующей группе, и ячейка GGMERK остается свободной. Поэтому здесь будет принято время предыдущего сообщения.

Далее программа декодирования разветвляется соответственно различным типам аэрологических сообщений. Согласно обнаруженным указателям типа сообщения M_1M_1 или по специальным призначным группам (55555, 66666 и др.) будут выделены сообщения ПИЛОТ и сообщения об особых точках (часть B). Для сообщений ТЕМП должна быть определена наименее низшая изобарическая поверхность, по которой имеются данные. Обычно в части A сообщения такой поверхностью является 1000 мб. Однако для высокогорных станций этим уровнем может быть 850, 700 или 500 мб. Наименее низший уровень, сообщаемый данной станцией, указан в словаре (каталоге станций). Он определяется высотой станции над уровнем моря.

Высота станции, м	Низший уровень, мб
до 700	1000
701—1300	850
1301—2500	700
свыше 2500	500

В сообщениях ТЕМП часть C наименее низким уровнем является 70 или 50 мб. Исключение составляют сообщения из Китая (200 или 300 мб).

3. Обнаружение наименее низшего уровня в сообщении ТЕМП

Если ранее был обнаружен признак части C сообщения ТЕМП, то начало первой после индекса группы (соответственно после двух координатных групп) проверяется на 07 (70 мб). Если результат положителен, то считается, что наименее низший уровень установлен и значения метеорологических эле-

ментов на этом уровне могут быть расшифрованы последующей частью программы. В противном случае группа испытывается на 05 (50 мб). Если и этот тест отрицателен, то данная группа может быть одной из признаков групп кода ТЕМП (см. табл. 7 приложения). Если группа не является таковой, делается попытка установить, имеется ли все же какой-то признак присутствия 07 в данной группе. Так, например, если в нормальном случае (в неискаженном виде) анализируемая группа есть 07850, то путем соответствующих проб программа сможет обнаружить 07 и в следующих искаженных вариантах этой группы:

06850
 67850
 0850
 7850
 067850
 607850

Если эти пробы безрезультатны, то делается попытка найти 07 в следующей группе. Если и это не удастся, то сообщение испытывается как часть *B* (сведения по особым точкам).

Поиск низшего уровня в части *A* производится по более разветвленной программе. Для равнинных станций определение низшего уровня начинается с поиска признака 85, поскольку уровень 1000 мб не имеет специальных признаков цифр. Обычно сведения по уровню 850 мб начинаются со второй, третьей или четвертой группы сообщения.

Примеры.

		1-я гр.	2-я гр.	3-я гр.	4-я гр.	
$M_i M_i$	III_i	$GGh_1h_1h_1$	$T_1T_1T_dT_dT_x$	$Od_1d_1f_1f_1$	$P_2P_2h_2h_2h_2$	
ТТ	10202	00127	03509	01005	85429	
ТТ	10202	00127	03509	85429		(нет 3-й гр.)
ТТ	10202	00127	85429			(нет 2 и 3-й гр.)

Подобным же образом разыскивается низший уровень и в сообщениях высокогорных станций. Именно, те же группы испытываются на наличие в них признака той или иной главной изобарической поверхности соответственно высоте станции над уровнем моря.

Примеры.

ТТ 41530 85500 10542 70107 05991 ... (GG здесь отсутствует!)

ТТ 52323 23// 70066 58642 02708 ...

ТТ 72365 00097 85457 70014 57683 02810 50553 ...

(Соответственно высоте двух последних станций над уровнем моря первой изобарической поверхностью в телеграммах должна быть поверхность 700 мб.)

В последнем примере как низший уровень обнаруживается уровень 700 мб. Однако в телеграмме имеются также сведения о приведенных высотах уровней 1000 и 850 мб (097 и 457). После обнаружения низшего уровня они также будут извлечены в соответствующие ячейки макета телеграммы, и затем будет продолжен обычный поиск данных остальных уровней.

Некоторые трудности возникают, например, тогда, когда первые две цифры температурной группы совпадают с признаком уровня РР или когда этот признак искажен.

П р и м е р ы.

		1-я гр.	2-я гр.	3-я гр.	4-я гр.	5-я гр.	
ТТ	72836	12050	<u>85</u> 411	85890	02510	70947	...
ТТ	13276	0XXXX	8X542	54565	<u>70</u> 931	58619	...

(X — произвольный знак: буква или цифра). Здесь в первом примере — совпадение первых двух цифр температуры с возможным признаком уровня (85). Прежде всего опрашивается 5-я группа на наличие в ней признака уровня, следующего за начальным. Если в ней обнаруживается такой признак, а 4-я группа начинается с нуля, то делается вывод о том, что сведения по низшему уровню начинаются со второй группы.

Во втором примере искажен признак уровня (8X вместо 85). В этом случае программа ищет признак 70, если ни одна из первых четырех групп не начинается с 85. Поскольку 4-я группа оказывается содержащей 70, то признак 85 возможен во второй группе. Тогда эта группа проверяется на наличие в ней 85 в искаженном виде, подобно тому как проводится поиск 07 (см. пример на стр. 605). Если эти пробы приводят к положительному результату, то низший уровень будет обнаружен.

Поскольку данные как по уровню 1000 мб, так и по уровню 850 мб могут содержать не по две группы (как в приведенных примерах), а по три, то программа пытается искать признак 70 вплоть до 8-й группы (с учетом возможных лишних групп). После обнаружения группы с искомым признаком, программа пытается разобраться в предыдущих группах, используя при этом признак 0 в группе ветра или специальный тест для поиска искаженного признака 85.

П р и м е р ы.

ТТ 10202 00127 03509 75429 53641 02704 70950 59668

(Здесь успешно действует специальный тест на 85.)

ТТ 10202 00127 03509 01005 //429 53641 02704 70950 59668

3-я гр.

6-я гр.

(Здесь наличие нулей в третьей и шестой группах позволяет установить, что группа, начинающаяся с //, является первой группой с данными уровня 850 мб.)

Описанная методика позволяет обнаружить низший уровень в большинстве случаев.

Если программа не в состоянии найти низший уровень, то соответствующая информация выдается на печать.

Пример.

ТТ 52323 23;/ 60366 58612 02708 (должно быть 70)

Естественно, что программа не может разобраться во всех возможных ошибках (иначе она будет слишком сложной). Поэтому в тех редких случаях, когда она не в состоянии этого сделать, оператор может на основе выдаваемой на печать информации внести исправление с помощью специальной перфокарты (см. гл. 4, § 2).

4. Обнаружение данных остальных стандартных уровней

В ходе расшифровки телеграммы ТЕМП, части А и С, данные запоминаются в последовательно расположенных ячейках макета, которые мы обозначим так:

TH — для данных о геопотенциале,

TT — для данных о температуре и точке росы,

TW — для данных о направлении и скорости ветра.

Сведения по уровню 1000 мб запоминаются в ячейке $TH+0$ (и соответственно $TT+0$, $TW+0$), по уровню 850 мб — в $TH+1$, по уровню 700 мб — в $TH+2$ и т. д. (всего 14 уровней — до 10 мб).

Извлечение данных очередного уровня и переход к следующему осуществляются в следующем порядке.

Запоминание в макете данных некоторого уровня L (геопотенциал, температура, ветер) производится только после идентификации групп следующего уровня $L+1$. При этом определяется число групп с данными по уровню L , а последующие группы проверяются на наличие признака уровней $L+1$, $L+2$ и даже $L+3$ (например, $L=850$ мб, $L+1=700$ мб, $L+2=500$ мб и т. д.).

Пусть G — первая группа уровня L . Если группа $G+2$ начинается с признака уровня $L+1$, а группа $G+3$ не имеет этого признака, то принимается, что G есть группа геопотенциала, а $G+1$ — группа температуры уровня L , и обе эти группы записываются в макет.

Пример.

	G	$G+1$	$G+2$	$G+3$	
ТТ	10202 ...	85429	53641	70950	59668 ... и т. д.
		<u>850 мб, L</u>		<u>700 мб, $L+1$</u>	

85429 — $TH+1$

53641 — $TT+1$

После этого описанный цикл повторяется, причем группа $G+2$ рассматривается теперь уже как G , а уровень $L+1$ как L и т. д., пока не будет обнаружен наивысший уровень.

Если группа $G+2$ не содержит признака уровня $L+1$, то эта же группа испытывается на признак уровня $L+2$ (на случай, если уровень $L+1$ в телеграмме пропущен), а также на признак уровня L (на случай, если уровень L передан дважды).

Примеры.

			G	$G+1$	$G+2$	$G+3$	
ТТ	10202	...	85429	53641	50547	75774	... и т. д. ($L+1$ пропущен)
ТТ	10202	...	85429	53641	85429	53641	70950... и т. д. (L дан дважды)

В последнем случае программа возвращается к обработке данных уровня 850 мб, а группа $G+2$ рассматривается уже как G . Затем идет обычный поиск следующего уровня.

Если все пробы для группы $G+2$ безуспешны, то такие же пробы делаются для $G+3$. Эта группа испытывается на признаки уровней $L+1$, $L+2$ и L . В нормальном случае (т. е. когда обнаруживается признак уровня $L+1$) в соответствующие ячейки извлекаются значения геопотенциала, температуры и ветра на уровне L (при этом группа $G+2$ должна начинаться с нуля). Если в группе $G+3$ обнаружен признак $L+2$, то дополнительно проверяется предположение о возможном пропуске уровня $L+1$.

Обнаружение L в $G+3$ может быть либо при повторении уровня L , либо тогда, когда $G+2$ есть некоторая призначная группа (см. табл. 7 приложения), а $G+3$ принадлежит следующему разделу телеграммы и случайно начинается с разыскиваемого идентификатора уровня. Если группа $G+2$ действительно оказывается призначной (т. е. указывает на окончание сведений по изобарическим поверхностям), то данные о геопотенциале и температуре уровня L запоминаются, а расшифровка данного раздела телеграммы (т. е. сведений по изобарическим поверхностям) заканчивается.

Если в группе $G+3$ не обнаружен признак уровня, то группы $G+1$, $G+2$ и $G+3$ испытываются на призначную группу (табл. 7), а также на окончание сообщения. В положительном случае группы, предшествующие призначной, запоминаются как группы с данными уровня L .

Если описанные испытания дают отрицательный результат, то группа $G+4$ испытывается на призначную группу. Такая ситуация может возникнуть, если, например, $G+1$ имеет признак $L+1$ (первый пример) или группа $G+2$ имеет искаженный признак $L+1$ (второй пример).

1)	ТТ	10202	...	$\overbrace{15333}^G$	$\overbrace{10583}^{G+1}$	$\overbrace{15//5}^{G+2}$	$\overbrace{03219}^{G+3}$	$\overbrace{11122}^{G+4}$	... и т. д.
				150 мб		100 мб			
2)	ТТ	10202	...	$\overbrace{15333}^G$	$\overbrace{11//0}^{G+1}$	$\overbrace{12583}^{G+2}$	$\overbrace{15//5}^{G+3}$	$\overbrace{11122}^{G+4}$	... и т. д.
				150 мб		100 мб			

Если все рассмотренные до сих пор тесты дают отрицательный результат, то группа $G+4$ испытывается на $L+1$. Это может быть, в частности, тогда, когда имеются данные по некоторым дополнительным уровням (600 или 250 мб). Данные по указанным уровням передают лишь немногие станции, и поэтому эти данные не обрабатываются и, следовательно, группы $G+2$ и $G+3$ никуда не извлекаются. Далее, возможно и наличие двух групп ветра по уровню L (если скорость ветра превышает 199 узлов или 99 м/сек.). В этом случае после группы ветра передается еще группа 00200 или 00300 соответственно при скорости ветра в пределах 200—299 и 300—399 узлов. Наконец, вполне возможно появление одной лишней группы в пределах данных уровня L , и ее необходимо отбросить, а данные остальных групп запомнить.

Если проба группы $G+4$ на уровень $L+1$ безуспешна, то $G+4$ испытывается на $L+2$. Так может быть, если, например, признак $L+1$ в $G+2$ искажен (первый пример) или первая группа $L+1$ пропущена (второй пример):

1) ТТ 10202 ... 85429 53641 80950 59668 50547 ...
700 мб

2) ТТ 10202 ... 85429 53641 02704 59668 50547 ...
70950

Если эти тесты безуспешны, то группа $G+5$ испытывается на $L+1$ (т. е. предполагается наличие данных одного лишнего уровня).

Примеры.

		G	$G+1$	$G+2$	$G+3$	$G+4$	$G+5$	
ТТ	41640	...	<u>70112</u>	05574	02210	<u>60353</u>	52990	<u>50578</u> 59992 ...
ТТ	41640	...	<u>70112</u>	05574	<u>60353</u>	52990	02220	<u>50578</u> 59992 ...

Может быть раскодировано также и следующее сообщение, содержащее часть сведений по одному уровню дважды:

	G	$G+1$	$G+2$	$G+3$	$G+4$	$G+5$
ТТ	10202	...	<u>85429</u>	53641	02704	53641 02704 70950 59668 ...

При этом в ячейку TH_L поступит группа G , а в TT_L и TW_L — соответственно группы $G+3$ и $G+4$.

Если группа $G+5$ не содержит признака $L+1$, то делается проба на $L+2$. Так, в частности, может быть раскодировано сообщение с пропущенной группой 70hhh при наличии групп ветра на уровнях L и $L+1$:

	G	$G+1$	$G+2$	$G+3$	$G+4$	$G+5$
ТТ	10202	...	<u>85429</u>	53641	02704	59//8 02510 50547 75//4 ...
			(G	$G+1$	$G+2$	$G+3$)
			(70//i)			

Здесь группы $G+2$ и $G+4$ будут опознаны как возможные группы ветра (имеют признак 0). Так как, кроме того, группа $G+3$ может быть признана группой температуры (с неизвестной точкой росы), то, следовательно, группа с геопотенциалом $L+1$ отсутствует. Тогда группы G , $G+1$ и $G+2$ извлекаются в макет, и после этого группа $G+2$ заменяется в тексте телеграммы группой 70///. Далее эта группа рассматривается как очередная группа G и идет обычный поиск следующего уровня: уровень $L+1$ будет опознан в группе $G+3$ (в новой нумерации групп).

Если же в группе $G+5$ будет найден признак уровня $L+3$, то во избежание неправильной интерпретации дальнейшей части сообщения программа не делает каких-либо преобразований. Программа принимает группы G , $G+1$ и $G+2$ за геопотенциал, температуру и ветер (если первая цифра $G+2$ есть 0) уровня L , игнорирует группы $G+3$ и $G+4$ и начиная с группы $G+6$ ищет уровень $L+4$ (в группе $G+5$ начинается уровень $L+3$).

Если все предыдущие тесты отрицательны, то, подобно группе $G+5$, группа $G+6$ также может быть опробована на $L+1$, $L+2$, $L+3$. Так, в частности, при обнаружении $L+1$ в $G+6$ могут быть раскодированы сообщения с данными по лишнему уровню, включающими геопотенциал, температуру и ветер, или при обнаружении $L+2$ в группе $G+6$ — сообщения с искаженным признаком уровня $L+1$.

При достижении наивысшего уровня (что устанавливается обнаружением некоторой призначной группы или группы пробелов) в макет извлекается группа с идентификатором последнего уровня и, если имеются, соответствующие группы с данными температуры и ветра.

В результате работы рассмотренной программы поиска данных на изобарических поверхностях сообщение ТЕМП, части A и C (пока без сведений о тропопаузе и об уровне максимального ветра), будет представлено в виде макета (табл. 3.3).

Таблица 3.3

Макет аэрологического сообщения ТЕМП, части A и C
(первичная форма)

Число ячеек	Условное обозначение ячеек	Содержание ячеек макета
1	UTIME	YYGGT (T = TEMP)
1	UZLNR	Порядковый номер первой строки сообщения
2	UORD	Сведения из словаря

Продолжение

Число ячеек	Условное обозна- чение ячеек	Содержание макета ячеек
14	TH	$\begin{smallmatrix} 00 \\ GG \end{smallmatrix} hhh$ (1000 мб)
	$TH + 1$	$PPhhh$ (850 мб)
	$TH + 13$	$PPhhh$ * * * * (10 мб) *
14	TT	$TTT_dT_dT_x$ (1000 мб)
	$TT + 13$	$TTT_dT_dT_x$ * * * * (10 мб) *
14	TW	$Oddff$ (1000 мб)
	$TW + 13$	$Oddff$ * * * * (10 мб) *

5. Раскодирование данных о тропопause и об уровне максимального ветра

Раскодирование сведений о температуре и точке росы на тропопause осуществляется так, как описано в разделах 6а и 6б. Так как положительные температуры заведомо исключены, то цифры кода от 00 до 49 всегда воспринимаются как температуры ниже -50°C . Давление обычно дается в миллибарах или в сантиметрах и может быть воспринято непосредственно, без каких-либо преобразований.

Высота тропопause сообщается не всегда. Ее нет, в частности, в сокращенном коде, обозначаемом группой 11144. В таких случаях высота тропопause вычисляется с помощью гидростатического соотношения по данным нижележащего уровня L :

$$h_{\text{трор}} = h_L + \frac{R}{g} \frac{T_L - T_{\text{трор}}}{2} \ln \frac{p_L}{p_{\text{трор}}},$$

а также по данным вышележащего уровня (т. е. $L+1$ вместо L). Если разность этих двух высот не превосходит по абсолютной величине 30 м, то берется среднее из этих высот. В противном случае высота тропопause не запоминается и вырабатывается признак ненадежности данных. Указанные расчеты производятся в ходе гидростатического контроля сообщения (см. раздел 6г).

При раскодировании максимального ветра допустимыми считаются направления только от 01 до 36 (так как скорость ветра кодируется тремя цифрами, и поэтому необходимость добавления 50 к dd при скорости, превышающей 99 узлов, не возникает). Если высота дана в гектометрах (призначная группа 11111), то она превращается в метры.

Принимаются во внимание две тропопаузы и три уровня максимального ветра. Данные о тропопаузах и уровнях максимального ветра запоминаются в макете после сведений по уровню 10 мб. При этом сведения, относящиеся к последнему уровню, расположенному ниже тропопаузы, снабжаются пометкой о наличии и местонахождении в макете данных о тропопаузе.

6. Контроль сведений о метеорологических элементах

Проверке подлежат данные о температуре, точке росы, ветре и высоте стандартных изобарических поверхностей.

а. Температура

Предполагается, что на всех уровнях от 400 мб и выше температура всегда отрицательна (т. е. при $TT=00-49$ температура меньше -50°C , а при $TT=50-99$ температура выше -50°C).

Для установления температуры на уровнях ниже 400 мб рассматривается температура на ближайшем вышележащем уровне $L+1$. Если эта температура известна, а $(TT)_L \geq 50$, то принимается, что $t_L^{\circ} \geq 50^{\circ}\text{C}$ только для уровня $L=1000$ мб и если $t_{850} > 20^{\circ}\text{C}$. В остальных случаях и для остальных уровней при $(TT)_L \geq 50$ считается, что $t_L^{\circ} < 0$.

Температура t_L° считается меньшей -50°C , если $(TT)_L$ в пределах $00-49$ и температура на уровне $L+1$ ниже -30°C . В остальных случаях считается, что при таких $(TT)_L$ температура t_L° положительна.

В том случае, когда температура на уровне $L+1$ неизвестна, значения $(TT)_L \geq 50$ интерпретируются как отрицательные температуры (в пределах от -0 до -49°). Если $(TT)_L < 50$, то $t_L^{\circ} \leq -50^{\circ}\text{C}$ принимается только для станций, расположенных севернее 50° с. ш. (и южнее 50° ю. ш.) и для уровней $p \leq 500$ мб и уровня 1000 мб. При этом еще $T_d T_d$ должно быть больше, чем TT . В противном случае температура считается положительной.

б. Точка росы

Цифры кода $T_d T_d = 99$ интерпретируются как температура точки росы, равная -49°C , только если точка росы на уровне $L+1$ известна и лежит в пределах между -44°C и -73°C .

При $T_d T_d \geq 50$ температура точки росы отрицательна. При $T_d T_d < 50$ температура точки росы считается меньшей -50°C только при отрицательной температуре воздуха. Во всех случаях когда температура точки росы выше температуры воздуха запоминается признак ненадежности данных.

в. Высоты

Для расшифровки высот различных уровней применяются правила, указанные в табл. 3.4.

Таблица 3.4

Схема определения высот различных уровней

Уровень, мб	Значение hhh	Вычисление высоты, м
1000	hhh < 500 hhh ≥ 500	hhh = H ₁₀₀₀ -(hhh - 500) = H ₁₀₀₀
850	hhh ≥ 800 hhh < 600 600 ≤ hhh < 800: ГК слоя 500/700 положительный и H ₇₀₀ ≥ 2700 м; иначе	hhh = H ₈₅₀ hhh + 1000 = H ₈₅₀ hhh + 1000 = H ₈₅₀ hhh = H ₈₅₀
700	hhh ≥ 450 hhh < 200 200 ≤ hhh < 450: ГК слоя 400/500 положительный и H ₅₀₀ < 5100 м; иначе	hhh + 1000 = H ₇₀₀ hhh + 2000 = H ₇₀₀ hhh + 3000 = H ₇₀₀ hhh + 2000 = H ₇₀₀ hhh + 3000 = H ₇₀₀
500—300	hhh	10 × hhh = H _L
200 — 70	hhh	10 × hhh + 10000 = H _L
50	hhh ≥ 500 hhh < 500	10 × hhh + 10000 = H ₅₀ 10 × hhh + 20000 = H ₅₀
30—20	hhh	10 × hhh + 20000 = H _L
10	hhh ≥ 500 hhh < 500	10 × hhh + 20000 = H ₁₀ 10 × hhh + 30000 = H ₁₀

г. Гидростатический контроль¹

Эта подпрограмма по имеющимся в макете данным о высоте и температуре на уровнях L и $L+1$ устанавливает:

1) возможен ли гидростатический контроль (ГК) для этих уровней (т. е. известны ли все величины, необходимые для таких расчетов);

2) не является ли температурный градиент в слое сверхадвентическим;

3) верны ли сведения о толщине слоя $(L+1)/L$.

После выполнения контроля определяется высота тропопазы при наличии соответствующих данных (см. выше, § 4.5).

¹ Метод гидростатического (статического) контроля, разработанный и используемый в Советском Союзе и близкий к излагаемому ниже, рассмотрен в лекциях Л. С. Гандина. Там же изложены и некоторые другие способы контроля исходной информации. (Прим. перев.).

Контроль правильности сведений о толщине слоя $(L+1)/L$ (п. 3) производится следующим образом. Разность сообщаемых высот $(H_{L+1} - H_L)$ сравнивается с толщиной слоя, вычисленной по уравнению статики в предположении о линейной зависимости температуры от p^k в пределах слоя:

$$T = C_1 p^k + C_2 \quad (P_{L+1} \leq p \leq P_L),$$

где $k = \frac{R}{c_p} = \frac{\alpha - 1}{\alpha} \approx 0,28$; p — давление. Заметим, что при этом предположении профиль температуры в пределах каждого слоя имеет вид отрезка прямой на бланке аэрологической диаграммы с координатами T и $(p/p_0)^k$. Такая диаграмма называется штювеграммой (рис. 12).

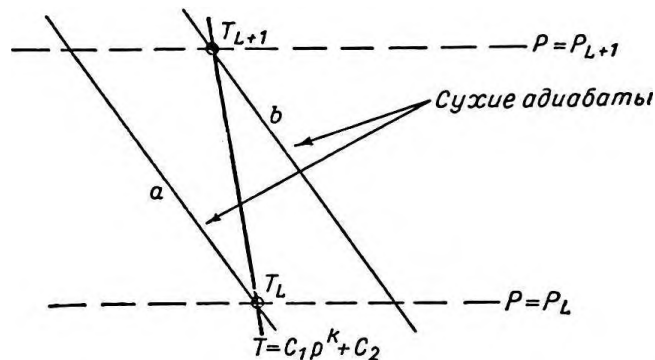


Рис. 12. К контролю толщины слоя $(H_{i+1} - H_i)$ в отсутствии тропопаузы.

Если разность между сообщаемой и вычисленной толщинами слоев по абсолютной величине превышает некоторое допустимое расхождение Δ_L , то данные уровня L , отвечающего нижней границе рассматриваемого слоя, помечаются признаком ненадежности.

Допустимое расхождение Δ_L в свою очередь считается зависящим от той толщины слоя, которая бы имела место при температурном градиенте, равном сухоадиабатическому. Точнее, для определения Δ_L вычисляется полуразность двух возможных толщин данного слоя, отвечающих сухоадиабатическому градиенту температуры соответственно при температуре T_L на нижнем уровне (линия a на рис. 12) и при температуре T_{L+1} на верхнем уровне (линия b).

Определим указанные толщины слоев. В первом случае уравнение адиабаты, проходящей через точку T_L , есть

$$T = T_L (p/P_L)^k$$

(линия a на рис. 12).

Из уравнения статики находим толщину слоя δH_a , отвечающую указанному распределению температуры:

$$\delta H_a = -\frac{R}{g} \int_{P_L}^{P_{L+1}} T \frac{dp}{p} = \frac{R}{g} \int_{P_{L+1}}^{P_L} T_L \left(\frac{p}{P_L} \right)^k \frac{dp}{p} = \frac{R}{gk} T_L \left[1 - \left(\frac{P_{L+1}}{P_L} \right)^k \right].$$

Аналогично во втором случае (линия b на рис. 12) имеем:

$$\begin{aligned} T &= T_{L+1} \left(\frac{p}{P_{L+1}} \right)^k, \\ -\delta H_b &= \frac{R}{g} \int_{P_L}^{P_{L+1}} T \frac{dp}{p} = -\frac{R}{g} \int_{P_{L+1}}^{P_L} T_{L+1} \left(\frac{p}{P_{L+1}} \right)^k \frac{dp}{p} = \\ &= \frac{R}{gk} T_{L+1} \left[1 - \left(\frac{P_L}{P_{L+1}} \right)^k \right]. \end{aligned}$$

В качестве допустимого расхождения Δ_L принимается величина, равная

$$\frac{3}{4} \left| \frac{\delta H_a + \delta H_b}{2} \right|,$$

т. е.

$$\begin{aligned} \Delta_L &= \frac{3}{8} \frac{R}{gk} \left| T_L \left[1 - \left(\frac{P_{L+1}}{P_L} \right)^k \right] - T_{L+1} \left[1 - \left(\frac{P_L}{P_{L+1}} \right)^k \right] \right| = \\ &= \frac{3}{8} \frac{R}{gk} \left| \left[1 - \left(\frac{P_{L+1}}{P_L} \right)^k \right] \left[\left(\frac{P_L}{P_{L+1}} \right)^k T_{L+1} - T_L \right] \right|. \end{aligned}$$

Очевидно, что чем более устойчиво стратифицирована атмосфера в пределах данного слоя, тем большим окажется допустимое расхождение Δ_L (тем больше расстояние между адиабатами a и b на рис. 12). Если оказывается, что $\Delta_L \leq 20$ м, то в качестве Δ_L принимается 20 м. Для уровней 400 мб и ниже, а также в слоях, где проходит тропопауза, значение Δ_L искусственно ограничивается 50 м, для уровней выше 400 мб — 80 м.

Если между уровнями L и $L+1$ расположена тропопауза, то гидростатический контроль для этого слоя производится с учетом температуры $T_{\text{троп}}$ и давления $P_{\text{троп}}$ на уровне тропопавзы (см. рис. 13). В этом случае при гидростатическом контроле в качестве температуры верхнего уровня вместо действительной (сообщенной) ее величины T_{L+1} принимается некоторая приведенная температура T_{L+1}^* , которая отвечает фиктивному температурному градиенту в рассматриваемом слое (прямая $T_{L+1}^* T_L$ на рис. 13), промежуточному между темпе-

ратурным градиентом в нижней (тропосферной) части слоя ($T_{trop}T_L$) и тем градиентом, который мог бы быть определен по значениям температуры T_{L+1} и T_L на границах слоя ($T_{L+1}T_L$).

На рис. 13 прямая $T_{L+1}^*T_x$ параллельна прямой $T_{L+1}T_L$ и, следовательно, имеет место равенство площадей треугольников $T_LT_{trop}T_{L+1}$ и $T_LT_{L+1}^*T_{L+1}$. Но тогда фиктивное распределение температуры $T_LT_{L+1}^*$ дает приблизительно ту же толщину слоя $(L+1)/L$, что и действительное ее распределение $T_LT_{trop}T_{L+1}$.

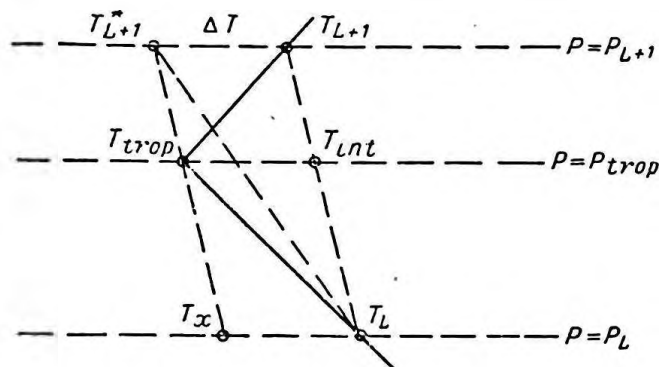


Рис. 13. К контролю толщины слоя ($H_{i+1} - H_i$) при наличии тропопаузы.

Приведенная температура T_{L+1}^* определяется следующим образом. Путем линейной интерполяции находится некоторая вспомогательная величина T_{int} , отвечающая температуре на высоте тропопаузы при ее отсутствии:

$$T_{int} = T_L + (T_{L+1} - T_L) \frac{P_L - P_{trop}}{P_L - P_{L+1}}.$$

После этого приведенная температура T_{L+1}^* определяется по формуле¹

$$T_{L+1}^* = T_{L+1} + \Delta T = T_{L+1} + (T_{trop} - T_{int}).$$

¹ Строго говоря, при вычислении T_{int} следовало бы проводить линейную интерполяцию по p^h , а не по p (как это указано в соответствующей формуле выше). Однако при не слишком больших толщинах слоев ошибка от замены p^h на p в интерполяционной формуле невелика, и ради сокращения вычислений такая замена производится. При этом же допущении о линейном изменении температуры с p (вместо p^h) становится справедливым и приведенное выше утверждение о том, что наблюдаемое распределение температуры $T_LT_{trop}T_{L+1}$ и фиктивное распределение $T_LT_{L+1}^*$ дают одну и ту же среднюю температуру (и толщину) для слоя $(L+1)/L$, ибо при линейной зависимости температуры от давления площади рассмотренных треугольников оказываются пропорциональными толщинам соответствующих слоев.

Если окажется, что $\Delta T \geq 0$, то считается, что имеет место какая-то ошибка в данных, о чем делается пометка в сведениях о тропопаузе. В этом случае при расчете толщины слоя данные о тропопаузе во внимание не принимаются.

д. Ветер

При раскодировании сведений о направлении ветра допустимыми считаются значения dd в пределах 00—36 и 51—86. В последнем случае как направление ветра запоминается разность $(dd-50)$, а как скорость ветра $ii+100$. Скорость, сообщенная в м/сек., может быть переведена в узлы (или наоборот).

Ветровые группы, не состоящие из пяти цифр, могут раскодироваться только при некоторых дополнительных предположениях. Так, группа из четырех цифр, не содержащая признающей цифры 0, превращается в обычную ветровую группу ($ddff \rightarrow 0ddff$) и далее раскодируется обычным порядком. Однако для дальнейшего такая группа снабжается признаком ненадежности.

7. Вычисление пропущенных значений геопотенциальных высот и температуры

Для того чтобы для некоторого уровня исправить ошибочное значение или вычислить отсутствующее значение ветра или температуры (или того и другого), необходимо как минимум иметь полные и правильные данные хотя бы по двум любым последовательно расположенным уровням. Для поиска такой пары уровней данные просматриваются начиная с низшего уровня. Затем производится исправление или довычисление (если необходимо) данных всех остальных уровней — сначала вверх, вплоть до самого верхнего уровня, а затем вниз — до низшего уровня. (Блок-схему программы см. на рис. 14.)

Рассмотрим, как производится расчет отсутствующих значений температуры, значений высоты, а также температуры и высоты вместе.

а. Отсутствуют данные о температуре. Если на некотором уровне L отсутствуют данные о температуре, то температура на этом уровне рассчитывается с помощью гидростатического соотношения в следующем порядке. Сначала расчет температуры ведется с использованием данных о высоте, давлении и температуре на уровне $L-1$ и данных о высоте и давлении на уровне L . Затем та же величина рассчитывается по элементам уровней $L+1$ и L . Эти расчеты проводятся только в том случае, если все необходимые для них величины известны. В противном случае включается специальная подпрограмма, которая в зависимости от наличия данных пытается рассчитать

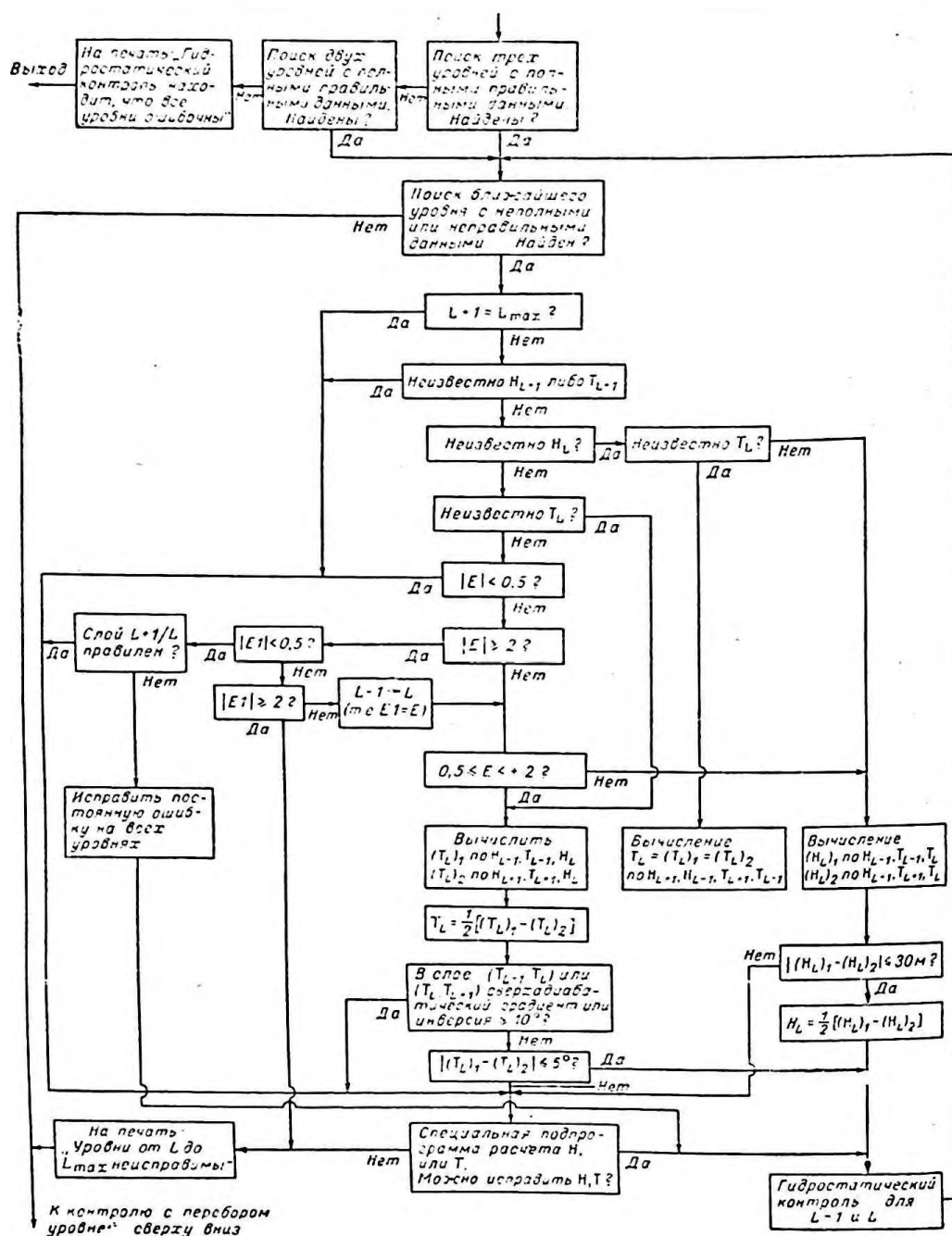


Рис. 14. Упрощенная блок-схема программы расчета пропущенных и исправленных ошибочных значений высот и температур.

L — рассматриваемый уровень, H — высота в метрах, T — температура в $^\circ\text{K}$, E, E_1 — см. § 4.7.

Вариант перебора уровней сверху вниз.

температуру по данным только нижележащего уровня (исправление вверх) или соответственно только по данным вышележащего уровня (исправление вниз).

В том случае, когда имеется достаточно данных и вычисляется два возможных значения температуры, то в качестве искомого значения принимается их полусумма, если выполнены следующие условия: в слоях $L/L-1$ и $L/L+1$ температурный градиент не является сверхадиабатическим и нет инверсии, превышающей 10° ; разность двух вычисленных значений температуры не превышает 5° . После принятия рассчитанного таким путем значения температуры на уровне L вновь производится гидростатический контроль для этого уровня. Если же названные условия не выполнены (т. е. температурные градиенты не отвечают указанным пределам или слишком велика разность рассчитанных значений температуры), то включается упоминавшаяся выше подпрограмма, которая пытается все же найти приемлемое значение температуры по данным только одного (выше- или нижележащего) уровня. Если и это не удастся, то считается, что больше нет других средств для исправления данных на уровне L и всех последующих, т. е. вышележащих в случае движения вверх или нижележащих при движении вниз. Об этом делается специальная пометка в макете и соответствующая информация выдается на печать.

б. Отсутствуют данные о высоте изобарической поверхности. Новое значение высоты на уровне L рассчитывается сначала по данным нижележащего уровня ($L-1$), а затем по данным вышележащего уровня ($L+1$). Если разность двух рассчитанных значений высоты не превышает 30 м, а толщина слоя $L+2/L+1$ (или соответственно $L-1/L-2$ при движении вниз) не вызывает сомнения, то полученная высота принимается как правильная, хотя и с некоторым ограничением. В противном случае высота вычисляется по данным только одного из двух смежных уровней — нижнего или верхнего (используется упоминавшаяся специальная подпрограмма). В этом случае ставится требование, чтобы полученный температурный градиент в слое между рассматриваемым и нижележащим (или соответственно вышележащим) уровнями находился в упомянутых ранее пределах. Если это выполняется, то рассчитанная высота принимается и далее производится повторно гидростатический контроль. Если же указанное условие не выполнено, то дальнейшее исправление признается невозможным и производятся те же действия, что и в аналогичной ситуации при расчете температуры.

