

А. Э. Фридман

Основы метрологии
Современный курс

ИПО "Профессионал"

А.Э. Фридман

ОСНОВЫ МЕТРОЛОГИИ
Современный курс

Санкт-Петербург
НПО «Профессионал»
2008

Фридман А.Э.

Ф82 Основы метрологии. Современный курс. — С.-Пб.: НПО «Профессионал», 2008. — 284 с.: ил.

ISBN 978-5-91259-018-4

В монографии подробно изложены и прокомментированы основные положения метрологии. С современных позиций рассмотрены основные понятия метрологии, принципы построения Международной системы единиц SI, теория погрешностей измерений и новая методология оценивания точности измерений на основе концепции неопределенности, а также методы обработки результатов измерений и оценивания их неопределенности. Показано, что концепция неопределенности совместима с классической теорией точности. Теория случайных погрешностей измерений дополнена их наиболее общим описанием на основе обобщенного нормального распределения, инструментальные систематические погрешности изложены во взаимосвязи с методологией нормирования метрологических характеристик средств измерений.

Приведены сведения о современных системах обеспечения единства измерений. Рассмотрены основные элементы централизованных систем воспроизведения единиц и передачи их размеров: эталоны, поверочные схемы, межповерочные и межкалибровочные интервалы, организационные структуры. Раскрыты метрологические и правовые отличия двух форм передачи размеров единиц — калибровки и поверки, а также механизмы увеличения неопределенности размера единицы при этих операциях. Приведенные методы определения межповерочных и межкалибровочных интервалов обоснованы в рамках теории метрологической надежности средств измерений, и поэтому они рассмотрены одновременно с изложением основных положений этой теории.

Изложены новая международная система обеспечения единства измерений на основе Договора о национальных метрологических институтах, роль и методика проведения ключевых сличений национальных эталонов. В заключение изложена получающая все большее распространение в мире новая методология обеспечения точности измерений на основе положений стандартов ИСО серия 5725. Все изложенные теоретические положения и расчетные методы иллюстрируются примерами.

Книга предназначена интерес для сотрудников государственных метрологических служб и метрологических служб юридических лиц, а также для специалистов, которые в своей деятельности применяют средства измерений и пользуются измерительной информацией. Она будет полезна студентам технических университетов при изучении учебных дисциплин «Метрология, стандартизация и сертификация», «Метрология и метрологическое обеспечение» и «Метрология и измерительная техника».

ББК 30.10

ISBN 978-5-91259-018-4

© А.Э. Фридман, 2008

8 февраля 2009 г. исполняется 175 лет со дня рождения великого русского ученого и государственного деятеля Дмитрия Ивановича Менделеева. Вся его многогранная научная деятельность была направлена на укрепление и развитие Российского государства: науки, образования, промышленности, торговли. В своей записной книжке он писал: «Я... старался и пока могу буду стараться... дать плодотворное, промышленно-реальное дело своей стране в уверенности, что политика, устройство, образование и даже оборона страны ныне без развития промышленности не мыслимы... Науки и промышленность — вот мои мечты».

Д.И. Менделеев внес фундаментальный вклад в развитие отечественной и мировой метрологии. В 1892 г. он возглавил первое государственное метрологическое учреждение России — Департамент образцовых мер и весов, преобразовав его в уникальный научно-исследовательский центр мирового значения — Главную палату мер и весов (в настоящее время Всероссийский научно-исследовательский институт метрологии им. Д.И. Менделеева). Гениальность Д.И. Менделеева проявилась здесь в полной мере, именно в том, что еще на рубеже XIX–XX веков он понял характер внутренней связи между состоянием метрологии и уровнем развития науки и промышленности. В результате проведенной им Метрологической реформы впервые в Российском государстве была создана инфраструктура обеспечения единства измерений, научные, правовые и организационные основы которой не потеряли своего значения до настоящего времени. Д.И. Менделеев разработал общую методологию проведения метрологических исследований, внедрил в отечественные метрологические исследования фирменный менделеевский стиль, заключающийся в предварительном глубоком изучении объекта исследования, исключительной тщательности постановки эксперимента, детальном изучении всех источников погрешностей, обязательном внедрении результатов исследований в практику. Он создал русскую метрологическую школу и положил начало профессиональной подготовке кадров метрологов. Менделеевские традиции бережно сохраняют вот уже несколько поколений научных

сотрудников ВНИИМ, которые по праву могут считаться учениками и последователями великого метролога.

Одним из заветов Д.И. Менделеева было особое отношение к народному просвещению, ввиду «великого влияния должным образом направленного просвещения на все успехи страны», и, в частности, к повышению качества метрологического образования в России. Этой цели служит предлагаемая Вам монография по метрологии, подготовленная к юбилею великого ученого одним из старейших сотрудников ВНИИМ им. Д.И. Менделеева, доктором технических наук А.Э. Фридманом.

Директор ВНИИМ им. Д.И. Менделеева,
вице-президент Метрологической
академии



Н.И. Ханов

Оглавление

От автора	9
Глава 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МЕТРОЛОГИИ	13
1.1. Свойство и величина	13
1.2. Размер и значение величины. Единица величины. Шкала величины	15
1.3. Измерение	19
1.4. Метод и методика измерений	26
1.5. Средства измерений	30
1.5.1. Измерительные преобразователи	32
1.5.2. Меры	33
1.5.3. Измерительные приборы	36
1.5.4. Измерительные установки и измерительные системы	38
Глава 2. ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ	40
2.1. Классификация погрешностей измерений	40
2.2. Законы распределения случайных погрешностей измерений	45
2.2.1. Некоторые сведения из теории вероятностей	45
2.2.2. Нормальный закон распределения	49
2.2.3. Обобщенный нормальный закон распределения	55
2.2.4. Основные статистические распределения, применяемые при обработке результатов измерений	61
2.3. Систематические погрешности измерений	65
2.3.1. Систематические погрешности, обусловленные свойствами средства измерений и отклонением условий измерений от нормальных условий	66
2.3.2. Нормируемые метрологические характеристики средств измерений	71
2.3.3. Методические погрешности измерений	76
2.3.4. Систематические погрешности, возникающие из-за неточности действий оператора	78
2.3.5. Исключение систематических погрешностей	79

Глава 3. НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ ИЗМЕРЕНИЙ	84
3.1. Погрешность и неопределенность.....	84
3.2. Классификация неопределенностей измерений.....	88
3.3. Методика оценивания неопределенности результата измерений.....	91
Глава 4. МЕТОДЫ ОЦЕНИВАНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ И ИХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ	107
4.1. Исключение выбросов из ряда измерений.....	107
4.2. Проверка гипотезы о нормальном распределении экспериментальных данных.....	110
4.3. Прямые многократные измерения, подчиняющиеся нормальному распределению.....	113
4.4. Прямые многократные измерения, подчиняющиеся обобщенному нормальному распределению.....	119
4.5. Косвенные измерения.....	129
4.5.1. Статистическая обработка при линейной зависимости результата измерений от входных величин.....	129
4.5.2. Метод линеаризации нелинейной зависимости.....	133
4.5.3. Метод приведения.....	137
4.6. Совместные и совокупные измерения.....	138
Глава 5. МЕЖДУНАРОДНАЯ СИСТЕМА ЕДИНИЦ SI	154
5.1. Системы единиц, принцип их построения.....	154
5.2. Основные единицы SI.....	156
5.3. Производные единицы SI. Размерность величин и единиц. Кратные и дольные единицы.....	164
5.4. Величины и единицы физико-химических измерений.....	168
Глава 6. ОБЕСПЕЧЕНИЕ ЕДИНСТВА ИЗМЕРЕНИЙ	173
6.1. Единство и прослеживаемость измерений.....	173
6.2. Обеспечение единства измерений.....	175
6.3. Эталоны единиц величин.....	177
6.4. Поверка и калибровка средств измерений.....	185
6.5. Увеличение неопределенности размера единицы при его передаче калибруемому и поверяемому СИ.....	189
6.6. Поверочные схемы.....	198
6.7. Организационная основа обеспечения единства измерений.....	205

6.8. Обеспечение единства измерений в мире на основе Договоренности директоров национальных метрологических институтов.....	207
---	-----

Глава 7. МЕЖПОВЕРОЧНЫЕ И МЕЖКАЛИБРОВОЧНЫЕ ИНТЕРВАЛЫ	220
7.1. Основные понятия.....	220
7.2. Основные положения теории метрологической надежности.....	224
7.2.1. Математическая модель дрейфа МХ.....	224
7.2.2. Основное уравнение нестабильности? его решение.....	225
7.2.3. Законы распределения нестабильности.....	227
7.3. Критерии назначения межповерочных и межкалибровочных интервалов.....	232
7.3.1. Вероятность метрологической исправности.....	232
7.3.2. Коэффициент метрологической исправности.....	237
7.3.3. Вероятность работы без метрологических отказов (вероятность безотказной работы).....	237
7.4. Обоснование первичных межповерочных и межкалибровочных интервалов.....	240
7.5. Корректировка межповерочных и межкалибровочных интервалов в процессе эксплуатации средств измерений.....	244
7.5.1. Корректировка МПИ группы СИ, при проведении поверок которых регистрируют значения погрешности каждого экземпляра.....	244
7.5.2. Корректировка МПИ группы СИ, при проведении поверок которых регистрируют альтернативный признак (годным или негодным признано СИ) и знак погрешности СИ, признанных негодными.....	245
7.5.3. Корректировка МПИ группы СИ, при проведении поверок которых регистрируют только альтернативный признак годности СИ.....	246

Глава 8. ОБЕСПЕЧЕНИЕ ТОЧНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ В СООТВЕТСТВИИ СО СТАНДАРТАМИ ИСО СЕРИИ 5725	251
8.1. Основные понятия.....	251

8.2. Основной метод оценки прецизионности метода измерений	256
8.3. Основной метод оценки правильности метода измерений.....	260
8.3.1. Оценка систематической погрешности метода измерений	260
8.3.2. Оценка систематической погрешности лаборатории	263
8.4. Применение пределов повторяемости и воспроизводимости	265
8.5. Метод проверки приемлемости результатов измерений	270
8.6. Применение показателей повторяемости при аттестации методик выполнения измерений.....	273
Литература	277

От автора

К написанию этой книги меня побудил опыт преподавания метрологии в Санкт-Петербургском государственном политехническом университете (СПбГПУ). Метрология — своеобразная научная дисциплина, занимающая промежуточное положение между науками фундаментального цикла и техническими науками. Её изучение имеет большое значение в подготовке научных кадров, прежде всего потому, что она участвует в формировании научного мировоззрения молодых специалистов, прививает им навыки метрологического мышления и стохастического подхода к количественной информации об объектах и явлениях материального мира.