в. Отсутствуют данные о высоте и о температуре на уровне L . Прежде всего по данным о толщине слоя $L+1/L-1$ и температуре на уровнях $L+1$ и $L-1$ вычисляется

температура на уровне L . Если такой расчет возможен и полученное значение температуры правдоподобно, то затем вычисляется высота изложенным выше способом.

8. Исправление ошибочных значений высот и температуры

Во всех случаях после завершения описанной процедуры обработки и восполнения недостающих данных некоторого уровня L проводится гидростатический контроль, который должен установить, имеются ли ошибки в полученных величинах или в сообщенных данных (блок-схема программы приведена на рис. 14).

Если ошибок нет, то далее обрабатывается следующий по порядку уровень. Если же контроль указывает на наличие ошибки, то включается программа исправления, которую мы сейчас и рассмотрим.

Прежде всего должен быть установлен характер ошибки. С этой целью вычисляется величина $E = F_{L-1}/F_L$, где F — разность между рассчитанной и сообщаемой толщиной слоя. Как было указано ранее (§ 4.6г), наличие ошибки признается только в случае, когда разность F превышает допустимую невязку Δ . Как только для некоторого слоя $L+1/L$ обнаруживается превышение F_L над допустимой разностью Δ_L , программа рассчитывает величину E и включает подпрограмму исправления ошибки. Здесь мы опишем работу этой программы только для случая исправлений, выполняемых при движении от нижележащих уровней к вышележащим (см. в начале раздела 7). Исправления при переходе от верхних уровней к нижним выполняются аналогичным образом.

Рассмотрим отдельные случаи работы программы исправления в зависимости от величины отношения F_{L-1}/F_L .

$$a) |E| = |F_{L-1}/F_L| < 0,5.$$

В этом случае природа ошибки не ясна. Сначала делается предположение о том, что неверна температура на уровне L . Для ее вычисления включается рассмотренная выше специальная подпрограмма (§ 4.7а), которая определяет новое значение температуры T на уровне L по высоте уровня L и данным уровня $L-1$. Если получающийся при этом температурный градиент в слое $L/L-1$ находится в допустимых пределах и оказывается по сравнению с первоначальным более близким к сухадиабатическому (в тропосфере) или соответственно к условиям изотермии (в стратосфере), то рассчитанное значение температуры на уровне L считается более надежным по сравнению с сообщенным в телеграмме и оно принимается.

Если же одно из этих условий (или оба) не выполняются, то предполагается, что имеется ошибка в значении высоты, а не

температуры. Тогда пересчитывается высота, после чего также проверяется допустимость получающегося температурного градиента.

Затем для слоя $L/L-1$ заново проводится гидростатический контроль.

$F = 50 \text{ м}$	$LE = 0,1$	$F = 30 \text{ м}$	$LE = 1,0$	$F = -30 \text{ м}$	$LE = -1,0$
$F = 5 \text{ м}$	$L - 1$	$F = 30 \text{ м}$	$L - 1$	$F = 20 \text{ м}$	$L - 1$
$F = 0 \text{ м}$		$F = 2 \text{ м}$		$F = 5 \text{ м}$	
$F = 0 \text{ м}$		$F = 0 \text{ м}$		$F = 0 \text{ м}$	
a		b		$в$	

$F = 4 \text{ м}$	$L (L + 1) E = 11,3$	$F = 47 \text{ м} (\Delta = 32 \text{ м})$	$L (L + 1) E = 2,1$
$F = 45 \text{ м}$	$L - 1 (L) E' = 0,1$	$F = 100 \text{ м}$	$L - 1 (L) E' = 0,1$
$F = 5 \text{ м}$	$L - 2 (L - 1)$	$F = 8 \text{ м}$	$L - 2 (L - 1)$
$F = 0 \text{ м}$		$F = 0 \text{ м}$	
z_1^1		z_2^2	

$F = 20 \text{ м}$	$L (L + 1) E = 2,3$	$F = 20 \text{ м}$	$L (L + 1) E = 2,5$
$F = 45 \text{ м} (\Delta = 39 \text{ м})$	$L - 1 (L) E' = -1,0$	$F = 50 \text{ м} (\Delta = 39 \text{ м})$	$L - 1 (L) E' = -1,0$
$F = 45 \text{ м} (\Delta = 50 \text{ м})$	$L - 2 (L - 1)$	$F = -50 \text{ м} (\Delta = 52 \text{ м})$	$L - 2 (L - 1)$
$F = 0 \text{ м}$		$F = 0 \text{ м}$	
z_2		z_3	

$F = 15 \text{ м}$	$L (L + 1) E = 2,2$
$F = 35 \text{ м} (\Delta = 30 \text{ м})$	$L - 1 (L) E' = 2,1$
$F = 75 \text{ м} (\Delta = 76 \text{ м})$	$L - 2 (L - 1)$
$F = 0 \text{ м}$	

z_4

Рис. 15. К определению характера ошибки в данных температуры и геопотенциала по соотношению невязок в соседних слоях (на примере исправления в случае перебора уровней снизу вверх).

Пример только что рассмотренной ситуации дан на рис. 15 а. Напомним, что разность F между сообщаемой и вычисленной толщинами некоторого слоя приписывается нижнему уровню этого слоя. Соответственно невязка для слоя $L/L-1$ обозначается через F_{L-1} . В данном случае она равна 5 м. (Для простоты на рис. 15 индекс при невязке F всюду опущен.)

б) $+0,5 \leq E < +2,0$ (рис. 15 б).

Данное условие указывает на наличие ошибки в температуре на уровне L . В этом случае значение температуры на уровне L рассчитывается по данным на уровнях $L+1$ и $L-1$ таким же путем, как и при отсутствии сведений о температуре (§ 4.7а).

в) $-0,5 \geq E > -2,0$ (рис. 15 в).

В этом случае считается, что ошибочна высота уровня L . Новое значение высоты рассчитывается так же, как и при отсутствии данных о высоте (§ 4.7б).

г) $|E| \geq 2,0$.

Здесь возможна либо ошибка в высоте уровня L , причем эта же ошибка содержится также и в высотах всех вышележащих уровней (поскольку эти высоты были получены по ошибочно определенной высоте уровня L), либо имеется ошибка в данных уровня $L-1$, которая ранее не была выявлена вследствие того, что величина соответствующей невязки F почему-либо оказалась в допустимых пределах. В этом случае уровень $L-1$ снова подлежит проверке. Считая в схеме контроля указанный уровень $L-1$ очередным проверяемым уровнем (L), программа на этот раз наряду с обычными вычислениями рассчитывает также коэффициент

$$E' = (F_{L-1})/(F_L) = F_{L-2}/F_{L-1}.$$

В зависимости от величины коэффициента E' возможны следующие случаи.

г₁) $|E'| < 0,5$.

Если нет ошибки в толщине вышележащего слоя $L+1/L$ (рис. 15 г₁'), то в таком случае предполагается наличие систематической (постоянной) ошибки в высотах всех уровней начиная от уровня L и вплоть до наивысшего. Высоты всех этих уровней будут исправлены на величину невязки F_{L-1} .

Если же данные о толщине вышележащего слоя $L+1/L$ вызывают сомнение (рис. 15 г₁'), то упомянутая выше специальная подпрограмма (§ 4.7а) пытается исправить ошибку на нижнем из этих двух уровней. Если это оказывается возможным, то производится исправление и далее программа переходит к следующему уровню $L+1$ и проверяет, имеется ли теперь ошибка в толщине слоя $L+1/L$. Если исправление оказывается невозможным, то никаких дальнейших попыток исправления не предпринимается.

г₂) $+0,5 \leq E' < +2,0$ (рис. 15 г₂).

Этот результат указывает на ошибку в температуре на уровне $L-1$. В таком случае рассчитывается новое значение температуры, как указано в разделе 8б.

г₃) $-0,5 \geq E' > -2,0$ (рис. 15г₃).

В этом случае должна быть ошибка в высоте на уровне $L-1$. Вычисляется новое значение высоты для этого уровня (см. раздел 8в).

г₄) $|E'| \geq 2,0$ (рис. 15г₄).

Это весьма необычный случай. Характер ошибки установить не удастся, и никакие исправления невозможны.

9. Контроль данных о направлении ветра на двух смежных уровнях

Контроль сведений о направлении ветра возможен лишь в том случае, когда скорость ветра достаточно велика (например, превышает 30 узлов). Подозрение на ошибку в направлении ветра возникает в случае, если направление ветра на двух смежных уровнях L , $L+1$ отличается более чем на 50° . Привлечение данных более далеких уровней $L-1$ и $L+2$ для установления того, на котором из проверяемых уровней имеется ошибка в направлении ветра, будет безрезультатным, если данные на этих уровнях либо отсутствуют, либо ошибочны. В таком случае данные о направлении ветра на обоих уровнях L и $L+1$ снабжаются признаком ненадежности.

Но может быть и так, что такой контроль позволит установить, на каком именно из двух уровней (L или $L+1$) имеется ошибка в направлении ветра, и она должна быть исправлена. Чаще всего грубая ошибка бывает кратна 100° . Однако для исправления направления ветра надежнее воспользоваться интерполяцией.

Пример.

170°	90 узлов	$L+2$	(должно быть 200°)
190	75 "	$L+1$	
300	60 "	L	
210	45 "	$L-1$	

10. Контроль данных о скорости ветра на двух смежных уровнях

Контроль данных о скорости ветра возможен, если скорость достаточно велика (например, превышает 50 узлов). Подозрение на ошибку в скорости ветра возникает тогда, когда имеют место соотношения: $(ff)_{L+1}/(ff)_L > 2$ либо $(ff)_{L+1}/(ff)_L < 0,5$. Если привлечение данных уровней $L-1$ и $L+2$ для определения ошибки оказывается безрезультатным (данных на уровнях $L-1$, $L+2$ нет или они ошибочны), то сведения о скорости ветра на обоих проверяемых уровнях снабжаются признаком ненадежности. Если же данные на уровнях $L-1$ и $L+2$ достоверны, то программа определяет, который из двух уровней (L или $L+1$) содержит ошибку, и новое значение скорости находится путем интерполяции.

Пример.

240°	150 узлов	$L + 2$
220	20	$L + 1$
210	75	L
200	15	$L - 1$

Здесь ошибка на уровне $L + 1$. По-видимому, верное значение равно 120 узлам. Интерполяция дает 112,5 узла.

После раскодирования и контроля всех элементов сообщения **ТЕМП** в памяти машины приобретает форму макета, приведенного в табл. 3.5 (см. табл. 9 приложения, часть д). В таком виде сообщения накапливаются на магнитной ленте для последующего использования программой сортировки и комплектации.

Таблица 3.5

Макет аэрологического сообщения **ТЕМП**, части **A** и **C**
(окончательная форма)

Порядковый номер ячейки	Условное обозначение ячейки	Содержание ячеек	
1	<i>UTIME</i>	YYGGT...42 ($T \equiv \text{ТЕМП}$; 42 — число ячеек в макете)	
2	<i>UZZNR</i>	Порядковый номер первой строки сообщения	
3	<i>UORD</i>	Первая ячейка из словаря	
4	<i>UORD + 1</i>	Вторая ячейка из словаря	
5—18		Высота (м)	разряды 47—30
		Температура (°C)	29—15
		Точка росы (°C)	14—00
		От 1000 до 10 мб	
19—20		Высота (м)	разряды 47—30
		Температура (°C)	29—15
		Точка росы (°C)	14—00
		Первая и вторая тропопавзы	
21—23		Высота (м)	разряды 47—30
		Первые три уровня максимального ветра	
24—37		Направление ветра (десятки градусов)	разряды 47—42
		Скорость ветра (узлы)	41—33
		Давление (мб)	32—15
		Признаки ненадежности	14—00
		От 1000 до 10 мб	
38—42		Направление ветра (десятки градусов)	разряды 47—42
		Скорость ветра (узлы)	41—33
		Давление (мб)	32—15
		Признаки ненадежности	14—00
		Первая и вторая тропопавзы и первые три уровня максимального ветра	

ГЛАВА 4

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СРЕДСТВА РАСКОДИРОВАНИЯ

§ 1. Статистика

Оказывается полезным вести всестороннюю статистику обработки всех поступающих сообщений. Такая регистрация не только дает представление об объеме поступающей информации и о возможных его колебаниях, но также служит для контроля успешности работы системы обработки данных. Дело в том, что каждое сообщение (независимо от наличия или отсутствия в нем искажений) на различных стадиях обработки снабжается теми или иными призначными данными, позволяющими затем точно проследить весь путь, проделанный данным сообщением в ходе работы программы и видеть все решения, которые принимались машинной на разных этапах. Эта информация, касающаяся отдельных сообщений (или соответственно отдельных строк текста) включается в окончательную обработанную форму сообщений или строк. Такие сведения полезны, в частности, для выявления возможных дефектов программы обработки.

Пусть например, известно что внутри синоптической телеграммы имеется группа из десяти цифр. Такая группа должна быть разделена на две пятицифровые группы, которые размещаются так же, как и все такие группы. При этом сообщение получает соответствующую пометку. Если, однако, окажется, что такая отметка не обнаруживается в конце обработки телеграммы, то это означает, что указанная 10-значная группа не проходила обработку соответствующей частью программы. Следовательно, где-то возможна ошибка в программе.

§ 2. Перфокарты модификации

Как отмечалось ранее, при обнаружении любых «неисправных» дефектов соответствующая информация выдается на печать. В ряде случаев опытный метеоролог в состоянии исправить такое сообщение.

Пусть, например, распечатан следующий текст:
«Синоптическая станция с индексом 76627 в словаре не обнаружена. Географический указатель=RR».
«Синоптическая станция с индексом 76757 в словаре не обнаружена. Географический указатель=RR».

В этих сообщениях имеется, очевидно, по два искажения. В заголовке вместо указателя GR (Греция) дан несуществующий указатель RR и дан номер района 76 вместо 16. Если оператор знает, что в Греции существуют синоптические станции с индексами 16627 и 16757, то он может исправить номер района на 16.

Пусть далее распечатан текст:

«Начало аэрологического сообщения ошибочно. Географический указатель=ЕЕ»

=1518 12111 60631 02103 85357 61679 02815 70849 ...

Так как географический указатель ЕЕ (Восточная Европа не определяет однозначно какой-либо один район, то машина не смогла установить номер района. Однако оператор знает, что индекс должен быть 11518.

Подобного рода ошибки после их обнаружения могут быть устранены оператором с помощью специальных перфокарт исправления, которые можно будет вводить в машину при всех последующих сеансах оперативной обработки тех же сводок. Дело в том, что сводки за один и тот же срок обычно обрабатываются по нескольку раз, например при счете предварительного анализа, при счете основного анализа и, наконец, при окончательном анализе, включающем также самые поздние сводки.

Для внесения изменений используются три различных варианта таких перфокарт модификации.

1. К а р т а з а м е н ы. Такая перфокарта позволяет заменить одну строку первоначального текста другой информацией, содержащейся в данной перфокарте. На такой перфокарте первое слово содержит номер строки, подлежащей замене. Последующие девять слов содержат измененный текст строки. (Предполагается, что на 80-колоночной перфокарте помещается содержание десяти последовательных ячеек памяти — по 8 колонок на одно 48-разрядное слово).

2. К а р т а в с т а в к и. Эта карта позволяет вставить в нужное место в виде строки (или строк) содержание данной, а также одной или нескольких следующих за нею перфокарт. Здесь в первом слове наряду с номером строки, после которой нужно сделать вставку, указывается также длина вставки, т. е. число последующих перфокарт с информацией.

3. К а р т а и с к л ю ч е н и я. Эта карта позволяет исключить из обработки группу строк первоначального текста. В первом и втором словах этой перфокарты указывается номер первой и последней строк данной группы.

Специальная разновидность карты исключения позволяет заблокировать выдачу результатов по группе строк. В частности, такая карта может быть полезной тогда, когда программа обработки предусматривает также печать текста телеграмм в их первоначальной форме, а по той или иной причине желательно отпечатать только некоторую определенную часть сводок, пропуская все остальные.

Массив перфокарт модификации вводится в машину, причем последняя карта этого массива снабжается специальным признаком конца. Содержание введенного в машину массива карт модификации программа располагает в порядке возрастания

номеров модифицируемых строк. При каждом переходе к обработке очередной строки текста делается проба на необходимость изменения этой строки соответственно картам модификации. Имеется возможность просматривать таким путем шесть следующих строк текста.

§ 3. Начальное приближение

Под начальным приближением мы будем иметь в виду используемые при обработке данных в качестве вспомогательных средств карты со значениями температуры, геопотенциальной высоты или давления в точках регулярной сетки. Это могут быть либо карты с результатами объективного анализа за предыдущий срок или прогноза на данный срок, либо климатические карты соответствующих элементов.

Выше были указаны способы использования данных начального приближения для корректировки раскодированной информации (см. гл. 3, § 3). При этих расчетах необходимо путем интерполяции определять значения нужных элементов в точках, отвечающих местонахождению станции по значениям этих элементов в узлах сетки. Укажем применяемые интерполяционные формулы. Интерполяция производится по 12 точкам сетки (вблизи краев карты по четырем точкам).

Интерполяционные формулы имеют вид:
для 4 точек

$$G(a, b) = \frac{1}{4} (\Sigma G + 2aG_x + 2bG_y + 4abG_{xy});$$

для 12 точек

$$G(a, b) = \frac{1}{4} \left(\Sigma G - \frac{1}{8} G_{xx} - \frac{1}{8} G_{yy} + 2aG_x + 2bG_y + \right. \\ \left. + 4a^2 \cdot \frac{1}{8} G_{xx} + 4abG_{xy} + 4b^2 \cdot \frac{1}{8} G_{yy} \right).$$

Здесь символы ΣG , G_x , G_y , G_{xy} , G_{xx} , G_{yy} обозначают симметричную сумму и разности значений метеорологических элементов в точках, окружающих станцию:

$$\Sigma G = G_1 + G_2 + G_3 + G_4,$$

$$G_x = -G_1 + G_2 - G_3 + G_4,$$

$$G_y = G_1 + G_2 - G_3 - G_4,$$

$$G_{xy} = -G_1 + G_2 + G_3 - G_4,$$

$$G_{xx} = G_5 - G_1 - G_2 + G_{11} + G_7 - G_3 - G_4 + G_{12},$$

$$G_{yy} = G_9 + G_{10} - G_1 - G_2 - G_3 - G_4 + G_6 + G_5.$$

Здесь индексы указывают номера точек сетки (рис. 16).

Через a и b обозначены координаты станции в системе осей A, B с началом в центре того сеточного квадрата, внутри которого находится станция. Значения этих координат находятся в пределах $\pm 1/2$.

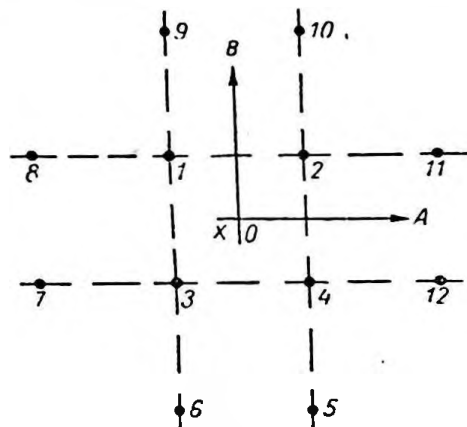


Рис. 16. К расчету начального приближения путем интерполяции значений в точках сетки.

Координаты a и b просто связаны с прямоугольными координатами x, y на плоскости карты, которые в свою очередь с помощью известных формул могут быть рассчитаны по географическим координатам станции. В случае стереографической проекции формулы преобразования имеют вид

$$x = x_{\text{pol}} - r \sin(\lambda - \lambda_0),$$

$$y = y_{\text{pol}} - r \cos(\lambda - \lambda_0),$$

где λ — долгота; λ_0 — долгота линии, параллельной оси Y ;

$$r = c \cos \varphi (1 + \sin \varphi); \quad c = R (1 + \sin \varphi_0)^{1/2} c_0;$$

R — радиус земного шара; φ — широта на параллели главного масштаба; c_0 — шаг сетки.

По этим формулам координаты x, y выражаются числом сеточных интервалов.

ГЛАВА 5

УПОРЯДОЧЕНИЕ СООБЩЕНИЙ

После раскодирования сообщения должны быть упорядочены в соответствии с географическим местоположением станций.

В практике используются различные бланки карт, отличающиеся охватываемой областью и масштабом. Поэтому при упорядочении сообщения должны подбираться отдельно для каждой формы карты, для каждого срока наблюдений и для каждого вида сообщений (синоптические, аэрологические сводки).

Для проведения упорядочения каждый бланк разбивают на серию квадратов. Прежде всего для некоторого сообщения рассчитываются значения соответствующих прямоугольных координат. Тогда легко может быть подсчитано число поступивших станций по каждому квадрату. Произведение этого числа на число ячеек в макете сообщения укажет объем памяти, необхо-

димый для размещения информации по некоторому квадрату. Затем последовательно для каждого квадрата извлекается весь набор отвечающих ему сообщений. Такое упорядочение производится параллельно не для всех, а лишь для части квадратов карты (сектора), насколько это позволяет память.

К числу результатов автоматической обработки данных относятся, в частности, карты с нанесенными данными наблюдений и кривые температурного зондирования. На рис. 17 и 18 представлены полученные в результате обработки соответственно данные по карте АТ₅₀₀ и серия кривых зондирования за 00 час. 8 сентября 1966 г. Карта и график вычерчены автоматическим построителем CALCOMP 780/765, работающим автономно от вычислительной машины в метеоцентре Оффенбах (ФРГ).

ГЛАВА 6

ИСКЛЮЧЕНИЕ ПОВТОРНЫХ И НЕПРАВИЛЬНЫХ СООБЩЕНИЙ

Повторные одинаковые сообщения отбрасываются уже на стадии упорядочения сообщений (гл. 5). Далее производится объединение различных частей сообщения (например, содержащих данные по нижним и по высоким уровням — части А и С). При этом в результате ряда проверок и сопоставлений одна или обе части сообщения могут быть забракованы. Совместимость данных, относящихся к близко расположенным станциям, проверяется с помощью специального горизонтального контроля. Такой контроль позволяет в ряде случаев исключать ошибочные сообщения уже на стадии упорядочения данных.

Автор выражает глубокую признательность за всестороннюю помощь своим коллегам д-ру В. Эдельману, д-ру Р. Лампу и д-ру К. Веге, которым принадлежит вся рассмотренная здесь система автоматической обработки данных.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица 1

Единые сокращенные обозначения для приземных данных (ТТ)

Латинский шрифт	Русский шрифт	
SI	СИ	Приземные данные за промежуточные сроки
SM	СМ	Приземные данные за основные сроки
*	*	То же
SY	СИ	SYNOP (СИНОП) — вспомогательный указатель (например, при отсутствии заголовка)

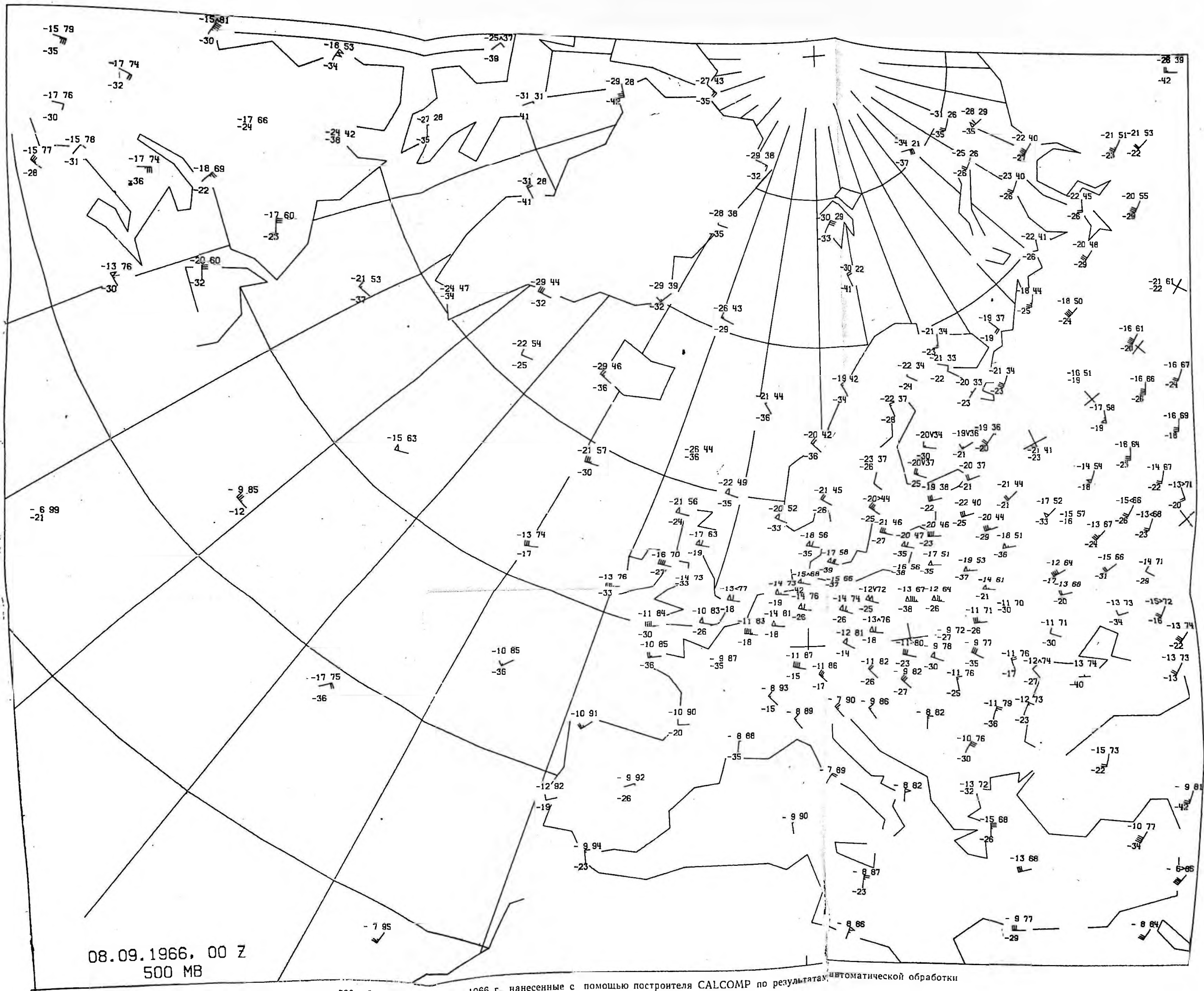


Рис. 17. Данные по уровню 500 мб за 00Z 8 сентября 1966 г., нанесенные с помощью построителя CALCOMP по результатам автоматической обработки

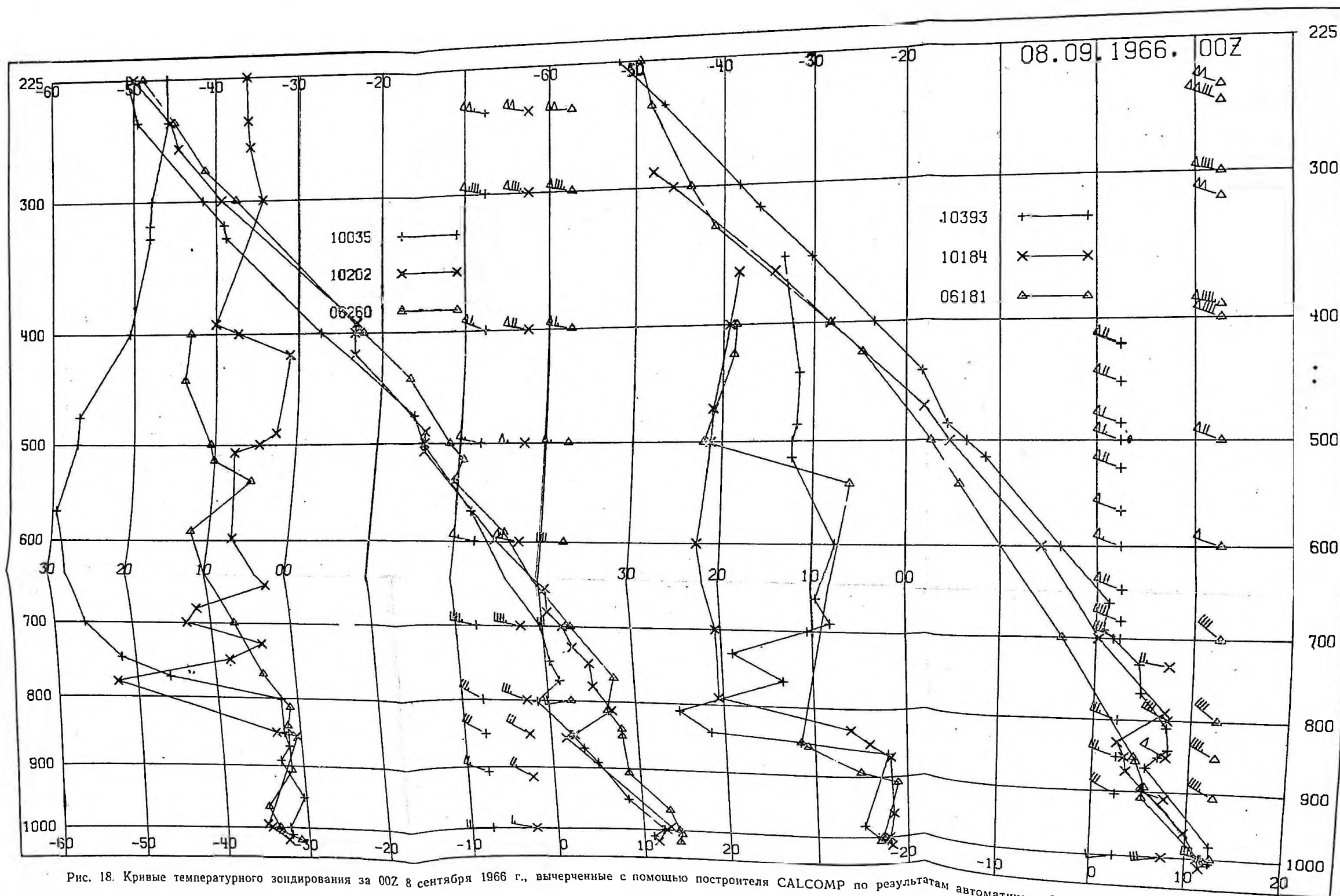


Рис. 18. Кривые температурного зондирования за 00Z 8 сентября 1966 г., вычерченные с помощью построителя CALCOMP по результатам автоматической обработки данных наблюдений.

Таблица 2

Единые сокращенные обозначения для аэрологических данных (ТТ)

Латинский шрифт	Русский шрифт	
UR	УР	Данные самолетной разведки
UC	УЦ	Сменные шаропилотные и радиозондовые сводки
UG	УГ	Пилот, часть В
UH	УХ	Пилот, часть С
UI	УИ	Пилот, части А и В
UK	УК	Радиозонд, часть В
UL	УЛ	Радиозонд, часть С
UM	УМ	Радиозонд, части А и В
UP	УП	Пилот, часть А
US	УС	Радиозонд, часть А
UW	УВ	Радиопилотные наблюдения

Таблица 3

Прочие указатели данных („бесполезные“ для рассматриваемой системы обработки данных) (ТТ)

AS	АС	Приземный анализ
AU	АУ	Аэрологический анализ
FC	ФЦ	Прогноз по аэродрому (TAF)
FS	ФС	Приземный прогноз
FT	ФТ	Прогноз по аэродрому (TAFOR)
FU	ФУ	Аэрологический прогноз
SA	СА	Ежечасные (и получасовые) наблюдения для аэродромов (AERO)
SN	СН	Приземные наблюдения в нестандартные сроки
UA	УА	Авиационные прогнозы

Таблица 4

Сокращенные обозначения географических указателей (АА) для судовых сводок

CA	ЦА	Карибское море
EU	ЕУ	Европа
IO	ИО	Индийский океан
MM	ММ	Средиземное море
NT	НТ	Северная Атлантика
PA	ПА	Тихий океан
XX	bb	Для обозначения в остальных случаях

Таблица 5

Сокращенные обозначения географических указателей (АА) для сводок данных сухопутных станций (в скобках указаны соответствующие номера районов)

AB	АБ	(13)	BM	БМ	(48)
AF	АФ	(60—65)	BU	БУ	(15)
AK	АК	(70)	BX	БХ	(06)
AO	АО	(61)	BY	БЫ	(26—33)
AR	АР	(40)	CA	ЦА	(78)
BE	БЕ	(78)	CI	ЦИ	(46—59)

Продолжение

CL	ЦЛ	(43)	LV	ЛЖ	(26)
CN	ЦН	(72)	ML	МЛ	(16)
CR	ЦР	(60)	MW	МВ	(08—63)
CZ	ЦЗ	(11)	MX	МЬ	(76)
DL	ДЛ	(10)	NE	НЕ	(17—62)
DN	ДН	(06)	NL	НЛ	(06)
EE	ЕЕ	(10—15)	NO	НО	(01)
EO	ЕО	(23)	OS	ОС	(11)
EU	ЕУ	(01—37)	PA	ПА	(91)
EW	ЕВ	(03—08)	PH	ПХ	(98)
FA	ФА	(06)	PK	ПК	(41)
FI	ФИ	(02)	PL	ПЛ	(12)
FR	ФР	(07)	PO	ПО	(08)
GH	ГХ	(40)	RA	РА	(20—38)
GI	ГИ	(08)	RO	РО	(15)
GL	ГЛ	(04)	RS	РС	(20—38)
GR	ГР	(16)	SA	СА	(78—93)
HK	ХК	(45)	SD	СД	(40)
HU	ХУ	(12)	SL	СЛ	(61)
IC	ИЦ	(48)	SN	СН	(02)
ID	ИД	(48—97)	SP	СП	(08)
IE	ИЕ	(03)	SW	СВ	(06)
IL	ИЛ	(04)	TH	ТХ	(48)
IN	ИП	(42—43)	TU	ТУ	(17)
IQ	ИЯ	(40)	UK	УК	(03)
IR	ИР	(10)	UR	УР	(33—34)
IY	ИЫ	(16)	US	УС	(72)
JP	ЙП	(47)	XN	ЬН	(01—98)
KO	КО	(47)	XX	ЬЬ	(01—98)
LT	ЛТ	(26)	YG	ЫГ	(13)

Таблица 6

Двухбуквенные указатели различных типов аэрологических сообщений (M_iM_j)

	Сухопутные станции		Судовые станции	
	латинский шрифт	русский шрифт	латинский шрифт	русский шрифт
Радиозонд, части А, В	ТТ	ТТ	ВВ	ВВ
часть С	VV	ЖЖ	УУ	ЫЫ
Пилот, части А, В	РР	ПП	ЛЛ	ЛЛ
часть С	QQ	ЯЯ	ММ	ММ

Таблица 7

Специальные призначные группы внутри сообщений ТЕМП

- 10101 — сведения об облачности
- 11100 — максимальный ветер
- 11122 — данные о тропонаузе
- 11144 — данные о тропонаузе (в сокращенном коде)

Продолжение

33333 — сведения об относительной топографии
 55555 — сведения об особых точках: температура, точка росы
 (и ветер)
 66666 — сведения об особых точках: температура (и ветер)
 77777 — сведения об особых точках: ветер
 88888 — сведения об особых точках: температура и ветер
 МММУ_{L_a}U_{L_o} — группа Марсдена

Таблица 8

Таблица международного телеграфного алфавита № 2
(МТК-2) и кода BCD

Регистр „Буквы“			Знак на пер- фолянте (пось- меричная запись)	Регистр „Цифры“		Примечание
изображение знака		код BCD		изображе- ние знака	код BCD	
латинский шрифт	русский шрифт					
			00			Переход на „буквы“
T	Т	63 (60)	01 02	5	05 (60)	Возврат каретки
O	О	46 60	03 04	9	11 60	Пробел
N	Х	30	05	Щ	(60)	
N	Н	45	06	.	73	
M	М	44 (60)	07 10	.	33 (60)	Перевод строки
L	Л	43	11	)	34	
R	Р	51	12	4	01	
G	Г	27	13	Ш	(60)	
I	И	31	14	8	10	
P	П	47	15	0	00	
C	Ц	23	16	:	67	
V	Ж	65	17	=	13	
E	Е	25	20	3	03	
Z	З	71	21	+	61	
D	Д	24	22	*	(60)	„Кто там?“
B	Б	22	23	?	67	
S	С	62	24	,	54	
Y	Ы	70	25	6	05	
F	Ф	26	26	3	(60)	
X	Ь	67	27	/	61	
A	А	21	30	—	40	
W	В	66	31	2	02	
J	Й	41 (60)	32 33	Ю	(60) (60)	Переход на „цифры“
U	У	64	34	7	07	
Q	Я	50	35	1	01	
K	К	42 (60)	36 37	(	74 (60)	Переход на „буквы“

Таблица 9

Различные формы представления сообщений

а. Текст, отпечатанный телетайпом

NNNN
ZCZC
USIN DEMS N 020000
TT 43149 00024 85952 20186 02717 70102 09095 02918 50583
56//0 03009 40755 65//4 0320 930969 77//7 01704 20248 00//1
00939 15431 13//0 00843=
SMDL1 DIPD N 020000
385 68031 09016 8095/ 11815 =
185 51405 68012 07416 25570 11816=
NNNN
ZCZC

б. Первоначальная форма

00001 NNNN
00002 ZCZC
00003 UZIN DEMS N 020000
00004 TT 43149 00024 85952 20186 02717 70102 09095 02918 50583
00005 56//0 03009 40755 65//4 0320 930969 77//7 01704 20248 00//1
00006 00939 15431 13//0 00843=
00007 SMDL1 DIPD N 020000
00008 385 68031 09016 8095/ 11815 =
00009 185 51405 68012 07416 25570 11816=
00010 NNNN
00011 ZCZC

Примечания: 1. Программа упорядочения групп (гл. 3, § 3. 2) превратит 5-ю и 6-ю группы пятой строки в две пятизначные группы.
2. Перед синоптическими сообщениями нет группы 99911. Поэтому номер района П=10 будет определен по данным ВЛМК.
3. В сообщении со станции 10385 (8-я строка) пропущена вторая группа (группа видности). Информация об этом будет выдана на печать (см. ниже). Для дальнейшего эта группа изменится группой 1111.

Продолжение табл. 9

132	1103001105110605	0707616107600505	0001070004600505	0200020410600505	0000616101600505	6060606060606060
140	6060606060606060	6060606060606060	6060606060606060	0000005200000002	6060606060606060	6060606060606060
146	6060606060606060	6060606060606060	6060606060606060	0000000000000000	0000110311600505	0105040301600505
154	0103616100500505	0000100403130506	6060606060606060	6060606060606060	6060606060606060	6060606060606060
162	6060606060606060	6060606060606060	6060606060606060	6060606060606060	6060606060606060	6060606060606060
170	0000002400000025	6060606060606060	6060606060606060	6060606060606060	6060606060606060	6060606060606060
176	000000007606050	6244244301600105	2431472460600004	4560606060600001	0002000000000006	6060606060606060
204	6060606060606060	6060606060606060	6060606060606060	6060606060606060	6060606060606060	6060606060606060
212	6060606060606060	6060606060606060	6060606060606060	0010000700000020	6060606060606060	6060606060606060
220	6060606060606060	6060606060606060	6060606060606060	0000000010606060	0310056060600303	0610000301600505
226	0010000106600505	1000110561600505	0101100105600505	1360606060600001	6060606060606060	6060606060606060
234	6060606060606060	6060606060606060	6060606060606060	6060606060606060	6060606060606060	6060606060606060
242	0000002700000030	6060606060606060	6060606060606060	6060606060606060	6060606060606060	6060606060606060
250	0000000011606060	0110056060600303	0501040005600505	0610000102600505	0007040106600505	0205050700600505
256	0101100106600505	1360606060606060	6060606060606060	6060606060606060	6060606060606060	6060606060606060
264	6060606060606060	6060606060606060	6060606060606060	0000003400000035	6060606060606060	6060606060606060
272	6060606060606060	6060606060606060	6060606060606060	0000000010060606	4545454560600004	6060606060606060
300	6060606060606060	6060606060606060	6060606060606060	6060606060606060	6060606060606060	6060606060606060
306	6060606060606060	6060606060606060	6060606060606060	6060606060606060	6060606060606060	6060606060606060
314	0070000000000004	6060606060606060	6060606060606060	6060606060606060	6060606060606060	6060606060606060
Зона № 2						
0	0000000101606060	7123712360600004	6060606060606060	6060606060606060	6060606060606060	6060606060606060
6	6060606060606060	6060606060606060	6060606060606060	6060606060606060	6060606060606060	6060606060606060
14	6060606060606060	6060606060606060	6060606060606060	6060606060606060	6060606060606060	6060606060606060
22	6060606060606060	6060606060606060	6060606060606060	0000000000000004	6060606060606060	6060606060606060

д. Раскодированные сообщения в форме макетов, подготовленных для программы упорядочения

Три рассматриваемых сообщения — одно аэрологическое и два синоптических — занимают соответственно 42, 10 и 10 ячеек и расположены в ячейках с номерами 0—51, 52—63 и 64—75 (и восьмеричной нумерации). Размещение информации в макетах указано в табл. 3.2 и 3.5. (стр. 598 и 624)

0	0002000063000052	0000000001606060	0403010411044004	6546001334020000	0000300017577777	00265550012200113
6	0060360001600046	0133067774777777	0165767770177777	0227327762077777	0303007746677777	0337467740377777
14	77777777777777	77777777777777	77777777777777	77777777777777	77777777777777	77777777777777
22	77777777777777	77777777777777	77777777777777	77777777777777	77777777777777	77777777777777
30	3302101522000100	3502201274000000	3601100764000000	4001100620000000	2100400454000000	1104700310000000
36	1005300226000000	7777700144000000	7777700106000000	7777700062000000	7777700036000000	7777700024000000
44	7777700012000000	7777777770000000	7777777770000000	7777777770000000	7777777770000000	7777777770000000
52	0002000062000012	0000000010606060	0100031005400404	7623615056020000	6161616161777776	0610000301777716
60	0010000106100406	1000110561040026	0101100105777770	0000077777777777	0002000032000012	0000000011603060
66	0100011005440000	7624215414020000	0501040005160120	0610000102777713	0007040106100352	0205050700040026
74	0101100106777770	0000077777777777				

М. И. ЮДИН

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ СТАТИСТИЧЕСКОГО ПОДХОДА В ЧИСЛЕННЫХ ПРОГНОЗАХ

1. Из прочитанных ранее лекций следует, что используемые в настоящее время методы численного краткосрочного прогноза опираются на сравнительно небольшое число основных допущений. Было показано также, что развитие методики прогнозов в различных странах идет близкими путями. Необходимо, однако, подчеркнуть, что сходство различных существующих методов численных прогнозов относится лишь к их самым общим принципиальным основам. Если же рассмотреть вопрос подробнее, то нетрудно убедиться в большом разнообразии существующих вычислительных схем.

2. Необходимо разобраться в том, почему так велико число разработанных численных схем и почему оно продолжает быстро возрастать. При разработке вычислительных схем возникает множество отдельных вопросов, относящихся, во-первых, к выбору способов учета различных физических факторов, определяющих нестационарные атмосферные процессы, во-вторых, к выбору способов представления полей метеорологических элементов и, в-третьих, к выбору способов решения уравнений задачи. Если исследователь расчленяет проблему на n отдельных частных задач — блоков схемы и имеет возможность выбрать один из a_k способов построения k -го блока, то общее число различных вариантов схемы будет равно произведению $\prod_{k=1}^n a_k$.

Легко понять, что число различных вычислительных схем, которые можно построить таким путем, чрезвычайно велико. Практически из них реализована лишь ничтожная часть. При этом, очень важно отметить, что выбор того или иного решения отдельной частной задачи лишь в очень редких случаях может быть обоснован общими теоретическими соображениями. В подавляющем большинстве случаев правильный выбор может быть сделан лишь при наличии определенных сведений, полученных эмпирическим путем.

3. Совершенно очевидно, что успешность той или иной расчетной схемы не может оцениваться по результатам единичного

прогноза. Какой бы критерий успешности ни был избран для оценки — средняя ошибка прогноза высоты барической поверхности или прогноза ветра, отклонение предвычисленного положения барического центра от истинного или какая-либо другая величина — он всегда будет выражаться как некоторая статистическая характеристика успешности, определяемая по достаточно большой совокупности прогнозов. Отсюда ясно, что построение каждого блока вычислительной схемы должно содержать элементы статистического исследования, поскольку при этом выполняются некоторые эмпирические оценки. Эффективность работ по усовершенствованию численных методов прогноза во многом зависит от того, насколько четко спланировано это исследование и выбраны ли при его осуществлении наиболее подходящие статистические методы.

4. Очень большую роль в развитии методов численного прогноза сыграли численные эксперименты, выполненные с помощью вычислительных машин. Как правило, эти эксперименты состояли в параллельном испытании нескольких вариантов прогностической схемы, анализе свойств различных вариантов ошибок и выборе лучших из них. Работы такого рода велись почти в каждой исследовательской группе по численным прогнозам. Благодаря им были вскрыты и существенно уменьшены, а в некоторых случаях совсем устранены многие типичные ошибки распространенных вычислительных схем прогноза.

В большинстве случаев причины возникновения этих ошибок не удавалось выяснить заранее путем теоретического анализа. Только после установления этих ошибок на основе эмпирического исследования оказывалось возможным понять, почему они возникали, и предложить пути совершенствования прогнозов. Обычно теория указывает при этом лишь идею работ по исключению того или иного источника ошибок, а для нахождения оптимального решения требуется сопоставить несколько вариантов, реализующих эту идею.

5. Отметим в качестве примеров некоторые из частных задач, которые решались путем численного эксперимента (главным образом на вычислительных машинах).

а. Устранение эффекта так называемого ложного антициклогенеза путем перехода от квазигеострофической к квазисселеноидальной или соленоидальной полугеострофической модели [44, 33].

б. Уточнение предсказанной скорости перемещения планетарных волн с использованием различных полуэмпирических приемов [32, 36, 45, 13].

в. Полуэмпирические способы учета тепловой трансформации воздуха в численном прогнозе [34, 23 и др.].

г. Определение дивергенции горизонтальной скорости ветра по полю приземной барической тенденции [14].

д. Определение значения коэффициента турбулентности, которое должно вводиться в прогностическую схему [9, 2].

е. Выбор пространственных шагов для замены производных конечными разностями, расчета лапласианов и якобианов [40, 30, 10, 21 и др.].

ж. Выбор шага и численной схемы интегрирования уравнений задачи по времени [35, 16, 3, 15, и др.].

Можно было бы значительно увеличить число примеров использования численных экспериментов. Однако уже сказанного достаточно для того, чтобы убедиться в большом значении эмпирических исследований при усовершенствовании как физической постановки задачи численного прогноза, так и ее решения.

6. Нельзя, однако, рассчитывать на то, что оптимальные численные схемы прогноза могут быть построены только путем численного эксперимента. Дело в том, что ошибки, возникающие при построении различных блоков схемы, не независимы, а связаны между собой. Если, например, путем численного эксперимента определен оптимальный способ сглаживания метеорологических полей, исходя из некоторого метода интегрирования уравнений во времени, а затем выполняется варьирование этого метода интегрирования, то сглаживание уже не будет оптимальным. То же самое произойдет, если изменить методику расчета пространственных производных и т. д.

В общем, практически почти для каждой частной задачи можно утверждать, что относительная точность различных вариантов ее решения зависит от того, какие приемы избраны для решения других частных задач. Но тогда мы опять приходим к необходимости перебирать очень большое число различных вариантов прогностической схемы, что практически невозможно.

Это значит, что необходимо разработать какой-то общий подход, позволяющий приблизительно оценивать эффекты, которых следует ожидать при вариации различных деталей определенной схемы прогноза без выполнения специального численного эксперимента. Используя такой подход, можно заранее выяснить, какие пути решения задачи прогноза не имеют перспектив, и исключить их из рассмотрения. Тем самым во много раз сокращается число подлежащих экспериментальному сопоставлению вариантов и поиски оптимальных решений могут быть систематизированы и ускорены.

7. Общий подход к априорной оценке ошибок решения задачи прогноза удалось наметить только в самое последнее время. Он состоит в том, что каждое трехмерное поле начальных данных за определенный срок, а также поле ошибок отдельного прогноза рассматриваются как индивидуальные реализации слу-

чайных полей одноименных величин. Изучив раз и навсегда основные статистические свойства рассматриваемых метеорологических полей, можно построить алгоритм для расчета средних ошибок прогноза.

Не следует, конечно, преувеличивать возможности общего статистического подхода к построению оптимальных прогностических схем. Основные статистические свойства метеорологических полей, которые требуется знать, т. е. ковариационные функции во времени и в пространстве, могут быть определены лишь весьма приближенно. Кроме того, если не применять специальных предосторожностей, то при расчетах статистических характеристик полей производных (конечных разностей) сравнительно малые неточности определения формы ковариационных функций приведут к значительно большим окончательным ошибкам. На результатах расчетов может сказываться также неполная справедливость принимаемых гипотез о локальной статистической однородности и изотропности метеорологических полей. Но при всех этих недостатках использование сведений о статистической структуре метеорологических полей перед и наряду с численным экспериментом открывает, по нашему мнению, новые большие возможности усовершенствования численных прогнозов.

8. До настоящего времени изложенный подход был применен лишь в небольшом числе исследований. Были рассчитаны спектральные плотности ряда линейных и нелинейных членов уравнений динамики атмосферы, уточнены оценки погрешностей, возникающих за счет отбрасывания ряда малых членов. Методы и результаты выполненных расчетов изложены в работах М. И. Юдина [26, 27] и С. Панчева (1964). В работе М. И. Юдина и И. Л. Вулис [29] выполнен анализ ошибок сеточной аппроксимации уравнения баланса и показано, что эти ошибки сильно зависят от выбранных способов определения якобиана и лапласиана. Поскольку работы этого направления только начаты, их результаты ни в коей мере не дают полного представления о возможностях и перспективах рассмотренного метода.

9. Рассмотрим теперь вопрос о необходимости сочетания гидродинамического и статистического подходов в численном прогнозе с другой точки зрения.

Заметим, что с известным приближением атмосферу можно рассматривать как сложную нелинейную колебательную систему, обладающую многими степенями свободы и находящуюся в тесном взаимодействии с деятельным слоем океана и суши. Выполненные исследования показали, что эта система в некоторых отношениях неустойчива, так что производить расчет всех индивидуальных деталей движения при прогнозе не имеет смысла. Те короткопериодические локальные атмосферные процессы, характер которых зависит от весьма небольших изме-

нений начального состояния или последующего притока тепла и влаги в систему, при гидродинамическом прогнозе необходимо рассматривать как флуктуации и изучать их поведение статистическими методами.

На этой идее, собственно говоря, основывается вся теория турбулентности. Но если обычно при изучении турбулентности промежуток осреднения составляет несколько секунд или минут, то при суточном прогнозе необходимо исключать из индивидуального рассмотрения движения, время релаксации которых составляет несколько часов, а при долгосрочном прогнозе даже такие процессы, время релаксации которых измеряется сутками. Поскольку такие процессы находятся в энергетическом взаимодействии с подлежащими индивидуально рассмотрению наиболее устойчивыми элементарными движениями, задача правильного статистического описания этого взаимодействия представляется весьма серьезной.

10. Основы статистической теории турбулентности были, как известно, заложены в 1924 г. Л. В. Келлером и А. А. Фридманом [39]. Эти ученые ввели в рассмотрение ковариационные функции температуры, давления и скорости (в работах Фридмана и Келлера ковариационные функции были названы моментами связи) и построили приближенные уравнения для определения средних значений элементов движения и моментов связи. Е. Н. Блинова [4, 5] использовала идею Келлера и Фридмана применительно к задаче о долгосрочном прогнозе сглаженных значений функции тока, т. е. прогнозе планетарных движений. Уравнения задачи для случая двухуровневой квазисоленондальной модели подробно рассмотрены в работе М. Б. Галина [8].

Другой возможный путь статистического решения уравнений динамики атмосферы состоит в применении метода статистических испытаний. Однако для реализации этого пути необходимо более детально изучить ряд вероятностных характеристик атмосферных движений.

11. Рассмотрим теперь вопрос об использовании в целях численного прогноза разложений метеорологических полей в ряды по естественным ортогональным функциям. Идея таких разложений, позволяющих получить наиболее точные представления случайных функций малым числом членов ряда, была разработана Хотеллингом в 1933 г. Она состоит в том, что форма ортонормированных функций, по которым ведется разложение, не задается априори, а определяется исходя из статистических свойств рассматриваемого поля. Рассмотрим поле случайной функции F , распределенной по нормальному закону и удовлетворяющей условию $\bar{F}=0$. Введем далее в рассмотрение систему ортогональных нормированных функций $\xi_{jk}=\xi_j(p_k)$ координаты p , считая, что функция F задана при n различных значе-

ниях $p = p_k$. Тогда по определению функций ζ_j должны выполняться условия ортогональности и нормированности

$$\sum_{k=1}^n \zeta_{jk} \zeta_{lk} = \begin{cases} 1 & \text{при } l = j, \\ 0 & \text{при } l \neq j. \end{cases} \quad (1)$$

Кроме того, для определения формы естественных функций необходимо потребовать, чтобы сумма квадратов ошибки разложения при учете любого числа членов ряда, меньшего n , была минимальна

$$D_m(F) = \sum_{k=1}^n \left[F(t, x, y, p_k) - \sum_{j=1}^m f_j(t, x, y) \zeta_{jk} \right]^2 = \min. \quad (2)$$

при $m = 1, 2, \dots, n-1$.

Величину $D_m(F)$ называют остаточной дисперсией. Условие минимума остаточной дисперсии означает, что разложение функции F в ряде по ζ_j приводит к оптимальному (в статистическом смысле) представлению поля F по сравнению с разложением в ряд по любой другой системе базисных функций.

Практически естественные функции ζ_j определяются как собственные векторы ковариационной матрицы случайной функции F . Собственные числа ковариационной матрицы λ_j оказываются равными дисперсиям функций f_j (коэффициентов разложения).

12. Разложение метеорологических полей в ряды по естественным функциям стало практиковаться с 50-х годов. В работах Фукуока [37], Лоренца [42], Н. А. Багрова [1] и др. рассматривались поля метеорологических элементов, заданные на определенной изобарической поверхности, и определялось значение естественных функций в точках x_i, y_i . Этот метод нашел применение в статистических прогнозах погоды — см., например, монографию Лоренца [43] и статьи Уайта и др. [46, 47]. Показана также возможность использования разложений по естественным функциям для целей типизации метеорологических ситуаций и анализа аналогичности процессов — Н. И. Яковлева, А. В. Мещерская [31], Г. Д. Кудашкин [12]. В этих работах были использованы разложения метеорологических полей по естественным функциям горизонтальных координат.

В данной лекции мы рассмотрим только вопрос о разложениях по вертикальной координате как средстве экономного представления метеорологической информации при построении гидродинамических моделей атмосферы. А. М. Обухов [17] показал, что вертикальное распределение междусуточных изменений геопотенциала в пределах тропосферы можно удовлетворительно описать, используя всего два члена ряда. Он выдвинул также предположение об устойчивости значений первых естественных функций, основываясь на сопоставлении двух выборочных расчетов.

Анализ обширных материалов разложений полей ветра и геопотенциала, относящихся к разным сезонам и географическим районам, был выполнен Л. В. Руховцом [18].

Оказалось, что различие физико-географических условий очень мало влияет на формы естественных функций, а в основном отражается на значениях средних квадратов функций $f_j(t, x, y)$. Более того, естественные функции остаются практически одинаковыми при разложении полей меридиональной или зональной составляющих ветра (точнее, отклонений этих величин от средних климатических значений), междусуточных изменений геопотенциала или отклонений геопотенциала от нормы.

Это позволяет говорить о существовании в атмосфере универсальных «главных колебаний». Особенно убедительным представляется свойство универсальности в свете следующих фактов.

Л. В. Руховец варьировал уровни, на которых задано поле ветра и, в частности, добавлял к пяти тропосферным уровням (1000, 850, 700, 500, 300 мб) стратосферные уровни 200 и 100 мб. Оказалось, что и в этом случае форма главных колебаний сохраняется, но введение каждого дополнительного уровня приводит к выявлению нового главного колебания.

В настоящей лекции не представляется возможным привести материалы, относящиеся ко всем аспектам свойства устойчивости естественных функций. Ограничимся небольшим числом иллюстраций, заимствованных из работ Л. В. Руховца [18, 19].

Рисунок 1 показывает, насколько мало изменяются естественные функции при рассмотрении разных (меридиональной и зональной) составляющих ветра и в зависимости от сезона. Естественные функции, показанные на этом рисунке, построены по данным только тропосферных уровней. Сравнивая рис. 1 и 2, легко убедиться в сохранении форм главных колебаний при добавлении стратосферных уровней 200 и 100 мб. Два новых главных колебания описываются на рис. 2 функциями ξ_3 и ξ_4 . Рассмотрение рис. 3 и его сопоставление с рис. 1 подтверждает указанное выше свойство универсальности естественных функций по отношению к суточным изменениям геопотенциала, его отклонениям от нормы и составляющим скорости ветра.

13. Другое, не менее важное свойство естественных функций состоит в том, что одновременно с увеличением порядкового номера члена ряда (а тем самым с уменьшением объема описываемой этим членом ряда полезной информации) уменьшается также характерный пространственный масштаб движения. Увеличивается число смен знака функции и соответственно уменьшается некоторая характерная длина волны, которую можно приписать данному главному колебанию.

Из сказанного следует вывод, что последние члены ряда разложения по естественным функциям в основном описывают

вклад мелкомасштабных короткопериодических атмосферных процессов, обладающих многими характерными свойствами «метеорологических шумов». При изучении атмосферных движений, тепло- и влагообмена в глобальных масштабах прямой учет таких мелкомасштабных компонент поля представляется

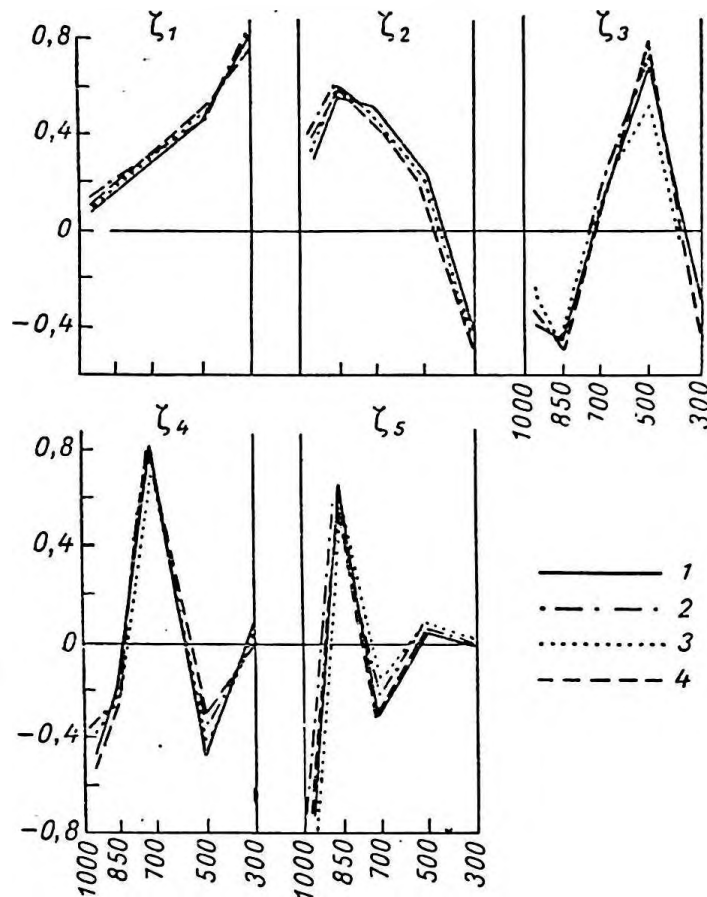


Рис. 1. Естественные функции вертикальных распределений в тропосфере составляющих ветра (меридиональной и зональной).

Зональная составляющая: 1 — лето, 2 — зима; меридиональная составляющая: 3 — лето, 4 — зима.

На рис. 1—5 по оси абсцисс — давление в миллибарах.

нецелесообразным. Более естественно рассматривать их, как флуктуации случайных функций и привлекать для их описания методы статистической теории турбулентности. К этому следует добавлять, что средний квадрат функции $\overline{f_j^2}$ всегда содержит не только реальную изменчивость функции, но и какую-то часть ошибок измерений. Эта ложная информация входит с большим

весом для функций, средний квадрат которых мал, т. е. имеющих большие номера.

14. Известно, что довольно широкое распространение в численном прогнозе получили двухпараметрические модели. Используя значения ковариационных функций, можно оценить

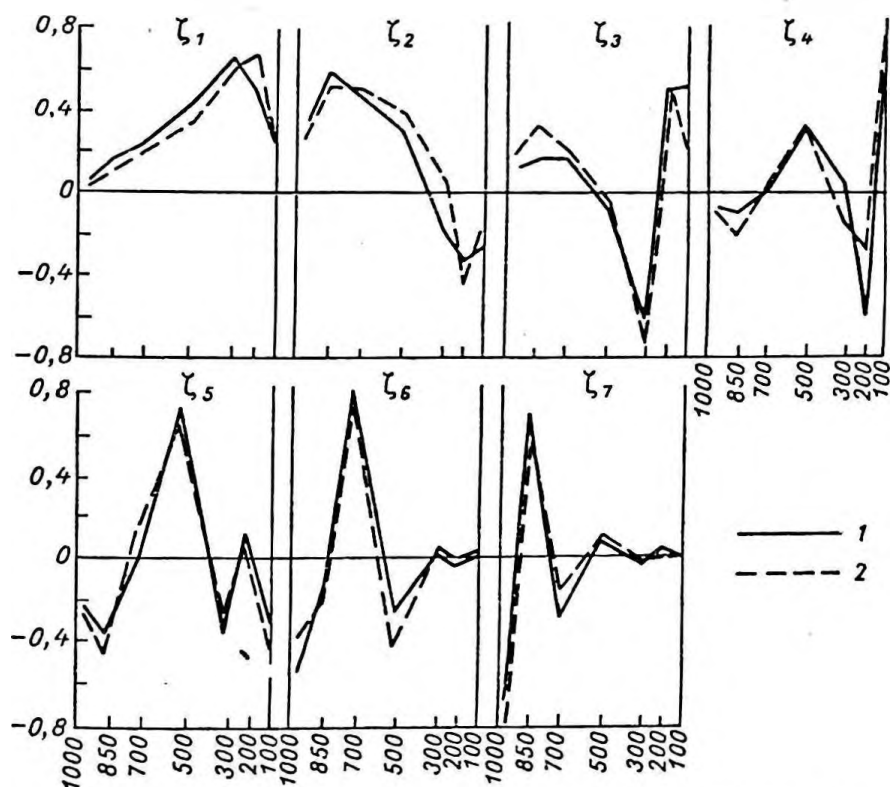


Рис. 2. Естественные функции вертикальных распределений в тропосфере и нижней стратосфере меридиональной составляющей скорости.

1 — зима, 2 — лето.

квадраты относительной ошибки представления поля геопотенциала с помощью таких моделей. Расчеты, выполненные Л. В. Руховцом, показали, что остаточная дисперсия представления поля геопотенциала в слое от уровня земли до поверхности 200 мб составляет в различные сезоны для модели Сойера — Бушби $0,4D - 0,46D$ (D — общая дисперсия), для термотропной модели $0,17D - 0,46D$, а для оптимальной двухпараметрической модели $0,05D - 0,14D$.

Это указывает на относительно высокую точность оптимального представления полей, основанного на разложении по естественным функциям. Можно сделать также вывод, что успешный

прогноз двух первых членов разложения будет почти всегда обеспечивать удовлетворительную успешность прогноза в целом.

15. Известны методы решения основных прогностических соотношений, основанные на замене производных по вертикали

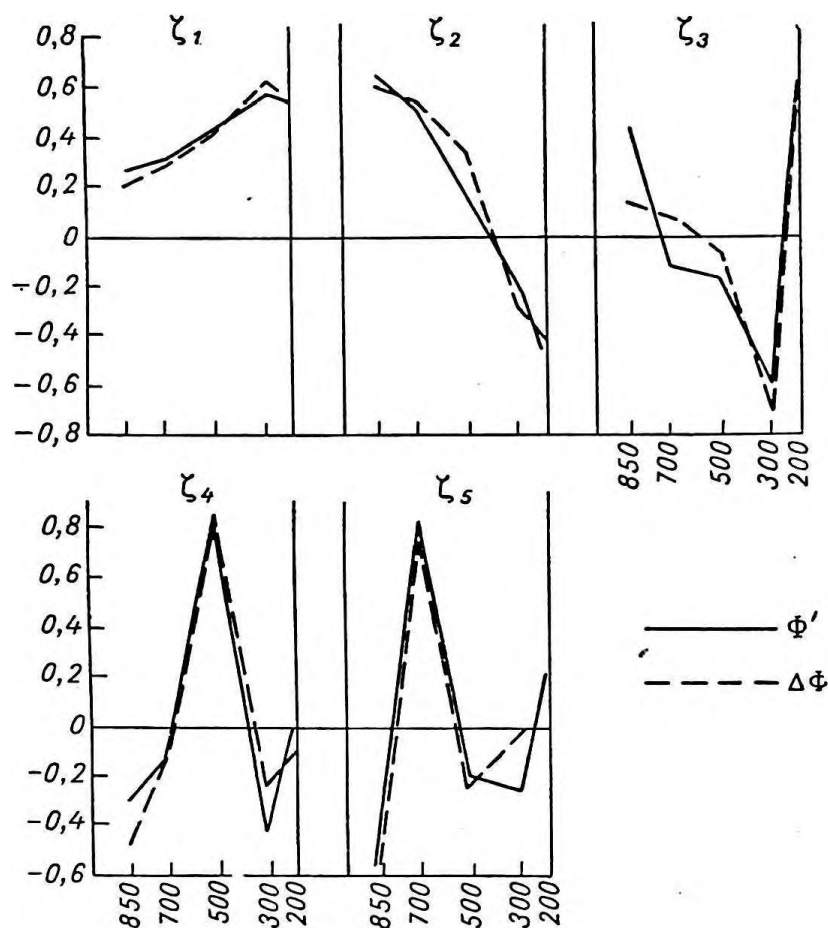


Рис. 3. Естественные функции вертикальных распределений отклонений геопотенциала от нормы (Φ') и его суточных изменений ($\Delta\Phi$).

конечными разностями или же на применении метода интегральных соотношений. Эти методы преобразуют уравнение трехмерной задачи к системе n линейных уравнений, содержащих лишь производные по t , x , y . После канонизации матрицы системы задача сводится к определению собственных векторов, которые, в отличие от статистических векторов (естественных функций), можно назвать динамическими векторами.

Представляется целесообразным рассчитать по возможности точно динамические векторы и сопоставить их с естественными функциями. Для этой цели Л. В. Руховец [20] определил форму семи главных динамических векторов с учетом изменений средних значений параметра устойчивости с высотой, которые были рассчитаны по данным Дж. Лондона [4]. Далее были рассчитаны скалярные произведения динамических z_i и статистических векторов ξ_j , т. е. косинусы углов, составляемых всеми парами векторов в фазовом пространстве. При этом был обнаружен весьма важный факт — каждому динамическому вектору соответствует близкий по форме статистический вектор¹. Соответствие это выражено весьма четко и показывает, что в первом приближении динамические и статистические векторы описывают одни и те же главные колебания атмосферы.

В табл. 1 приведены косинусы углов между динамическими векторами z_i и статистическими векторами ξ_j . Динамические векторы расположены в порядке от меньшего собственного числа (обратно пропорционального квадрату горизонтального масштаба возмущения) к большему. Таким образом, первые динамические векторы характеризуют возмущения больших горизонтальных масштабов.

Таблица 1

z	ξ						
	1	2	3	4	5	6	7
1	0,870	0,123	0,181	0,361	-0,031	0,019	0,278
2	-0,281	-0,504	0,109	0,798	-0,101	-0,007	-0,238
3	-0,297	0,830	-0,117	0,456	0,053	0,035	0,233
4	-0,299	0,077	0,926	-0,157	0,008	-0,104	0,213
5	0,039	-0,028	0,085	0,078	0,992	0,260	0,156
6	-0,004	0,083	0,201	-0,033	-0,085	0,957	0,258
7	0,060	0,100	0,048	0,048	-0,175	-0,217	0,701

Статистические векторы, как обычно, располагаются в порядке от большого собственного числа к меньшему, т. е. малые номера соответствуют большей дисперсии и большему вертикальному масштабу возмущения.

Весьма интересно, что во всех случаях, кроме одного, номер соответствующих динамических и статистических векторов, и, стало быть, горизонтальный и вертикальный масштабы возмущения изменяются в одном и том же направлении. Исключение составляет второй динамический вектор, которому соответствуют относительно малые дисперсия и вертикальный масштаб.

¹ К сходным выводам несколько другими путями пришли И. Хольмстрем [38] и Б. Л. Гавриллин [7].

Для объяснения этой особенности разложения, по нашему мнению, необходимо учесть, что второй динамический вектор в основном описывает возмущения, происходящие в стратосфере. Поэтому уменьшение дисперсии естественно связать со стабилизирующей ролью изотермического слоя атмосферы. Интересно, что уменьшение вертикального масштаба возмущения в стратосфере при сравнительно большом горизонтальном масштабе получается, как результат решения уравнений динамики атмосферы.

16. Отметим, что перечисленные выше факты укладываются в простую схему. Если поле геопотенциала представляется в форме

$$\Phi(t, x, y, p) = \bar{\Phi}(x, y, p) + \sum \varphi_j(t, x, y) \zeta_j(p), \quad (3)$$

где $\bar{\Phi}$ — среднее многолетнее значение функции Φ , то между-сущее изменение геопотенциала равно

$$\delta\Phi = \sum \delta\varphi_j(t, x, y) \zeta_j(p), \quad (4)$$

а отклонения составляющих геострофического ветра от климатических норм пропорциональны суммам:

$$u_g \sim - \sum \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \zeta_j(p); \quad v_g \sim \sum \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \zeta_j(p). \quad (5)$$

Так как реальный ветер вне пограничного слоя близок к геострофическому, то указанное разложение удовлетворительно описывает и его составляющие.

Наконец, динамические векторы представляют собой собственные функции производной $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$, т. е. величины

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \sum \frac{\partial \varphi_j}{\partial t} \zeta_j(p). \quad (6)$$

При изучении статистической структуры метеорологических полей, начиная с работ [24, 25], неоднократно проверялось вытекающее из гипотезы «замороженной турбулентности» (свойства переноса флуктуаций средним потоком) соответствие между изменениями функций по времени и в горизонтальном направлении. Поэтому близость системы собственных векторов — функции $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ (динамические векторы) и составляющих геострофического ветра — представляется вполне естественной.

Заметим далее, что характерные амплитуды главных колебаний тем больше, чем больше соответствующий пространственный масштаб колебания, и что время релаксации растет с ростом пространственного масштаба.

Из этих свойств движения следует, что оптимальные свойства разложения (6) не могут существенно нарушаться при инте-

гировании по времени, т. е. при переходе к разложениям (4) и (3). Более того, доля дисперсии, описываемая первыми членами разложения, для функций, осредненных по времени, должна возрастать, что и подтверждается в действительности.

17. Используя факт соответствия динамических и статистических векторов, Л. В. Руховец отобрал динамические векторы, близкие к двум первым естественным функциям, и построил систему уравнений для определения соответствующих коэффициентов

$$\varphi_1(t, x, y), \quad \varphi_2(t, x, y).$$

Для определения значений φ_1, φ_2 в начальный момент времени используются данные геопотенциала на шести уровнях от 1000 до 200 мб. Прогноз значений геопотенциала на тех же уровнях дается по формуле (4).

Испытание построенной таким путем шестилуровневой двухпараметрической квазигеострофической адиабатической модели дало удовлетворительные результаты при прогнозе на сутки. По-видимому, положительные стороны модели должны еще отчетливее проявиться при прогнозе на более длительные сроки. Но для этого необходимо перейти к неадиабатической модели и расширить рассматриваемую территорию до размеров полушария.

18. Поскольку значения геопотенциала, давления и температуры связаны уравнением статики, собственные векторы вертикальных профилей геопотенциала и температуры должны быть также связаны между собой. Естественно, что соотношения между ними не так элементарны, как указанные выше.

Рассмотрим прежде всего результаты разложения отклонений температуры от среднего многолетнего значения по естественным функциям $\tau_j(p_k) = \tau_{jk}$

$$T(t, x, y, p_k) - \bar{T}(x, y, p) = \sum_{j=1}^n T_j(t, x, y) \tau_{jk} \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (7)$$

Функции τ_{jk} были определены в Главной геофизической обсерватории им. А. И. Воейкова с использованием ковариационной матрицы, рассчитанной В. П. Болтенковым [6] по данным более 3000 аэрологических зондирований на 60 станциях в Северной Америке за 60 сроков, относящихся к летним месяцам 1958—1960 гг. Собственные векторы, полученные при рассмотрении семи значений p_k : 1000, 850, 700, 500, 300, 200, 100 мб, показаны на рис. 4.

В отличие от первой собственной функции поля геопотенциала, первая собственная функция поля температуры имеет

разные знаки в тропосфере и стратосфере. Ее значение обращается в нуль вблизи поверхности 200 мб, так что однопараметрическое представление не позволяет описывать отклонения температуры от климатической нормы на этом уровне. Введение второй собственной функции, которая включает значение $T'/p=200 \text{ мб}$ с коэффициентом 0,967, восполняет этот пробел. При

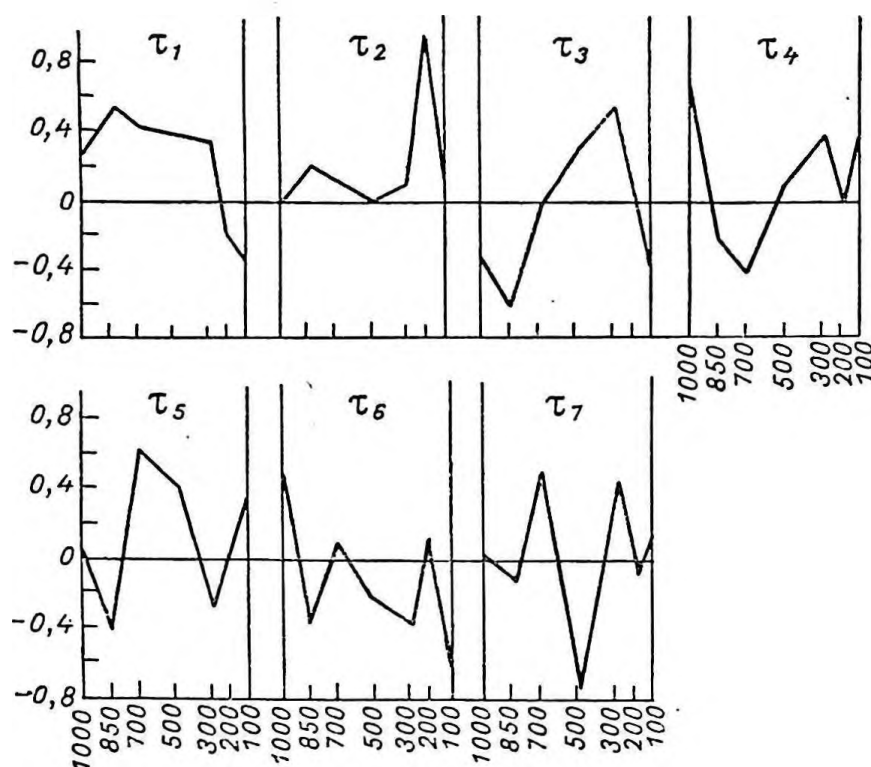


Рис. 4. Естественные функции вертикального распределения отклонения температуры от нормы.

этом представление профиля температуры одним членом разложения описывает 53%, а двумя членами — 74% общей дисперсии.

В работе Л. И. Копровой и М. С. Малкевича [11] получены в общем сходные результаты. Однако, так как в этой работе для разложения по естественным функциям был использован сравнительно малый и весьма однородный материал наблюдений (каждый пример разложения основывался на данных наблюдений одной станции), точность, достигаемая при использовании одного члена разложения, несколько преувеличена.

19. Для того чтобы связать между собой естественные функ-

ции температуры и геопотенциала, целесообразно использовать известное соотношение

$$\Phi(t, x, y, p) = \frac{1}{P} \int_0^P \Phi(t, x, y, q) dq + \\ + \frac{R}{P} \left[\int_p^P \frac{P-q}{q} T(t, x, y, q) dq - \int_0^p T(t, x, y, q) dq \right], \quad (8)$$

где R — газовая постоянная воздуха, P — стандартное давление у поверхности земли.