Кроме того, необходимость изучения метрологии обусловлена ролью измерений в современном мире. Они являются важнейшей составной частью современных наукоемких технологий во многих областях деятельности — в промышленном производстве, научных исследованиях, медицине, обороне и многих других. Поэтому научные работники и технические специалисты должны обладать теоретическими знаниями и практическими навыками, позволяющими разрабатывать методики измерений, проводить измерения, оценивать и интерпретировать их результаты, т. е. теми знаниями и навыками, которые усваиваются в процессе изучения курса метрологии.

Решению этих задач способствовало введение в учебные программы технических специальностей высшего профессионального образования обязательного курса метрологии. Однако известные мне учебные пособия и книги по этой дисциплине не могут в полной мере удовлетворить современным требованиям, поскольку не отражают огромные изменения, которые произошли за последние годы в метрологии. Это относится не только к учебным пособиям, являвшимся настоящими книгами нескольких поколений отечест-

венных метрологов — монографии М.Ф. Маликова [1] и учебникам [2, 3], но и к более поздним книгам [4, 5, 6, 7 и др.].

Изменения, о которых я пишу, коснулись всех основных аспектов метрологической деятельности. Были теоретически обоснованы и внедрены принципиально новые метрологические подходы. Так, была повсеместно внедрена и фактически стала международным регламентом новая система оценивания точности измерений на основе концепции неопределенности результатов измерений. Все большее распространение в мире и нашей стране также получает принципиально новая система обеспечения точности измерений, применяющая вместо оценок погрешности измерений, полученных посредством поверки средств измерений по эталонам, оценки сходимости и воспроизводимости, полученные сравнением результатов измерений одной и той же величины группой измерительных лабораторий.

Традиционные системы воспроизведения единиц и передачи их размеров, являвшиеся основой обеспечения единства измерений в течение всего XX века, в наши дни, когда требуется единство измерений во всем мире, уже не могут решить эту задачу. Поэтому эти системы, по-прежнему функционирующие в национальных границах, были дополнены международной системой подтверждения метрологической эквивалентности национальных эталонов на основе их ключевых и региональных сличений под эгидой международных метрологических организаций.

Указанные изменения привели к значительным изменениям содержания метрологической деятельности в России и за рубежом. В то же время внедрение новых идей не должно привести к отрицанию классических подходов, которые по-прежнему занимают ведущее место в метрологической практике. Согласование новых и классических подходов привело к внесению существенных изменений в систему метрологических понятий и терминов, заключающихся как в появлении новых понятий, так и переосмыслении и формулировании заново ряда известных понятий.

Все эти и многие другие научные результаты, полученные в последнее десятилетие и нашедшие широкое применение в метрологической практике, нашли отражение в настоящей книге, которая является расширенным конспектом курса лекций по метрологии, читаемого мною в СПбГПУ.

В первой главе с современных позиций рассмотрены основные понятия метрологии. Вторая глава посвящена погрешностям изме-

рений. Для удобства читателей приведены минимально необходимые сведения из теории вероятностей и математической статистики. Затем рассмотрена теория случайных погрешностей измерений, которая доказывает, что эти погрешности подчиняются обобщенному нормальному закону распределения, а в наиболее распространенном частном случае — нормальному закону распределения. Приведено математическое описание зависимости инструментальной систематической погрешности измерений от метрологических характеристик СИ и условий измерений, на основе которой изложена методология нормирования метрологических характеристик СИ. Рассмотрены также методические погрешности измерений и методы исключения систематических погрешностей. В третьей главе рассмотрена концепция неопределенности измерений, регламентированная международным регламентом [19]. Показано, что эта концепция не отрицает классическую теорию погрешностей измерений и вполне совместима с ней. Изложена также внедренная этим регламентом в практику методика определения результатов измерений и оценивания их неопределенности. В четвертой главе подробно рассмотрены методы статистической обработки результатов измерений, скорректированные с учетом этой методики.

В пятой главе изложены основные положения и принципы построения Международной системы единиц SI. Шестая глава посвящена обеспечению единства измерений. Подробно рассмотрены основные элементы национальных систем обеспечения единства измерений: эталоны, поверочные схемы, организационные структуры. Раскрыты метрологические и правовые особенности двух форм передачи размеров единиц — калибровки и поверки, дано математическое описание статистических ошибок поверки и механизма увеличения неопределенности размера единицы при этих операциях. Описана также международная система обеспечения единства измерений на основе договоренности Директоров национальных метрологических институтов и ключевых сличений национальных эталонов. В седьмой главе изложены методы определения и корректировки межповерочных и межкалибровочных интервалов. Поскольку эти методы обоснованы в рамках теории метрологической надежности СИ, они рассмотрены совместно с изложением основных положений этой теории. В восьмой главе изложена получающая все большее распространение в мире новая методология обеспечения точности измерений на основе положений стандартов ИСО серии 5725.

Учитывая, что данная книга в первую очередь адресована студентам и преподавателям метрологии, для их удобства встречающиеся в тексте определения метрологических понятий выделены курсивом.

Главный научный сотрудник ФГУП «ВНИИМ им. Д.И. Менделеева», профессор СПбГПУ, доктор технических наук, академик Метрологической академии
Анатолий Эммануилович Фридман

Глава 1

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МЕТРОЛОГИИ

1.1. Свойство и величина

Систему понятий метрологии удобно начинать рассматривать с понятий *свойство* и *величина*. *Свойство объекта* — одна из его отличительных черт, особенностей. Тяжелый, длинный, сильный, яркий — примеры свойств различных объектов. В философии свойство определяется как философская категория, выражающая такую сторону объекта, которая обуславливает его общность с другими объектами или отличие от них. Свойства являются качественными характеристиками, и многие из них невозможно охарактеризовать количественно. Другие свойства могут быть выражены количественно. Такие свойства называются величинами. *Величина* — свойство, общее в качественном отношении многим объектам (состояниям, системам, процессам), но в количественном отношении индивидуальное для каждого из них.

Классификация величин в наиболее общем виде представлена на рис. 1.

Прежде всего, величины делятся на реальные и идеальные. Идеальной величиной является любое числовое значение. По существу это математическая абстракция, не связанная с каким-либо реальным объектом. Поэтому идеальные величины рассматриваются не в метрологии, а в математике.

Реальные величины делятся на физические и нефизические. Нефизические величины вводят, определяют и изучают в информатике, общественных, экономических и гуманитарных научных дисциплинах (например, в социологии, лингвистике). Примерами нефизических величин являются количество информации в битах, размер финансового капитала в \$, различные рейтинги, определяемые путем социологических опросов. Физические величины, рассматриваемые в метрологии, являются свойствами материаль-

ных объектов, процессов и явлений. В отличие от нефизических, они объективно, независимо от желания человека существуют в окружающем нас материальном мире.

Физические величины по способу количественного оценивания разделяют на *измеряемые* и *оцениваемые*. Отличительной особенностью измерений является наличие *средства измерений* — *специального технического средства, хранящего размер единицы, с помощью которого определяется значение величины*. К оцениванию относят, прежде всего, экспертные и органолептические (с помощью органов чувств человека) оценки величин, такие, например, как определение расстояния «на глаз». Здесь нет технического средства, хранящего размер единицы, поэтому нет и уверенности в требуемой точности полученной оценки. Размер длины, который человек может хранить в своем сознании, у разных людей существенно различается, а у одного человека подвергается изменениям в зависимости от его психофизического состояния. Следовательно, он неточен и ненадежен, нет гарантий объективности результата оценивания. Такие гарантии может дать только применение технического средства, лишенного человеческих недостатков. Именно поэтому измерения являются высшей формой количественного оценивания величин.