Перейдем в соотношении (8) от Φ и T к отклонениям от средних многолетних значений Φ' , T' и заменим первый интеграл правой части суммой (например, по формуле трапеций). Тогда получим

$$\Phi'(t, x, y, p) = \sum_{k=1}^n \Phi'(t, x, y, p_k) \pi_0(p_k) + \sum_{j=1}^n T'_j(t, x, y) \pi_j(p). \quad (9)$$

Здесь

$$\pi_0(p_k) = \frac{(\Delta p)_k}{P},$$

$$\pi_j(p) = \frac{R}{P} \left[\int_p^P \frac{P-q}{q} \tau_j(q) dq - \int_0^p \tau_j(q) dq \right]. \quad (10)$$

Если ограничиться в разложении поля температуры m членами, то в представление поля давления по формуле (9) войдет $m+1$ векторов π_0, π_j , вообще говоря, ненормированных и неортogonalных. А. Тургунов [22] рассчитал три первых вектора π_0, π_1, π_2 , используя указанные выше векторы τ_j , и затем выполнил нормирование и статистическую ортогонализацию векторов. Рассчитанные таким путем значения $\xi_1(p), \xi_2(p)$ были сопоставлены с соответствующими векторами поля ветра, полученными по эмпирическим данным. Результаты такого сопоставления для случаев одно- и двухпараметрического представления поля температуры показаны на рис. 5.

Из рис. 5 видно, что функция $\xi_1(p)$ определяется с вполне достаточной точностью уже при использовании одного члена разложения в формуле (7). Более того, при таком простом представлении удастся найти и форму функции $\xi_2(p)$ в пределах тропосферы (исключая пограничный слой, где сказывается уменьшение скорости ветра по сравнению с геострофической). Однако значения составляющих вектора $\xi_2(p)$ для стратосфер-

ных уровней при этом получают сильно отклоняющимися от фактических и поэтому учет второго параметра в представлении температуры оказывается существенным.

В общем, можно заключить, что для описания вертикального распределения давления и температуры с целью предсказания крупномасштабных атмосферных движений достаточно использовать два-три параметра.

Более детальное описание профиля температуры с включением следующих собственных векторов вряд ли целесообразно. Остаточная дисперсия сравнительно равномерно распределяется

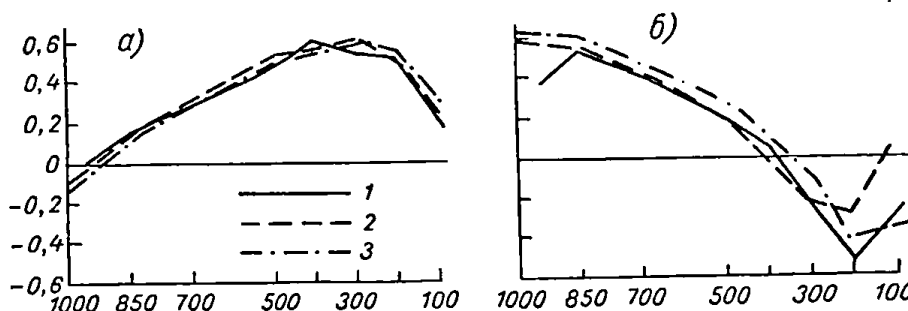


Рис. 5. Собственные векторы поля ветра, полученные по фактическим данным (1) и рассчитанные при $n=1$ (2) и $n=2$ (3).

по этим векторам, а их форма существенно различается для разных выборок (см. упоминавшуюся выше работу Копровой и Малкевича [11]).

20. Остановимся теперь на вопросе о параметрическом представлении потоков тепла. При этом естественно потребовать, чтобы это представление давало возможность правильно описать изменения по времени первых собственных векторов поля температуры. Рассмотрим уравнение притока тепла для ненасыщенного воздуха, которое представим в форме

$$\frac{\partial T}{\partial t} = A_T + \frac{(\gamma_a - \gamma) RT}{gp} \omega + \frac{g}{c_p} \frac{\partial (F - S + Q)}{\partial p}. \quad (11)$$

Здесь A_T — адвекция температуры, γ_a , γ — адиабатический градиент и вертикальный градиент температуры среды, g — ускорение силы тяжести, ω — аналог вертикальной скорости в изобарической системе координат, $F = F_+ - F^-$ — полный поток длинноволновой радиации, $S = S^+ - S_-$ — полный поток коротковолновой радиации, Q — турбулентный поток тепла.

В уравнении (11) не выделен горизонтальный турбулентный перенос тепла. При дальнейших преобразованиях можно считать, что он включен в первый член правой части уравнения.

Кроме того, в облачном слое выражения для второго и третьего членов правой части несколько изменяются, что не будет учитываться на данном этапе исследования.

Запишем уравнение притока тепла на уровнях p_k , умножим на τ_{jk} и сложим. Тогда получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_j}{\partial t} = \sum \tau_{jk} \left[A_T + \frac{(z_a - z) RT}{gp} \omega \right] \Big|_{p=p_k} + \\ + \frac{g}{c_p} \sum \tau_{jk} \frac{\partial (F - S - Q)}{\partial p} \Big|_{p=p_k} \end{aligned} \quad (12)$$

Заменяя производные в последнем члене правой части конечными разностями и выполняя суммирование, приведем этот член уравнения к виду

$$\frac{g}{c_p} \sum c_{jk} [F(p_k) - S(p_k) + Q(p_k)].$$

В работе [28] были приближенно определены значения c_{1k} , c_{2k} при использовании значений на семи основных уровнях: 1000, 850, 750, 500, 300, 200 и 100 мб.

Результаты расчетов приводятся в табл. 2.

В дальнейшем желательно определить форму векторов $C_1(p)$ и $C_2(p)$ более точно, увеличив число уровней p_k , на которых рассматриваются значения температуры. Представляет интерес также рассмотреть профиль температуры до больших высот, включающих слой озона.

При всей приближенности значений коэффициентов C_{jk} из их анализа следуют два достаточно определенных вывода.

Первый вывод состоит в том, что при расчете изменения во времени величины $T_1(x, y, t)$ (первый коэффициент разложения по функциям $\tau_j(p_k)$) за счет притока тепла нужно главным образом учитывать разность значений тепловых и радиационных потоков у поверхности земли и в окрестностях тропопаузы, т. е. рассматривать баланс тепла во всей тропосфере. Вместе с тем для достаточно точного описания поведения функции $T_1(x, y, t)$ и особенно функции $T_2(x, y, t)$ необходимо надежно определять значения радиационных и тепловых потоков в слое 50—250 мб.

Поскольку, как известно, изменения потоков тепла внутри стратосферы сравнительно малы, особое внимание должно быть

Таблица 2

p_k мб	$C_{1k} \cdot 10^5$	$C_{2k} \cdot 10^5$
50	0,35	-0,03
150	-0,15	-0,94
250	-0,43	0,90
400	0,04	0,06
600	-0,06	-0,06
775	-0,11	-0,07
925	0,00	0,12
1013	0,36	0,02

обращено на точное определение значений потоков вблизи ее нижней границы. В этом состоит второй вывод. Из таблицы видно также, что изучение значений потоков тепла в средней тропосфере не представляет большого интереса для динамической метеорологии, так как влияние изменений этих потоков на тепловой режим атмосферы относительно мало.

Изложенные выше результаты следует дополнить одно- или двухпараметрическим представлением полей влажности, морских течений и температуры воды, а также статистическими соотношениями для определения облачности и осадков. Это даст возможность построить малопараметрическую неадиабатическую модель для изучения динамики атмосферы, ее термического режима и влагооборота в их взаимодействии. Задача может решаться как в геострофическом, так и в негеострофическом приближении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Багров Н. А. Аналитическое представление последовательности метеорологических полей посредством естественных ортогональных составляющих. Труды ЦИП, вып. 74, 1959.
2. Белов П. Н. Практические методы численного прогноза погоды. Гидрометеониздат, 1967.
3. Белоусов С. Л. Опыт оперативного предвычисления высот барических карт трех уровней. Труды ЦИП, вып. 126, 1963.
4. Блинова Е. Н. К вопросу о прогнозе сглаженных значений метеорологических элементов на среднем уровне атмосферы. ДАН СССР, 123, № 3, 1959.
5. Блинова Е. Н. Трехмерная задача о прогнозе сглаженных значений метеорологических элементов. ДАН СССР, 147, № 6, 1962.
6. Болтенков В. П. Исследование статистической микроструктуры температуры воздуха. Тр. ГГО, вып. 165, 1964.
7. Гаврилин Б. Л. Об описании вертикальной структуры синоптических процессов. Изв. АН СССР, серия физики атмосферы и океана, т. 1, № 1, 1965.
8. Галин М. Б. Прогноз зональной циркуляции на основе моментов связи. Сб. «Гидродинамический долгосрочный прогноз погоды», Гидрометеониздат, М., 1964.
9. Дубов А. С. Об учете приземного трения при прогнозе поля давления у земли. Труды ГГО, вып. 71, 1957.
10. Душкин П. К., Ломоносов Е. Г. Результаты прогнозов барического поля на трех уровнях с помощью вычислительной машины. Труды ЦИП, вып. 106, 1960.
11. Копрова Л. И., Малкевич М. С. Об эмпирических ортогональных функциях для оптимальной параметризации профилей температуры и влажности. Изв. АН СССР, серия физики атмосферы и океана, т. 1, № 1, 1965.
12. Кудашкин Г. Д. Оценка аналогичности атмосферных состояний и процессов с помощью параметров разложения метеорологических полей по естественным ортогональным функциям. Труды ГГО, вып. 168, 1965.
13. Курбаткин Г. П. Учет климатических факторов при гидродинамическом прогнозе метеорологических элементов для северного полушария Земли. Труды ВНМС т. 2, Гидрометеониздат, 1963.

14. Лутфулин И. З. Оперативная схема прогноза барического поля на 24 и 48 часов с использованием исходных данных геопотенциала и приземных изаллобар. Труды Симпозиума по численным методам прогноза погоды. Москва, 24—29 июня 1963 г. Гидрометеониздат, Л., 1964.
15. Марчук Г. И. [и др.]. Оперативная квазигеострофическая схема краткосрочного прогноза погоды для пяти уровней атмосферы. Изв. АН СССР, серия физики атмосферы и океана, т. 1, № 2, 1965.
16. Машкович С. А. Прогноз наземного давления с помощью быстродействующих электронных вычислительных машин. Метеорология и гидрология, № 1, 1957.
17. Обухов А. М. О статистически ортогональных разложениях эмпирических функций. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 3, 1960.
18. Руховец Л. В. Об оптимальном представлении вертикальных распределений некоторых метеорологических элементов. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 4, 1963.
19. Руховец Л. В. О статистически оптимальных представлениях вертикальных распределений метеозадающих элементов в тропосфере и нижней стратосфере. Труды ГГО, вып. 165, 1964.
20. Руховец Л. В. Многоуровневая модель прогноза поля геопотенциала, основанная на малом числе параметров. Труды ГГО, вып. 151, 1964.
21. Ситников И. Г. Опыт применения конечно-разностной схемы численного прогноза геопотенциала на среднем уровне. Труды ЦИП, вып. 102, 1962.
22. Тургунов А. О статистической связи вертикальных профилей различных метеорологических элементов. Метеорология и гидрология, № 12, 1965.
23. Чаплыгина А. С. 24-часовые изменения термобарических полей в свободной атмосфере. Труды Геофиз. ин-та АН СССР, № 33 (160), 1956.
24. Юдин М. И. Вопросы теории турбулентности и структуры ветра (автореферат докторской диссертации). Вестник ЛГУ, № 1, 1946.
25. Юдин М. И. Приложение статистической теории турбулентности к упрощению уравнений динамики атмосферы. Труды ГГО, вып. 33 (95), 1952.
26. Юдин М. И. Новые методы и проблемы краткосрочного прогноза погоды. Гидрометеониздат, Л., 1963.
27. Юдин М. И. Пространственная структура метеорологических полей и ее учет в численном прогнозе. Труды ВНИИ, т. 2. Гидрометеониздат, 1963.
28. Юдин М. И. О параметрическом выражении притока тепла от радиации в атмосфере. Доклад на Международном симпозиуме по исследованию радиационных процессов. Ленинград, 1964.
29. Юдин М. И., Вулс И. Л. Приложение статистических методов к исследованию конечно-разностной структуры уравнения баланса. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 1, 1964.
30. Юдин М. И., Кобякова А. А. Прогноз полей H_{500} и H_{850} с помощью электронной счетной машины «Стрела-3». Труды ЦИП, вып. 106, 1960.
31. Яковлева Н. И., Мещерская А. В. Об использовании параметров разложения по естественным функциям для решения некоторых метеорологических задач. Труды ГГО, вып. 168, 1965.
32. Bolin B. Numerical Forecasting with the Barotropic Model. Tellus, 7, No. 1, 1955.
33. Bring A., Charasch E. An Experiment in Numerical Prediction with Two Non-geostrophic Models. Tellus, 10, No. 1, 1958.
34. Bushby F. H., Hinds M. K. Further Computations of 24-hr Pressure Changes Based on a Two-parameter Model. Q. J. Roy. Met. Soc., 81, No. 349, 1955.

35. Charney J. G., Phillips N. A. Numerical Integration of the Quasi-geostrophic Equations for Barotropic and Simple Baroclinic Flows. *J. Met.*, 10, No. 2, 1953.
36. Cressman G. P. Barotropic Divergence and Very Long Atmospheric Waves. *Monthly Weather Review*, 86, No. 8, 1958.
37. Fukuoka A. A. A study of 10-day forecast. *Geophysical Magazine*, No. 3, 1951.
38. Holmström J. On the Vertical Structure of the Atmosphere. *Tellus*, 16, No. 3, 1964.
39. Keller L., Friedman A. Differentialgleichungen für die turbulente Bewegung einer kompressiblen Flüssigkeit. *Proc. First Int. Congress Appl. Mech.*, 1924.
40. Knighting E., Jones D. E., Hinds M. K. Numerical Experiments of the Meteorological Equations of Motion. *Q. J. Roy. Met. Soc.*, 84, No. 360, 1958.
41. London J. A study of Atmospheric Heat Balance. New York, Univ. Fin. Rep. Contr. NAT, 19, July 1957.
42. Lorenz E. N. Empirical Orthogonal Functions and Statistical Weather Prediction. Sci. Rept. No. 1, Statis. Fest. Proj. Contract. No. AF 19 (604) — 1566. MIT, 1956.
43. Lorenz E. N. Prospects for Statistical Weather Forecasting. MIT, 1959.
44. Shuman F. G. Predictive Consequences of Certain Physical Inconsistencies in the Geostrophic Barotropic Model. *Month. Weath. Rev.*, 85, No. 7, 1957.
45. Wolff P. M. The Error in Numerical Forecasts due to Retrogression of Ultra-long Waves. *Monthly Weather Review*, 86, No. 7, 1958.
46. White R. M., Derby R. G., Cooley D. S. and Seaver F. A. Hemispherical Prediction by Statistical Techniques. *J. Met.*, 14, No. 5, 1957.
47. White R. M., Cooley D. S., Derby R. C. and Seaver F. A. The Development of Efficient Linear Operators for the Prediction of Sea-level Pressure. *J. Met.*, 15, No. 5, 1958.

ОБЪЕКТИВНЫЙ АНАЛИЗ

1. Общие положения

1.1. Объективный анализ представляет собой построение полей метеорологических величин на основании данных наблюдений путем численного алгоритма. Разумеется, полное построение метеорологического поля, т. е. определение его значений во всем бесконечном множестве точек интересующей нас области, практически невозможно. Практически применяются два способа описания полей как результатов объективного анализа, а именно в виде:

а) значений в точках заранее заданной регулярной сетки; эти значения служат исходными данными для численного прогноза;

б) координат достаточно большого числа точек изолиний; таким путем метеорологические поля представляются в наиболее привычной для обозрения форме.

Помимо данных наблюдений, при объективном анализе может использоваться и иная, вспомогательная, информация.

1.2. Большой объем вычислений делает необходимым выполнение объективного анализа с помощью быстродействующей электронной вычислительной машины. Для целей оперативного диагноза и краткосрочного прогноза едва ли может быть использована машина, обладающая скоростью менее 20 000 операций в секунду и оперативной памятью менее 4000 ячеек. Для выполнения объективного анализа для целей долгосрочного прогноза быстродействие машины может быть несколько меньшим, а требования к объему памяти возрастают.

1.3. Объективный анализ состоит из следующих трех этапов, каждый из которых может перемежаться другими этапами или выполняться параллельно с ними:

а) интерполяция метеорологической величины со станций в точки регулярной сетки;

б) согласование метеорологических полей, т. е. уточнение полей одних метеорологических величин на основании данных о полях других величин;

в) контроль исходной информации, т. е. выявление ошибочных данных с последующим их исправлением или исключением.

Решающим этапом объективного анализа является интерполяция, однако и два других этапа имеют важное значение.

Разные методы объективного анализа различным образом комбинируют указанные три этапа. Наиболее рациональным представляется последовательное выполнение этих этапов: сначала контроль, затем интерполяция и, наконец, согласование. Исключением является дополнительный контроль, который целесообразно производить в процессе согласования метеорологических полей.

1.4. Эффективность объективного анализа существенно зависит от уровня автоматизации работ прогностического центра. Она низка, если автоматически выполняется лишь объективный анализ и численный прогноз, а вся остальная работа производится вручную. При полной автоматизации работы прогностического центра эффективность объективного анализа существенно повышается.

На рис. 1 показана схема автоматической работы вычислительного прогностического центра. На схеме приведены основные этапы этой работы, а также указан вид информации, получаемой в результате выполнения каждого этапа.

Комментируя схему, необходимо подчеркнуть, что в условиях полной автоматизации объективному анализу должны подвергаться все поля количественных метеорологических элементов, а не только те, которые используются при численном прогнозе. Выдаче в виде карт изолиний подлежат, разумеется, как прогностические, так и диагностические поля.

1.5. При высоком уровне автоматизации объективный анализ позволяет не только ускорить получение диагностических и прогностических полей, но и существенно расширить объем используемой информации за счет увеличения размеров рассматриваемой площади, количества рассматриваемых сроков и уровней, а также числа анализируемых метеорологических величин. Помимо этого, можно в процессе анализа вычислять и затем выдавать в виде карт поля «вторичных» величин — дифференциальных характеристик (вихрь, дивергенция, адвекция, сдвиги ветра и т. п.), интегральных характеристик (средний ветер в слое, содержание водяного пара в вертикальном столбе и т. п.), характеристик особенностей вертикальных профилей (топография и величина максимума модуля ветра по вертикали, топография максимумов кривизны вертикального профиля температуры и т. п.).

Объем выдаваемой в процессе анализа информации лимитируется возможностями использования этой информации. Поэтому при введении каждой новой вычисляемой в процессе анализа характеристики необходимо иметь в виду конкретное применение, оправдывающее эти вычисления.

1.6. При оценке результатов объективного анализа удобно различать случаи густой и редкой сети станций. Будем называть сеть станций густой для данной метеорологической величины, если точность интерполяции ее не ниже точности наблю-

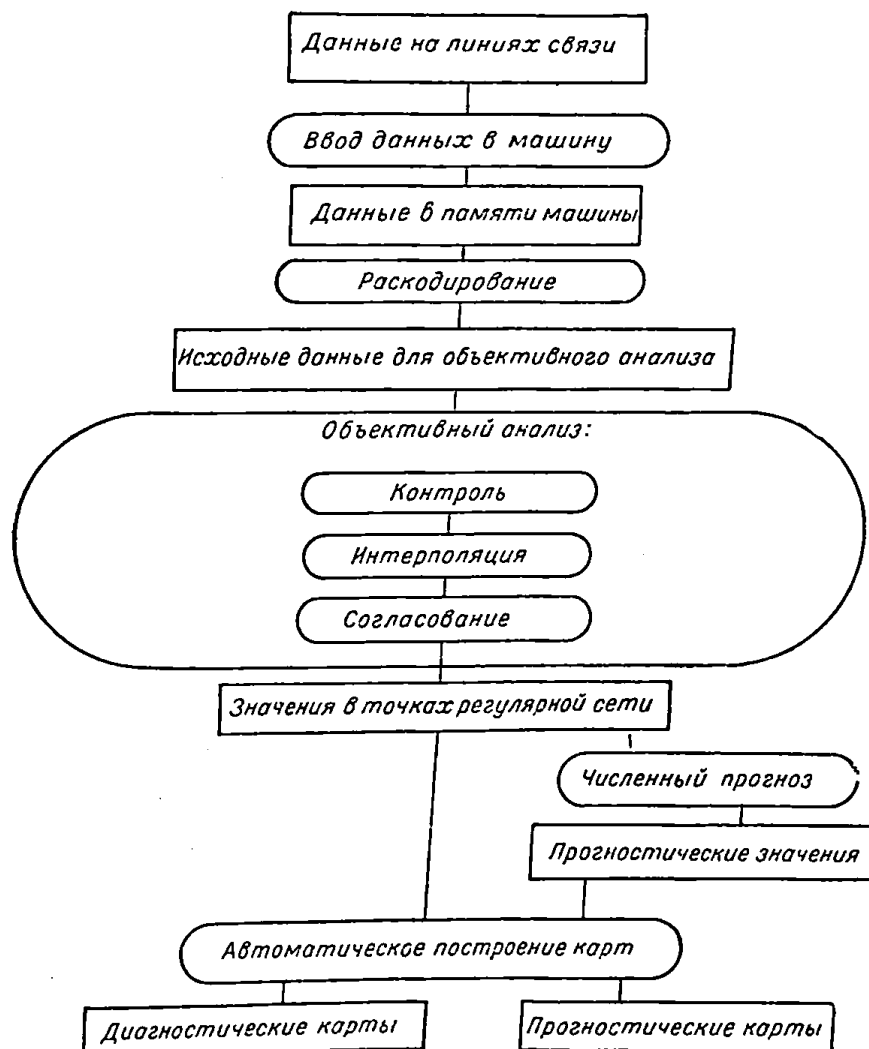


Рис. 1. Схема автоматической обработки данных в вычислительном прогностическом центре.

дений, т. е. если согласование полей практически несущественно. В противном случае сеть станций будем называть редкой. Вывод о том, является ли сеть в данном районе густой, зависит, вообще говоря, от конкретных особенностей анализи-

руемого поля. В случае больших градиентов и кривизны требования к густоте более жесткие. Однако варьировать густоту

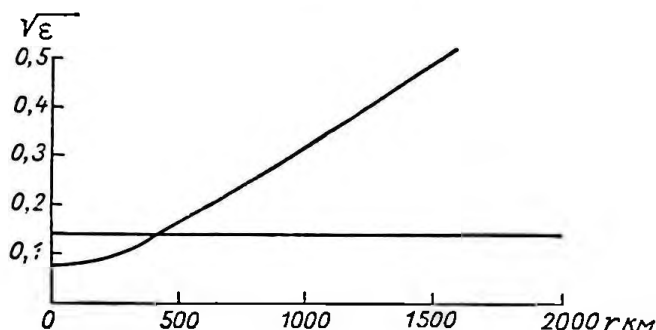


Рис. 2. Средняя квадратическая относительная ошибка интерполяции высоты изобарической поверхности 500 мб на центр квадрата со стороной r по данным в его вершинах.

Горизонтальная линия — средняя квадратическая относительная ошибка наблюдений.

сети с течением времени в зависимости от синоптической ситуации почти невозможно. Поэтому основной интерес представ-

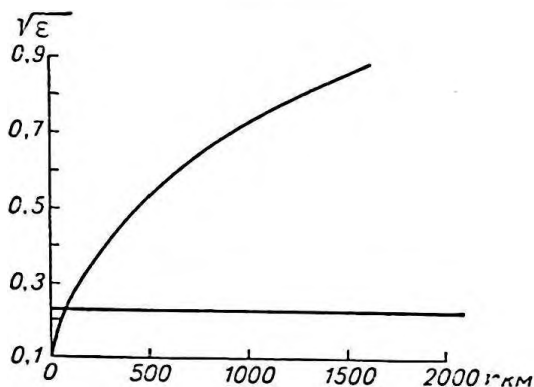


Рис. 3. Средняя квадратическая относительная ошибка интерполяции точки росы на уровне 850 мб на центр квадрата со стороной r по данным в его вершинах.

Горизонтальная линия — средняя квадратическая ошибка наблюдений.

ляют суждения о степени густоты сети, верные лишь в среднем. Такие выводы могут быть получены на основании данных о статистической структуре рассматриваемых величин.

На рис. 2 и 3 представлены средние квадратические относительные ошибки интерполяции высоты изобарической поверхности 500 мб (рис. 2) и температуры точки росы на уровне 850 мб (рис. 3) в центр квадрата по данным в его вершинах в функции от стороны квадрата r . Эти кривые рассчитаны теоретически

по данным о корреляционных функциях для холодного времени года для умеренных широт. Приведены также относительные средние квадратические ошибки наблюдений (горизонтальные

прямые). Как видно из этих рисунков, сеть аэрологических станций можно считать применительно к геопотенциалу густой, если среднее расстояние между соседними станциями не превосходит 400—500 км. Примерно так же обстоит дело и с температурой. Для влажности и ветра требования к густоте станций более жесткие.

1.7. В настоящее время существуют три принципиально различных метода объективного анализа — метод полиномиальной аппроксимации, метод последовательных поправок и метод оптимальной интерполяции. Метод полиномиальной аппроксимации применялся ранее в оперативной практике США, где затем перешли к использованию метода последовательных поправок. В настоящее время метод полиномиальной аппроксимации применяется оперативно в Англии и в СССР. Метод последовательных поправок, помимо США, применяется оперативно в Швеции, где он был впервые предложен, а также в Японии. Метод оптимальной интерполяции используется для целей оперативного объективного анализа в СССР. В других странах этот метод пока не применяется, хотя он имеет ряд принципиальных преимуществ.

Все эти методы дают практически совпадающие и достаточно точные результаты в районах с густой сетью станций. В случае редкой сети успешность различных методов понижается в разной степени. Наиболее чувствителен к густоте сети метод полиномиальной аппроксимации, наименее — метод оптимальной интерполяции. Метод последовательных поправок занимает в этом отношении промежуточное положение.

1.8. Теория и практика первых двух из упомянутых выше методов объективного анализа являются предметом лекций Б. Р. Дёса. Кроме того, В. В. Быков расскажет о полиномиальном методе, разработанном при его участии. Моей задачей является изложение метода оптимальной интерполяции как с теоретической, так и с практической стороны, а также рассмотрение методов согласования и контроля. Практическое применение этих методов объективного анализа будет также одним из предметов лекций С. Л. Белоусова.

1.9. Оценка успешности объективного анализа вызывает трудности вследствие того, что истинное поле, которому должен соответствовать объективный анализ, нам неизвестно. Сопоставление с результатами субъективного анализа не всегда достаточно, поскольку субъективный анализ может обладать большими ошибками, особенно в районах с редкой сетью станций. Более разумным является сравнение объективного анализа с несколькими синоптическими анализами того же поля. Объективный анализ можно при таком сравнении считать успешным, если он в среднем отличается от синоптических анализов в той же мере, как последние друг от друга.

Иногда судят об успешности объективного анализа путем «обратной» интерполяции значений в узлах сетки в пункты наблюдений и сопоставления их с наблюдаемыми величинами. Такой способ нельзя признать корректным, поскольку наблюдаемая величина, с которой производится сопоставление, не является независимой величиной, а использована в процессе интерполяции. Этот способ оценки тем более сомнителен, если на основании такого же критерия предварительно исключается информация, полагаемая ошибочной.

Наиболее объективной является оценка успешности анализа путем интерполяции в такие станции, данные которых — специально для оценки успешности анализа — не использовались в процессе интерполяции. Помимо этого пути, большое значение имеет сопоставление успешности прогнозов, вычисленных по данным субъективных и объективных анализов.

Разумеется, все такие оценки должны основываться на использовании массового материала, а не единичных случаев.

1.10. Для различных целей требуются анализы, обладающие разной степенью сглаженности. В частности, прогноз крупномасштабных процессов требует исходной информации, сравнительно сильно сглаженной. Диагноз синоптического положения часто желательно иметь с меньшей степенью сглаживания. Соответственно этому можно применять разные варианты методики анализа для диагностических и прогностических целей. Успешность таких анализов также следует оценивать различным образом.

2. Статистическая структура

2.1. В методе оптимальной интерполяции используются данные о статистической структуре анализируемых метеорологических полей, а именно об автокорреляционных и кросскорреляционных функциях. Изложим кратко основные сведения об этих функциях.

Наряду с некоторыми конкретными значениями метеорологической величины f в точке двумерного поля с координатами x, y будем рассматривать также среднее значение величины f в этой точке $\bar{f}(x, y)$, причем осреднение, обозначаемое чертой сверху, понимается в статистическом смысле. С теоретической точки зрения безразлично, как можно реализовать статистическое осреднение. Практически под средним можно понимать среднее многолетнее для данного сезона или, что несколько точнее, для данного месяца. Такое среднее называют также нормой, а разность

$$f'(x, y) = f(x, y) - \bar{f}(x, y) \quad (2.1)$$

отклонением от среднего или аномалией. Из (2.1) следует, что среднее значение аномалии равно нулю

$$\overline{f'}(x, y) \equiv 0. \quad (2.2)$$

2.2. Среднее произведение аномалий двух метеорологических переменных f и φ в двух точках, рассматриваемое в качестве функции координат этих точек, называют ковариационной функцией для величин f и φ и обозначают

$$m_{f\varphi}(x_1, y_1, x_2, y_2) = \overline{f'(x_1, y_1) \varphi'(x_2, y_2)}. \quad (2.3)$$

Если f и φ есть одна и та же метеорологическая переменная, т. е. если $\varphi(x, y) \equiv f(x, y)$, то функцию (2.3)

$$m_{ff}(x_1, y_1, x_2, y_2) = \overline{f'(x_1, y_1) f'(x_2, y_2)}. \quad (2.4)$$

называют автоковариационной для величины f . В противном случае функцию (2.3) называют кроссковиариационной. Значение автоковариационной функции (2.4) при $x_2 = x_1$ и $y_2 = y_1$ есть средний квадрат аномалии величины f в точке с координатами x, y , иначе называемый дисперсией этой величины в этой точке,

$$m_{ff}(x_1, y_1, x_1, y_1) = \overline{f'^2}(x_1, y_1) = D_f(x_1, y_1). \quad (2.5)$$

Корень квадратный из D_f иногда называют изменчивостью величины f в рассматриваемой точке.

Если каждое значение ковариационной функции разделить на произведение изменчивостей соответствующих величин в соответствующих точках, то получится корреляционная функция

$$\rho_{f\varphi}(x_1, y_1, x_2, y_2) = \frac{m_{f\varphi}(x_1, y_1, x_2, y_2)}{\sqrt{D_f(x_1, y_1) D_\varphi(x_2, y_2)}}. \quad (2.6)$$

Она представляет собой коэффициент корреляции между величинами f и φ в точках x_1, y_1 и x_2, y_2 соответственно, рассматриваемый в качестве функции координат этих точек.

Так же как ковариационные, корреляционные функции подразделяются на автокорреляционные и кросскорреляционные.

Разумеется, эти определения легко обобщаются на случай метеорологических переменных, зависящих не от двух координат, а от трех координат и времени. Однако по причинам, которые излагаются ниже, такое обобщение нам не потребуется.

Наряду с изложенной терминологией, которой мы будем пользоваться, часто используется другое употребление терми-

нов, соотношение которого с изложенным выше ясно из следующей таблицы.

Таблица 1

Две системы терминов	
I	II
Ковариационная функция	Корреляционная функция
Автоковариационная функция	Корреляционная функция
Кроссковариационная функция	Взаимная корреляционная функция
Корреляционная функция	Нормированная корреляционная функция
Автокорреляционная функция	Нормированная корреляционная функция
Кросскорреляционная функция	Нормированная взаимная корреляционная функция

Вторая система терминов является более громоздкой и менее определенной. Поэтому естественно пользоваться первой системой.

2.3. В случае если ковариационная или корреляционная функция зависит не от координат обеих точек, а лишь от скалярного расстояния между этими точками

$$r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

говорят об однородности и изотропии по отношению к этой функции. Для крупномасштабной структуры, характеризующейся горизонтальными расстояниями r порядка сотен километров, можно говорить об однородности и изотропии только в горизонтальном направлении или вдоль изобарической поверхности. С этой точки зрения при анализе крупномасштабной структуры целесообразно рассматривать значения некоторой метеорологической переменной на двух уровнях или на двух изобарических поверхностях как бы в качестве двух различных метеорологических переменных.

Свойство однородности и изотропии выполняется приближенно и с большей точностью для корреляционных функций, нежели для ковариационных. Выполнение этого свойства может быть иллюстрировано картами изокоррелят, заимствованными из работы Бертона и Луида [37] (рис. 4). При расстояниях r , сравнимых с радиусом Земли, однородность и изотропия, по-видимому, нарушаются. Практически автокорреляционные функции высот изобарических поверхностей можно считать функциями только расстояния r , пока оно не превышает примерно 3000 км.

Хотя гипотезы однородности и изотропии не являются принципиальными для ряда применений корреляционных функций, в том числе для оптимальной интерполяции, принятие этих гипотез позволяет значительно облегчить изучение и использование корреляционных функций.

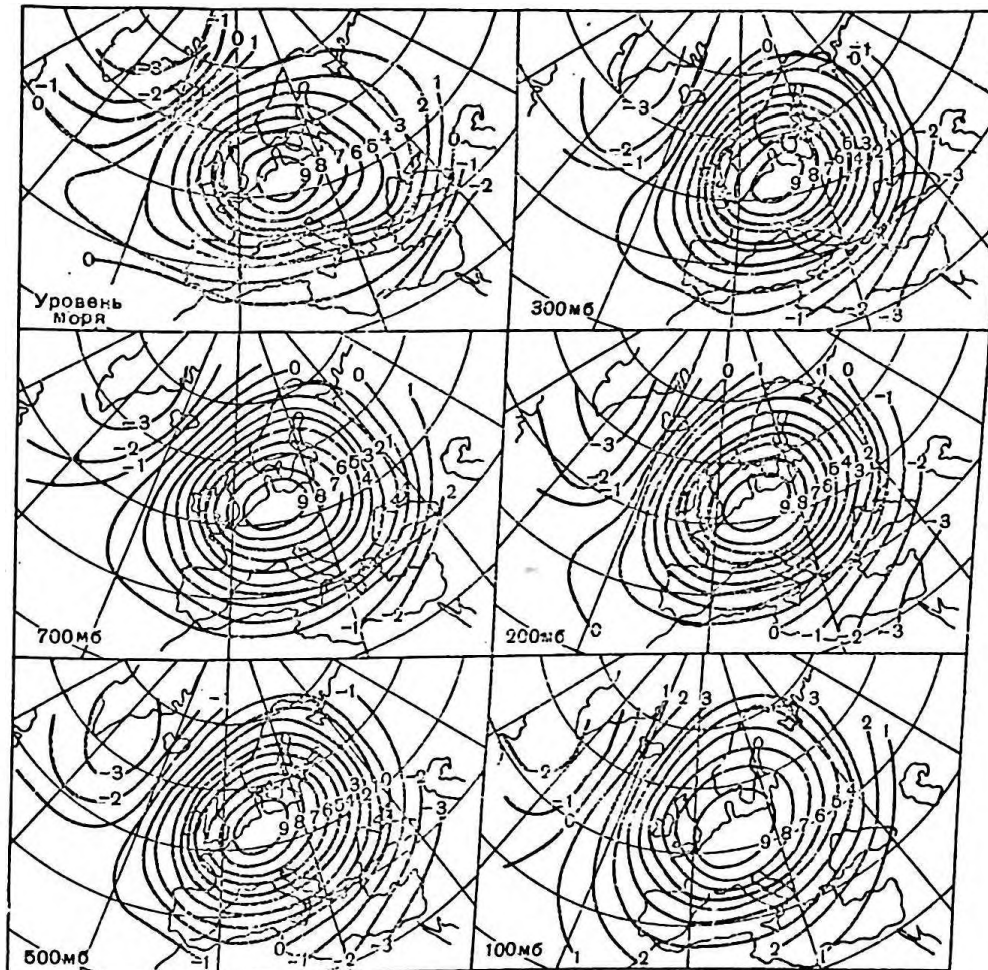


Рис. 4. Изокорреляты высот изобарических поверхностей и давления на уровне моря (по Бертони и Лунду, 1962). Значения коэффициента корреляции приведены в десятых долях единицы.

2.4. Определение макромасштабных корреляционных функций производится путем обработки массового материала обычных аэрологических наблюдений. При выборе исходного материала необходимо соблюдать ряд требований, направленных на обеспечение однородности, независимости и представительности данных. Укажем, в частности, следующее [10, 14]:

а. Для обеспечения однородности исходные данные следует брать в пределах одного сезона или его части.

б. Не следует использовать данные за соседние сроки в силу связанности этих данных. Достаточно брать данные за сроки, отстоящие друг от друга на двое-трое суток.

в. В качестве норм следует принимать среднее значение по тому же материалу, который используется для определения корреляционных функций. То же относится к дисперсиям.

г. При вычислениях целесообразно использовать группировку результатов по градациям расстояний. Величину градации удобно принимать равной 150—250 км.

д. Для обеспечения примерно одинакового объема осреднения внутри каждой градации пункты, данные в которых используются, целесообразно брать из «двусвязной» области, т. е. из двух районов, расстояние между которыми имеет порядок размеров каждого района.

е. Обычно для получения достоверных данных достаточно иметь исходную информацию о 60 ситуациях по 60 точкам для каждой.

Вычисления автокорреляционных функций запрограммированы для электронных вычислительных машин.

2.5. Наличие случайных ошибок в исходных данных приводит к систематическим ошибкам в характеристиках статистической структуры. Примем, что случайные ошибки симметричны (т. е. среднее значение случайной ошибки равно нулю), не коррелированы друг с другом и не коррелированы с истинными значениями метеорологической величины. Тогда можно показать, что случайные ошибки не влияют на значения ковариационных функций, за исключением дисперсий, которые получаются завышенными на средний квадрат случайной ошибки. Соответственно этому корреляционные функции получаются заниженными (по абсолютной величине).

Действительно, пусть $\Delta_f(x, y)$ представляет собой ошибку измерения переменной f в точке с координатами x, y , так что измеренное значение этой переменной в этой точке равно

$$\tilde{f}(x, y) = f(x, y) + \Delta_f(x, y), \quad (2.7)$$

где $f(x, y)$ — истинное значение.