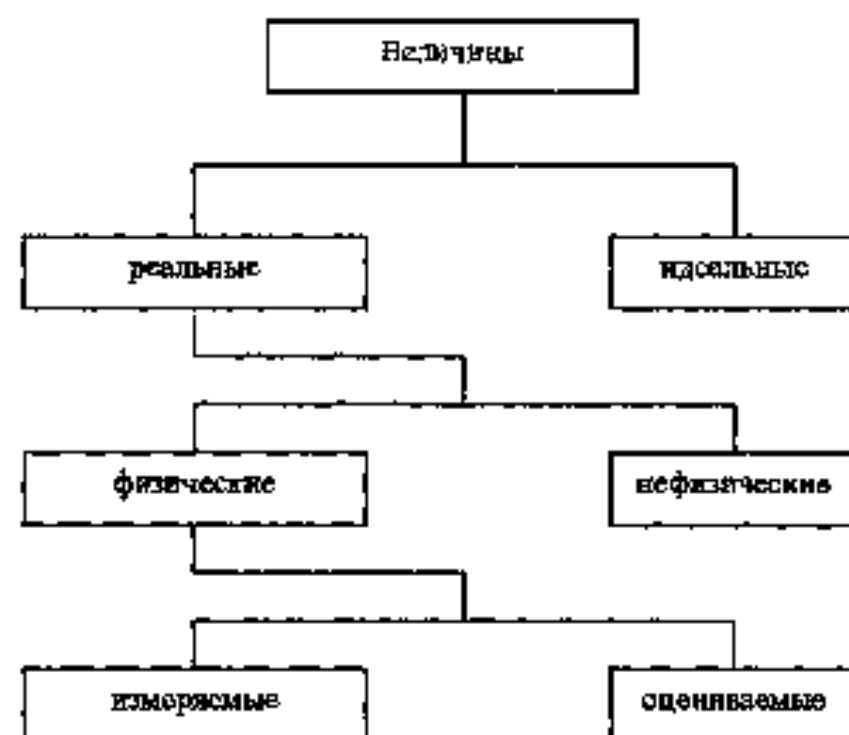


Рис. 1. Классификация величин

История развития метрологии показывает, что все физические величины проходят в принципе одинаковый путь. После открытия и идентификации нового свойства и определения физической величины сначала разрабатывается способ ее количественного оценивания, затем, по мере накопления знаний, оценивание заменяют косвенными измерениями. Далее создают меры и методы прямых измерений этой величины, на основе которых создается система метрологического обеспечения этого нового вида измерений. Например, этот путь прошли измерения цвета: от книги — атласа цветов к виду измерений — колориметрии, охватывающей средства и методы измерений, и их метрологическому обеспечению. Аналогичный путь прошли акустические измерения и измерения солености. Очевидно, что и для многих других физических величин, количественное оценивание которых в настоящее время осуществляют экспертным или органолептическим способом, в будущем будут созданы методы измерений, и они перейдут в категорию измеряемых величин.

Приведенный анализ позволяет провести простую границу между измеряемыми и оцениваемыми величинами: измеряемые величины — это такие физические величины, методы измерений которых уже созданы, оцениваемые — такие, методы измерений которых пока еще не созданы.

1.2. Размер и значение величины. Единица величины. Шкала величины

В реальной действительности измеряют не величины вообще, а *величины*, присущие конкретным предметам, явлениям, процессам, т. е. величины конкретных *размеров*. Строго говоря, *измерение* — это *оценивание размера величины с помощью специальных технических средств* (*). Под *размером величины* понимается *количественная определенность величины, присущая конкретному материальному объекту, системе, явлению или процессу*.

Сопоставляя размер некоторой величины с единицей этой величины, получают ее *значение*. Таким образом, *значение величины* — *выражение размера величины в виде некоторого числа принятых для нее единиц*. В формализованном виде это записывается так:

$$X = x \cdot [X], \quad (3.1)$$

где X — значение величины,

$[X]$ — единица величины,

x — отвлеченное число, входящее в значение величины, называемое числовым значением величины.

Выражение (1.1) называется *основным уравнением измерений*.

Положив в выражении (1.1) $x = 1$, получим: $X = 1 \cdot [X]$. Отсюда следует определение единицы:

Под единицей величины (краткая форма — единица) понимается величина определенного размера, которой условно присвоено числовое значение, равное 1, применяемая для количественного выражения однородных с ней величин. Например, единицей длины является 1 метр (м), массы — 1 килограмм (кг).

Сопоставляя формулу (1.1) с определением (*), можно было бы дать следующее определение измерения:

*Измерение — это сравнение физической величины с ее единицей с помощью специальных технических средств (**).*

Однако это определение не охватывает значительное количество оцениваемых с помощью технических средств физических величин, для которых в принципе невозможно ввести единицы. С одной стороны, поскольку нет единицы, то, в соответствии с (**), это не измерение, а оценивание. С другой стороны, при такой постановке вопроса большое число физических величин, важных для производства и общества, оценивание которых осуществляется с помощью технических средств, окажется вне практической метрологии, что, конечно, недопустимо. Чтобы разрешить это противоречие, необходимо расширить определение (**). С этой целью вводится понятие «шкала величины». По аналогии с определением единицы его можно определить так:

Шкала величины — это упорядоченная совокупность размеров величины, которым условно присвоены определенные значения, применяемая для количественного выражения однородных с ней величин. В соответствии с логической структурой проявления свойств различают пять основных типов шкал [8].

1. *Шкала наименований (шкала классификации).* Такие шкалы используются для классификации объектов, свойства которых проявляются только в отношении эквивалентности. Отноительно двух объектов A и B этого класса можно утверждать только следующее: $A = B$ (A тождественно B) или $A \neq B$. Эти свойства невозможно охарактеризовать количественно, а в их шкалах отсутствуют понятия «больше» или «меньше», нуля и единицы. Пример такой шкалы — шкала классификации цвета

объектов по наименованиям (красный, зеленый и т. д.), опирающаяся на стандартизованные атласы набора цветов. Другими примерами шкал наименований являются различные классификации элементов изделий: по виду или типу, по потребляемой энергии и др.

2. *Шкала порядка (шкала рангов).* Эта шкала является монотонно возрастающей или убывающей и позволяет установить отношения эквивалентности и порядка ($A < B$ или $A > B$) между величинами, характеризующими это свойство. В шкале порядка можно установить иерархию объектов относительно оцениваемого свойства, поскольку если $A < B$ и $B < C$, то $A < C$. К шкалам порядка относятся условные шкалы — шкалы, значения которых выражены в условных единицах (например, 12-балльная шкала Бофорта для силы морского ветра). Широкое распространение получили шкалы порядка с нанесенными на них реперными точками. К таким шкалам относятся различные шкалы твердости — Бринеля, Роквелла, Виккерса и др. Например, шкала Мооса для определения твердости минералов содержит 10 реперных минералов, которым приписаны условные числа твердости: тальк — 1, гипс — 2, кальций — 3, флюорит — 4, апатит — 5, ортоклаз — 6, кварц — 7, топаз — 8, корунд — 9, алмаз — 10. Оценивание твердости минерала осуществляется путем его царапания реперными минералами. Если, например, после царапания минерала кварцем (7) на нем остается след, а после ортоклаза (6) — не остается, то его твердость удовлетворяет неравенству $6 < Q < 7$.

3. *Шкала интервалов (шкала разностей).* Эти шкалы применяются для объектов, свойства которых удовлетворяют отношениям эквивалентности, порядка и аддитивности разностей величин (аддитивная величина — однородная физическая величина, значения которой могут быть суммированы, умножены на числовой коэффициент, разделены друг на друга, следовательно, если $A - B = q_1$ и $B - C = q_2$, то $A - C = (A - B) + (B - C) = q_1 + q_2$, $(A - B) \cdot p = q_1 p$ и $\frac{A - B}{B - C} = \frac{q_1}{q_2}$. Шкала интервалов состоит из одинаковых

интервалов, имеет единицу и одну произвольно выбранную нулевую точку. Такими шкалами являются температурные шкалы Цельсия, Фаренгейта и Реомюра, летоисчисление по различным календарям.

Шкалы интервалов имеют условные (принятые по соглашению) единицы и условные нули, опирающиеся на какие-либо реперы. По аналогии с (1.1) они описываются уравнением

$$Q = Q_0 + q[Q], \quad (1.2)$$

где Q — значение величины,
 $[Q]$ — единица величины,
 q — числовое значение,
 Q_0 — нулевая точка шкалы.

Видно, что интервал между двумя любыми величинами Q_1 и Q_2 , равный $Q_1 - Q_2 = (q_1 - q_2)[Q]$, удовлетворяет основному уравнению измерений (1). Поэтому в этих шкалах разность величин также является величиной, которая имеет понятный физический смысл. В то же время сумма величин $Q_1 + Q_2 = 2Q_0 + (q_1 + q_2)[Q]$ не удовлетворяет ни основному уравнению измерений (1.1), ни уравнению шкалы интервалов (1.2). Поэтому в шкале интервалов сумма величин не имеет физического смысла. Например, разность температур двух тел — это температура, на которую надо нагреть одно из тел, чтобы их температуры сравнялись, а сумма температур двух тел не имеет физического смысла. Точно так же разность двух определенных дат календаря имеет ясный физический смысл — продолжительность периода времени, ограниченного этими датами, а сумма этих дат не имеет физического смысла.

4. *Шкала отношений.* Эти шкалы описывают свойства объектов, которые удовлетворяют отношениям эквивалентности, порядка и аддитивности. Примерами являются шкалы массы, длины, силы электрического тока и многие другие. В шкалах отношений существуют условные единицы и естественные нули. Поэтому они удовлетворяют уравнению

$$Q = q[Q]. \quad (1.3)$$

Из того, что сумма величин $Q_1 = q_1[Q]$ и $Q_2 = q_2[Q]$, равняющаяся $(Q_1 + Q_2) = (q_1 + q_2)[Q]$, удовлетворяет основному уравнению измерений (1.1) и уравнению шкалы (1.3), следует, что

в шкале отношений имеют физический смысл не только разности, но и суммы величин.