Тогда значение ковариационной функции измеренных величин равно

$$\begin{aligned} m_{\tilde{f}\tilde{\varphi}}(x_1, y_1, x_2, y_2) &= \\ &= [\tilde{f}'(x_1, y_1) + \Delta_f(x_1, y_1)] [\tilde{\varphi}'(x_2, y_2) + \Delta_\varphi(x_2, y_2)] = \\ &= \overline{f'(x_1, y_1) \varphi'(x_2, y_2)} + \overline{f'(x_1, y_1) \Delta_\varphi(x_2, y_2)} + \\ &+ \overline{\Delta_f(x_1, y_1) \varphi'(x_2, y_2)} + \overline{\Delta_f(x_1, y_1) \Delta_\varphi(x_2, y_2)}. \end{aligned}$$

Первый член правой части представляет собой значение ковариационной функции истинных значений метеорологических переменных. Второй и третий члены равны нулю, так как ошибки не коррелируют с истинными значениями. Таким образом,

$$m_{\tilde{f}\tilde{\varphi}}(x_1, y_1, x_2, y_2) = m_{f\bar{\varphi}}(x_1, y_1, x_2, y_2) + \overline{\Delta_f(x_1, y_1) \Delta_{\varphi}(x_2, y_2)}. \quad (2.8)$$

Поскольку ошибки не коррелируют друг с другом, последний член в формуле (2.8) равен нулю, если только f и φ — различные метеорологические переменные или если точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) не совпадают друг с другом:

$$\begin{aligned} m_{\tilde{f}\tilde{\varphi}}(x_1, y_1, x_2, y_2) &= \\ &= m_{f\bar{\varphi}}(x_1, y_1, x_2, y_2), \end{aligned} \quad (2.9)$$

если $f \neq \varphi$, или $x_1 \neq x_2$, или $y_1 \neq y_2$. При $f \equiv \varphi$, $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$ получаем из формулы (2.8) соотношение между дисперсиями измеренных и истинных значений

$$\begin{aligned} D_{\tilde{f}}(x_1, y_1) &= D_f(x_1, y_1) + \\ &+ \sigma_f^2(x_1, y_1), \end{aligned} \quad (2.10)$$

где

$$\sigma_f(x_1, y_1) = \sqrt{\overline{\Delta_f^2(x_1, y_1)}} \quad (2.11)$$

— средняя квадратическая ошибка измерения переменной f в точке с координатами x_1, y_1 .

Указанное обстоятельство может быть использовано для косвенной оценки среднего квадрата случайной ошибки исходных данных путем экстраполяции ковариационной функции на нулевое расстояние и сравнения результата с эмпирически определенной дисперсией (рис. 5).

Когда скоро средний квадрат случайной ошибки известен (он может оцениваться и независимо), нужно до вычисления корреляционных функций по формулам (2.6) вычесть его из эмпирически определенной дисперсии.

2.6. Не всякая функция может быть корреляционной. Необходимым и достаточным условием того, чтобы функции

$$r_{f_i f_j}(x_i, y_i, x_j, y_j) \quad (i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, n)$$

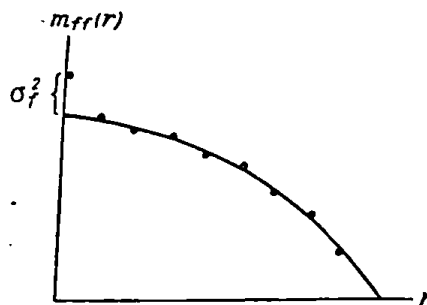


Рис. 5. Схема косвенной оценки точности наблюдений по данным об автоковариационной функции. Кривая, проведенная по точкам для ненулевых расстояний r , экстраполируется до пересечения с осью ординат $r=0$. Разность между ординатой эмпирической точки при $r=0$ (эмпирической дисперсией) и результатом экстраполяции равна среднему квадрату ошибки наблюдений.

могли быть корреляционными, является выполнение неравенства вида

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_i b_j \mu_{f_i, f_j}(x_i, y_i, x_j, y_j) \geq 0 \quad (2.12)$$

при всех значениях величин b_i , b_j , x_i , x_j , y_i и y_j , т. е. условие положительной определенности любой квадратической формы, порождаемой любой совокупностью значений корреляционных функций. Непосредственная проверка условия (2.12) едва ли возможна. В случае автокорреляционной функции при выполнении однородности и изотропии условие (2.12) эквивалентно условию положительности двумерного спектра функции μ_{ff} , т. е. положительности функции

$$S_f(\sigma) = \int_0^{\infty} \mu_{ff}(r) J_0(\sigma r) r dr \quad (2.13)$$

(J_0 — функция Бесселя) при всех значениях аргумента σ . Проверка этого факта применительно к эмпирически определенной функции $\mu_{ff}(r)$ вызывает значительные затруднения. Вместе с тем использование функций, не удовлетворяющих указанному условию, в качестве корреляционных, может приводить к абсурдным результатам. Поэтому корреляционную функцию, определенную эмпирическим путем, необходимо до ее применения аппроксимировать какой-либо функцией с положительным спектром, так чтобы точность аппроксимации была не ниже точности определения эмпирической корреляционной функции.

2.7. С помощью описанной методики были исследованы корреляционные крупномасштабные функции метеорологических величин. Дадим краткий обзор результатов этих исследований.

а. *Высоты изобарических поверхностей* [13, 26]. Как автокорреляционные функции этих высот, так и кросскорреляционные функции, описывающие связь высот различных поверхностей друг с другом, положительны до расстояния 2100—2700 км. Это расстояние (радиус корреляции) имеет минимум примерно у поверхности 400 мб, возрастая вверх и вниз от этой поверхности. За радиусом корреляции функции отрицательны вплоть до расстояний порядка 4500 км, если только для таких расстояний можно говорить об однородности и изотропии. Отрицательные значения невелики, максимальные по модулю не превышают $-0,2$.

Поскольку радиусы корреляции варьируют слабо, все корреляционные функции можно приближенно описать единой функцией расстояния, которая имеет вид

$$\mu(P_k, P_l, r) = \mu(P_k, P_l, 0) e^{-0,195r^{1,50}} J_0(1,065r), \quad (2.14)$$

где расстояние r выражено в тысячах километров. Значения $\mu(P_h, P_l, 0)$, а также $m(P_h, P_l, 0)$ для поверхностей 850, 700, 500, 300 и 200 мб представлены в табл. 2, где $m(P_h, P_l, 0)$ (в дкм²) выписаны выше главной диагонали и на ней (дисперсии), а $\mu(P_h, P_l, 0)$ — ниже главной диагонали.

Таблица 2
Межуровенная корреляция высот
изобарических поверхностей

Поверхность, мб	850	700	500	300	200
850	99	102	124	144	131
700	0,93	124	146	182	162
500	0,84	0,92	207	258	240
300	0,76	0,87	0,95	360	300
200	0,72	0,81	0,92	0,95	333

6. *Температура* [1]. Автокорреляционные функции температуры различных изобарических поверхностей имеют в общем тот же вид, что и для высот, но при малых расстояниях они затухают быстрее. Радиус корреляции для этих функций увеличивается с высотой. Поведение кросскорреляционных функций существенно определяется тропопаузой. Если между рассматриваемыми поверхностями расположена тропопауза, то при малых расстояниях кросскорреляционная функция отрицательна, в противном случае — положительна. Это иллюстрируется табл. 3 величинами $m(P_h, P_l, 0)$ и $\mu(P_h, P_l, 0)$ для температуры для зимнего периода, построенной аналогично табл. 2.

Таблица 3
Межуровенная корреляция температуры

Поверхность, мб	1000	850	700	500	400	300	200	100
1000	49,0	31,7	14,3	15,7	14,0	8,5	-10,0	-4,2
850	0,67	45,5	18,0	22,1	17,1	7,0	-16,6	-13,0
700	0,36	0,47	32,1	12,9	10,7	5,7	-9,5	-7,0
500	0,47	0,68	0,48	23,0	19,9	8,9	-14,7	-12,5
400	0,45	0,57	0,43	0,94	19,7	10,7	-13,4	-13,3
300	0,34	0,29	0,28	0,53	0,67	17,7	-0,4	-7,0
200	-0,27	-0,45	-0,31	-0,56	-0,55	-0,02	30,4	12,1
100	-0,14	-0,45	-0,29	-0,61	-0,70	-0,46	0,51	18,4

При оптимальной интерполяции температуры вдоль изобарической поверхности можно без существенной погрешности пользоваться автокорреляционными функциями для высот изобарических поверхностей.

в. *Влажность.* Автокорреляционные функции для температуры точки росы [14, 23] ведут себя, по крайней мере в холодное время года, несколько иначе, чем корреляционные функции температуры и высоты. У этих функций почти не обнаруживаются отрицательные области, так что с большой точностью их

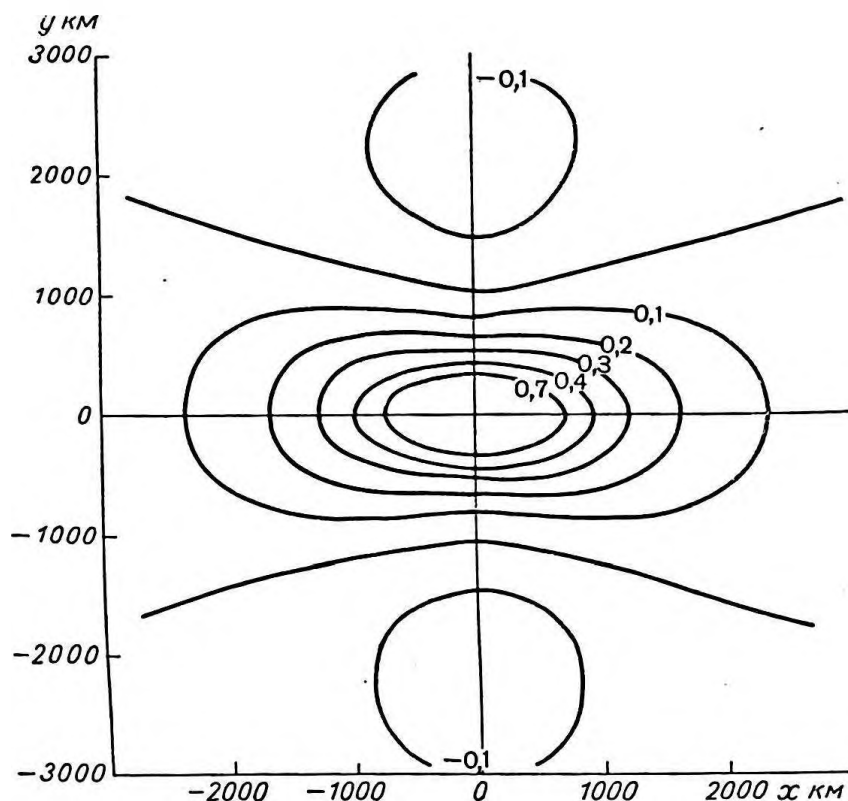


Рис. 6. Корреляционная функция параллельных компонент геострофического ветра. Ось Ox направлена вдоль отрезка, соединяющего две рассматриваемые точки.

можно описать монотонно убывающими функциями, а именно экспонентами. В частности, на поверхности 850 мб корреляционная функция точки росы допускает простую аппроксимацию.

$$\mu(r) = e^{-1,03r}. \quad (2.15)$$

Примерно таковы же функции на других уровнях в нижней тропосфере. Дисперсия точки росы составляет около 33 град.² у поверхности земли и на поверхности 850 мб и около 42 град.² на уровне 700 мб.

г. *Ветер.* Корреляционные функции ветра исследовать труднее вследствие меньшей точности данных, большей изменчивости и векторной природы ветра. Ограничимся здесь рассмот-

рением рис. 6 и 7 [6], которыми описываются корреляционные функции не реального, а геострофического ветра в зависимости от расстояния r и от угла α между направлением отрезка, соединяющего две рассматриваемые точки, и направлением составляющей ветра. Рисунок 6 описывает корреляционную

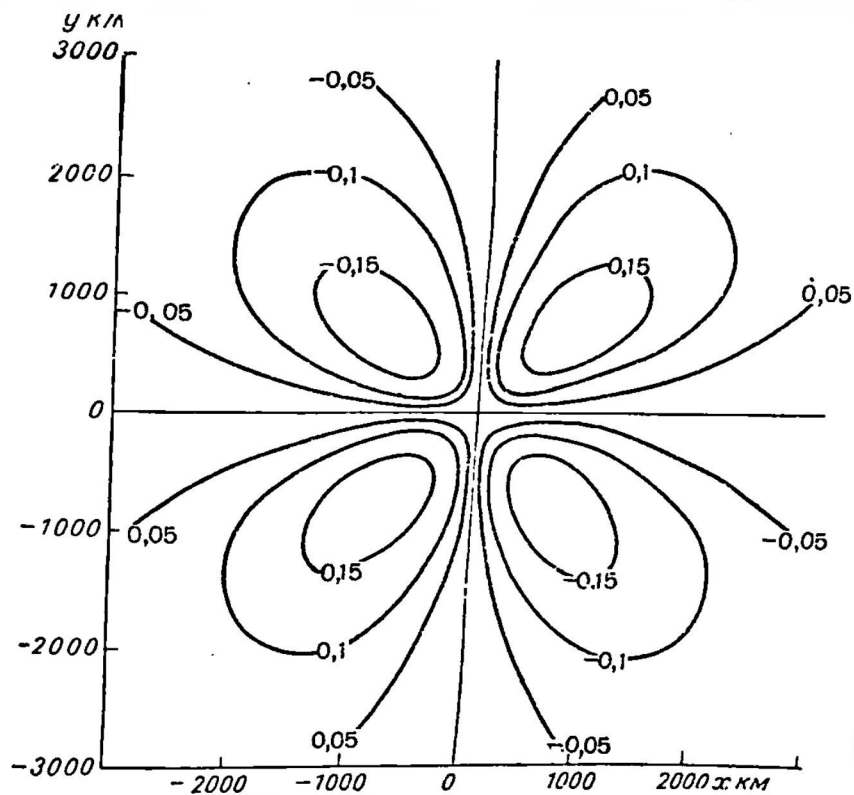


Рис. 7. Корреляционная функция взаимно перпендикулярных составляющих геострофического ветра. Ось OX направлена вдоль отрезка, соединяющего две рассматриваемые точки.

функцию параллельных компонент ветра, а рис. 7 - перпендикулярных. Угол α следует отсчитывать от положительного направления оси x .

2.8. Сведения по крупномасштабной статистической структуре метеорологических полей имеют обширную область приложений, все время расширяющуюся. Эти сведения используются при оценке характерных значений метеорологических величин и их производных [31], при выборе оптимальных параметров прогностических схем [32, 34], при оценке точности наблюдений, осредненных по отрезкам и площадям [12, 18], при разработках по рациональному размещению сети станций [16, 3, 22] и т. п.

Среди этих приложений значительную роль играет также использование корреляционных функций при объективном анализе метеорологических полей.

3. Оптимальная интерполяция

3.1. Оптимальной принято называть такую линейную относительно исходных данных интерполяцию, средняя в статистическом смысле квадратическая ошибка которой минимальна [41]. С помощью оптимальной интерполяции аномалия метеорологической величины f в интересующей нас точке (f_0') выражается в виде линейной комбинации аномалий этой величины в пунктах наблюдений (f_i')

$$f_0' = \sum_{i=1}^n p_i f_i', \quad (3.1)$$

где n — число использованных пунктов наблюдений (число влияющих станций).

Не следует думать, что линейность формулы (3.1) является существенным ограничением метода интерполяции. Известно (например, [36]), что если законы распределения величин f гауссовы, формула (3.1) обеспечивает наименьшую среднюю квадратическую ошибку (при надлежащем выборе весов p_i) по сравнению с любой нелинейной формулой. Подчеркнем также, что все иные способы интерполяции, используемые при объективном анализе, также линейны относительно исходных данных.

Практическое применение формулы (3.1) предусматривает, разумеется, предварительное вычитание норм $\bar{f}_i$ из данных наблюдений (f_i) и последующее добавление нормы $\bar{f}_0$ к результату интерполяции в интересующую нас точку.

3.2. Согласно сказанному, для отыскания весов p_i необходимо потребовать, чтобы средний квадрат ошибки определения f_0' по формуле (3.1)

$$E = \overline{\left(f_0' - \sum_{i=1}^n p_i f_i' \right)^2} \quad (3.2)$$

был минимален. Преобразуем формулу (3.2), учтя, что, поскольку f_i представляют собой не истинные значения, а данные наблюдений [см. формулы (2.9) и (2.10)],

$$\overline{f_i' f_j'} = \begin{cases} m_{ij} & \text{при } j \neq i, \\ m_{ii} + \sigma_i^2 & \text{при } j = i, \end{cases}$$

$$\overline{f_0' f_i'} = m_{0i}, \quad \overline{f_0'^2} = m_{00},$$

где m_{ij} есть значение автоковариационной функции величины f для точек i и j , а σ_i — средняя квадратическая ошибка наблюдений в точке i . Тогда получим

$$E = m_{00} - 2 \sum_{i=1}^n p_i m_{0i} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_i p_j m_{ij} + \sum_{i=1}^n p_i^2 \sigma_i^2. \quad (3.3)$$

Считая дисперсию величины f одинаковой во всех рассматриваемых точках ($m_{ii} = m_{00}$), разделим на нее (3.3), тогда

$$\varepsilon = 1 - 2 \sum_{i=1}^n p_i \mu_{0i} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_i p_j \mu_{ij} + \sum_{i=1}^n p_i^2 \tau_{ii} \quad (3.4)$$

где μ_{0i} и μ_{ij} представляют собой значения автокорреляционной функции и введены обозначения

$$\varepsilon = \frac{E}{m_{00}}, \quad \tau_{ii} = \frac{\sigma_i^2}{m_{00}}. \quad (3.5)$$

Мы будем называть η_i средним квадратом относительной ошибки наблюдений, а ε средним квадратом относительной ошибки интерполяции.

Условие минимума ε получается приравниванием нулю частных производных от ε по всем весам p_k :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial p_k} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (3.6)$$

Подставляя (3.5) в (3.6), получим

$$0 = -2\mu_{0k} + \sum_{j=1}^n p_j \mu_{kj} + \sum_{i=1}^n p_i \mu_{ik} + 2p_k \tau_{kk} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Второй и третий члены правой части равны друг другу, в чем легко убедиться, заменив индекс суммирования i в третьем члене на j и учтя, что, согласно определению автокорреляционной функции, $\mu_{kj} = \mu_{jk}$. Заменяя после этого k на i , получаем систему линейных алгебраических уравнений для определения весов p_i :

$$\sum_{j=1}^n \mu_{ij} p_j + \tau_{ii} p_i = \mu_{0i} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (3.7)$$

Формула (3.4) дает выражение для среднего квадрата относительной ошибки интерполяции, выполняемой по формуле (3.1), независимо от того, какими выбраны веса p_i . Эта формула может быть существенно упрощена для случая оптимальной интерполяции, т. е. когда веса удовлетворяют уравнениям (3.7). Умножая каждое из уравнений (3.7) на p_i и суммируя по i от 1 до n , получим соотношение

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mu_{ij} p_i p_j + \sum_{i=1}^n \tau_{ii} p_i^2 = \sum_{i=1}^n \mu_{0i} p_i$$

комбинируя которое с формулой (3.4), можно получить простую формулу для среднего квадрата относительной ошибки оптимальной интерполяции

$$\varepsilon = 1 - \sum_{i=1}^n p_i^2 \alpha_i. \quad (3.8)$$

3.3. Как видно из системы (3.7), интерполяционные веса p_i зависят от статистической структуры (автокорреляционной функции) рассматриваемой метеорологической величины, точности наблюдений над ней и взаиморасположения интересующей нас точки и влияющих станций. Они, так же как ε , не зависят от наблюдаемых значений f_i' . Поэтому p_i и ε можно вычислять заранее, до того как используются данные наблюдений.

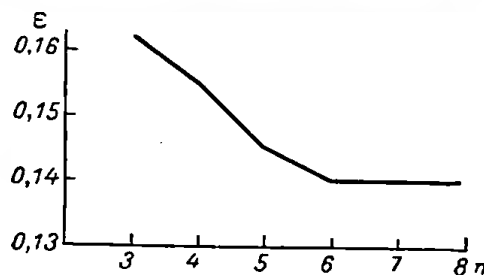


Рис. 8. Зависимость среднего квадрата относительной ошибки интерполяции ε от числа влияющих станций n (по Мелешко и Пригодичу, [24]).

Так действительно целесообразно поступать при различных исследованиях, связанных с оптимальной интерполяцией. Что касается оперативного выполнения объективного анализа поля f с помощью оптимальной интерполяции, то в этом случае предварительное вычисление весов отпадает по двум причинам:

1) данные той или иной станции могут оказаться отсутствующими или выбракованными;

2) количество весов для интерполяции во все точки регулярной сетки слишком велико.

Поэтому при объективном анализе каждого поля нужно заново вычислять интерполяционные веса.

3.4. Можно показать (например, [5]), что увеличение n на единицу, т. е. включение данных дополнительных станций, всегда приводит к уменьшению ε , рассчитанному по формуле (3.8). Это уменьшение, однако, становится ничтожно малым после того, как использовано 6—8 станций, ближайших к рассматриваемой точке и приблизительно равномерно окружающих ее.

На рис. 8 приведен характерный вид зависимости ε от n , иллюстрирующей сказанное [24].

Что касается фактической ошибки интерполяции, то она, начиная с не очень большого n , даже возрастает с ростом n . Это происходит вследствие того, что чем больше n , тем при прочих равных условиях на результат интерполяции в большей степени влияют неточности имеющейся информации об авто-

корреляционной функции. Поэтому количество влияющих станций n для каждой интересующей нас точки бессмысленно принимать большим.

3.5. При оптимальной интерполяции автоматически учитывается ряд обстоятельств, для учета которых в других методах объективного анализа приходится принимать специальные меры. К числу таких обстоятельств относятся, в частности, следующие.

а. Влияние поля норм. Это влияние получается тем большим, чем менее ценна текущая информация, т. е. чем реже сеть, окружающая данную точку, и чем ниже точность наблюдений. Практически в районах с густой сетью влияние норм несущественно, в то время как в районах с редкой сетью оно может быть заметным.

б. Взаиморасположение влияющих станций. Веса для станций, расположенных близко одна к другой, получаются при прочих равных условиях меньшими, чем веса для изолированно расположенных станций.

в. Точность данных наблюдений. С ее уменьшением уменьшаются при прочих равных условиях и интерполяционные веса.

3.6. В случае густой сети станций системы уравнений (3.7) для определения интерполяционных весов оказываются плохо обусловленными. Этот факт является следствием пологости среднего квадрата ошибки интерполяции как функции интерполяционных весов вблизи своего минимума. Плохая обусловленность не должна сама по себе приводить к уменьшению точности интерполяции, поскольку даже при значительной погрешности определения весов p_i средний квадрат ошибки интерполяции будет лишь незначительно превосходить минимальное значение.

Вместе с тем факт плохой обусловленности налагает определенные ограничения на выбор метода решения систем (3.7). В частности, применимы лишь так называемые точные методы, но не итерационные. Из числа точных методов использовался метод Гаусса с главными элементами, метод квадратного корня и обращение матрицы по Ершову [17]. Опыт показал, что применение этих методов приводит к достаточно точным результатам.

3.7. Вследствие плохой обусловленности систем вида (3.7) малое изменение какого-либо одного из коэффициентов этой системы может существенно повлиять на интерполяционные веса. Однако, поскольку коэффициенты системы (3.7) являются значениями корреляционной функции, вопрос о влиянии изменения, даже малого, лишь какого-то одного из коэффициентов является в значительной степени абстрактным. Что же касается изменений всей корреляционной функции в целом, то если эти изменения производятся в разумных пределах, они

сравнительно слабо сказываются на интерполяционных весах и почти совсем не меняют результаты интерполяции. При этом весьма важно, чтобы изменения корреляционной функции не изменили положительности ее спектра.

3.8. Как уже указывалось, обусловленность систем уравнений (3.7) повышается с уменьшением густоты сети станций. Кроме того, обусловленность повышается также с уменьшением n и с увеличением η . В частности, как показали численные эксперименты И. А. Четверикова [29], при оптимальной интерполяции высот изобарических поверхностей, используя $n=8$, нерационально во избежание плохой обусловленности принимать η_i меньшими, чем 0,02.

3.9. Практически достаточно, хотя и не обязательно, принимать η_i одинаковыми (η) для всех влияющих станций, если только измерения производятся однотипным образом. При реализации методов объективного анализа всегда принималось $\eta_i = \eta$.

3.10. Оптимальная интерполяция может приводить к результатам, более точным, чем исходные наблюдения, как это, в частности, было уже видно на рис. 2 и 3. Нетрудно показать (например, [6]), что нижним пределом среднего квадрата относительной ошибки интерполяции является величина

$$\varepsilon_{\min} = \frac{\eta}{n + \eta}. \quad (3.9)$$

Если корреляционная функция известна точно, то оптимальная интерполяция не может давать результаты, менее точные, чем климатологическая интерполяция, так как верхним пределом для ε является

$$\varepsilon_{\max} = 1. \quad (3.10)$$

Это предельное значение достигается лишь при полном отсутствии текущей информации, коррелированной с искомой величиной. В этом предельном случае $f_0' = 0$, так что результатом интерполяции является норма.

3.11. Пусть имеется некоторое множество точек $\{A\}$, в котором значение метеорологической величины f известно, множество точек $\{B\}$, значения f в которых получены путем оптимальной интерполяции по данным в точках $\{A\}$, и точка C , значение f в которой подлежит определению. Можно показать [4, 6], что в таком случае:

а) оптимальная интерполяция из точек $\{A+B\}$ в точку C полностью эквивалентна оптимальной интерполяции из точек $\{A\}$ в точку C ;

б) точность оптимальной интерполяции из точек $\{B\}$ в точку C ниже и лишь в исключительных случаях равна точности оптимальной интерполяции из точек $\{A\}$ в точку C .

Эти результаты вполне естественны, поскольку предварительная интерполяция из точек $\{A\}$ в точки $\{B\}$ в действительности не поставляет никакой новой независимой информации.

Отсюда следует, что введение «фиктивных» станций в виде узлов сетки или каких-либо иных точек, в которые ранее выполнена интерполяция, не может быть оправдано соображениями точности.

3.12. Как и любой другой метод интерполяции, оптимальная интерполяция дает результаты с определенной степенью сглаживания. Степень сглаживания можно регулировать путем изменения параметров интерполяционного метода. В частности, степень сглаживания увеличивается при прочих равных условиях с увеличением числа влияющих станций n и с увеличением среднего квадрата относительной ошибки наблюдений η .

3.13. Точность различных методов интерполяции, применяемых в объективном анализе, исследовалась с помощью численных экспериментов, состоявших в интерполяции на некоторую станцию с окружающих [5]. Интерполяции подвергалась высота изобарической поверхности 500 мб, и использовались исходные данные только об этой высоте. Были выполнены две серии опытов; в первой из них расположение станций соответствовало густой сети станций, во второй — редкой. В случае густой сети все методы дали весьма близкие результаты. Оценки точности различных методов для случая редкой сети (семь станций, среднее расстояние около 1300 км) приведены в табл. 4. Наряду с эмпирически определенной средней квадратической ошибкой в ней представлены также значения, определенные теоретическим путем $[\sqrt{m_{00}(\varepsilon + \eta)}]$.

Таблица 4

Средние квадратические ошибки сопоставления
проинтерполированных по данным семи станций
и наблюдавшихся значений высоты поверхности
500 мб для схемы редкой сети

Метод интерполяции	Ошибка сопоставления, дкм	
	фактическая	теоретическая
Оптимальная интерполяция . . .	5,1	5,0
С помощью полинома 1-й степени	7,2	7,1
С помощью полинома 2-й степени	15,3	11,6
С помощью весовой функции расстояния	6,4	6,3

Из этой таблицы видно, что для случая редкой сети оптимальная интерполяция дала наиболее точные результаты, а полиномиальная интерполяция — наихудшие. Интерполяция с фиксированной весовой функцией расстояния между узлом сетки

и влияющей станцией, используемая в методе последовательных поправок, дала промежуточные по точности результаты.

Из табл. 4 видно также, что теоретические оценки точности интерполяции обеспечивают удовлетворительные результаты.

3.14. Помимо указанных выше мер для уменьшения сглаженности поля, получаемого с помощью оптимальной интерполяции, возможно также применение специального приема, указанного И. А. Четвериковым. Он состоит в выполнении оптимальной интерполяции несколькими последовательными приближениями так, что полученное в результате предыдущего приближения поле принимается за поле норм при следующем приближении. Применение этого приема рационально в тех случаях, когда корреляционная функция известна недостаточно точно. В частности, этот прием оказался полезным при интерполяции поля ветра [20].

4. Методы контроля

4.1. Наряду с небольшими ошибками в данных наблюдений, которые неизбежны и которые можно считать случайными, встречаются также значительные по величине ошибки, причина появления каждой из которых может быть в принципе прослежена. Такие ошибки мы будем называть грубыми. Имеются три основные причины грубых ошибок в аэрологических сообщениях, принимаемых в прогностических вычислительных центрах:

а) неисправность аппаратуры зондирования (ошибки радиозонда),

б) просчеты при первичной обработке данных на станции (ошибки первичной обработки),

в) искажения при кодировании, передаче и приеме сообщений (искажения на каналах связи).

Во избежание искажений объективного анализа грубые ошибки необходимо до анализа или в процессе его исправлять или по меньшей мере отбраковывать. Понятно, что эти действия также должны выполняться автоматически, т. е. должен выполняться некоторый алгоритм контроля данных.

Практика показала, что ни один метод контроля сам по себе недостаточен для полного исправления или отбраковки грубо ошибочных данных. Необходимо на разных этапах обработки информации использовать различные способы контроля. При этом наилучшие результаты достигаются в том случае, если действие различных методов контроля взаимосвязано.

4.2. Методы контроля, применяющиеся в настоящее время, можно разбить на три группы:

а) вертикальный контроль;

б) горизонтальный контроль;

в) контроль при согласовании.

С помощью вертикального контроля проверяются данные каждого отдельного вертикального зондирования без использования данных зондирования над другими пунктами. Вертикальный контроль удобно производить в процессе раскодирования аэрологической информации или непосредственно после него.

Горизонтальный контроль состоит в проверке согласованности значений метеорологической величины по горизонтали (или вдоль изобарической поверхности) без привлечения данных с других поверхностей и о других метеорологических величинах. Этот способ удобно применять непосредственно перед интерполяцией или в процессе ее.

Контроль при согласовании, как это следует из его названия, выполняется в процессе согласования метеорологических полей и ставит своей целью выявить такие расхождения между полями, которые обусловлены грубыми ошибками в одном из них.

4.3. В различных схемах численного анализа и прогноза метеорологических полей, используемых в Советском Союзе, применяются следующие три метода вертикального контроля:

а) статистический контроль производных по вертикали, разработанный С. Л. Белоусовым [19],

б) статистический контроль при использовании автокорреляционных матриц, предложенный М. И. Юдиным [35],

в) статический контроль высот изобарических поверхностей и температуры [6, 9, 25].

4.4. Статистический контроль производных не является строго вертикальным контролем. Он состоит в анализе экстремальных по горизонтали значений первой и второй вертикальной конечной разности. Если исходной величиной является высота, то первая разность пропорциональна средней температуре слоя, а вторая — среднему вертикальному температурному градиенту. Этот метод применяется в оперативной практике ММЦ в схеме, имеющей дело с высотами трех поверхностей — 850, 500 и 300 мб. В этом случае вычисляются три характеристики: температуры слоев 850—500 и 500—300 мб и градиент. Данные станции бракуются, если на ней наблюдаются:

а) экстремальные значения двух из этих характеристик (или всех трех) или

б) экстремальное значение одной из этих характеристик, но такое, отклонение которого от среднего значения по полю более чем на заданную, статистически установленную величину превышает отклонение противоположного экстремума от средней.

Преимущество этого способа контроля состоит в том, что он может производиться на основании информации об одной метеорологической величине на небольшом числе уровней. Недостатком метода является невозможность исправления ошибочных данных.

4.5. Статистический вертикальный контроль с помощью автокорреляционных матриц основан на оптимальной интерполяции (соответственно экстраполяции) по вертикали на каждый уровень по данным остальных уровней. Веса для интерполяции (экстраполяции) найдены заранее по данным о значениях вертикальной автоковариационной функции, т. е. об автоковариационной матрице для рассматриваемой метеорологической величины.

Проинтерполированное значение на каждом уровне сопоставляется с наблюдаемым. Если расхождения между ними на всех уровнях меньше некоторых критических значений, установленных статистическим путем, то данные признаются правильными. Если хотя бы на одном уровне расхождение между наблюдаемым и проинтерполированным значениями превосходит соответствующий критерий, то делается попытка заменить одно из наблюдаемых значений проинтерполированным, так чтобы расхождения на всех уровнях стали меньше критических. В случае, если это удастся, в данные вносится соответствующее исправление. В противном случае все данные считаются неисправимыми и бракуются.

В табл. 5 приведены интерполяционные веса и критические расхождения для шестиуровневой схемы анализа высот изобарических поверхностей.

Таблица 5

Интерполяционные веса и критические расхождения для шестиуровневого контроля высот изобарических поверхностей

Уровень, данные которого используются, мб	Уровень, для которого выполняется контроль, мб					
	1000	850	700	500	300	200
Веса для отклонений от норм						
1000		0,47	-0,18	-0,13	-0,05	-0,15
850	1,23		0,88	0,41	-0,23	0,00
700	-0,23	0,42		0,27	0,31	-0,01
500	-0,07	0,09	0,12		0,57	0,23
300	-0,02	-0,03	0,08	0,31		0,58
200	-0,05	0,00	0,00	0,15	0,56	
Критические расхождения, дкм						
	5,5	3,5	5,0	6,0	7,0	20,5

4.6. При совместном использовании данных о высотах и температуре изобарических поверхностей большие возможности для обнаружения и исправления грубых ошибок в этих данных дает статический контроль. Он состоит в проверке выполни-

мости уравнения статики для политропной атмосферы в слоях между каждыми соседними главными изобарическими поверхностями.

Интегрируя уравнение статики

$$\frac{\partial H}{\partial P} = -\frac{R}{Pg} T$$

(H — высота, P — давление, T — абсолютная температура, g — ускорение силы тяжести, R — газовая постоянная для воздуха) в слое между соседними главными изобарическими поверхностями $P = P_{k-1}$ и $P = P_k$, получим

$$H_k - H_{k-1} = \frac{R \ln \frac{P_{k-1}}{P_k}}{g} T_m,$$

где T_m — средняя абсолютная температура слоя. Заменяя ее приближенно полусуммой температур T_{k-1} и T_k на границах слоя и переходя к температуре t , измеренной в градусах Цельсия, получим уравнения

$$H_k - H_{k-1} = A_k + B_k (t_{k-1} + t_k), \quad (4.1)$$

где константы A_k и B_k вычисляются по формулам

$$A_k = \frac{273R}{g} \ln \frac{P_{k-1}}{P_k}; \quad B_k = \frac{R}{2g} \ln \frac{P_{k-1}}{P_k}.$$

Значения этих констант, а также значения пределов допустимых невязок уравнений (4.1), установленные статистическим путем, приведены в табл. 6.

Таблица 6

Константы A_k , B_k и допустимые невязки Δ_k для главных изобарических слоев

P_k мб	1000	850	700	500	400	300	200	100
A_k дкм	130	155	269	178	230	324	554	
B_k дкм/град.	0,24	0,29	0,49	0,33	0,42	0,50	1,02	
Δ_k дкм	3	3	4	3	4	8	12	

Нетрудно пересчитать эти величины на случай включения данных других поверхностей или исключения некоторых из приведенных. Можно также дополнительно учитывать данные об особых точках или использовать только такие данные. Чем чаще расположены поверхности с данными о высоте и температуре, тем больше возможности статического контроля.

4.7. Пока высоты изобарических поверхностей не определяются непосредственно, а вычисляются по данным о давлении и температуре, статический контроль совсем не реагирует на ошибки радиозондирования. Невязки в уравнениях (4.1), пре-

вышающие допустимые, возникают вследствие ошибок первичной обработки и искажений на каналах связи. По распределению невязок обычно удается установить причину и величину ошибки и внести соответствующее исправление.

В частности, если невязки, превышающие допустимые, имеют место в двух соседних слоях и если они близки по величине и имеют противоположный знак, то это свидетельствует о наличии ошибки в значении высоты изобарической поверхности, общей для этих слоев. В этом случае исправление сводится к изменению указанной высоты на полусумму абсолютных величин невязок. Если для двух соседних слоев имеют место невязки одного знака, превышающие допустимые, и если отношения невязок к соответствующим константам B_k близки, то это свидетельствует об искажении температуры. Искаженное значение легко исправить аналогичным путем.

Если невязка превышает допустимую лишь в одном слое, то это свидетельствует об ошибке первичной обработки данных зондирования на станции. В этом случае исправление достигается вычитанием невязки из высоты верхней границы слоя и всех выше расположенных уровней. Если невязка превышает допустимую только в одном из крайних слоев, то с помощью статического контроля выявляется несколько вариантов исправления (два в случае самого верхнего слоя и три в случае самого нижнего). Выбор нужного варианта остается за другими способами контроля.

В исключительно редких случаях, когда одно сообщение искажено несколькими причинами грубых ошибок, возможна полная браковка данных как неисправимых.

4.8. Статический контроль целесообразно использовать не только в вычислительных центрах, но и при анализе аэрологических карт, производимом вручную. В этом случае нет возможности применять его ко всем сообщениям, поэтому проверке подвергаются только те сообщения, которые содержат данные, сомнительные в свете анализа карт.

Для ускорения таких расчетов можно пользоваться специальной номограммой, показанной на рис. 9. С ее помощью вычисления по контролю и исправлению данных полностью заменяются графическими построениями. На номограмму наносятся точки, каждая из которых соответствует изобарической поверхности (абсцисса точки — температура, ордината — высота). Если все данные верны, то каждая пара точек, соответствующих соседним изобарическим поверхностям, должна в пределах допустимой невязки лежать на одной прямой соответствующего семейства (рис. 9). В противном случае имеется грубая ошибка, которую в большинстве случаев легко локализовать и исправить.