5. *Абсолютная шкала.* При измерениях относительных величин (отношений одноименных величин: молярная доля содержания компонента, коэффициент мощности, коэффициент трения и мн. др.) единица величины вводится естественным способом: $[Q] = 1$. При этом уравнение шкалы принимает вид $Q = q$. Такие шкалы, также являющиеся шкалами отношений, часто называют абсолютными. Для образования многих производных единиц системы СИ используются безразмерные и счетные единицы абсолютных шкал.

Теперь, с учетом приведенной информации о шкалах величин, можно уточнить определение (**):

*Измерение — это сравнение физической величины с ее единицей или шкалой с помощью специальных технических средств (***).*

1.3. Измерение

При рассмотрении этого понятия прежде всего следует установить, чем оно отличается от других способов оценивания. Ответ на этот вопрос дает следующее определение, данное профессором К.Н. Широковым в ГОСТ 16263-70 [9]:

Измерение — это нахождение значения физической величины опытным путем с помощью специальных технических средств.

Это определение содержит четыре признака данного понятия:

1. Измерять можно только физические величины (т. е. свойства материальных объектов, явлений или процессов). Поэтому социологические, экономические, психологические, филологические и другие количественные оценки нефизических величин остаются за пределами метрологии.

2. Измерение — это оценивание величины опытным путем, т. е. это всегда эксперимент. Следовательно, измерением нельзя называть расчетное определение величины по формуле и известным исходным данным, статистическую оценку показателей качества изделия на основании социологического исследования и другие подобные процедуры.

3. Измерение осуществляется с помощью специальных технических средств — носителей размеров единиц или шкал, называемых средствами измерений. Следовательно, под это определение не подпадают другие способы оценивания, не использующие тех-

нические средства (в частности, органолептические и экспертные способы оценивания).

Необходимо, правда, отметить, что широкое распространение аналитических измерений и повышение значимости этой области измерений привело к необходимости расширения трактовки этого признака. Дело в том, что многие аналитические измерения проводятся путем выполнения последовательности операций, среди которых операция применения средства измерений является, с точки зрения точности результата, далеко не определяющей. Например, лабораторные измерения показателей качества нефти, находящейся в железнодорожной цистерне, включают следующие обязательные операции: отбор пробы; доставка пробы в лабораторию; подготовка пробы; измерение. Качество выполнения каждой из этих операций влияет на точность измерения, ошибка при выполнении любой из них может быть решающей.

Жесткие правила проведения этих операций излагаются в метрологическом документе, называемом методикой выполнения измерений (МВИ). По аналогии с медицинской терминологией можно сказать, что МВИ — это «пропись» процедур измерения, которая должна соблюдаться самым неукоснительным образом. Очевидно, что в таких измерениях не столько средство измерений, сколько МВИ в целом играет решающую роль в обеспечении необходимой точности измерений. Поэтому в таких случаях в определении К.П. Широкова под «специальным техническим средством» логично понимать МВИ в целом (включая и применяемые в ней средства измерений).

4. Измерение — это определение значения величины. Следовательно, измерение — это сопоставление величины с ее единицей или шкалой. Такой подход выработан практикой измерений, исчисляемой сотнями лет. Он вполне соответствует содержанию понятия «измерение», определенному более 200 лет назад великим математиком Л. Эйлером: «Невозможно определить или измерить одну величину иначе, как приняв в качестве известной другую величину этого же рода и указав соотношение, в котором она находится к ней» [10].

Измерения можно классифицировать следующим образом.

1. По признаку точности — равноточные и неравноточные.

Равноточные измерения — ряд измерений какой-либо величины, выполненных одинаковыми по точности средствами измерений в одних и тех же условиях.

Неравноточные измерения — ряд измерений какой-либо величины, выполненных различными по точности средствами измерений и (или) в разных условиях.

Методы обработки равноточных и неравноточных измерений несколько отличаются. Поэтому прежде чем обрабатывать ряд измерений, необходимо проверить, являются ли измерения равноточными. Это осуществляется с помощью статистической процедуры проверки по критерию согласия Фишера.

2. По числу измерений — однократные и многократные.

Однократное измерение — измерение, выполненное один раз.

Многократное измерение — измерение одного и того же размера величины, результат которого получают из нескольких следующих друг за другом однократных измерений (отсчетов).

С какого числа измерений можно считать измерение многократным? Строгого ответа на этот вопрос нет. Однако известно, что с помощью таблиц статистических распределений ряд измерений может быть обработан по правилам математической статистики при числе измерений $n \geq 4$. Поэтому считается, что измерение можно считать многократным при числе измерений не менее 4.

Во многих случаях, особенно в быту, выполняются именно однократные измерения. Например, измерение конкретного момента времени по часам обычно производится один раз. Однако при некоторых измерениях для уверенности в получаемом результате одного отсчета недостаточно. Поэтому часто и в быту рекомендуется проводить не одно, а несколько измерений. Например, ввиду неустойчивости артериального давления человека при его контроле целесообразно проводить два или три измерения и за результат принимать их медиану. От многократных измерений двукратные и трехкратные измерения отличаются тем, что их точность не имеет смысла оценивать статистическими методами.

3. По характеру изменения измеряемой величины — статические и динамические.

Динамическое измерение — измерение величины, размер которой изменяется с течением времени. Быстрое изменение размера измеряемой величины требует ее измерения с точной фиксацией момента времени. Например, измерение расстояния до уровня земли со снижающегося самолета или измерение переменного напряжения электрического тока. По существу динамическое измерение является измерением функциональной зависимости измеряемой величины от времени.

Статическое измерение — измерение величины, принимаемой в соответствии с конкретной измерительной задачей за неизменную на протяжении времени измерения. Например, измерение линейного размера изготовленной детали при нормальной температуре можно считать статическим, поскольку колебания температуры в цехе на уровне десятых долей градуса вносят погрешность измерений не более 10 мкм/м, несущественную по сравнению с погрешностью изготовления детали. Поэтому в этой измерительной задаче можно считать измеряемую величину неизменной. При калибровке штриховой меры длины на государственном первичном эталоне термостатирование обеспечивает стабильность поддержания температуры на уровне 0,005 °С. Такие колебания температуры обуславливают в тысячу раз меньшую погрешность измерений — не более 0,01 мкм/м. Но в данной измерительной задаче она является существенной, и учет изменений температуры в процессе измерений становится условием обеспечения требуемой точности измерений. Поэтому эти измерения следует проводить по методике динамических измерений.

4. По цели измерения — технические и метрологические.

Технические измерения — измерения с целью получения информации о свойствах материальных объектов, процессов и явлений окружающего мира. Их выполняют, например, для контроля и управления научными экспериментами, контроля параметров изделий или различных технологических процессов, управления движением различных видов транспорта, с целью диагностики заболеваний, контроля загрязненности окружающей среды и др. Технические измерения проводят, как правило, с помощью рабочих средств измерений. Однако нередко к проведению особо точных и ответственных уникальных измерительных экспериментов привлекают эталоны.

Метрологические измерения — измерения с целью обеспечения единства и требуемой точности технических измерений. К ним относят:

- воспроизведение единиц и шкал физических величин первичными эталонами и передачу их размеров менее точным эталонам;
- калибровку средств измерений;
- измерения, выполняемые при поверке средств измерений;
- другие измерения, выполняемые с этой целью (например, измерения при взаимных сличениях эталонов одинакового

уровня точности) или удовлетворения других внутренних потребностей метрологии (например, измерения с целью уточнения фундаментальных физических констант и стандартных справочных данных о свойствах веществ и материалов, измерения для подтверждения заявленных измерительных возможностей лабораторий).

Метрологические измерения проводят при помощи эталонов.

Очевидно, что продукция, предназначенная для потребления (промышленностью, сельским хозяйством, армией, государственными органами управления, населением и др.) создается с участием технических измерений. А система метрологических измерений — это инфраструктура системы технических измерений, необходимая для того, чтобы последняя могла существовать, развиваться и совершенствоваться.

5. По используемым размерам единиц — абсолютные и относительные.

Относительное измерение — измерение отношения величины к (множимой) величине, играющей роль единицы. Например, относительным измерением является определение активности радионуклида в источнике посредством измерения ее отношения к активности радионуклида в другом источнике, аттестованном в качестве эталонной меры этой величины.

Противоположным понятием является абсолютное измерение. При проведении этого измерения в распоряжении экспериментатора не имеется единицы измеряемой величины. В связи с этим приходится ее воспроизводить непосредственно в процессе измерений. Это возможно двумя способами:

- получать «непосредственно из природного мира», т. е. воспроизводить его на основе использования физических законов и фундаментальных физических констант (такое измерение в международном словаре метрологических терминов VIM [11] называется фундаментальным измерением);
- воспроизводить единицу на основании известной зависимости между нею и единицами других величин.

В связи с этим можно определить абсолютное измерение следующим образом:

Абсолютное измерение — это измерение, основанное на прямых измерениях одной или нескольких основных величин и (или) использовании значений фундаментальных физических констант.

Например, измерение силы с помощью динамометра будет относительным измерением, а ее измерение путем использования физической константы g (ускорение всемирного тяготения) и мер массы (основной величины SI) — абсолютным.

Внедрение и метрологическое обеспечение относительных измерений, как правило, являются наилучшим решением многих измерительных задач, поскольку они являются более простыми, точными и надежными, чем абсолютные измерения. Абсолютные измерения в том смысле, которому больше соответствует понятие «фундаментальное измерение», на практике должны применяться в виде исключения. Их сфера применения — независимое воспроизведение основных единиц SI и открытие новых физических закономерностей.