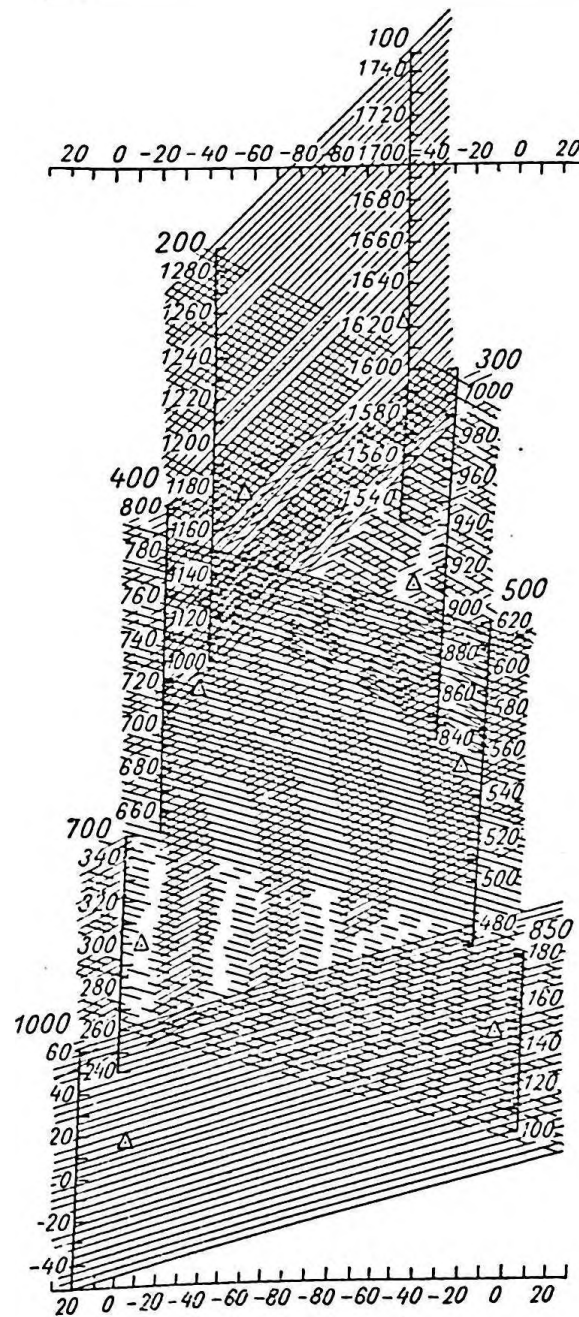


Рис. 9. Номограмма для статического контроля.

Значками Δ нанесены данные одной телеграммы.

4.9. Горизонтальный контроль удобно выполнять с помощью метода, вполне аналогичного вертикальному контролю с помощью автокорреляционных матриц. Такой контроль состоит в оптимальной интерполяции на каждую станцию по данным окружающих станций с последующим сравнением результатов интерполяции с наблюдаемыми значениями [5, 6, 15].

С помощью горизонтального контроля исправить ошибочную информацию невозможно, можно либо отбраковать ее, либо выбрать между несколькими вариантами исправления, указанным статическим контролем. В обоих случаях необходимо затем повторить горизонтальный контроль для близлежащих станций.

4.10. Критерий отбраковки при горизонтальном контроле целесообразно принимать не постоянным для данной метеорологической величины, а переменным, зависящим от густоты сети в окрестности интересующей нас станции. Густоту сети можно характеризовать теоретическим значением средней квадратической относительной ошибки интерполяции ϵ , которое с этой целью вычисляется вслед за вычислением интерполяционных весов. Критерий отбраковки принимается возрастающим с ростом значения ϵ . Это означает, что в районах с густой сетью станций данные могут быть отбракованы при сравнительно небольшой невязке интерполяции, в то время как в областях с редкой сетью станций для отбраковки данных необходимо большое значение невязки интерполяции.

4.11. Горизонтальный контроль высот изобарических поверхностей и температуры целесообразно использовать во взаимодействии друг с другом и со статическим контролем. В частности, в тех случаях, когда статический контроль дает несколько вариантов исправлений, горизонтальный контроль, как уже указывалось, позволяет выбрать нужный вариант. Кроме того, совместное применение статического и горизонтального контроля высоты и температуры помогает выявлению ошибок радиозондирования. Именно для того, чтобы грубую ошибку, выявленную при горизонтальном контроле, можно было приписать влиянию погрешностей радиозондирования, необходимо, чтобы эта ошибка не обнаруживалась при статическом контроле и чтобы горизонтальный контроль свидетельствовал об ошибочности данных и о высоте рассматриваемой поверхности и температуры на ней.

Обычно, если данные на некоторой поверхности искажены вследствие ошибок радиозондирования, искаженными являются и данные более высоких уровней. Это дает дополнительный критерий для выявления ошибок радиозондирования.

4.12. Было выполнено несколько серий опытов по применению статического и горизонтального контроля на массовом материале. В этих опытах, предназначавшихся также для отра-

ботки алгоритма статического контроля, последний выполнялся с помощью вычислительной машины, а горизонтальный контроль производился путем визуального анализа карт. Сводка результатов одной из таких серий приведена в табл. 7 [9]. Согласно этим данным, более 20% всех сообщений о высотах и температурах содержат грубые ошибки. Половина этих ошибок вызвана искажениями высот на каналах связи. Примерно одинаково часто встречаются ошибки, обусловленные тремя причинами — погрешностями вычисления высот, искажениями температуры на каналах связи и погрешностями радиозондирования. Другие ошибки встречаются весьма редко. Также очень редки ошибки в данных одной станции, возникшие под действием двух или более причин.

Анализ данных, приведенных в табл. 7, показывает также, что с помощью статического контроля удастся обнаружить и в большинстве случаев исправить свыше 80% всех грубых ошибок.

Таблица 7

Повторяемость различных ошибок в аэрологических сообщениях

Вид грубой ошибки	Количество		В процентах к общему количеству	
	сообщений	ошибок	сообщений	ошибок
Искажение значения высоты на каналах связи	51	62	11,1	53
Искажение значения температуры на каналах связи	16	19	3,5	16
Ошибка вычисления высоты на станции	14	15	3,1	13
Ошибка радиозондирования	20	21	4,4	18
Искажение двух значений высоты на каналах связи	4		0,9	
Искажение одного значения высоты и одного значения температуры на каналах связи	2		0,4	
Искажение значения высоты на каналах связи и ошибка вычисления высоты на станции	1		0,2	
Ошибка радиозондирования и искажение значения температуры на каналах связи	1		0,2	
Всего	109	117	24,0	100

4.13. Выполнена также серия опытов на массовом материале по применению вертикального контроля высот изобарических поверхностей с помощью автокорреляционных матриц [35].

Из этих опытов путем сопоставления со статическим контролем были определены критерии ошибочности данных. Анализ результатов этих опытов привел к несколько неожиданному выводу — контроль высот с помощью автокорреляционных матриц обеспечивает почти столь же высокую успешность, как статический контроль. Небольшие различия касаются не столько обнаружения грубых ошибок, сколько возможностей их исправления. Кроме того, остаются вне рассмотрения ошибки в значениях температуры.

4.14. Согласование метеорологических полей также дает средство для контроля. Различие между использованием тех или иных соотношений для целей согласования или контроля носит лишь количественный, но не качественный характер. Если невязка, с которой выполняется соотношение, мала, то оно должно использоваться для согласования входящих в него метеорологических величин. В случае, если невязка велика, возникают основания к выявлению ошибочных данных.

Особенно существен контроль ветра при его согласовании, например, геострофическом, с полем высот. Дело в том, что большая пространственная изменчивость (быстрое затухание корреляционных функций) ветра весьма затрудняет его контроль с помощью интерполяции. Избыточной же информации, подобной той, на которой базируется статический контроль, в сообщениях о ветре не имеется. Поэтому контроль при согласовании с полем высот является, вероятно, наиболее надежным способом контроля данных о ветре.

4.15. Надежным средством контроля искажений на каналах связи могла бы явиться избыточность кода. Наиболее простым средством достижения избыточности является введение в него так называемых контрольных цифр — последних цифр формальной суммы некоторой группы обычных цифр кода. Подобного рода предложения неоднократно выдвигались, в полезности их едва ли можно сомневаться. Однако коды, применяемые в настоящее время, не обладают избыточностью, понимаемой в указанном смысле.

5. Практическое применение оптимальной интерполяции при объективном анализе

5.1. Метод объективного анализа с помощью оптимальной интерполяции был реализован на вычислительной машине в ММЦ. Первая программа составлена И. А. Четвериковым под руководством С. Л. Белоусова [29]. Затем С. Л. Белоусов несколько модифицировал эту программу применительно к анализу на большей площади. С. А. Машкович разработал программу объективного анализа с помощью оптимальной интерполяции для северного полушария [22].

Начиная с 1961 г. метод объективного анализа с помощью оптимальной интерполяции применяется в оперативной практике краткосрочных численных прогнозов в ММЦ. В последнее время долгосрочные прогнозы в ММЦ также выполняются по данным объективного анализа, производимого с помощью оптимальной интерполяции.

При изложении алгоритма объективного анализа мы будем следовать в основном программе Четверикова — Белоусова, отмечая попутно некоторые отличия, имеющиеся в программе Машковича.

5.2. Программа анализа состоит из предварительных операций и самого анализа. К предварительным операциям относятся составление машинной карты и контроль информации. До недавнего времени единственным методом контроля, применяемым в оперативных анализах, был статистический контроль производных. Сейчас к нему добавлены статический контроль и горизонтальный контроль.

После завершения предварительных операций выполняется сам анализ, который производится последовательно для всех точек регулярной сетки. Он в свою очередь состоит из ряда этапов:

- а) поиск влияющих станций,
- б) составление системы уравнений для определения интерполяционных весов,
- в) решение системы уравнений,
- г) непосредственная интерполяция.

О методах контроля подробно говорилось в предыдущей лекции. Остальные этапы кратко описываются ниже.

5.3. Составление машинной карты — это упорядочение расположения информации в памяти машины. Вся рассматриваемая область разделена на равные квадраты (квадраты поиска) с центрами в точках регулярной сетки. Значения норм в этих точках известны заранее. Кроме того, заранее введен словарь станций, позволяющий по индексу каждой станции определить ее координаты на карте и, в частности, отнести ее к тому или иному квадрату поиска. После ввода данных очередной станции находятся с помощью словаря ее координаты, определяются путем оптимальной интерполяции с трех ближайших узлов сетки значения норм на станции, и вся эта информация вместе с данными наблюдений заносится в ячейки машинной карты, соответствующие данному квадрату поиска. В результате вся информация оказывается сконцентрированной в упорядоченном виде по квадратам поиска.

Наряду с описанным произвольным вводом применяется также упорядоченный ввод, когда данные станций вводятся в заранее обусловленном порядке, что исключает необходимость поиска в словаре станций. Отсутствие данных помеча-

ется специальным признаком. Практически произвольный ввод применяется только к запаздывающей информации.

В программе С. А. Машковича взамен машинной карты применяется информационная таблица, показывающая, информация какого количества станций имеется в каждом квадрате поиска.

5.4. В рассматриваемом методе фиксируется не размер влияющей окрестности, как во всех иных методах объективного анализа, а число влияющих станций n . Для высот изобарических

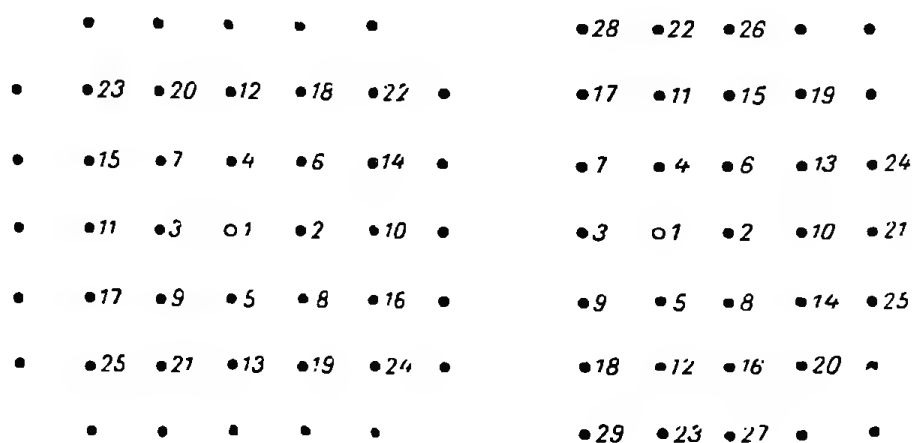


Рис. 10. Порядок опроса квадратов при поиске влияющих станций для интерполяции в точку сетки I , расположенную далеко от границ области.

Рис. 11. Порядок опроса квадратов при поиске влияющих станций для интерполяции в точку сетки I , расположенную на расстоянии одного шага сетки от граничного ряда точек.

поверхностей принято $n=8$. Это достаточно для практически полного использования текущей информации об анализируемой метеорологической величине в районах с редкой сетью станций. В районах с густой сетью можно было бы принять меньшее значение n .

Поиск влияющих станций производится путем последовательного опроса близлежащих квадратов машинной карты, начиная с квадрата с центром в рассматриваемой точке сетки. Последовательность опроса выбрана таким образом, чтобы способствовать равномерному расположению влияющих станций относительно точки сетки. На рис. 10 и 11 иллюстрируется схема опроса для узлов, расположенных в середине области анализа (рис. 10) и вблизи ее границы (рис. 11). Опрос прекращается при $n=8$.

В схеме Машковича квадрат поиска не связан с точками сетки, что позволяет применять эту схему к различным сеткам точек. Квадраты поиска несколько больше, а поиск производится не по квадратам, а по группам квадратов, равноотстоящих от того квадрата, в котором расположена точка сетки. Опрос групп квадратов прекращается при $n \geq 8$, после чего из отобранных станций выбираются восемь станций, ближайших к точке сетки. Вследствие этих изменений уменьшается время поиска; вместе с тем возникает опасность неравномерного расположения влияющих станций.

5.5. Составление системы уравнений для определения весов ρ_i начинается с вычисления расстояний r_{ij} между каждой парой влияющих станций, а также расстояний r_{i0} между каждой влияющей станцией и точкой сетки. Вычисления производятся по простым формулам:

$$r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2};$$

$$r_{i0} = \sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2},$$

где x и y — декартовы координаты на карте. Применительно к анализу для полушария учитывается зависимость масштаба карты от широты.

Все эти расстояния образуют матрицу $(n+1)n$ расстояний. Затем матрица расстояний преобразуется в матрицу значений автокорреляционной функции. Это достигается с помощью введенной в программу таблицы значений корреляционной функции. Таблица составлена так, что между двумя соседними табличными значениями допустима линейная интерполяция. Например, для высоты изобарических поверхностей приняты следующие табличные значения автокорреляционной функции.

$r \cdot 10^{-3}$ км	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,7	1,1	
$\rho(r)$	1,000	0,990	0,970	0,945	0,905	0,876	0,770	0,550	
$r \cdot 10^{-3}$ км	1,7	1,9	2,3	2,5	2,7	3,0	3,3	3,7	4,5
$\rho(r)$	0,215	0,045	-0,019	-0,060	-0,090	-0,120	-0,120	-0,100	0,000

Для каждого расстояния определяются ближайшие табличные значения и производится линейная интерполяция между соответствующими значениями μ . В результате получается матрица $(n+1)n$ значений величин μ_{ij} и μ_{i0} . Наконец, к $\mu_{ii} = 1$ добавляется величина η .

5.6. Решение системы уравнений выполняется в программах ММЦ путем обращения матрицы левых частей

$$|\mu_{ij}| \div I\eta$$

(I — единичная матрица) методом А. П. Ершова [17] с последующим умножением обратной матрицы на вектор правых

5.9. В табл. 8 приведены характеристики расхождений между объективными и субъективными анализами по 572 точкам сетки, расположенной на сравнительно хорошо освещен-

ной аэрологическими данными территории. Оценки представляют собой средние по восьми случаям.

Таблица 8
Результаты сравнения объективных и субъективных анализов [30]

Уровень, мб	r	δ_0 дкм	δ дкм	$\frac{\delta}{\delta_0}$
850	0,97	7,79	1,53	0,20
500	0,97	14,18	2,12	0,15
300	0,96	20,01	3,32	0,17

Здесь δ_0 — средняя абсолютная аномалия по данным синоптического анализа; δ — средняя абсолютная разность между результатами синоптического и объективного анализов; r — коэффициент корреляции между аномалиями по данным синоптического и объективного анализов. Из таблицы видно, что расхождения между субъективными и объективными анализами в районах с густой сетью в среднем весьма малы.

Вместе с тем имеется систематическое расхождение, состоящее в сглаженности объективного анализа по сравнению с субъективным. Это расхождение наиболее сильно проявляется вблизи барических центров.

5.10. Систематические расхождения между объективными и субъективными анализами практически не сказываются на численных прогнозах, выполняемых по оперативной схеме С. Л. Белоусова. Результаты прогнозов отличаются весьма мало, степень сглаженности прогностических полей одинакова. Не обнаружено практически никакого систематического различия в оценках успешности прогнозов, выполненных по данным субъективных и объективных анализов.

Так, в табл. 9 приведены оценки успешности параллельных прогнозов по данным субъективного (С) и объективного (О) анализов — коэффициенты корреляции r между прогностическими и фактическими изменениями высоты и относительная ошибка прогноза α — отношение среднего расхождения между прогностическим и фактическим n значениями к среднему фактическому изменению высоты.

Таблица 9

Сравнительные оценки прогнозов, выполненных по данным субъективных и объективных анализов [30]

Уровень, мб	r		α	
	С	О	С	О
850	0,61	0,63	0,81	0,80
500	0,71	0,67	0,72	0,74
300	0,72	0,69	0,68	0,70

5.11. В случае необходимости степень сглаженности анализа может быть легко уменьшена путем уменьшения числа влияющих станций n или с помощью иных, указанных выше способов. До настоящего времени такой необходимости не возникало, поскольку объективные анализы использовались лишь в качестве исходных данных для численных прогнозов. Однако при надлежащем уровне автоматизации работы прогностических центров и производительности электронных вычислительных машин будет целесообразно использовать результаты объективных анализов и непосредственно, безотносительно к численному прогнозу. В таком случае возникает необходимость уменьшения степени сглаженности объективных анализов.

5.12. Приведенные выше оценки расхождений между субъективными и объективными анализами относятся к случаю сравнительно густой сети станций. Как показывают исследования [5, 6, 22], с уменьшением густоты сети эти расхождения увеличиваются. Анализ отдельных случаев позволяет заключить, что эти расхождения обусловлены (при одной и той же исходной информации) в большей степени погрешностями субъективных анализов, нежели объективных. Вместе с тем в районах с редкой сетью возрастает относительная ценность каждого источника информации, вследствие чего оказывается необходимым согласование полей. Этот вопрос обсуждается в следующей лекции.

5.13. За время, прошедшее после внедрения описанного метода в практику, методика расчетов неоднократно подвергалась усовершенствованиям. Некоторые сведения об этих усовершенствованиях, а также другая информация об оперативном применении объективного анализа в практике ММЦ приведены в лекции С. Л. Белоусова.

6. Объективный анализ в районах с редкой сетью.

Согласование полей. Объективный анализ для долгосрочного прогноза

6.1. В первые годы применения объективного анализа в оперативной практике численного прогноза он выполнялся преимущественно над районами со сравнительно густой сетью станций, где согласование метеорологических полей не является необходимым. Однако расширение прогностической площади до размеров полушария и оперативное использование долгосрочных прогнозов делают необходимым распространение объективных анализов на площадь северного полушария. При таком расширении площади весьма существенно разработать рациональные методы согласования метеорологических полей при их объективном анализе. Цель настоящей лекции — дать

краткий обзор исследований, ведущихся в этом направлении в Советском Союзе.

6.2. Выше уже упоминалась программа объективного анализа на полушарии с помощью оптимальной интерполяции, составленная С. А. Машковичем [22]. За счет ряда указанных выше изменений методики вычислений Машковичу удалось существенно сократить время счета, так что анализ для сравнительно редкой регулярной сетки, покрывающей почти все северное полушарие, оказывается вполне выполнимым с помощью вычислительной машины ММЦ. Анализы, выполняемые по этой программе, уже используются в оперативном порядке в качестве исходных данных для численных долгосрочных прогнозов.

Рассмотрение этих анализов показывает, однако, что в районах с редкой сетью данных проанализированные поля сравнительно мало отличаются от полей норм. Этот факт наглядно свидетельствует о недостаточности использования только интерполяции в районах с редкой сетью, без введения согласования метеорологических полей.

6.3. Степень освещенности интересующей нас площади текущей информацией о некоторой метеорологической величине можно количественно описать распределением по этой площади среднего квадрата относительной ошибки оптимальной интерполяции ϵ . На рис. 12 приведена карта распределения ϵ для высот изобарических поверхностей по северному полушарию [22]. Как видно из этого распределения, существуют обширные районы, где освещенность полей текущей информацией весьма низка. Это в особенности относится к областям, где $\epsilon > 0,9$ (напомним, что для густой сети $\epsilon = 0,02 \div 0,03$, а максимальное возможное значение ϵ есть $\epsilon = 1$).

Для таких районов использование согласования полей в процессе анализа является необходимым.

6.4. В ряде существующих методов анализа согласование полей выполняется параллельно с интерполяцией. Более целесообразно, однако, производить согласование после интерполяции. Приведем, в частности, следующие соображения.

а. Методика согласования должна соответствовать используемой прогностической модели. Например, применительно к квазигеострофическим моделям естественно пользоваться геострофическим согласованием высот и ветра, применительно к квазисоленоидальным — согласованием на основе уравнения баланса и т. п. Поэтому для прогнозов по разным моделям могут требоваться разные варианты согласования полей при одинаковой методике интерполяции.

б. Согласуемые поля могут представлять интерес не только в своей совокупности, но и каждое в отдельности. Например, для негеострофических прогнозов нужны исходные данные и

реализации оптимального согласования необходимо иметь сведения по корреляции между согласуемыми метеорологическими величинами и по точности данных о них. Именно, если f и φ представляют собой значения двух метеорологических величин, проинтерполированные в некоторую точку регулярной сетки, то согласованное значение первой из этих величин $\tilde{f}$ определяется по формуле [4]

$$\tilde{f}' = af' + b\varphi', \quad (6.1)$$

где

$$a = \frac{1 - \zeta - r^2}{(1 - \eta)(1 + \zeta) - r^2}; \quad (6.2)$$

$$b = \frac{1}{\lambda} \frac{r\eta}{(1 - \eta)(1 + \zeta) - r^2}; \quad (6.3)$$

η — средний квадрат относительной ошибки интерполяции величины f ; ζ — средний квадрат относительной ошибки величины φ ; r — коэффициент корреляции между истинными значениями рассматриваемых величин, а λ^2 — отношение дисперсий второй и первой из этих величин. Средний квадрат относительной ошибки оптимального согласования ε может быть оценен по формуле

$$\varepsilon = a\eta. \quad (6.4)$$

6.6. Как видно из приведенных формул, при оптимальном согласовании двух полей получается, вообще говоря, не одно, а два согласованных поля — поле первой величины, согласованное с данными о второй, и поле второй величины, согласованное с данными о первой. Соответственно, если нас интересуют, скажем, различия между полями двух величин, мы должны согласовать эти поля и лишь затем анализировать различия, которые, естественно, уменьшаются благодаря согласованию.

Исключение составляет случай, когда речь идет о поле одной и той же величины, лишь определенной различными путями. Формулы для этого случая получаются из формул (6.2) — (6.4), если в них положить $r = \lambda = 1$. Тогда

$$a = \frac{\zeta}{\eta + \zeta + \eta\zeta}; \quad (6.5)$$

$$b = \frac{\eta}{\eta + \zeta + \eta\zeta}; \quad (6.6)$$

$$\varepsilon = \frac{\eta\zeta}{\eta + \zeta + \eta\zeta}. \quad (6.7)$$

В этом случае в результате согласования получается одно поле, как это следует, в частности, из симметрии формул (6.5) — (6.7).

6.7. В принципе в процессе объективного анализа можно производить самые различные согласования метеорологических полей. Практически наибольшее значение имеют три типа согласования — согласование полей высот и ветра, согласование диагностической информации с прогностической и согласование высотной информации с наземной. Применение этих основных типов согласования позволяет существенно уточнить анализируемые метеорологические поля.

6.8. Для согласования полей высот и ветра может быть использован следующий алгоритм. По результатам анализа поля реального ветра вычисляется поле вихря. Затем с помощью численного интегрирования определяется поле функции тока. При этом в качестве граничного условия используется приближенное условие равенства ветра геострофическому на границе рассматриваемой области. Далее производится оптимальное согласование вычисленной функции тока с геострофической функцией тока — высотой изобарической поверхности, деленной на параметр Кориолиса.

Следует подчеркнуть, что при таком способе согласования полей высот и ветра не делается предположения о равенстве ветра геострофическому, а лишь используется корреляционная связь между реальным и геострофическим ветром. Используются также сведения о точности анализа реальной и геострофической функции тока.

Хотя идея описанного алгоритма высказана сравнительно давно [5, 6, 33], она пока не реализована.

6.9. Один из путей использования прогностической информации при объективном анализе основан на идее динамического анализа, выдвинутой Ф. Томпсоном [40]. Эта идея состоит вкратце в том, что для некоторой заранее выделенной в середине рассматриваемой площади области, где текущая информация отсутствует («пустой» области), она заменяется результатами численного прогноза. Систематическое последовательное выполнение таких замен позволяет существенно улучшить успешность баротропных численных прогнозов, как это следует из теоретических оценок Ф. Томпсона [40] и численных опытов Н. Ричардсона [39].

В Советском Союзе исследованиями по динамическому анализу занимался М. С. Фукс-Рабинович [27, 28]. Ему удалось обобщить метод динамического анализа в ряде направлений, из которых укажем включение текущей информации в пустой области и построение пространственной, бароклинической схемы динамического анализа. Фукс-Рабинович составил также «поллуниверсальную» программу, позволяющую подключать дина-

мический анализ к любой прогностической схеме, если известен динамический инвариант для данной схемы. Результаты применения данной методики являются весьма обнадеживающими.

6.10. При динамическом анализе задается заранее пустая область, вне которой прогностическая информация не привлекается для уточнения объективного анализа. Выбор пустой области всегда является в той или иной мере произвольным. С принципиальной точки зрения заслуживает предпочтения иной метод учета прогностической информации при объективном анализе, при котором эта информация автоматически входит с тем большим весом, чем менее ценной является диагностическая информация.

Это может быть достигнуто с помощью оптимального согласования диагностических и прогностических полей, выполняемого по формулам (6.5) и (6.6). Параметрами согласования служат средние квадраты относительных ошибок интерполяции и прогноза. Первый из них может оцениваться теоретически в процессе оптимальной интерполяции, а второй получается путем анализа успешности прогнозов на массовом материале.

Расчеты, произведенные описанным способом, показывают, что в районах с густой сетью станций влияние прогностической информации получается пренебрежимо малым. В то же время в районах с редкой сетью влияние прогностических данных существенно, несмотря на худшее качество прогнозов в таких районах.

6.11. Использование наземной информации для уточнения аэрологических полей особенно важно над акваториями океанов, где при весьма редкой аэрологической сети (островные станции, корабли погоды) имеется сравнительно обширная текущая информация о наблюдениях вблизи поверхности океана, ведущихся на кораблях неметеорологического назначения. Эта информация может быть использована для пополнения высотных данных путем согласования. Первые опыты такого согласования были предприняты Б. Р. Дёёсом и М. А. Итоном [38] и привели к хорошим результатам, несмотря на наличие весьма существенных упрощений.

Пользуясь данными судовых наблюдений, можно основываться на кросскорреляционных функциях двух родов: связывающих высоту рассматриваемой изобарической поверхности с давлением на уровне моря и связывающих толщину слоя от поверхности 1000 мб до рассматриваемой поверхности с температурой у поверхности моря. Используя эти два источника информации в добавление к данным редкой аэрологической сети, можно, как показывают численные опыты, существенно улучшить анализ полей высот.

Заметим, что этот вид согласования, в отличие от рассмотренных ранее, целесообразно производить не вслед за интерполяцией поля высот, а параллельно с ней.

6.12. Уточнение объективных анализов над районами с редкой сетью станций может быть также достигнуто путем использования информации с искусственных метеорологических спутников Земли. Исследование кросскорреляционных функций между лучистыми потоками в различных интервалах длин волн, по данным спутника «Тайрос-II», и температурой на различных изобарических поверхностях [10] показало, что искомые

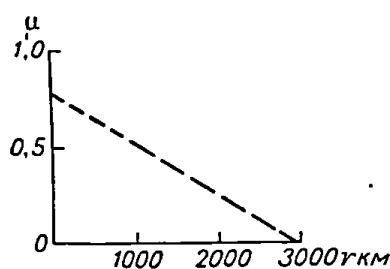


Рис. 13. Кросскорреляционная функция между лучистым потоком в интервале 8—30 мк, определенным со спутника «Тайрос-II», и температурой на поверхности 500 мб, построенная в предположении об отсутствии ошибок определения видимой со спутника точки (по Гандину и Болтенкову, [10]).

связи искажаются под воздействием ошибок географической привязки спутниковой информации. В то же время результаты упомянутой работы показывают, что при отсутствии значительных ошибок привязки можно надеяться на получение связей, достаточных для согласования полей температуры воздуха и лучистых потоков. Это видно, в частности, из рис. 13, на котором представлена гипотетическая кросскорреляционная функция потока в интервале 8—30 мк и температуры на поверхности 500 мб, построенная в предположении об отсутствии ошибок привязки.

6.13. Применение согласования может рассматриваться лишь как полумера для уточнения анализов в районах с редкой сетью станций.

Единственным кардинальным путем решения этой проблемы является развитие регулярных наблюдений в таких районах. Для этого должны параллельно использоваться три пути:

- а) организация новых станций и, в частности, кораблей погоды в районах с редкой сетью станций;
- б) организация радиозондовых наблюдений на кораблях неметеорологического назначения;
- в) внедрение в оперативную практику горизонтального зондирования атмосферы с помощью шаров постоянного объема.

Важные выводы по рациональному развитию сети наблюдений могут быть получены с помощью того же метода оптимальной интерполяции, на котором базируется объективный анализ. Детальный обзор исследований, выполненных в СССР в этом направлении, был дан в недавнем докладе автора [8].

6.14. Важной задачей объективного анализа, выполняемого для целей долгосрочного прогноза, является концентрация те-

кущей информации, описание ее с помощью сравнительно небольшого количества чисел, каждое из которых несло бы в себе существенно больше информации, чем обычные данные наблюдений. Хорошим средством решения этой задачи является использование статистически оптимальных ортогональных разложений. Этот метод, как и оптимальная интерполяция, основан на использовании данных по статистической структуре метеорологических полей. Теория и применение этого метода изложены в лекциях М. И. Юдина.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болтенков В. П. Исследование статистической макроструктуры температуры воздуха. Труды ГГО, вып. 165, 1964.
2. Гандин Л. С. Об оптимальной интерполяции и экстраполяции метеорологических полей. Труды ГГО, вып. 114, 1960.
3. Гандин Л. С. О принципах рационального размещения сети станций. Труды ГГО, вып. 111, 1961.
4. Гандин Л. С. Об оптимальном согласовании метеорологических полей. Труды ГГО, вып. 124, 1962.
5. Гандин Л. С. Объективный анализ метеорологических полей. Гидрометеониздат, Л., 1963.
6. Гандин Л. С. О статическом контроле аэрологических телеграмм. Метеорология и гидрология, № 9, 1963.
7. Гандин Л. С. Об оптимальной интерполяции векторных полей. Труды ГГО, вып. 165, 1964.
8. Гандин Л. С. Атмосферные процессы крупного масштаба и проблема сети станций. Труды ГГО, вып. 191, 1966.
9. Гандин Л. С. [и др.]. О статическом контроле аэрологических телеграмм. Труды ГГО, вып. 151, 1964.
10. Гандин Л. С., Болтенков В. П. К методике исследования трехмерной структуры метеорологических полей. Труды ГГО, вып. 165, 1964.
11. Гандин Л. С. К методике объективного анализа актинометрической информации с метеорологических спутников Земли. Труды ГГО, вып. 166, 1964.
12. Гандин Л. С., Каган Р. Л. О точности определения средней высоты снежного покрова по дискретным данным. Труды ГГО, вып. 130, 1962.
13. Гандин Л. С., Кузнецова Т. И. О пространственной статистической структуре поля геопотенциала. Труды ГГО, вып. 168, 1963.
14. Гандин Л. С., Мелешко В. П., Мещерская А. В. О применении универсальных цифровых машин для исследования статистической структуры метеорологических полей. Труды ГГО, вып. 143, 1963.
15. Губанова С. И. Объективный контроль исходных данных на станциях северного полушария методом оптимальной интерполяции. Изв. АН УзССР, сер. физ.-мат., № 4, 1964.
16. Дроздов О. А., Шепелевский А. А. Теория интерполяции в стохастическом поле метеорологических элементов и ее применение к вопросам метеорологических карт и размещения сети. Труды НИУ ГУГМС, сер. 1, вып. 13, 1946.
17. Ершов А. П. Об одном методе обращения матриц. ДАН СССР, т. 100, № 2, 1955.
18. Каган Р. Л. О точности определения средней по площади по данным точечных измерений. Труды ГГО, вып. 175, 1965.
19. Кричак М. О. Опыт объективного контроля исходных данных при оперативном прогнозе поля геопотенциала. Сб. «Объективный анализ и прогноз метеорологических элементов». Изд. АН СССР, М., 1963.

20. Кричак М. О. Опыт объективного анализа поля ветра методом оптимальной интерполяции. Труды ММЦ, вып. 4, 1964.
21. Машкович С. А. Об объективном анализе карт барической топографии северного полушария. Труды ММЦ, вып. 4, 1964.
22. Машкович С. А. Некоторые вопросы планирования размещения аэрологических станций в свете задач объективного анализа аэрологических наблюдений. Труды симпозиума по численным методам прогноза погоды. Москва, 24—29 июня 1963. Гидрометеониздат, 1964.
23. Мелешко В. П., Гусева И. П. Расчет некоторых статистических характеристик для полей температуры и влажности. Труды ГГО, вып. 165, 1964.
24. Мелешко В. П., Пригодич А. Е. Объективный анализ влажности и температуры. Труды симпозиума по численным методам прогноза погоды. Москва, 24—29 июня, 1963. Гидрометеониздат, 1964.
25. Пантелеева И. Н. Статистический контроль аэрологических телеграмм. Труды ГГО, вып. 168, 1965.
26. Фортус М. И. Трехмерная пространственная структура поля геопотенциала. Труды ГГО, вып. 165, 1964.
27. Фукс-Рабинович М. С. Результаты численных экспериментов по методу динамического анализа. Труды ММЦ, вып. 4, 1964.
28. Фукс-Рабинович М. С. К вопросу о динамическом анализе в бароклинической атмосфере. Труды ММЦ, вып. 4, 1964.
29. Четвериков И. А. Схема объективного анализа барической топографии методом оптимальной интерполяции. Труды ЦИП, вып. 102, 1962.
30. Четвериков И. А. Оперативное испытание схемы объективного анализа полей геопотенциала. Сб. «Объективный анализ и прогноз метеорологических элементов». Изд. АН СССР, М., 1963.
31. Юдин М. И. Приложение статистической теории турбулентности к упрощению уравнений динамики атмосферы. Труды ГГО, вып. 33 (95), 1952.
32. Юдин М. И. О выборе опорной сети пунктов в целях численного прогноза метеорологических полей. Труды ГГО, вып. 114, 1960.
33. Юдин М. И. Новые методы и проблемы краткосрочного прогноза погоды. Гидрометеониздат, Л., 1963.
34. Юдин М. И., Вулс И. Л. Приложение статистических методов к исследованию конечно-разностной структуры уравнения баланса. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 1, 1964.
35. Юдин М. И., Ильин Б. М., Руховец Л. В. Об одном способе контроля и исправления аэрологических телеграмм. Метеорология и гидрология, № 5, 1964.
36. Яглом А. М. Введение в теорию стационарных случайных функций. УФН, т. 7, вып. 5 (51), 1952.
37. Bertoni E., Lund I. A. Space Correlations of the Height of Constant Pressure Surfaces. J. Appl. Met., 2, No. 4, 1962.
38. Döös B. R., Eaton M. A. Upper-air Analysis over Ocean Areas. Tellus, 9, No. 2, 1957.
39. Richardson N. N. Numerical Tests of a Method for Dynamic Analysis in Regions of Poor Data Coverage. Tellus, 13, No. 3, 1961.
40. Thompson P. D. A Dynamical Method of Analysing Meteorological Data. Tellus, 13, No. 3, 1961.
41. Wiener N. Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series. New York, 1949.

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ МЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИХ ДАННЫХ

1. Введение

Информация, получаемая с различных типов наблюдательных станций (радиозондовые станции, наземные станции, привязные аэростаты, спутники и т. д.), характеризует начальное состояние, по которому приходится рассчитывать прогноз. Так как наблюдения распределены неравномерно, то данные необходимо анализировать так, чтобы получить значения наблюдаемых величин в точках регулярной сетки, которая используется в численном прогнозе. Эта интерполяционная процедура обычно называется численным анализом карт погоды или объективным анализом.

Было весьма отчетливо показано, что качество прогноза в большой степени зависит от точности и внутренней согласованности анализируемых полей. Схему анализа можно построить так, чтобы она принимала во внимание имеющуюся информацию более систематическим путем, чем это возможно при ручных методах. Это дает возможность лучше удовлетворять требованиям к анализу, предъявляемым моделями численного прогноза. Другое преимущество объективного анализа заключается в том, что он дает лучшие возможности для опознавания и исправления или устранения неправильных данных.

Нет сомнения, что для краткосрочного прогнозирования крупномасштабных движений во внетропических районах точность методов анализа, используемых в настоящее время в оперативной практике, является достаточной. Тем не менее представляется, что проблемами анализа в какой-то мере пренебрегали. В настоящее время существует необходимость автоматизации анализов и прогнозов, отличающихся от тех, которые используются сейчас на практике, причем модели численного прогноза становятся все более и более зависящими от согласованности анализируемых полей.

Было предложено несколько объективных методов анализа наблюдаемых метеорологических элементов. Л. С. Гандин уже

рассмотрел один из этих методов — метод оптимальной интерполяции.

Ниже мы опишем четыре других метода, три из которых в настоящее время применяются в оперативной практике.

2. Полиномиальный метод

Основной принцип этого метода заключается в отыскании полинома для представления данных наблюдений ветра и геопотенциала над территорией, окружающей точку сетки, в которой требуется знать значение геопотенциала. Этот метод был впервые предложен Пановским [1], который использовал полиномы третьей степени. Коэффициенты полиномов определялись методом наименьших квадратов. Другие варианты этого метода, используемые на практике, были даны Джилкристом и Крессманом [3], Бушби и Хакл [6] и Корби [18].

В каждой точке сетки определяется полином второй или третьей степени так, чтобы он лучше всего удовлетворял данным наблюдениям. Процесс повторяют от точки к точке по всей сетке.

При анализе поля высот изобарической поверхности мы используем наблюдаемые высоты и ветры. При этом нужно иметь соотношение между барическим полем и ветром. Самым простым приближением является использование уравнения геострофического ветра, однако были предприняты некоторые попытки использования более реальных связей, например формул градиентного ветра. Кроме этих наблюдений, мы можем также, чтобы учесть непрерывность процессов во времени, использовать прогностические карты, которые действительны на момент анализа.

Полином можно записать следующим образом:

$$Z_s = \sum a_{j,k} x^j y^k, \quad j, k \geq 0, \quad j + k \leq n; \quad (2.1)$$

если мы рассматриваем поверхность третьего порядка, то $n=3$, а для поверхности второго порядка $n=2$.