6. По способу получения результата измерений — прямые, косвенные, совокупные и совместные измерения.

Прямое измерение — это измерение, проведенное при помощи средства измерений, хранящего единицу или шкалу измеряемой величины. Например, измерение длины детали микрометром, силы тока амперметром, массы на весах.

Косвенное измерение — измерение, при котором значение величины определяют на основании результатов прямых величин, функционально связанных с искомой. Примеры косвенных измерений:

- определение высоты предмета h по результатам измерений расстояния l до него и прилежащего к нему угла α прямоугольного треугольника, связанных уравнением $h = l \cdot \operatorname{tg} \alpha$;
- определение плотности ρ однородного тела цилиндрической формы по результатам измерений массы m , высоты h и диаметра цилиндра d , связанных уравнением $\rho = \frac{m}{0,25\pi d^2 h}$.

Совокупные измерения — проводимые одновременно измерения нескольких однородных величин, при которых значения этих величин определяют путем решения системы уравнений, получаемых при измерениях различных сочетаний этих величин.

Классический пример совокупных измерений — калибровка набора гирь по одной эталонной гире, проводимая путем измерений различных сочетаний гирь этого набора и решения полученных уравнений.

Совместные измерения — проводимые одновременно измерения двух или нескольких неоднородных величин для определения зави-

симости между ними. Другими словами, совместные измерения — это измерения зависимостей между величинами.

Примером совместных измерений является измерение температурного коэффициента линейного расширения (ТКЛР). Оно проводится путем одновременных измерений изменения температуры образца испытываемого материала и соответствующего приращення его длины и последующей математической обработки полученных результатов измерений.

Следует также различать область, вид и подвид измерений.

Под областью измерений понимается совокупность измерений физических величин, свойственных какой-либо области науки или техники и выделяющихся своей спецификой.

В настоящее время выделяют следующие области измерений:

- измерения пространственно-временных величин;
- механические измерения (в том числе измерения кинематических и динамических величин, механических свойств веществ и материалов, механических свойств и форм поверхностей);
- измерения теплоты (термометрия, измерения тепловой энергии, теплофизических свойств веществ и материалов);
- электрические и магнитные измерения (измерения электрических и магнитных полей, параметров электрических цепей, характеристик электромагнитных волн, электрических и магнитных свойств веществ и материалов);
- аналитические (физико-химические) измерения;
- оптические измерения (измерения величин физической оптики, когерентной и нелинейной оптики, оптических свойств веществ и материалов);
- акустические измерения (измерения величин физической акустики и акустических свойств веществ и материалов);
- измерения в атомной и ядерной физике (измерения ионизирующих излучений и радиоактивности, а также свойств атома и молекул).

Вид измерений — это часть области измерений, имеющая свои особенности и отличающаяся однородностью измеряемых величин.

Например, в области электрических и магнитных измерений могут быть выделены измерения электрического сопротивления, электрического напряжения, ЭДС, магнитной индукции и др.

Подвид измерений — это часть вида измерений, выделяющаяся определенными измерениями однородной величины (по диапазону, размеру величин, условиям измерений и др.).

Например, в измерениях длины выделяют измерения как больших длин (десятки, сотни и тысячи километров), так и малых и сверхмалых длин.

1.4. Метод и методика измерений

Решение любой измерительной задачи связано с реализацией того или иного принципа измерений.

Принцип измерений — физическое явление или эффект, положенный в основу измерений тем или иным средством измерений. Примерами принципов измерений являются:

- применение эффекта Джозефсона для измерений электрического напряжения;
- применение эффекта Доплера для измерения скорости;
- использование силы тяжести при измерении массы взвешиванием;
- зависимость сопротивления платины от температуры, реализованная в платиновых термометрах сопротивления;
- зависимость термоЭДС от разности температур, реализованная в термоэлектрических термометрах.

Однако выбором принципа измерений не исчерпывается определение метода измерений. Это гораздо более общее понятие, характеризующее способ решения измерительной задачи. Оно определяется следующим образом.

Метод измерений — прием или совокупность приемов сравнения измеряемой величины с ее единицей или шкалой в соответствии с реализованным принципом измерений.

Методы измерений весьма разнообразны. Их можно классифицировать по различным признакам. Первый из них — используемый физический принцип. По нему методы измерений разделяют на электрические, магнитные, акустические, оптические, механические и т. д. В качестве второго признака классификации используют режим изменения во времени измерительного сигнала. В соответствии с ним все методы измерений разделяют на статические и динамические. Третий признак — способ взаимодействия СИ и объекта измерений. По этому признаку методы измерений разделяют на контактные (чувствительный элемент средства измерений (СИ) приводится в контакт с объектом измерений) и бесконтактные (чувствительный элемент СИ не приводится в контакт с объектом измерений). Четвертый признак — применяемый в СИ вид

измерительных сигналов. В соответствии с ним методы разделяют на аналоговые и цифровые.

Приведенную классификацию можно развивать и далее. Однако ближе общей является метрологическая классификация методов измерений, под которой понимается классификация по способу сравнения измеряемой величины с единицей (см. рис. 2). По этому признаку все методы измерений разделяют на два метода:

- *метод непосредственной оценки* (значение величины получают непосредственно по отсчетному устройству СИ, например, по часам, амперметру);
- *метод сравнения с мерой* (измеряемую величину сравнивают с величиной, воспроизводимой мерой, например, измерение массы на рычажных весах).

Метод сравнения с мерой имеет ряд разновидностей: дифференциальный метод, метод замещения, метод дополнения и метод совпадений.

Дифференциальный метод — метод измерений, при котором измеряется разность между измеряемой величиной и однородной величиной, имеющей известное значение, незначительно отличающееся от значения измеряемой величины.

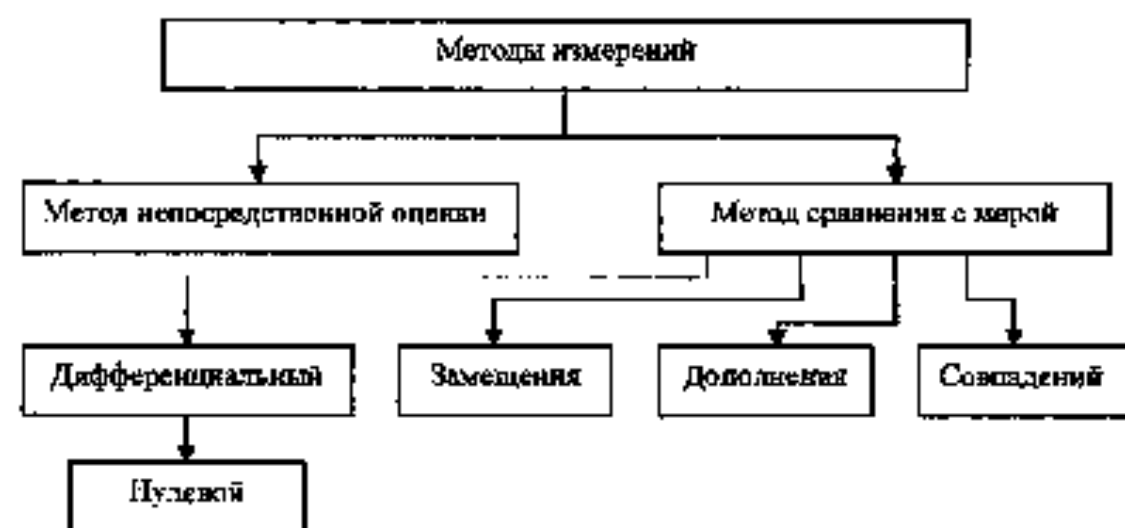


Рис. 2. Метрологическая классификация методов измерений

Примером дифференциального метода является поверка мер длины сличением с эталонными мерами на компараторе (приборе, предназначенном для сравнения мер). При этом методе производится неполное уравновешивание измеряемой величины X вели-

чиной X_m , воспроизводимой мерой, и определение их разности ΔX . Следовательно, результат измерений равен $X = X_m + \Delta X$. Дифференциальный метод позволяет существенно повысить точность измерений. Например, если $\Delta X = 0,01X$ и относительная погрешность измерения ΔX составляет 1 %, то относительная погрешность результата измерений X равна 0,01 % (если не учитывать погрешность меры).

Частным случаем дифференциального метода является нулевой метод измерений — метод измерений, при котором результирующий эффект воздействия измеряемой величины и меры на компаратор доводят до нуля. В данном случае значение измеряемой величины равно значению, которое воспроизводит мера. Примерами нулевого метода являются: взвешивание массы на весах с помощью набора гирь; измерение электрического напряжения мостом с полным его уравновешиванием.

Дифференциальный метод обеспечивает снижение погрешности измерений. Для борьбы с систематическими погрешностями полезен метод замещения. Метод замещения — метод сравнения с мерой, в котором измеряемую величину замещают величиной, воспроизводимой мерой. Поскольку оба измерения проводятся одним и тем же прибором в одинаковых условиях, систематическая погрешность измерений может быть в значительной степени скомпенсирована. Например, существенная составляющая погрешности измерений массы на рычажных весах — погрешность от неравноплечести весов — может быть исключена из результата измерений, если измерения проводить по методу Борда, взвешиванием с поочередным помещением измеряемой массы и гирь на одну и ту же чашку весов.