Тогда коэффициенты $a_{j,k}$ приходится определять с помощью имеющейся информации в тех пунктах наблюдения, которые окружают рассматриваемую точку сетки.

Так как мы выбираем начало системы координат в узле сетки, то значение высоты, которое мы собираемся вычислить, равно коэффициенту a_{00} . Чтобы определить коэффициенты для поверхности второго порядка, нам нужно иметь по крайней мере шесть элементов информации (данных), а для поверхности третьего порядка — десять элементов. Однако из-за ошибок наблюдений результаты их не всегда хорошо согласуются. Поэтому желательно иметь большее количество элементов информации, чем минимально необходимое. Коэффи-

цененты определяются так, чтобы полином наилучшим образом соответствовал наблюдениям. Таким путем мы можем сгладить анализ и устранить, по крайней мере частично, случайные ошибки.

Метод, который применяется для получения наилучшего соответствия, называется методом наименьших квадратов. Согласно этому методу, выражение, которое следует минимизировать для того, чтобы получить наилучшую аппроксимирующую поверхность, имеет вид

$$E = \sum_{i=1}^l \{ p (Z_s - Z_0)^2 \}_i + T^2 \sum_{i=1}^m \{ p [(u_s - u_0)^2 + (v_s - v_0)^2] \}_i + \sum_{i=1}^n \{ p' (Z_s - Z_f)^2 \}_i, \quad (2.2)$$

где Z_0 — наблюдаемая высота изобарической поверхности, Z_s — высота, даваемая полиномом для станции, u_0, v_0 — компоненты наблюдаемого ветра, u_s, v_s — составляющие геострофического ветра, определяемые полиномом. Так, при $n=2$;

$$\left. \begin{aligned} u_s &= -\frac{gm}{f} \frac{\partial Z_s}{\partial y} = -\frac{gm}{f} (a_{11}x + 2a_{02}y + a_{01}), \\ v_s &= \frac{gm}{f} \frac{\partial Z_s}{\partial x} = \frac{gm}{f} (2a_{20}x + a_{11}y + a_{10}), \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

Z_f — прогностическое значение высоты в точке сетки к моменту наблюдения (например, 12-часовой прогноз), p, p' — весовые функции, которые убывают с увеличением расстояния между станциями и точкой сетки. Эти функции могут, например, иметь вид

$$\frac{a}{b + r^4} + c,$$

где r — расстояние между станцией и точкой сетки, измеряемое в единицах шага сетки, а a, b и c — постоянные величины, которые можно определить эмпирически.

T^2 представляет собой вес, даваемый наблюдениям над ветром по отношению к наблюдениям над высотой. Так как три члена в выражении для E должны иметь одинаковую размерность, то T имеет размерность времени.

Член в формуле для E , который выражает различие между высотой, получаемой из полинома, и наблюдаемой высотой,

$$\sum_{i=1}^l \{ p (Z_s - Z_0)^2 \}_i$$

зависит от случайных ошибок наблюдений и от ошибок, которые вызваны тем, что действительную поверхность нельзя

точно изобразить поверхность, даваемой полиномом с ограниченным числом степеней свободы.

Член, который выражает ошибки аппроксимации ветра,

$$T^2 \sum_{i=1}^m \{ p [(u_s - u_0)^2 + (v_s - v_0)^2] \}_i$$

включает, кроме этих ошибок, также ошибки, вызванные отклонениями ветра от геострофического.

Последний член

$$\sum_{i=1}^n \{ p' (Z_s - Z_f)^2 \}_i$$

также включает ошибки аппроксимации. Кроме того, этот член зависит от ошибок прогноза.

Коэффициенты полинома, которые дают наилучшее соответствие с наблюдениями, т. е. такие, при которых величина E имеет минимальное значение, можно получить решением следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$\frac{\partial E}{\partial a_{j,k}} = 0, \quad j, k \geq 0, \quad j + k \leq n. \quad (2.4)$$

Количество этих уравнений равно шести для поверхности второго порядка и десяти для поверхности третьего порядка.

Эта система уравнений решается для каждой точки сетки. Процесс вычислений занимает сравнительно много времени. Поэтому в большинстве случаев выбирают полином второй степени.

Опыт, приобретенный в результате применения этого метода, выявил определенные его недостатки, которые особенно заметны при анализе глубоких циклонов. Этот вопрос рассматривался в исследованиях Корби [18]. Он показал, что существует общая тенденция недооценивать глубину интенсивных циклонов, особенно в областях с недостаточной сетью наблюдений. Следует указать, что этот тип ошибки встречается также и в других методах анализа. Для устранения этих недостатков Корби в своем исследовании предложил две модификации метода.

Предположение, что при определении градиента высоты изобарической поверхности мы можем заменить наблюдаемый ветер геострофическим ветром, может привести к серьезным ошибкам в районах с большой кривизной изогипс. Это можно показать с помощью уравнения градиентного ветра, которое в натуральных координатах принимает следующую форму:

$$fV + KV^2 = -g \frac{\partial Z}{\partial n}. \quad (2.5)$$

Здесь K — кривизна траектории, которая рассматривается как положительная для циклонического движения. Из этого уравнения сразу же видно, что градиент $-g \frac{\partial Z}{\partial n}$ становится равным $fV + KV^2$ для приближения градиентного ветра и fV для приближения геострофического ветра.

Отношение этих двух выражений равно

$$1 + \frac{KV}{f};$$

оно больше единицы для циклонического движения и меньше единицы для антициклонического движения. Определяя это выражение для каждого наблюдения ветра, можно исправить геострофически вычисленный градиент. Однако кривизна K первоначально неизвестна. Поэтому анализ проводится дважды. Первый раз используем геострофическое приближение. После этого можно вычислить множитель $1 + \frac{KV}{f}$ и затем исправить градиент поля геопотенциала при вторичном анализе. Использование указанного приема привело к улучшению анализа.

Однако существует и другая причина сглаживания глубоких депрессий. Она обусловлена тем, что поверхность второго порядка может изображать только эллиптические или гиперболические поверхности. Попытка уменьшить этот эффект также была предпринята Корби в упомянутой работе [18].

Трехмерный анализ

Естественное обобщение рассмотренного метода объективного анализа было предложено в 1963 г. Корби [26].

Главный недостаток двумерного анализа заключается в трудности получения достаточно хорошего согласования полей по вертикали. Когда в качестве начальных полей для многоуровневых прогностических моделей используются поля на различных уровнях, проанализированные отдельно, могут появиться довольно серьезные прогностические ошибки. Поэтому Корби предложил такой метод анализа, при котором расчет производится сразу для всей совокупности уровней. При таком способе имеющиеся данные всех уровней в окрестности рассматриваемой точки сетки описываются с помощью некоторой системы поверхностей. Выражение для этих поверхностей задано в виде

$$Z_s = \sum_{j,k}^N Q_{j,k} L_{j,k}, \quad (2.6)$$

где

$$Q_{j,k} = \sum \{a_{j,k}\} x^j y^k, \quad j, k \geq 0, \quad j + k \leq n \quad (2.7)$$

11

$$L = \log P, \quad P = \frac{p}{p_0}, \quad p_0 = 1000 \text{ мб.} \quad (2.8)$$

Коэффициенты полинома для системы поверхностей, которые нам требуются для получения значений в точке сетки, можно определить таким же образом, как и при анализе двумерных полей. Выражение, которое нам теперь нужно минимизировать, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} E = & \sum_{v=1}^N \left\{ \sum_{i=1}^l [pq(Z_s - Z_f)^2]_i \right\}_v + \\ & + T^2 \sum_{v=1}^N \left\{ \sum_{i=1}^m [pq((u_s - u_0)^2 + (v_s - v_0)^2)]_i \right\}_v + \\ & + \sum_{v=1}^N \left\{ \sum_{i=1}^n [p'q(Z_s - Z_f)^2]_i \right\}_v. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Используемые здесь символы имеют те же значения, что и в соответствующем выражении при анализе двумерных полей. Кроме того, здесь введен вертикальный весовой множитель q . Он определяется таким образом, чтобы обеспечить лучшее соответствие анализа данным наблюдений на нижележащих уровнях.

Заметим, что одновременно можно использовать все виды данных и что различные данные наблюдений не обязательно должны относиться к стандартным уровням.

В численном опыте применения этого метода использовались для Q полиномы второй степени ($n=2$) и для Z_s полином третьей степени относительно логарифма P ($N=3$).

Так как для поверхности второго порядка нужно шесть коэффициентов, а для кубической аппроксимации по высоте — четыре коэффициента, то количество коэффициентов, которое нужно определить методом наименьших квадратов, равно 24. Очевидно, что лучше иметь значительно больше степеней свободы, чтобы получить более адекватные представления наблюдаемых условий. Однако тогда объем вычислений чрезвычайно сильно увеличивается, и единственный смысл численного эксперимента состоит в том, чтобы приобрести опыт применения более общего метода.

Были использованы следующие горизонтальные весовые функции:

$$p = \frac{1}{1 + \kappa r^4},$$

$$p' = \frac{2^{-5}}{1 + \kappa r^4},$$

где $\kappa=0,186$ для наземных наблюдений, $\kappa=0,0116$ для аэрологических наблюдений.

Расстояние между станцией и точкой сетки r измеряется в единицах сетки ($d=300$ км на 60° с. ш.). Вертикальный весовой множитель задавался формулой

$$q = \frac{3}{4} P - \frac{1}{4},$$

параметр T^2 был принят равным 16 сек.²

Все 24 постоянные величины получаются из 24 алгебраических уравнений, которые находятся из условия минимума E .

$$\frac{\partial E}{\partial a_{j,k,v}} = 0, \quad j, k \geq 0, \quad j + k \leq 2, \quad v = 1, 2, 3. \quad (2.10)$$

С помощью решения этой системы уравнений мы можем выразить вертикальное распределение высот изобарических поверхностей над каждой точкой сетки в следующей форме:

$$Z_s = Q_0 + Q_1 \lg P + Q_2 (\lg P)^2 + Q_3 (\lg P)^3. \quad (2.11)$$

При $P=1$ ($p=1000$ мб) $\lg P=0$, так что Q_0 представляет собой высоту поверхности 1000 мб.

Температуру можно вычислить с помощью уравнения статики

$$T = -\frac{gp}{R} \frac{\partial Z_s}{\partial p} = -\frac{g}{R} \frac{\partial Z_s}{\partial (\lg P)}. \quad (2.12)$$

Таким образом, мы имеем

$$T = -\frac{g}{R} [Q_1 + 2Q_2 \lg P + 3Q_3 (\lg P)^2]. \quad (2.13)$$

В частности, для уровня 1000 мб

$$T_0 = -\frac{g}{R} Q_1. \quad (2.14)$$

Полученные результаты позволяют сделать вывод, что этот метод несомненно можно использовать при анализе поля геопотенциала в тропосфере. Однако опыты показали, что для описания вертикальных профилей в нижней стратосфере необходимо иметь больше четырех параметров.

3. Метод коррекции

Этот метод существенно отличается от полиномиального метода. В своей основной форме метод требует значительно меньше математических операций и поэтому намного меньших затрат времени. Величину, которую нужно анализировать, выражают как взвешенное среднее из имеющейся информации. Метод был предложен Бергторссоном и Дёёсом [4]. Другой вариант этого метода был разработан Крессменом [9]. Макдонел

[22] представил подробный отчет об этом варианте метода в том виде, в котором он применяется в оперативной практике Бюро погоды США.

Сначала вычисляют предварительное поле. Оно представляет собой взвешенное среднее из прогностических значений высоты Z_f (например, 12-часового прогноза) и месячных норм Z_n :

$$Z_p = \frac{\mu_f Z_f + \mu_n Z_n}{\mu_f + \mu_n}, \quad (3.1)$$

где μ_f и μ_n — соответственно веса прогностических высот и норм; μ_f и μ_n принимаются функциями географического расположения и времени года. Предполагая далее, что отклонения от прогностических значений не коррелируют с отклонениями от норм, мы можем положить

$$\left. \begin{aligned} \mu_f &= \frac{\text{const}}{\sigma_f}, \\ \mu_n &= \frac{\text{const}}{\sigma_n}. \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

Таким образом, предполагается, что вес прогноза обратно пропорционален средней квадратической разности между наблюдаемым и прогностическим значением высоты. Вес нормы получают таким же образом.

Вычисления весов μ_f и μ_n для каждого месяца показывают, что их сезонные изменения незначительны, так что с хорошим приближением можно использовать средние годовые величины.

Рассмотрим теперь одну точку сетки и опишем, как учитываются наблюдения вокруг этой точки. Для простоты предположим, что у нас есть только две станции: одна стан-

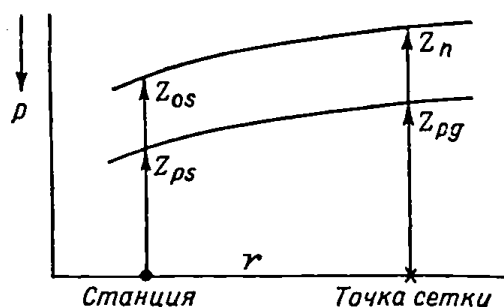


Рис. 1. Схематическая иллюстрация определения высоты Z_h .

ция сообщает лишь информацию о высоте изобарической поверхности, а другая станция сообщает, кроме того, данные о ветре.

Сначала мы рассмотрим станцию, которая сообщает только высоту. Предположив, что разность между наблюдаемой высотой Z_{0s} и предварительной высотой на станции Z_{ps} та же, что и между высотой Z_h и предварительной высотой Z_{pg} в точке сетки, мы получаем (рис. 1)

$$Z_h = Z_{pg} + Z_{0s} - Z_{ps}. \quad (3.3)$$

С помощью этой информации можно изменить предварительное поле геопотенциала. Тогда значение геопотенциала в точке сетки вычисляется по формуле

$$Z_g = \frac{\mu_f Z_f + \mu_n Z_n + \mu_h Z_h}{\mu_f + \mu_n + \mu_h}. \quad (3.4)$$

Для простоты предполагается, что вес μ_h является функцией расстояния (r) между точкой сетки и станцией. Требуя, чтобы при заданном расстоянии r_s средняя по данным большого количества случаев квадратичная разность между Z_g и обычным образом проанализированной высотой была минимальной, можно определить вес для этого расстояния. Затем это вычисление можно повторить для различных расстояний; таким образом, μ_h можно определить как функцию от r .

Для станции, которая сообщает также ветер, выполняют две различных оценки высоты в точке сетки. Данные высоты используются таким же образом, как описано выше,

$$Z_1 = Z_{pg} + Z_{os} - Z_{ps}. \quad (3.5)$$

Предположив, что наблюдаемый ветер геострофический и репрезентативный для области между точкой сетки и станцией, можно вычислить соответствующий градиент поля Z .

Для значения геопотенциала в точке сетки получаем следующее выражение (рис. 2)

$$Z_2 = Z_{os} + \left(\frac{\partial Z}{\partial r} \right)_{os} r,$$

или

$$Z_2 = Z_{os} + \left(\frac{\partial Z}{\partial x} \right)_{os} \partial x + \left(\frac{\partial Z}{\partial y} \right)_{os} \partial y,$$

или, наконец,

$$Z_2 = Z_{os} + \frac{(\partial_x Z)_{os}}{d} \partial x + \frac{(\partial_y Z)_{os}}{d} \partial y, \quad (3.6)$$

где $(\partial_x Z)_{os}$ и $(\partial_y Z)_{os}$ представляют собой разности геопотенциальных высот на расстоянии шага сетки d и определяются по данным о наблюдаемом ветре при помощи уравнений геострофического ветра:

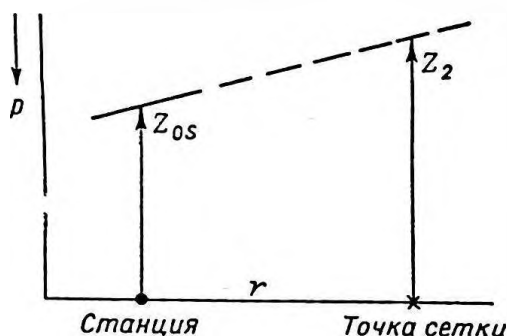
$$\frac{(\partial_x Z)_{os}}{d} = \frac{fv_{os}}{gm}, \quad \frac{(\partial_y Z)_{os}}{d} = -\frac{fu_{os}}{gm}; \quad (3.7)$$

u_{os} и v_{os} — составляющие наблюдаемого ветра по осям x и y ,
 m — масштабный множитель карты.

Обозначив веса, придаваемые этим двум определениям высоты изобарической поверхности в точке сетки, через μ_1 и μ_2 , получим с учетом данных указанных станций следующее выражение для Z_g :

$$Z_g = \frac{\mu_f Z_f + \mu_n Z_n + \mu_h Z_h + \mu_1 Z_1 + \mu_2 Z_2}{\mu_f + \mu_n + \mu_h + \mu_1 + \mu_2}. \quad (3.8)$$

Веса μ_1 и μ_2 определяются таким же образом, как и μ_h . В этой связи следует заметить, что вес μ_1 сильно отличается от μ_h . Это происходит оттого, что Z_h является единственным вкладом станции. Поэтому вес μ_h должен быть больше вблизи станции, чем вес μ_1 .



Были выполнены вычисления с различными весовыми функциями. Сравнительно хорошее согласование с вычисленными значениями дают функции вида

Рис. 2. Схематическая иллюстрация определения высоты Z_2 .

$$\mu = \frac{a}{b + r^4} + c, \quad (3.9)$$

где r измеряется в шагах сетки ($d=300$ км на широте 60° N), а a , b и c — константы. Эти функции используются в оперативной практике.

Недавно был выполнен ряд экспериментов с весовыми функциями, связанными с распределением ветра. Поскольку ценность данных наблюдений убывает менее быстро вдоль линий тока, чем в направлении, перпендикулярном к линиям тока, при построении весовой функции учитывался этот факт. Изолинии μ для такой функции не являются окружностями, а вытянуты вдоль линий тока. Эти эксперименты дали хорошие результаты.

Несомненно, что в отдельных случаях веса, которые дают самые лучшие результаты, значительно отклоняются от величин, получаемых по формулам вида (3.9). Однако опыты показали также, что анализ слабо чувствителен к форме этих весовых функций. Удвоение весов при $r=0$ привело к изменению Z_g самое большее на 10 м в отдельных точках.

Пока мы рассмотрели только две станции, влияющие на величину геопотенциала в точке сетки, — одна с данными геопотенциала, другая с данными геопотенциала и ветра. Если на высоту изобарической поверхности в точке сетки влияет несколько станций, необходимо принять во внимание следующее обстоятельство. Некоторые станции находятся друг от друга очень близко и значения на них сильно коррелируют, в то время

как другие станции изолированы и дают значения, которые слабо коррелированы с данными на других станциях. Этот результат иллюстрируется рис. 3.

Например, если мы принимаем во внимание влияние наблюдений в пунктах S_1 и S_2 на величину в точке сетки G и если наблюдения в пункте S_1 и на станциях, окружающих этот пункт, имеют то же влияние на величину в точке сетки, как и наблюдения в пункте S_2 , то в результате появляется систематическая

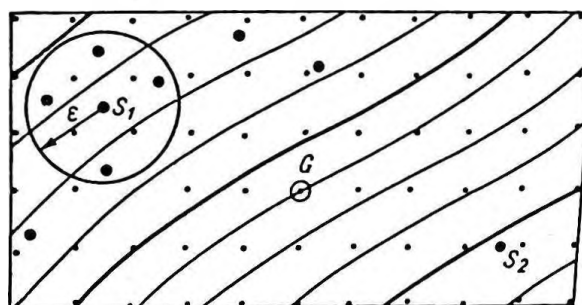


Рис. 3.

ошибка. Этот эффект будет особенно сильно выражен, если градиент анализируемой величины ориентирован вдоль линии S_1S_2 . Поэтому вес станций должен быть уменьшен, если плотность сети станций высока. Это учитывается множителем $f(\rho)$, где ρ определяют как количество станций внутри круга радиусом ε . Можно использовать следующую простую формулу:

$$f(\rho) = \frac{a}{b + c\rho}. \quad (3.10)$$

Константы в этой формуле следует подбирать таким образом, чтобы $f(1) = 1$, что можно получить, например, при $a = 1$ и $b = c = 0,5$. Рациональная величина радиуса ε равна 1,25 шага сетки ($\varepsilon = 375$ км на 60° с. ш.).

Теперь мы можем написать выражение для высоты в точке сетки после того, как принята во внимание информация N_1 станций, которые сообщают только высоту, и N_2 станций, которые сообщают ветер и высоту:

$$Z_g = \frac{\nu_f Z_f + \nu_n Z_n + \sum_{i=1}^{N_1} [f(\rho) \nu_h Z_{hi}] + \sum_{i=1}^{N_2} [f(\rho) (\nu_1 Z_{1i} + \nu_2 Z_{2i})]}{\nu_f + \nu_n + \sum_{i=1}^{N_1} [f(\rho) \nu_h] + \sum_{i=1}^{N_2} [f(\rho) (\nu_1 + \nu_2)]}. \quad (3.11)$$

На этой стадии процесса анализа можно также учитывать станции, которые сообщают только ветер. Их можно использо-

вать таким же образом, как и станции, которые сообщают высоту и ветер. Единственное различие заключается в том, что наблюдаемую высоту теперь заменяют проанализированной высотой Z_{as} . Тогда высота в точке сетки, определяемая таким образом, равна

$$Z_s = Z_{as} + \frac{(\partial_x Z)_{as}}{a} \delta x + \frac{(\partial_y Z)_{as}}{a} \delta y. \quad (3.12)$$

Обозначив вес для этой информации μ_s , мы можем написать окончательно следующую формулу для высоты в точке сетки:

$$Z_g = \frac{\mu_f Z_f + \mu_n Z_n + \sum_{i=1}^{N_1} [f(\rho) \mu_n Z_n]_i + \sum_{i=1}^{N_2} [f(\rho) (\mu_1 Z_1 + \mu_2 Z_2)]_i + \sum_{i=1}^{N_3} [f(\rho) \mu_3 Z_3]_i}{\mu_f + \mu_n + \sum_{i=1}^{N_1} [f(\rho) \mu_n]_i + \sum_{i=1}^{N_2} [f(\rho) (\mu_1 + \mu_2)]_i + \sum_{i=1}^{N_3} [f(\rho) \mu_3]_i} \quad (3.13)$$

При анализе высоты (или другого элемента) этим методом мы можем действовать двумя различными путями. Так, можно вычислять высоту в точках сетки одну за другой. Прежде чем переходить к другой точке, нужно учитывать все станции, которые могут влиять на высоту в этой точке.

При другом методе можно действовать последовательным переходом от одной станции к другой. Для каждой станции вычисляются вклады в значения высоты во всех точках сетки, которые могут подвергаться влиянию этой станции. Например, предположим, что мы собираемся изменить высоту в точке сетки за счет вклада Z_h . Пусть мы знаем высоту в точке сетки перед изменением и сумму весов предыдущих вкладов

$$M^{(v)} = \mu_f + \mu_n + \sum_{i=1}^{v_1} [f(\rho) \mu_n]_i + \sum_{i=1}^{v_2} [f(\rho) (\mu_1 + \mu_2)]_i, \quad (3.14)$$

где $v = v_1 + v_2$.

Тогда измененная высота будет

$$Z_g^{(v+1)} = \frac{M^{(v)} Z_g^{(v)} + f(\rho) \mu_n Z_h}{M^{(v)} + f(\rho) \mu_n}. \quad (3.15)$$

После вычисления $Z_g^{(v+1)}$ мы запоминаем эту величину. Мы также запоминаем новую сумму весов

$$M^{(v+1)} = M^{(v)} + f(\rho) \mu_n \quad (3.16)$$

для этой точки.

После того, как использованы все наблюдения, описанная процедура вычислений повторяется еще раз и т. д. После каждого такого этапа проанализированное поле используется в качестве предварительного поля для следующего этапа.

Так как предварительное поле улучшается от каждого такого этапа к следующему, то очевидно, что при различных этапах нужно использовать различные весовые функции, чтобы получить наилучший возможный результат. Применяя радиусы влияния наблюдений, уменьшающиеся от одного этапа к другому, можно достичь того, что наиболее крупномасштабные ошибки предварительного поля будут уменьшены на ранних

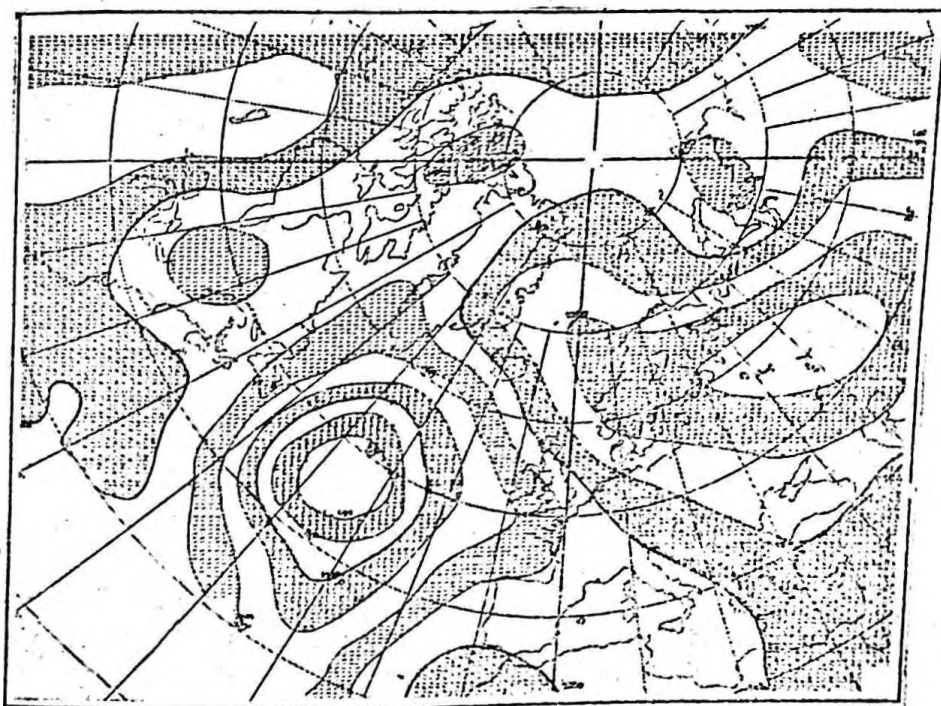


Рис. 4а. Первый этап анализа наземного давления. Радиус влияния станций на этом этапе равен 6 шагам сетки, $N=6$ (1800 км).

этапах, а при последних этапах результаты анализов будут все ближе соответствовать наблюдениям. Требуемое количество этапов зависит, разумеется, от характерного масштаба анализируемого метеорологического элемента. Например, анализ геопотенциала для высотных карт требует меньше этапов, чем анализ наземного давления.

На рис. 4а—4д показан пример анализа поля наземного давления с помощью этого метода. Чтобы проиллюстрировать, как меняется поле в процессе анализа, мы приводим карты поля давления после каждого этапа. В этом частном случае не было никакого предварительного поля, так что использовались только данные наблюдений над давлением.

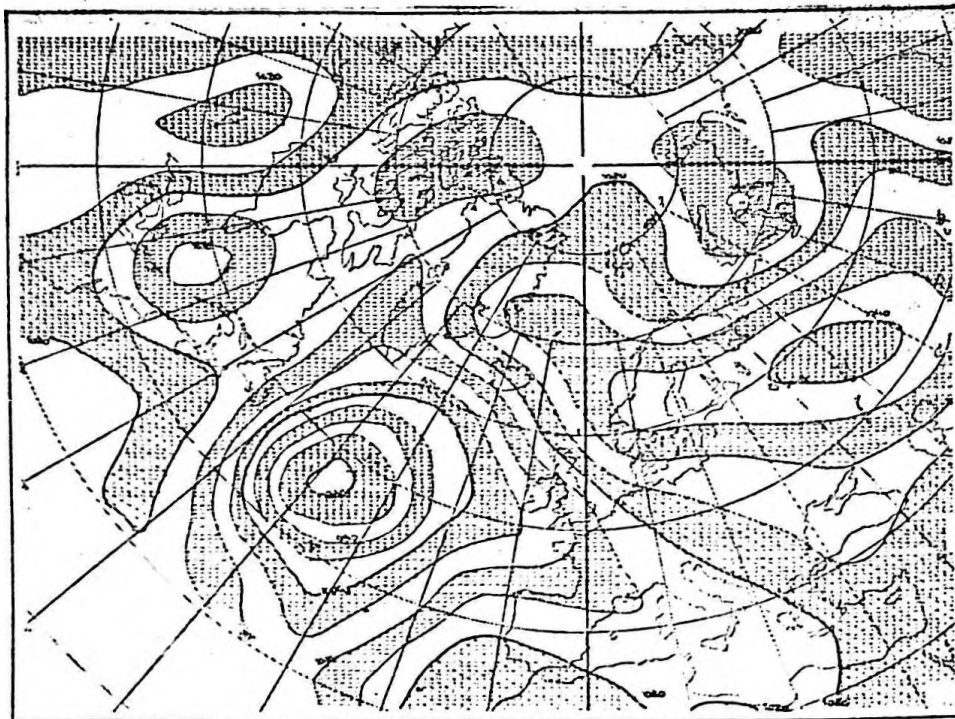


Рис. 4б. Второй этап. $N=4$ шагам сетки (1200 км).

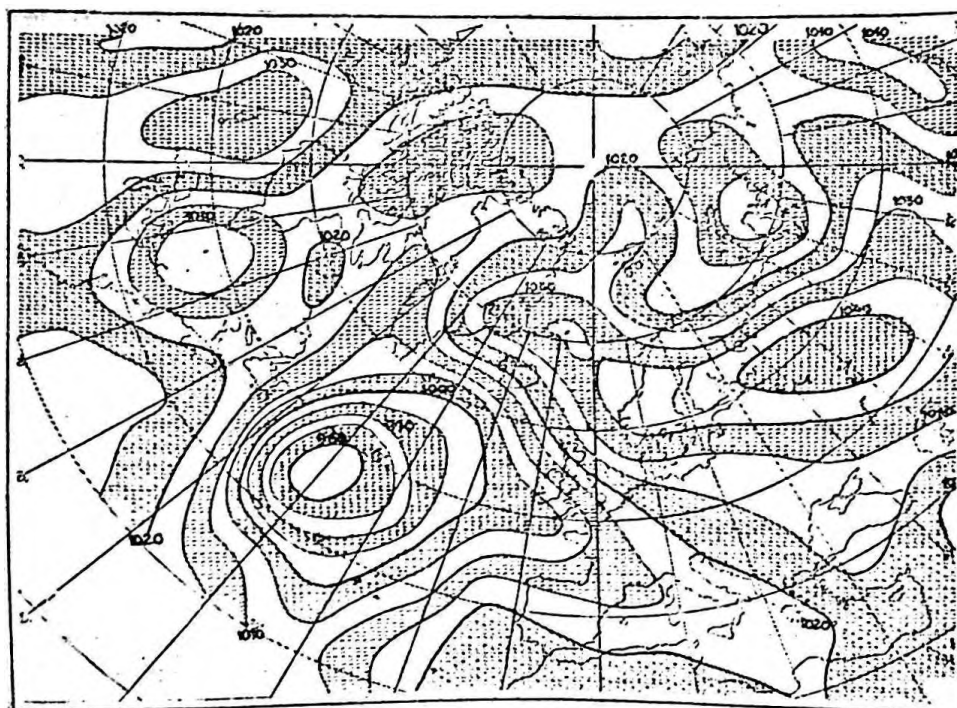


Рис. 4в. Третий этап. $N=2,5$ шага сетки (750 км).

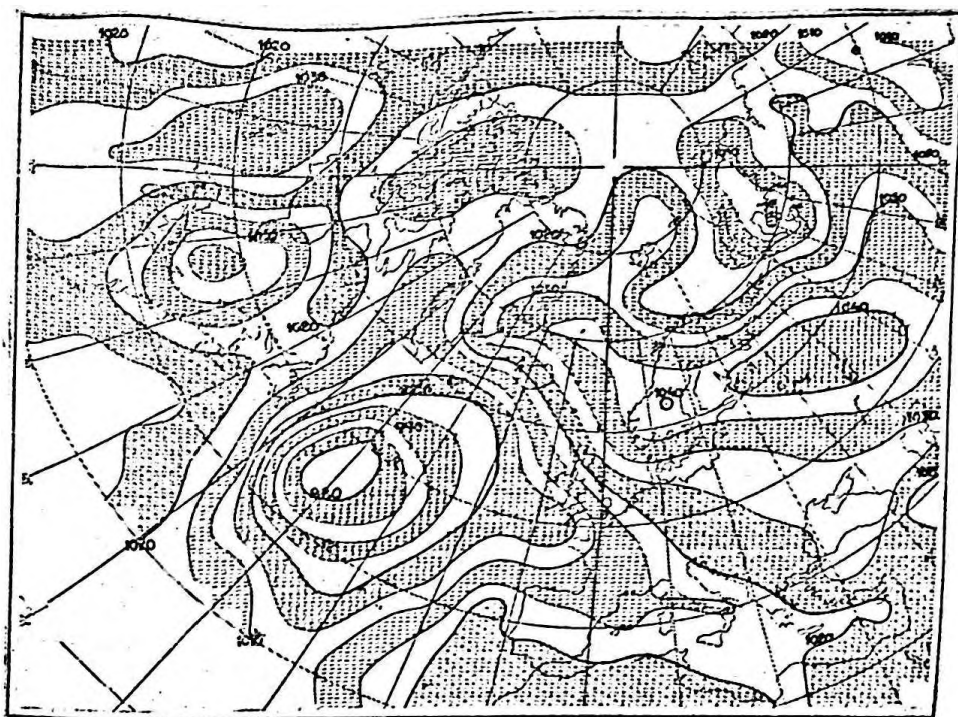


Рис. 4г. Четвертый этап. $N=1$ шаг сетки (300 км).

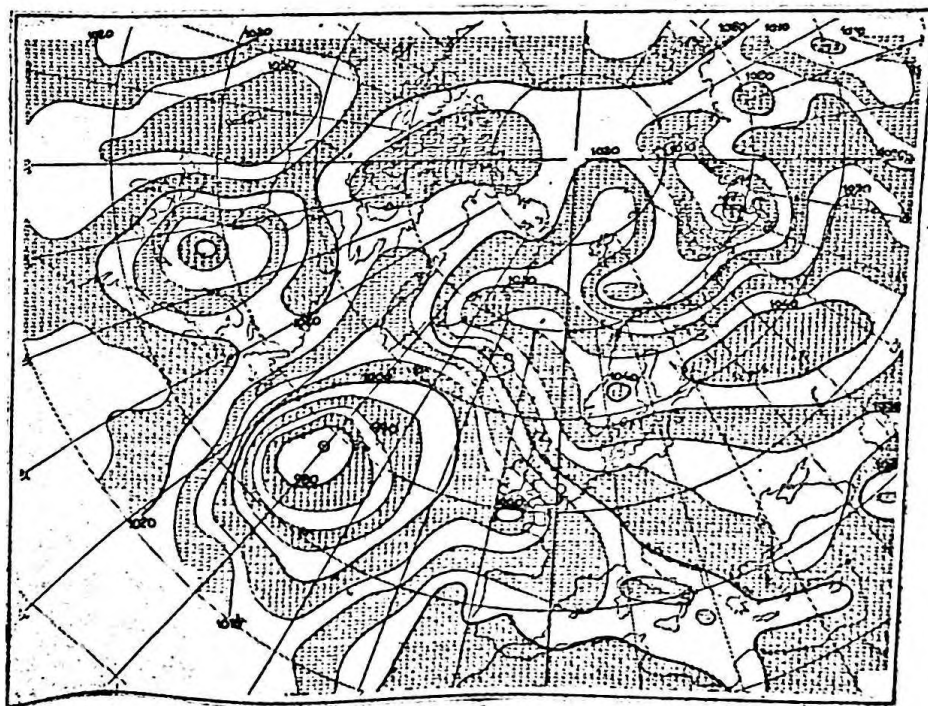


Рис. 4д. Пятый этап. $N=1$ шаг сетки (300 км).

Весовые функции, которые были использованы, приведены в табл. 1, где N означает радиус влияния, измеряемый в шагах сетки ($\mu=0$ при $r>N$).

Таблица 1

Номер этапа	N	Весовая функция
1	6	$\mu = \frac{6,10}{6,34 + r^4} \div 0,03$
2	4	
3	2,5	$\mu = \frac{1,10}{1,30 + r^4} \div 0,02$
4	1	$\mu = \frac{0,437}{0,489 + r^4} \div 0,007$
5	1	

Схема анализа, используемая в Бюро погоды США и описанная Крессманом [9], аналогична по своим основным принципам схеме, описанной выше. Весовая функция, применяемая Крессманом, имеет вид

$$W = \frac{N^2 - r^2}{N^2 + r^2} \quad \text{при } r \leq N, \quad (3.17)$$

$$W = 0 \quad \text{при } r > N,$$

где N и r , как и ранее, измеряются в шагах сетки (381 км на 60° с. ш.).

Значения параметра N весовой функции, используемые на различных этапах, приведены в табл. 2.

Таблица 2

Номер этапа	N	Весовая функция
1	4,75 ¹	W
2	2,60 ²	W
3	2,25	W
4	1,50	1

¹ Имеет величину 5,9 для 500 мб, 6,9 для 300 мб, 7,9 для 200 мб.

² Имеет величину 3,9 для 300 и 200 мб.

На первом этапе анализа высоты изобарической поверхности не используются данные о ветре. При анализе ветра используются только два этапа, начиная с третьего этапа.

Анализ над океаническими районами

В рамках рассматриваемого метода были предприняты некоторые попытки улучшить анализ карт барической топографии путем использования значений высоты, экстраполированных по данным о наземном давлении и температуре (Дёёс и Итон, 1957).

Экстраполированное значение Z_1 высоты изобарической поверхности p_1 получается путем интегрирования уравнения статки

$$\frac{dp}{p} = -\frac{mg}{R^*T} dZ. \quad (3.18)$$

Полагая вертикальный температурный градиент γ постоянным, получаем

$$Z_1 = \frac{T_0}{\gamma} \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{R^*\gamma}{mg}} \right], \quad (3.19)$$

где

$$\gamma \simeq -\frac{\partial T}{\partial Z}.$$

Таким образом, зная p_0 , T_0 и γ , можно вычислить высоту изобарической поверхности. Как p_0 , так и T_0 представляют собой наблюдаемые величины. Величину γ лучше всего определять путем интерполяции по данным близлежащих аэрологических станций

$$\gamma = \frac{\sum_{i=1}^I (x\gamma)_i}{\sum_{i=1}^I \mu_i}, \quad (3.20)$$

где I — число аэрологических станций, окружающих наземную станцию, а μ — весовая функция, зависящая от расстояния между наземной и аэрологической станцией.