В некоторых измерительных задачах удобно применение других разновидностей метода сравнения с мерой: метода дополнения и метода совпадений. Метод дополнения — метод сравнения с мерой, в котором значение измеряемой величины дополняется мерой с таким расчетом, чтобы на прибор сравнения воздействовала их сумма, равная заранее известному значению. Например, в некоторых случаях может оказаться более точным измерение массы, при котором уравновешивают гирю, значение которой известно с высокой точностью, измеряемой массой и набором более легких гирь, помещенными на другую чашку весов.

Метод совпадений — метод измерений, при котором определяют разность между измеряемой величиной и величиной, воспроиз-

водимой мерой, используя совпадение отметок шкалы или периодических сигналов. Примером этого метода является измерение длины при помощи штангенциркуля с нониусом. Метод совпадений часто применяется при измерениях параметров периодических процессов. Если, например, необходимо измерить частоту ν , имея генератор стандартной частоты ν_0 , метод совпадений заключается в регистрации номера n частоты ν , совпадающего во времени с номером n_0 частоты ν_0 . При этом результат измерений частоты,

определяемый по формуле $\nu = \nu_0 \cdot \frac{n}{n_0}$, имеет погрешность, прак-

тически равную погрешности воспроизведения стандартной частоты ν_0 генератором.

Очевидно, что выбор метода измерений зависит от его теоретической обоснованности, наличия необходимых СИ, их вида (мера, измерительный прибор и др.) и конструктивных особенностей. Например, чтобы решить такую простейшую измерительную задачу, как измерение высоты заводской трубы, можно выбрать один из следующих методов:

- поднявшись с рулеткой на трубу, произвести измерение (метод сравнения с мерой);
- поднять вертолет с высотометром до уровня трубы и измерить высоту подъема (метод непосредственной оценки);
- вычислить высоту трубы как катет прямоугольного треугольника на основании результатов измерений расстояния до трубы и угла этого треугольника (косвенные измерения).

Если метод измерений предусматривает разработку основных приемов применения СИ, то методика выполнения измерений — по сути, технология выполнения измерений с целью наилучшей реализации выбранного метода измерений. Методикой выполнения измерений (МВИ) называют регламентированную совокупность операций и правил, выполнение которых при измерении обеспечивает получение необходимых результатов измерений в соответствии с выбранным методом. МВИ включает требования к выбору СИ, регламентацию процедуры подготовки СИ к работе, требования к условиям измерений, регламентацию процедуры проведения измерений и обработки результатов измерений, в том числе оценку их точности. МВИ аналитических измерений вклю-

чает также требования к отбору пробы, ее хранению и транспортировке в измерительную лабораторию, подготовке пробы к измерениям.

Унификация МВИ имеет большое значение в обеспечении единства измерений. Поэтому МВИ повторяющихся измерений обычно регламентируется каким-либо нормативным документом.

1.5. Средства измерений

Средствами измерений называют используемые при измерениях технические средства, имеющие нормированные метрологические свойства. В этом определении основную смысловую нагрузку, вскрывающую метрологическую суть средств измерений (СИ), несут слова «нормированные метрологические свойства». Наличие нормированных метрологических свойств означает, во-первых, что СИ способно хранить или воспроизводить единицу (или шкалу) измеряемой величины, и, во-вторых, размер этой единицы остается неизменным в течение определенного времени. Если бы размер единицы был нестабильным, нельзя было бы гарантировать требуемую точность результата измерений. Отсюда следуют три вывода:

- измерять можно лишь тогда, когда техническое средство, предназначенное для этой цели, способно хранить единицу, достаточно стабильную (неизменяющуюся во времени) по размеру;
- техническое средство непосредственно после изготовления еще не является СИ; оно становится таковым только после передачи ему единицы от другого, более точного СИ (эта операция называется калибровкой);
- необходимо периодически контролировать размер единицы, хранимый СИ, и при необходимости восстанавливать его прежние значение путем проведения новой калибровки.

По назначению различают рабочие СИ, применяемые для проведения технических измерений, и метрологические, предназначенные для проведения метрологических измерений. Метрологические СИ называются эталонами.

Чтобы уяснить метрологическую классификацию СИ, рассмотрим типичную структурную схему прямого измерения, приведенную на рис. 3 [7].



Рис. 3. Структурная схема прямого измерения

Процедура прямого измерения состоит из следующих элементарных операций:

- преобразование $Q = F(X)$ измеряемой величины X в другую величину Q , однородную или неоднородную с ней;
- воспроизведение величины $Q_m = N[Q]$ заданного размера, приблизительно равного размеру величины Q ($[Q]$ — единица этой величины);
- сравнение однородных величин Q и Q_m , определение их разности $\Delta = Q - Q_m$ и действительной функции преобразования измеряемой величины $F[X] = N[Q] + \Delta$;
- формирование результата измерений $\hat{X}$ путем его сравнения с калибровочной зависимостью СИ $Q_0 = F_0(X)$, играющей роль звена памяти. При этом производится обратное преобразование $\hat{X} = F_0^{-1}\{N[Q] + \Delta\}$ с учетом функции преобразования $F_0(X)$, которую СИ имело в момент построения калибровочной зависимости. Очевидно, что размер $[Q_0]$ единицы, определенный при последней калибровке, может отличаться от размера $[Q]$ единицы, хранимого СИ в момент измерений. Это является одной из основных причин погрешности измерения.

Все перечисленные операции осуществляются с помощью технических средств, которые либо являются самостоятельными средствами измерений, либо входят в состав СИ.

1.5.1. Измерительные преобразователи

Для первой операции необходим измерительный преобразователь (ИП) — СИ, предназначенное для преобразования измеряемой величины в другую величину или сигнал измерительной информации, удобный для обработки, хранения, дальнейших преобразований, индикации или передачи. По расположению в измерительной цепи различают первичные и промежуточные ИП. Первичный ИП, называемый также датчиком, — это тот ИП, на который непосредственно действует измеряемая величина. Остальные ИП называют промежуточными. Они расположены после первичного ИП и могут выполнять различные операции преобразования измерительного сигнала. Как правило, к ним относятся:

- изменение физического рода величины;
- масштабное (линейное или нелинейное) преобразование;
- масштабно-временное преобразование;
- аналого-цифровое преобразование;
- цифро-аналоговое преобразование;
- функциональное преобразование (любые математические операции над значениями величины).

Следует иметь в виду, что указанная классификация достаточно условна. Во-первых, в одном СИ может быть несколько первичных ИП (например, термopара в цепи термоэлектрического термометра). Во-вторых, специфика аналитических измерений также приводит к нарушению указанного принципа классификации.

Аналитические измерения представляют собой преобразование измеряемой величины, являющейся информативным параметром анализируемой среды (информативный параметр — параметр, несущий информацию о измеряемой величине), и сравнением ее с мерой. Обычно они проводятся с помощью совокупности ИП, включающей следующие виды ИП [12]:

- ИП₁: ИП типа состав—состав, обеспечивающие масштабные преобразования анализируемой пробы. Проба характеризуется информативным параметром C (содержанием измеряемого компонента) и комбинацией неинформативных параметров $\bar{C}_n$, к которым относятся содержание неопределяемых (ме-

шающих) компонент и термодинамические параметры анализируемой среды. При прохождении через ИП₁ происходят процессы очистки, сушки, изменения температуры и давления смеси до требуемых величин и, после этих преобразований анализируемой среды, отбор ее требуемого количества. ИП₁ обычно называют блоком отбора и подготовки пробы;

- ИП₂: ИП типа состав—свойство, обеспечивающие преобразование измеряемой величины C в то или иное физико-химическое свойство, удобное для последующего измерения и регистрации. Во многих случаях это преобразование идет в два этапа: получение промежуточного продукта в жидкой либо твердой фазе с содержанием компонента $Y_{\text{пром}}(C)$, а затем его преобразование в свойство $\Phi(Y_{\text{пром}})$;
- ИП₃: ИП типа свойство—выходной сигнал, обеспечивающие преобразование измеряемой величины в выходной измерительный сигнал W . Обычно это преобразование также осуществляется в два этапа: в промежуточный сигнал $W_{\text{пром}}(\Phi)$ и затем в выходной сигнал $W(W_{\text{пром}})$. При этом преобразование $W_{\text{пром}}$ в W — это преобразование одной электрической величины в другую.

Получив с помощью совокупности ИП выходные сигналы от анализируемого объекта, по калибровочной зависимости производят сравнение измеряемой величины с мерой и вырабатывают оценочные значения C^* измеряемой величины C .

Эта совокупность ИП не укладывается в приведенную классификацию, т. к. измеряемая величина непосредственно воздействует не только на первый ИП измерительной цепи, но и на их совокупность, включающую ИП₁, ИП₂ и первый преобразователь группы ИП₃. При этом только второй преобразователь группы ИП₃ является промежуточным. Отсюда следует, что в аналитических приборах роль первичного ИП выполняет совокупность ИП, осуществляющая последовательное, в несколько этапов, преобразование измеряемой величины в измерительный сигнал.

1.5.2. Меры

Воспроизведение величины $Q_M = N[Q]$ заданного размера осуществляется посредством меры величины Q . Мерой физической величины называют СИ, предназначенное для воспроизведе-

тия и (или) хранения физической величины одного или нескольких заданных размеров, значения которых известны с необходимой точностью. Примерами мер являются штриховая мера длины, нормальный элемент (мера ЭДС с номинальным значением 1 В), кварцевый генератор (мера частоты электрических колебаний), источник микропотоков газов и паров (ампула с веществом, выделяющимся в газообразном виде, являющаяся мерой скорости преобразования в газ целевого вещества). Меры подразделяют на однозначные (мера, хранящая один размер величины, например, плоскопараллельная концевая мера длины или конденсатор постоянной емкости) и многозначные (мера, хранящая несколько размеров величины, например, штриховая мера длины и конденсатор переменной емкости). В измерительной практике широко применяют не только отдельные меры, но и наборы мер (комплект мер разного размера одной и той же величины, например, набор плоскопараллельных концевых мер длины), а также магазины мер (набор мер, конструктивно объединенных в одно устройство, в котором имеются приспособления для их соединения в различных комбинациях, например, магазин электрических сопротивлений).