На аэрологических станциях Z_1 , p_0 и T_0 являются наблюдаемыми величинами, и поэтому температурный градиент γ может быть вычислен по формуле (3.19). Такой путь приводит обычно к значениям градиента, более точным и лучше применимым для описанной цели, нежели градиенты, вычисленные по данным о температурах T_0 и T_1 .

Точность численного анализа

Чтобы оценить, насколько улучшился анализ благодаря использованию этих экстраполированных высот в качестве дополнительной информации, мы применили следующий метод.

Введем обозначения:

N — численный анализ без использования экстраполированных высот, N_E — численный анализ с использованием экстраполированных высот, C_1 и C_2 — два независимых обычных (синоптических) анализа.

Для района, где густота сети аэрологических станций мала (Северная Атлантика), вычислялись средние квадратические

Таблица 3

$$RMS(N - C_1) = 44$$

$$RMS(N - C_2) = 43$$

$$RMS(N_E - C_1) = 39$$

$$RMS(N_E - C_2) = 38$$

$$RMS(C_1 - C_2) = 29$$

$$RMS(N - N_E) = 18$$

разности (RMS) между высотами поверхности 500 мб по результатам различных анализов. В табл. 3 приводятся значения этих разностей, определенные для семи различных случаев. Для сравнения укажем, что $RMS(N - C_1)$ над континентальными районами меняется от 10 до 20 м.

Используя средние значения средних квадратических разностей, приведенные в табл. 3, можно оценить разности между различными анализами и фиктивным «истинным» анализом. Обозначая истинную высоту поверхности 500 мб через Z_T , можно следующим образом выразить высоты по данным двух обычных анализов Z_{C_1} и Z_{C_2} и по данным численного анализа Z_N в той же точке:

$$\left. \begin{aligned} Z_{C_1} &= Z_T + n(0, \sigma_{C_1}), \\ Z_{C_2} &= Z_T + n(0, \sigma_{C_2}), \\ Z_N &= Z_T + n(0, \sigma_N), \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

где $n(0, \sigma_{C_1})$, $n(0, \sigma_{C_2})$ и $n(0, \sigma_N)$ означают ошибки анализа, которые полагаются подчиняющимися нормальным распределениям со средними значениями, равными нулю для конечного числа точек, и со стандартными отклонениями, равными σ_{C_1} , σ_{C_2} и σ_N соответственно. Если предположить, что ошибки различных анализов не коррелированы, то средние квадраты разностей между различными анализами можно представить в виде:

$$\left. \begin{aligned} E &= \{(Z_{C_1} - Z_{C_2})^2\} = \sigma_{C_1}^2 + \sigma_{C_2}^2, \\ E &= \{(Z_N - Z_{C_1})^2\} = \sigma_N^2 + \sigma_{C_1}^2, \\ E &= \{(Z_N - Z_{C_2})^2\} = \sigma_N^2 + \sigma_{C_2}^2. \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

Подстановка в эти уравнения средних квадратов разностей, приведенных в табл. 3, дает следующие значения стандартных ошибок σ_{C_1} , σ_{C_2} и σ_N :

$$\sigma_{C_1} = 22, \quad \sigma_{C_2} = 19, \quad \sigma_N = 38.$$

Можно составить аналогичную систему уравнений, включающую численные анализы с использованием экстраполированных высот (N_E). Подставляя в нее соответствующие средние квадраты ошибок из табл. 3, можно получить следующие оценки:

$$\sigma_{C_1} = 21, \quad \sigma_{C_2} = 20, \quad \sigma_{N_E} = 33.$$

Эти оценки представляют средние ошибки различных анализов. Поскольку объем данных был недостаточен, имеются небольшие различия между двумя оценками ошибок для C_1 и также для C_2 , но несмотря на это можно заключить, что численный анализ определенно улучшился при привлечении высот поверхности 500 мб, экстраполированных по данным наземных наблюдений.

4. Метод последовательных приближений

Этот метод, который применяется в Норвегии, был описан Хаугом [11].

Рассмотрим точку сетки и ближайшие к ней пункты наблюдения. Тогда, если наблюденное значение высоты верное, то величина высоты в точке сетки может быть записана в виде

$$Z_g = Z_{0s} + \int_s \gamma Z dZ, \quad (4.1)$$

где s означает путь интегрирования между двумя точками. Предположим, что наблюдения дают и ветер и высоту. Тогда высоту в точке сетки можно аппроксимировать величиной

$$Z_g^{(1)} = Z_{0s} + \frac{(\partial_x Z)_{0s}}{2d} \partial x + \frac{(\partial_y Z)_{0s}}{2d} \partial y. \quad (4.2a)$$

Обозначения здесь те же, что и при описании метода коррекции. Если в наблюдения входит только высота, то можно аппроксимировать высоту в точке сетки простым равенством

$$Z_g^{(1)} = Z_{0s}. \quad (4.2b)$$

Таким путем можно получить высоты изобарической поверхности для всех точек сетки в первом приближении. В районах с густой сетью наблюдений первое приближение в точке сетки получают на основании двух или более различных наблюдений. В этом случае высота изобарической поверхности в точке

сетки получается как среднее арифметическое из величин, вычисленных из рассматриваемых наблюдений.

Следующее приближение в точке сетки теперь получают, используя градиент, который можно получить, используя первое приближение в окружающих точках сетки. Тогда предыдущие формулы следует заменить следующими:

$$Z_g^{(2)} = Z_{os} + \frac{1}{2} \left[\frac{(\partial_x Z)_{os}}{2d} \partial x + \frac{(\partial_y Z)_{os}}{2d} \partial y \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial_x Z^{(1)}}{2d} \partial x + \frac{\partial_y Z^{(1)}}{2d} \partial y \right], \quad (4.3a)$$

$$Z_g^{(2)} = Z_{os} + \frac{\partial_x Z^{(1)}}{2d} \partial x + \frac{\partial_y Z^{(1)}}{2d} \partial y. \quad (4.3b)$$

Когда есть данные о ветре и высоте изобарической поверхности, можно использовать среднее арифметическое из значений градиента, полученных из наблюдений над ветром, и из ранее рассчитанного поля геопотенциала.

Этот процесс затем повторяется, и соответствующие формулы для k -той итерации имеют вид

$$Z_g^{(k)} = Z_{os} + \frac{1}{2} \left[\frac{(\partial_x Z)_{os}}{2d} \partial x + \frac{(\partial_y Z)_{os}}{2d} \partial y \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial_x Z^{(k-1)}}{2d} \partial x + \frac{\partial_y Z^{(k-1)}}{2d} \partial y \right], \quad (4.4a)$$

$$Z_g^{(k)} = Z_{os} + \frac{\partial_x Z^{(k-1)}}{2d} \partial x + \frac{\partial_y Z^{(k-1)}}{2d} \partial y. \quad (4.4b)$$

Описанный вычислительный процесс может, однако, расходиться, если расстояние, по которому определяются разности, слишком мало по сравнению с расстоянием между пунктом наблюдения и точкой сетки. Критерий, который должен выполняться для сходимости процесса, может быть выведен следующим образом.

Рассмотрим случай, когда ближайшее наблюдение содержит данные только о высоте изобарической поверхности. Разность значений Z_g для двух последовательных итераций, k -той и $(k+1)$ -й, можно записать так:

$$Z_g^{(k+1)} - Z_g^{(k)} = \Delta Z^{(k)} = \frac{\partial_x \Delta Z^{(k-1)}}{2d} \partial x + \frac{\partial_y \Delta Z^{(k-1)}}{2d} \partial y. \quad (4.5)$$

Будем рассматривать одну волновую компоненту разности $\Delta Z^{(k-1)}$, имеющую вид

$$\Delta Z_q = A_q e^{i\mu m d + i\nu n d}, \quad (4.6)$$

где $m = 1, 2, 3, \dots$ и $n = 1, 2, 3, \dots$

Тогда

$$\partial_x \Delta Z_q = A_q [e^{i\mu(m+1)d + i\nu nd} - e^{i\mu(m-1)d + i\nu nd}] = \Delta Z_q (e^{i\mu d} - e^{-i\mu d}).$$

Аналогично,

$$\partial_y \Delta Z_q = \Delta Z_q (e^{i\nu d} - e^{-i\nu d}).$$

Подстановка этих выражений в (4.5) даст

$$\begin{aligned} \Delta Z_q^{(k)} &= \left[\frac{e^{i\mu d} - e^{-i\mu d}}{2d} \partial_x + \frac{e^{i\nu d} - e^{-i\nu d}}{2d} \partial_y \right] \Delta Z_q^{(k-1)} = \\ &= \frac{i}{d} (\partial_x \sin \mu d + \partial_y \sin \nu d) \Delta Z_q^{(k-1)}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

При заданном расстоянии между пунктом наблюдения и точкой сетки

$$r = \sqrt{(\partial x)^2 + (\partial y)^2}$$

выражение (4.7) имеет максимум, если

$$\sin \mu d = \sin \nu d = 1$$

и

$$\partial x = \partial y = \frac{r}{\sqrt{2}}.$$

При этих значениях (4.7) принимает вид

$$\Delta Z_q^{(k)} = i \frac{r}{d} \sqrt{2} \cdot \Delta Z_q^{(k-1)}. \quad (4.8)$$

Для следующей итерации получаем

$$\Delta Z_q^{(k+1)} = -2 \frac{r^2}{d^2} \Delta Z_q^{(k-1)}. \quad (4.9)$$

Требуя, чтобы коэффициент при $\Delta Z_q^{(k-1)}$ был меньше единицы, получаем критерий для вычислительной устойчивости

$$r < \frac{\sqrt{2}}{2} d. \quad (4.10)$$

Соответствующий критерий для случая, когда станция сообщает также данные наблюдений над ветром, может быть выведен таким же путем и имеет вид

$$r < \sqrt{2} d. \quad (4.11)$$

Если эти критерии вычислительной устойчивости не выполняются, то разности необходимо определять по большему расстоянию, например,

$$\begin{aligned}\delta_x Z &= Z_{i+2,j} - Z_{i-2,j}, \\ \delta_y Z &= Z_{i,j+2} - Z_{i,j-2}.\end{aligned}\quad (4.12)$$

Для получения хорошего анализа требуется приблизительно пять итераций. Поле высоты, получающееся в результате этого процесса, содержит мелкомасштабные особенности, обусловленные ошибками наблюдений. Для исключения этих особенностей необходимо применять сглаживание.

5. Метод объективного анализа, основанный на вариационном принципе

Главной особенностью этого метода, который был предложен Сасаки [8], является возможность анализировать различные метеорологические элементы таким путем, что анализы будут согласоваться с прогностической моделью, которую имеется в виду использовать. В рамках этого метода могут быть построены различные анализы. Например, если в прогностической схеме используется уравнение баланса, то логично, чтобы объективный анализ также базировался на этом уравнении.

Для иллюстрации основного принципа этого метода введем следующие обозначения. Пусть f_{0i} представляет собой наблюдаемые элементы в точке. Это могут быть различные метеорологические элементы, такие, как высота изобарической поверхности Z , составляющие ветра u , v , температура T . Далее, пусть f_i представляет собой объективным образом измененные значения.

Составим взвешенную сумму квадратов разностей между этими двумя родами величин

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^N \alpha_i^2 (f_{0i} - f_i)^2 &= \alpha_1^2 (u_0 - u)^2 + \alpha_1^2 (v_0 - v)^2 + \\ &+ \alpha_2^2 (Z_0 - Z)^2 + \alpha_3^2 (T_0 - T)^2 + \dots,\end{aligned}\quad (5.1)$$

где α_i — весовые множители, зависящие, в частности, от точности наблюдений за различными элементами.

Рассмотрим теперь объем V в пространстве и потребуем, чтобы интеграл от этой суммы квадратов по объему V был минимальным. Тогда вариация этого интеграла должна равняться нулю

$$J = \iiint_V \sum \alpha_i^2 (f_{0i} - f_i)^2 dV; \quad \delta J = 0. \quad (5.2)$$

Так как мы собираемся потребовать, чтобы величины f_i удовлетворяли некоторым соотношениям, мы должны также ввести уравнения, которые выражают эти соотношения. Эти уравнения могут быть записаны в следующем общем виде:

[illegible]

Сасаки рассматривает два различных случая. В первом функциональные соотношения (5.3) задаются квазистатическим, квазигеострофическим приближением и формулами термического ветра, а во втором случае — уравнением баланса и условиями бездивергентности ($\operatorname{div} V = 0$ и $\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} V = 0$).

Уравнения (5.3) в этом случае имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{g}{f} \frac{\partial Z}{\partial y}, \\ v &= \frac{g}{f} \frac{\partial Z}{\partial x}, \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial p} &= \frac{R}{pf} \frac{\partial T}{\partial y}, \\ \frac{\partial v}{\partial p} &= -\frac{R}{pf} \frac{\partial T}{\partial x}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\frac{RT}{p} = -g \frac{\partial Z}{\partial p}. \quad (5.6)$$
$$p^* = -R \ln P, \quad P = \frac{p}{p_0}, \quad (5.7)$$

где p_0 — давление на некоторой фиксированной изобарической поверхности. Тогда уравнения (5.4), (5.5) и (5.6) примут вид:

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{g}{f} \frac{\partial Z}{\partial y}, \\ v &= \frac{g}{f} \frac{\partial Z}{\partial x}, \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial p^*} &= -\frac{1}{f} \frac{\partial T}{\partial y}, \\ \frac{\partial v}{\partial p^*} &= \frac{1}{f} \frac{\partial T}{\partial x}, \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

$$T = -g \frac{\partial Z}{\partial p^*}. \quad (5.10)$$

Вводя разности между измененными величинами (подчиняющимися уравнениям) и наблюдаемыми величинами:

$$\left. \begin{aligned} u' &= u - u_0, \\ v' &= v - v_0, \\ z &= Z - Z_0, \\ T' &= T - T_0 \end{aligned} \right\} \quad (5.11)$$

и подставляя их в (5.8) и (5.10), найдем эти отклонения как функции наблюдаемых величин:

$$\left. \begin{aligned} u' &= -\frac{g}{f} \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{g}{f} \frac{\partial Z_0}{\partial y} - u_0, \\ v' &= \frac{g}{f} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{g}{f} \frac{\partial Z_0}{\partial x} - v_0, \\ T' &= -g \frac{\partial z}{\partial p^*} - g \frac{\partial Z_0}{\partial p^*} - T_0. \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

Теперь интеграл (5.2) по объему V в пространстве (x, y, p^*) можно записать в виде

$$\begin{aligned} J &= \iiint_V \sum \alpha_i^2 (f_{0i} - f_0)^2 dx dy dp^* = \\ &= \iiint_V [\alpha_1^2 (u'^2 + v'^2) + \alpha_2^2 z^2 + \alpha_3^2 T'^2] dx dy dp^* = \\ &= \iiint_V \left[\alpha_1^2 \left(\frac{g}{f} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{g}{f} \frac{\partial Z_0}{\partial y} + u_0 \right)^2 + \right. \\ &\quad + \alpha_1^2 \left(\frac{g}{f} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{g}{f} \frac{\partial Z_0}{\partial x} - v_0 \right)^2 + \alpha_2^2 (gz)^2 + \\ &\quad \left. + \alpha_3^2 \left(g \frac{\partial z}{\partial p^*} + g \frac{\partial Z_0}{\partial p^*} - T_0 \right)^2 \right] dx dy dp^*. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Итак, задача состоит в определении функций u , v , Z и T таким образом, чтобы интеграл J был минимален.

Согласно вариационному исчислению, для решений этой задачи можно использовать следующую процедуру.

Интеграл, с которым мы имеем дело, может быть записан в виде

$$J = \iiint_V F(x, y, p^*, z, p, q, r) dx dy dp^*, \quad (5.14)$$

где F — выражение в квадратных скобках в (5.13) и

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}; \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}; \quad r = \frac{\partial z}{\partial p^*}.$$

Если предположить, что вариация δz функции $z(x, y, p^*)$ обращается в нуль на границе объема V , то, применяя формулу Грина — Остроградского, получим следующее выражение для первой вариации:

$$\delta J = \iiint_V \left[\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial p} \right) - \frac{d}{dy} \left(\frac{\partial F}{\partial q} \right) - \frac{d}{dp^*} \left(\frac{\partial F}{\partial r} \right) \right] \delta z dx dy dp^*. \quad (5.15)$$

Дифференциальный символ, использованный здесь, определяется следующим образом:

$$\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (5.16)$$

Необходимым условием минимума интеграла J является равенство нулю первой вариации при произвольном выборе δz . Поэтому мы должны потребовать, чтобы выражение в квадратных скобках в (5.15) тождественно равнялось нулю, т. е. чтобы функция $z(x, y, p^*)$ удовлетворяла дифференциальному уравнению в частных производных (уравнению Эйлера)

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial p} \right) - \frac{d}{dy} \left(\frac{\partial F}{\partial q} \right) - \frac{d}{dp^*} \left(\frac{\partial F}{\partial r} \right) = 0,$$

или в развернутой форме

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 F}{\partial p^2} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial q^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial p^{*2}} + \\ & + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial q \partial r} \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial p^*} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial p \partial r} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial p^*} + \\ & + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial p \partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial q \partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \\ & + \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial z} \frac{\partial z}{\partial p^*} + \frac{\partial^2 F}{\partial p \partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial q \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial p^*} - \frac{\partial F}{\partial z} = 0. \end{aligned} \quad (5.17)$$

В рассматриваемом случае это уравнение сводится к

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p \partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial q \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial p^*} - \frac{\partial F}{\partial z} = 0. \quad (5.18)$$

Внося сюда выражение для F , получим

$$\begin{aligned} & \alpha_1^2 \frac{1}{f} \left(\frac{g}{f} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{g}{f^2} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{g}{f} \frac{\partial^2 Z_0}{\partial x^2} - \right. \\ & - \frac{g}{f^2} \frac{\partial Z_0}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{g}{f} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{g}{f^2} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} + \\ & + \frac{g}{f} \frac{\partial^2 Z_0}{\partial y^2} - \frac{g}{f^2} \frac{\partial Z_0}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial u_0}{\partial y} \left. \right) - \alpha_2^2 g z + \\ & + \alpha_3^2 \left(g \frac{\partial^2 z}{\partial p^{*2}} + g \frac{\partial^2 Z_0}{\partial p^{*2}} - \frac{\partial T_0}{\partial p^*} \right) = 0 \end{aligned} \quad (5.19)$$

или

$$\begin{aligned} & \nabla^2 z - \frac{1}{f} \nabla z \nabla f + \left(\frac{\alpha_3}{\alpha_1} f \right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial p^{*2}} - \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} f \right)^2 z = \\ & = \frac{f}{g} \zeta_0 - \nabla^2 Z_0 + \frac{1}{f} \nabla Z_0 \nabla f + \frac{1}{g} \left(\frac{\alpha_3}{\alpha_1} f \right)^2 \frac{\partial}{\partial p^*} \left(T_0 - g \frac{\partial Z_0}{\partial p^*} \right), \end{aligned} \quad (5.20)$$

где

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

$$\zeta_0 = \frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y}.$$

Правая часть этого уравнения может быть вычислена по данным наблюдений.

Однако для того, чтобы можно было вычислить различные члены этого уравнения, мы должны знать наблюдаемые значения в узлах сетки. Это может быть, например, достигнуто с помощью любого из ранее описанных методов.

6. Исключение ошибочных данных

Метеорологические данные, которые имеются для анализа поля метеорологического элемента, включают, кроме правильной информации о состоянии атмосферы, также и искаженную по разным причинам информацию. Несомненно, что основной источник ошибок связан с недостатками каналов телесвязи. Поэтому нас интересует проблема, как создать фильтр, способный устранять ошибки.

Этого можно, по крайней мере частично, добиться применением различных видов контроля. Так, прежде чем начать анализ, целесообразно выполнить статический контроль данных зондирования. Таким образом, например, можно проверить, как толщина слоя согласуется с сообщаемой температурой.

Кроме этого метода устранения ошибочных данных, предложены и другие способы контроля. Опишем один из них. Введем обозначения:

Z_{0s} — наблюдаемое значение высоты на станции,

Z_{ps} — предварительное значение высоты на той же станции (например, прогнозируемая высота),

$$\varepsilon_s = Z_{0s} - Z_{ps}.$$

Сначала мы сравниваем отклонение ε_s с двумя допусками ε_I и ε_{II} , где $\varepsilon_I < \varepsilon_{II}$.

Тест 1. Если $|\varepsilon_s| \leq \varepsilon_I$, то Z_{0s} сохраняется. Если $|\varepsilon_s| > \varepsilon_{II}$, то Z_{0s} исключается. Если $\varepsilon_I < |\varepsilon_s| \leq \varepsilon_{II}$, то Z_{0s} должна подвергнуться новой проверке.

Причина, по которой мы не исключаем из этой проверки величину высоты Z_{0s} в тех случаях, когда отклонение ε_s несколько больше ε_I , заключается в том, что предварительная величина высоты Z_{ps} не может рассматриваться как истинная. Однако вероятно, что ошибка в предварительном поле приблизительно одинакова в малой окрестности станции. Поэтому мы сравниваем отклонение ε_s с соответствующими отклонениями на близлежащих станциях (скажем, в пределах трех шагов сетки). Соответствующие отклонения на этих станциях обозначим ε_i . Допуск на отклонение в этой проверке является функцией от ε_s и расстояния R между рассматриваемой станцией и близлежащей станцией. Например, функция $\varepsilon(R, \varepsilon_s)$ может быть задана следующим образом:

$$\varepsilon(R, \varepsilon_s) = a\varepsilon_I + |\varepsilon_s| (bR + c),$$

где R измеряется в единицах сетки и $0 < a, b, c < 1$.

Таким образом, мы выполняем следующую проверку, используя I близлежащих станций (здесь используется значение $I=3$).

Тест 2. Обозначим через P случай, когда $|\varepsilon_s - \varepsilon_i| \leq \varepsilon_i(R, \varepsilon_s)$, а через N случай, когда $|\varepsilon_s - \varepsilon_i| > \varepsilon_i(R, \varepsilon_s)$.

Тогда значение высоты Z_{0s} принимается или исключается согласно табл. 4.

Конечно, этот вид контроля можно применять и для других элементов, а не только для высоты изобарической поверхности.

Таблица 4

Тест 2 для станции 1 $R = R_1$	Тест 2 для станции 2 $R_2 > R_1$	Тест 2 для станции 3 $R_1 > R_2$	Количество станций в пределах трех шагов сетки	Результат теста 2
N	N	N	3	Исключается
N	N	P	3	"
N	P	N	3	Принимается
N	P	P	3	"
P	N	N	3	"
P	N	P	3	"
P	P	N	3	"
P	P	P	3	"
N	N	—	2	Исключается
N	P	—	2	Принимается
P	N	—	2	"
P	P	—	2	"
N	—	—	1	Исключается
P	—	—	1	Принимается
—	—	—	0 ¹	

¹ Если в пределах трех шагов сетки нет другой станции, то данные станции принимаются, если $\epsilon_s < 2\epsilon_1$, и исключаются, если $\epsilon_s > 2\epsilon_1$.

7. Анализ других метеорологических элементов

В практике службы прогнозов для различных целей приходится анализировать большое количество различных метеорологических элементов. Опыт показал, что большую часть этой работы целесообразно выполнять с помощью вычислительной машины при условии, что поступление и обработка данных полностью автоматизированы.

В ряде случаев для анализа многих метеорологических элементов можно применить с небольшими изменениями методику, которая используется для анализа геопотенциала. На практике объективный анализ применялся для следующих метеорологических элементов: приземное давление, температура на различных уровнях, температура точки росы на различных уровнях, составляющие ветра на различных уровнях, высота тропопавзы.

Кроме того, в программах объективного анализа предусматривается вычисление величин, которые непосредственно не измеряются в атмосфере, как, например, поля вертикальной скорости. Это можно выполнить при помощи решения диагностических дифференциальных уравнений в частных производных, для чего также необходимо использовать вычислительную машину. Эти уравнения выведены из основных физических законов в предположении, что шумовые движения, связанные с аку-

стическими и гравитационными волнами, достаточно малы. Следует также указать, что проводятся опыты по методу анализа вертикальных разрезов и по анализу фронтов [30].

ЛИТЕРАТУРА

1. Panofsky H. A. Objective Weather-Map Analysis. J. Met., 6, No. 6, 1949.
2. Eliassen A. Provisional Report on Calculation of Spatial Covariance and Autocorrelation of the Pressure Field. Inst. Weather and Climate Res., Acad. Sci., Oslo, Rept. No. 5, 1954.
3. Gilchrist B., Cressman G. P. An Experiment in Objective Analysis. Tellus, 6, No. 4, 1954.
4. Bergthorsson P., Döös B. R. Numerical Weather-Map Analysis. Tellus, 7, No. 3, 1955.
5. Döös B. R. Automation of 500mb Forecasts through Successive Numerical Map Analyses. Tellus, 8, No. 1, 1956.
6. Busby F. H., Huckle W. M. Objective Analysis in Numerical Forecasting. Q. J. Roy. Met. Soc., 83, No. 356, 1957.
7. Johnson D. H. Preliminary Research in Objective Analysis. Tellus, 9, No. 3, 1957.
8. Sasaki Y. An Objective Analysis Based on the Variational Method. J. Met. Soc., Japan, 36, No. 3, 1958.
9. Cressman G. P. An Operational Objective Analysis System. Monthly Weather Review, 87, No. 10, 1959.
10. Гандин Л. С. Задача об оптимальной интерполяции. Труды ГГО, вып. 99, 1959.
11. Haug O. A Method for Numerical Weather-Map Analysis. Det. Norske Meteorol. Inst. Sci. Rept. No. 5, 1959.
12. Быков В. В., Курбаткин Г. П. Анализ метеорологических и аэрологических данных с помощью электронной вычислительной машины. ДАН СССР, 134, № 5, 1960.
13. Haug O. On the Optimum Use of Available Observations in Numerical Weather-Map Analysis. Proc. Int. Symp. N. W. P., Tokyo, 1960.
14. Jess E. O. A Numerical Prediction Experiment Involving Data Paucity and Random Errors. Tellus, 12, No. 1, 1960.
15. Masuda Y., Arakawa A. On the Objective Analysis for Surface and Upper-Level Maps. Proc. Int. Symp. N. W. P., Tokyo, 1960.
16. Mount W. D. On Predictability at 500mb as a Function of Density and Type of Information. Proc. Int. Symp. N. W. P., Tokyo, 1960.
17. Быков В. В., Курбаткин Г. П. Опыт объективного анализа аэрологических данных. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 2, 1961.
18. Corby G. A. Some Experiments in the Objective Analysis of Contour Charts. Q. J. Roy. Met. Soc., 87, No. 371, 1961.
19. Richardson N. N. Numerical Tests of a Method for Dynamic Analysis in Regions of Poor Data Coverage. Tellus, 13, No. 3, 1961.
20. Smith F. B. The Effect of Advection in a Region of No Data. Tellus, 13, No. 3, 1961.
21. Thompson P. D. A Dynamical Method of Analysing Meteorological Data. Tellus, 13, No. 3, 1961.
22. McDonnell J. E. On the Objective Analysis System Used at the National Meteorological Center. U. S. Wea. Bur., Natl Meteorol. Center, Tech. Memo. No. 23, 1962.
23. Smith F. B. Objective Analysis of the Vorticity Field within a Region of No Data. Tellus, 14, No. 3, 1962.

24. Teweles S., Snidero M. Some Problems of Numerical Objective Analysis of Stratospheric Constant Pressure Surfaces. *Monthly Weather Review*, 90, No. 4, 1962.
25. Четвериков И. А. Оперативное испытание схемы объективного анализа полей геопотенциала. Сб. «Объективный анализ и прогноз метеорологических элементов». Изд. АН СССР, 1963.
26. Corby G. A. An Experiment in Three-dimensional Objective Analysis. *Tellus*, 15, No. 4, 1963.
27. Fujiwara I. S. An Effect of Lack of Data on Automatic Analysis. *Tech. Rept JMA*, No. 24, 1963.
28. Гандии Л. С. Объективный анализ метеорологических полей. Гидрометеониздат, Л., 1963.
29. Holmström I. On a Method for Parametric Representation of the State of the Atmosphere. *Tellus*, 15, No. 2, 1963.
30. Renard R. J., Clarke L. C. Experiments in Numerical Objective Frontal Analysis. *Monthly Weather Review*, 93, No. 9, 1965.

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
Предисловие	3
Информационные сведения о семинаре	5
Ф. Д. Томпсон. Анализ и предсказание погоды численными методами	7
Определение математических обозначений	—
Глава 1(2). Основные физические законы и их математическое выражение	11
Глава 2(3). Динамическое предсказание погоды как математический и вычислительный процесс	27
Глава 3(4). Типы волновых движений в атмосфере	37
Глава 4(5). Конечно-разностные методы решения линейных уравнений для звуковых волн, гравитационных волн и волн Россби	49
Глава 5(6). Смешанные типы волнового движения в атмосфере. Проблема отфильтровывания	60
Глава 6(8). Численные методы решения видоизмененных нелинейных уравнений	70
Глава 7(9). Проблема циклогенеза и видоизмененные уравнения бароклинного потока	78
Глава 8(14). Ошибки и нерешенные проблемы	87
Г. И. Марчук. Численные методы решения задач прогноза погоды и теории климата	93
Введение	—
§ 1. Математическая постановка задачи	95
§ 2. Метод расщепления	99
§ 3. Исследование структуры метеорологических полей	108
§ 4. Разностная аппроксимация и решение уравнений Эйлера	124
§ 5. Разностные уравнения для поля давления	134
§ 6. Схемы решения задачи о прогнозе погоды	148
§ 7. Об устойчивости в целом и проблема универсального алгоритма	153
§ 8. Объективный анализ полей метеорологических элементов	161
Ф. Д. Томпсон. Неэйлеровы методы интегрирования. Часть А	167
Уравнения для сглаженных по времени переменных. Часть Б. Пер. с англ. С. А. Бортникова под ред. А. И. Бурцева	177
Ф. Г. Шуман и Л. В. Вандерман. Оперативные методы устранения погрешностей аппроксимации. Пер. с англ. Е. М. Пекелиса под ред. В. В. Быкова	183
1. Ошибки аппроксимации и их корректировка	—
2. Контроль ошибок аппроксимации более высокого порядка	189
3. Результаты	191
4. Заключительные замечания	192

Б. Р. Дёйс. Численное предсказание погоды с помощью баротропной модели. Пер. с англ. С. Л. Белоусова	193
1. Введение	—
2. Эквивалентно-баротропная модель	194
3. Дивергентная баротропная модель	199
4. Фазовая и групповая скорости волн в баротропной модели	205
5. Численное решение баротропного уравнения вихря	208
А. Н. Бурцев. Агеострофические модели прогноза	216
1. Постановка задачи	—
2. Уравнения для горизонтальных компонент агеострофического ветра	—
3. Схема численного прогноза полей температуры и ветра	221
Е. К. Найтинг. Пространственная задача численного прогноза. Пер. с англ. И. Г. Ситникова под ред. С. Л. Белоусова	226
Введение	—
Основные предпосылки	227
Простая модель бароклинной атмосферы	231
Двухуровневная модель, используемая в численных прогнозах «Параметры увеличения» карты	238
Решение уравнений для двухуровневной модели	241
Использование функции тока	245
Трехуровневная модель атмосферы	247
Введение граничных эффектов	249
Численное решение задачи	253
В. П. Садоков. Некоторые квазигеострофические и квазисоленоидальные модели прогноза. Учет орографии, трения и источников тепла в прогностических схемах	261
1. Политропная модель. Работа И. А. Кибеля, 1940 г.	—
2. Разложение по малому параметру	275
3. Учет трения и неровностей земной поверхности в численных моделях	287
4. Учет притоков тепла в краткосрочных бароклинических схемах прогноза метеорологических элементов	292
С. Л. Белоусов. Многоуровневные квазигеострофические модели прогноза	294
I. Многоуровневные квазигеострофические модели прогноза с использованием решений, содержащих функции Грина	—
II. Многоуровневные квазигеострофические модели прогноза в оперативной практике	307
К. Г. Хинкельман. Полные уравнения. Пер. с англ. С. А. Бортникова и С. Л. Белоусова под ред. А. И. Бурцева	317
Глава 1. Основные уравнения в общих координатах	—
Глава 2. Вывод лагранжевых уравнений	320
Глава 3. Основные уравнения в сферических координатах	326
Глава 4. Метеорологические упрощения	330
Глава 5. Стереографическая проекция	334
Глава 6. Полные уравнения в декартовых и цилиндрических координатах	336
Глава 7. Полные уравнения с обобщенной вертикальной координатой	343
Глава 8. Полные уравнения в координатной системе с приведенным давлением в качестве вертикальной координаты	350
Глава 9. Баротропный вариант полных уравнений	352

Глава 10. Логическая последовательность процедуры численного решения полных уравнений	351
Глава 11. Пример конечно-разностной аппроксимации баротропных полных уравнений	357
Глава 12. Пример конечно-разностной аппроксимации бароклинических полных уравнений	365
Глава 13. Проблема задания начальных данных. Линейная волновая теория	371
В. В. Быков. Применение полных уравнений гидродинамики к прогнозу метеорологических элементов и опыт оперативной работы . . .	391
Часть А	—
I. Приспособление движения воздуха к геострофическому в связи с задачей прогноза по полным уравнениям гидродинамики	—
II. Реализация двухуровневой схемы прогноза геопотенциала и ветра по полным уравнениям, основанной на применении функций влияния	398
III. Модель прогноза по полным уравнениям на трех уровнях атмосферы, построенная с использованием метода интегральных соотношений	407
Часть Б	421
IV. Организация оперативной работы по составлению численных прогнозов с помощью полных уравнений гидродинамики	—
V. Оперативная многоуровневая схема численного анализа аэрологических данных, основанная на принципе построения карт барической топографии	425
VI. Предварительные результаты расчета оперативных прогнозов с помощью полных уравнений	437
Ф. Г. Шуман и др. Многоуровневая модель для оперативного численного прогноза погоды, основанная на решении полных уравнений. Цикл из трех статей с введением. Пер. с англ. Е. М. Пекеллиса, Д. Я. Прессмана и И. К. Певунова под ред. В. В. Быкова	450
Ф. Г. Шуман. Введение	—
Ф. Г. Шуман, Дж. Д. Стэкпул. К вопросу о построении конечно-разностных уравнений с учетом масштаба карты	456
Ф. Г. Шуман, Л. В. Вандерман. Конечно-разностная система и граничные условия для баротропного прогноза с помощью полных уравнений	466
Ф. Г. Шуман. Многоуровневая модель по полным уравнениям	481
А. И. Бурцев. Прогноз облачности и осадков	498
I. Постановка задачи. Двухуровневая модель прогноза гигроскопической разности, облачности и осадков	—
II. Методы прогноза облачности и осадков, основанные на использовании инвариантов	505
III. Схема численного прогноза слоистообразной облачности с учетом турбулентности и конденсации	513
К. А. Семендяев. Общие характеристики вычислительных машин и основы программирования	526
1. Общее представление о вычислительных машинах	—
2. Хранение информации в машине	529
3. Алгоритмы переработки информации	532

4. Основные элементы программы	536
5. Процесс программирования	539
6. Автоматизация программирования	542
С. Л. Белоусов. Примеры решения некоторых метеорологических задач с помощью электронных вычислительных машин	545
К. Г. Хинкельман. Автоматическая обработка синоптических и аэрологических сводок. Пер. с англ. С. Л. Белоусова	555
Введение	—
Глава 1. Первичная обработка сообщений	556
Глава 2. Подготовка сообщений к расшифровке	561
Глава 3. Расшифровка информации	570
Глава 4. Вспомогательные средства раскодирования	625
Глава 5. Упорядочение сообщений	628
Глава 6. Исключение повторных и неправильных сообщений	629
Приложение	—
М. И. Юдин. Некоторые применения статистического подхода в численных прогнозах	637
Л. С. Гандин. Объективный анализ	657
1. Общие положения	—
2. Статистическая структура	662
3. Оптимальная интерполяция	672
4. Методы контроля	678
5. Практическое применение оптимальной интерполяции при объективном анализе	686
6. Объективный анализ в районах с редкой сетью. Согласование полей. Объективный анализ для долгосрочного прогноза	692
Б. Р. Дёйс. Численный анализ метеорологических данных. Пер. с англ. Л. С. Гандина	701
1. Введение	—
2. Полиномиальный метод	702
3. Метод коррекции	707
4. Метод последовательных приближений	719
5. Метод объективного анализа, основанный на вариационном принципе	722
6. Исключение ошибочных данных	726
7. Анализ других метеорологических элементов	728



ЛЕКЦИИ ПО ЧИСЛЕННЫМ МЕТОДАМ КРАТКОСРОЧНОГО ПРОГНОЗА ПОГОДЫ

Отв. редактор *В. В. Быков*

Редакторы: *Л. Л. Беленькая, Л. К. Сурыгина*

Художник *В. А. Евтихийев*

Техн. редактор *Л. А. Липатова*

Корректоры: *Т. В. Алексеева и Г. С. Макарова*

Сдано в набор 24/VII 1968 г.

Подписано к печати 11/III 1969 г.

Бумага 60×90^{1/16}. Тир. № 1. Бум. л. 23+1 вкл. Печ. л. 46,5. Уч.-изд. л. 46,59.

Тираж 1500 экз. М-15262. Цена 3 руб. 17 коп. Индекс МЛ-185. Заказ 265.

Гидрометеорологическое издательство. Ленинград, В-53, 2-я линия, д. № 23.

Ленинградская типография № 12 им. М. И. Лоханкова Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР. Ленинград, ул. Прауды, 15

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ
ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
выпустило в 1968 году

Сборник переводных статей
**«ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
ДИНАМИКИ АТМОСФЕРЫ И ОКЕАНА»**

Сборник посвящен численным методам интегрирования нелинейных уравнений гидродинамики, используемых при исследованиях общей циркуляции атмосферы и океана, а также при решении задач прогноза погоды. Особенность этих задач состоит в необходимости численного интегрирования с большим числом шагов по времени. В связи с этим большое внимание уделяется вопросам конечно-разностной аппроксимации уравнений и устойчивости численных схем.

Сборник рассчитан на специалистов в области метеорологии, океанологии, вычислительной математики и гидродинамики.

Цена 1 р. 69 к.

Заказы на эту книгу направляйте в издательство по адресу: г. Ленинград, В-53, 2 линия, 23. Книга будет выслана наложенным платежом магазином № 15 „Ленкниги“.

ГИДРОМЕТЕОИЗДАТ