Воспроизводя или храня размер величины, которому присвоено определенное значение, мера тем самым хранит единицу этой величины. Иначе говоря, мера выступает в качестве носителя единицы величины и поэтому служит основой измерения.

Особый класс мер представляют собой стандартные образцы. *Стандартный образец — мера одной или нескольких величин, характеризующих состав или свойства вещества (материала), в виде образца этого вещества (материала).* Примерами стандартных образцов свойств являются стандартные образцы бензойной кислоты — меры теплоты сгорания, стандартные образцы специальной стали — меры свойств ферромагнитных материалов, стандартные образцы из кварца — меры относительной диэлектрической проницаемости. Примерами стандартных образцов состава являются различные вещества, например, металлы и сплавы с точно определенными значениями определяющего компонента и имеющихся примесей. Основной областью применения стандартных образцов является калибровка СИ при проведении аналитических измерений. Кроме того, из однородных стандартных образцов, так же как и из обычных эталонных мер, создают иерархиче-

ские (по мере убывания точности) цепочки передачи размеров единиц. В этих цепочках стандартные образцы используются для передачи размеров единиц менее точным СИ, в том числе и другим стандартным образцам.

Особое место в системе мер занимают специфические стандартные образцы, очень широко применяемые в газоаналитических измерениях, которые называют поверочными газовыми смесями (ПГС). *Поверочная газовая смесь — это баллон с чистым газом или газовой смесью, аттестованный метрологической службой в качестве однозначной меры содержания компонентов в газовой смеси.* ПГС имеют некоторые отличия от стандартных образцов в виде твердых объектов. Главное из них заключается в том, что в процессе измерений они расходуются. Это обстоятельство часто приводит к существенному увеличению стоимости многократных измерений.

Как правило, стандартные образцы выпускаются и рассылаются измерительным лабораториям по их заказам специализированными фирмами или метрологическими лабораториями. Но бывают и исключения. Так, некоторые стандартные образцы измеритель может приготовить и сам, если будет строго соблюдать условия приготовления, указанные в спецификации на них. Например, стандартный образец содержания железа в воде можно приготовить, растворив стандартный образец порошкового железа в определенном количестве дистиллированной воды. Такие стандартные образцы часто называют *калибровочными смесями*.

В заключение рассмотрения мер и особенностей их использования упомянем возможность использования в качестве мер некоторых природных явлений. Например, при точных измерениях углов широко применяется опора на естественный эталон — полный угол (плоский или телесный). При метрологическом обеспечении фотометров использовался свет определенной звезды на небе. Было тщательно измерено относительное спектральное распределение энергии в спектре этой звезды, наблюдаемое в различных точках СССР. После того как установили факт постоянства энергетических характеристик излучения звезды, соответствующая методика была узаконена для поверки ультрафиолетовых фотометров.

Последний пример показывает, каким способом можно проводить калибровку приборов с помощью таблиц стандартных справочных данных. К ним относятся:

- в механических измерениях — механические характеристики различных веществ (например, плотность чистых веществ при заданных температуре, влажности и давлении);
- в температурных измерениях — константы, характеризующие фазовые переходы (плавление—отвердевание или кипение—конденсация), ЭДС различных термопар и др.;
- в электрических измерениях — характеристики различных стабильных электрических явлений (например, ЭДС различных гальванических пар);
- в оптических измерениях — различные атомные константы, т. к. вся физическая оптика опирается на излучательные и поглощательные свойства атомов и молекул.

Особенно широко применяются стандартные справочные данные в аналитических измерениях. Это данные о всевозможных свойствах чистых веществ, различные зависимости свойств сплавов и газовых смесей от состава, коэффициенты поглощения и показатели преломления прозрачных веществ, гигрометрические и психрометрические таблицы и т. д.

Категория стандартных справочных данных является в метрологии одной из самых важных. Научные исследования в этой области проводятся во всех крупных метрологических институтах мира и многих физических лабораториях различных стран. Ведущие позиции занимает метрологический центр США — Национальный институт стандартов и технологий (NIST), одним из главных направлений деятельности которого является разработка и утверждение стандартных справочных данных. В России координацией исследований в этой области занимается НИИ стандартных справочных данных (НИИССД) Ростехрегулирования РФ. Координацию исследований в мире осуществляет международный Комитет по сбору и оценке численных данных для науки и техники (CODATA).

1.5.3. Измерительные приборы

Средство измерений, реализующие все операции, указанные на рис. 3, в комплексе, называется измерительным прибором. *Измерительный прибор — СИ, предназначенное для получения значений измеряемой величины в установленном диапазоне.* Как правило, измерительный прибор имеет устройства для преобразования измеряемой величины в сигнал измерительной информации и устройство для его индикации в форме, наиболее доступной для вос-

приятия. Во многих случаях устройство для индикации имеет шкалу со стрелкой, диаграмму, цифровое табло или дисплей, благодаря которым может быть произведен отсчет или регистрация результата измерений. В компьютеризированных СИ регистрация результата измерений может проводиться автоматически на носителе того или иного вида. Различают следующие виды измерительных приборов: *аналоговые (выходной сигнал является непрерывной функцией измеряемой величины) и цифровые (выходной сигнал представлен в цифровом виде), показывающие (допускают только отсчитывание показаний) и регистрирующие (предусматривают регистрацию результатов измерений), суммирующие (показания функционально связаны с суммой двух или нескольких величин) и интегрирующие (значение измеряемой величины определяется путем ее интегрирования по другой величине).* Например, микрометр и цифровой вольтметр относятся к показывающим измерительным приборам, барограф — к регистрирующим.

Различают также измерительные приборы прямого действия и опосредованного. *В измерительном приборе прямого действия результат измерений снимается непосредственно с его устройства индикации.* Примерами таких приборов являются амперметр, манометр, ртутно-стеклянный термометр. Измерительные приборы прямого действия предназначены для измерений методом непосредственной оценки.

В отличие от них, измерения методом сравнения с мерой проводятся с помощью измерительных приборов сравнения, называемых также компараторами. *Измерительный прибор сравнения — измерительный прибор, предназначенный для непосредственного сравнения измеряемой величины с величиной, значение которой известно.* Примерами компараторов являются: двухчашечные весы, интерференционный компаратор мер длины, мост электрического сопротивления, электроизмерительный потенциометр, фотометрическая скамья с фотометром. Компараторы для выполнения своих функций могут не хранить единицу. Такие компараторы, строго говоря, нельзя считать средствами измерений. Тем не менее, они должны обладать рядом важных метрологических свойств, прежде всего, обеспечивать небольшую случайную погрешность и высокую чувствительность измерений.

Любой измерительный прибор прямого действия можно использовать в качестве компаратора, если последовательно регистрировать его показания при измерениях величины, воспроизводи-

мой мерой, и неизвестной величины. Именно так и делается в аналитических измерениях: аттестация стандартных образцов, как правило, проводится методом сличения при помощи компаратора, в роли которого может выступить любой аналитический прибор, способный с приемлемой точностью измерить величину, воспроизводимую этими образцами. Как правило, такое применение измерительного прибора может обеспечить гораздо более высокую точность измерений, чем при его использовании для измерений методом непосредственной оценки. Это легко понять, если учесть, что при использовании измерительного прибора в качестве компаратора реализуется метод измерений, называемый методом замещения, при котором исключается систематическая погрешность измерительного прибора. С другой стороны, при методе замещения результат измерений отягощают две случайные погрешности измерительного прибора, т. к. проводятся два измерения (измеряемой величины и величины, воспроизводимой мерой). Поэтому, если измерительный прибор имеет большую случайную погрешность, он непригоден для использования в качестве компаратора. Если же его случайная погрешность мала, в связи с отсутствием систематической составляющей погрешность измерений будет меньше, чем при измерении методом непосредственной оценки.

1.5.4. Измерительные установки и измерительные системы

Совокупности СИ нередко объединяют в комплексы, называемые измерительными установками или измерительными системами. *Измерительная установка — совокупность функционально объединенных мер, измерительных приборов, измерительных преобразователей и других устройств, предназначенная для измерений одной или нескольких величин и расположенная в одном месте.* Измерительную установку с включенными в нее эталонами называют поверочной или эталонной установкой, установку, предназначенную для испытаний какой-либо продукции, — испытательным стендом. Некоторые виды больших измерительных установок называют измерительными машинами.

Измерительная система — совокупность функционально объединенных мер, измерительных приборов, измерительных преобразователей, ЭВМ и других технических средств, размещенных в разных точках контролируемого пространства с целью измерений одной или нескольких величин, свойственных этому пространству. Например, измерительная система ТЭЦ позволяет получать

измерительную информацию о ряде величин в разных энергоблоках; с помощью измерительной системы, состоящей из ряда функционально объединенных измерительных комплексов, разнесенных в пространстве на значительные расстояния, осуществляют мониторинг изменений погоды. В зависимости от назначения измерительные системы разделяются на измерительные информационные системы (ИИС), измерительные управляющие системы (ИУС) и др. В зависимости от числа измерительных каналов различают одно-, двух-, трехканальные и т. д. измерительные системы.

ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ

2.1. Классификация погрешностей измерений

Эффективность использования измерительной информации зависит от *точности измерений* — свойства, отражающего близость результатов измерений к истинным значениям измеряемых величин. Точность измерений может быть большей или меньшей, в зависимости от выделенных ресурсов (затрат на средства измерений, проведение измерений, стабилизацию внешних условий и т. д.). Очевидно, что она должна быть оптимальной: достаточной для выполнения поставленной задачи, но не более, ибо дальнейшее повышение точности приведет к неоправданным финансовым затратам. Поэтому наряду с точностью часто употребляют понятие *достоверность результатов измерений*, под которой понимают то, что результаты измерений имеют точность, достаточную для решения поставленной задачи.

Классический подход к оцениванию точности измерений, впервые примененный великим математиком Карлом Гауссом и затем развитый многими поколениями математиков и метрологов, может быть представлен в виде следующей последовательности утверждений.

1. Целью измерения является нахождение *истинного значения величины* — значения, которое идеальным образом характеризовало бы в качественном и количественном отношении измеряемую величину. Однако истинное значение величины найти в принципе невозможно. Но не потому, что оно не существует — любая физическая величина, присущая конкретному объекту материального мира, имеет вполне определенный размер, отношение которого к единице является истинным значением этой величины. Это означает всего лишь непознаваемость истинного значения величины, в гносеологическом смысле являющегося аналогом абсолютной истины. Хорошим примером, подтверждающим это положение, являются фундаментальные физические константы (ФФК).

Они измеряются наиболее авторитетными научными лабораториями мира с наивысшей точностью, и затем результаты, полученные разными лабораториями, согласуются между собой. При этом согласованные значения ФФК устанавливают с таким количеством значащих цифр, чтобы при следующем уточнении изменение произошло в последней значащей цифре. Таким образом, истинные значения ФФК неизвестны, но каждое следующее уточнение приближает значение этой константы, принятое мировым сообществом, к ее истинному значению.

На практике вместо истинного значения используют *действительное значение величины* — значение величины, полученное экспериментальным путем и настолько близкое к истинному значению, что в поставленной измерительной задаче может быть использовано вместо него.

2. Отклонение результата измерения X от истинного значения $X_{\text{н}}$ (действительного значения $X_{\text{д}}$) величины называется *погрешностью измерения*

$$\Delta X = X - X_{\text{н}} (X_{\text{д}}). \quad (2.1)$$

Вследствие несовершенства применяемых методов и средств измерений, нестабильности условий измерений и других причин результат каждого измерения отягощен погрешностью. Но, так как $X_{\text{н}}$ и $X_{\text{д}}$ неизвестны, погрешность ΔX также остается неизвестной. Она является случайной величиной и поэтому в лучшем случае может быть только оценена по правилам математической статистики. Это должно быть сделано обязательно, поскольку результаты измерения без указания оценки его погрешности не имеют практической ценности.

3. Используя различные процедуры оценивания, находят интервальную оценку погрешности ΔX , в виде которой чаще всего выступают *доверительные границы* $-\Delta_p, +\Delta_p$ погрешности измерений при заданной вероятности P . Под ними понимают верхнюю и нижнюю границы интервала, в котором с заданной вероятностью P находится погрешность измерений ΔX .

4. Из предыдущего факта следует, что

$$X - \Delta_p \leq X_{\text{н}} (X_{\text{д}}) \leq X + \Delta_p \quad (2.2)$$

— истинное значение измеряемой величины находится с вероятностью P в интервале $[X - \Delta_p; X + \Delta_p]$. Границы этого ин-

тервала называются доверительными границами результата измерений.

Таким образом, в результате измерения находят не истинное (или действительное) значение измеряемой величины, а оценку этого значения в виде границ интервала, в котором оно находится с заданной вероятностью.

Погрешности измерений могут быть классифицированы по различным признакам.

1. По способу выражения их делят на абсолютные и относительные погрешности. Абсолютная погрешность измерения — погрешность, выраженная в единицах измеряемой величины. Так, погрешность ΔX в формуле (2.1) является абсолютной погрешностью. Недостатком такого способа выражения этих величин является то, что их нельзя использовать для сравнительной оценки точности разных измерительных технологий. Действительно, $\Delta X = 0,05$ мм при $X = 100$ мм соответствует достаточно высокой точности измерений, а при $X = 1$ мм — низкой. Этого недостатка лишено понятие «относительная погрешность», определяемое выражением

$$\delta X = \frac{\Delta X}{X_n} \left(\frac{\Delta X}{X} \right). \quad (2.3)$$

Таким образом, относительная погрешность измерения — отношение абсолютной погрешности измерения к истинному значению измеряемой величины или результату измерений.

Для характеристики точности СИ часто применяют понятие «приведенная погрешность», определяемое формулой

$$\gamma X = \frac{\Delta X}{X_n}, \quad (2.4)$$

где X_n — значение измеряемой величины, условно принятое за нормирующее значение диапазона СИ. Чаще всего в качестве X_n принимают разность между верхним и нижним пределами этого диапазона.

Таким образом, приведенная погрешность средства измерения — отношение абсолютной погрешности средства измерения в данной точке диапазона СИ к нормирующему значению этого диапазона.

2. По источнику возникновения погрешности измерений делят на инструментальные, методические и субъективные.

Инструментальная погрешность измерения — составляющая погрешности измерения, обусловленная несовершенством применяемого СИ: отличием реальной функции преобразования прибора от его калибровочной зависимости, неустранимыми шумами в измерительной цепи, запаздыванием измерительного сигнала при его прохождении в СИ, внутренним сопротивлением СИ и др. Инструментальная погрешность измерений разделяется на основную (погрешность измерений при применении СИ в нормальных условиях) и дополнительную (составляющая погрешности измерений, возникающая вследствие отклонения какой-либо из влияющих величин от ее номинального значения или ее выхода за пределы нормальной области значений). Метод их оценивания будет рассмотрен ниже.

Методическая погрешность измерений — составляющая погрешности измерений, обусловленная несовершенством метода измерений. К ней относят погрешности, обусловленные отличием принятой модели объекта измерения от реального объекта, несовершенством способа воплощения принципа измерений, неточностью формул, применяемых при нахождении результата измерений, и другими факторами, не связанными со свойствами СИ. Примерами методических погрешностей измерений являются:

- погрешности изготовления цилиндрического тела (отличие от идеального круга) при измерении его диаметра;
- несовершенство определения диаметра круглого тела как среднего из значений диаметра в двух его заранее выбранных перпендикулярных плоскостях;
- погрешность измерений вследствие кусочно-линейной аппроксимации нелинейной калибровочной зависимости СИ при вычислении результата измерений;
- погрешность статического косвенного метода измерений массы нефтепродукта в резервуаре вследствие неравномерности плотности нефтепродукта по высоте резервуара.

Субъективная (личная) погрешность измерения — составляющая погрешности измерения, обусловленная индивидуальными особенностями оператора, т. е. погрешность отсчета оператором показаний по шкалам СИ. Они вызваны состоянием оператора, несовершенством органов чувств, эргономическими свойствами СИ. Характеристики субъективной погрешности измерений

определяют с учетом способности «среднего оператора» к интерполяции в пределах цены деления шкалы измерительного прибора. Наиболее известная и простая оценка этой погрешности — ее максимальное возможное значение в виде половины цены деления шкалы.

3. По характеру проявления разделяют систематические, случайные и грубые погрешности.

Грубой погрешностью измерений (промахом) называют погрешность измерения, существенно превышающую ожидаемую при данных условиях погрешность. Они возникают, как правило, из-за ошибок или неправильных действий оператора (неверный отсчет, ошибка в записях или вычислениях, неправильное включение СИ и др.). Возможной причиной промаха могут быть сбои в работе технических средств, а также кратковременные резкие изменения условий измерений. Естественно, что грубые погрешности должны быть обнаружены и исключены из ряда измерений. Предназначенная для этого статистическая процедура будет рассмотрена в п. 4.1.

Более содержательно деление на систематические и случайные погрешности.

Систематическая погрешность измерения — составляющая погрешности измерения, остающаяся постоянной или же закономерно изменяющаяся при повторных измерениях одной и той же величины. Систематические погрешности подлежат исключению, насколько возможно, тем или иным способом. Наиболее известный из них — введение поправок на известные систематические погрешности. Однако полностью исключить систематическую погрешность практически невозможно, и какая-то ее небольшая часть остается и в исправленном (введен поправкам) результате измерений. Эти остатки называются неисключенной систематической погрешностью (НСП). НСП — погрешность измерений, обусловленная погрешностями вычисления и введения поправок или же систематической погрешностью, на действие которой поправка не введена.

Например, с целью исключения систематической погрешности измерения, обусловленной нестабильностью функции преобразования аналитического прибора, периодически проводят его калибровку по эталонным мерам (поверочным газовым смесям или стандартным образцам). Однако, несмотря на это, в момент измерения все равно будет некоторое отклонение действительной

функции преобразования прибора от калибровочной зависимости, обусловленное погрешностью калибровки и дрейфом функции преобразования прибора за время, прошедшее после калибровки. Погрешность измерения, обусловленная этим отклонением, является НСП.

Случайной погрешностью измерения называется составляющая погрешности измерения, изменяющаяся случайным образом (по знаку и значению) при повторных измерениях одной и той же величины. Причины случайных погрешностей многообразны: шум измерительного прибора, вариация его показаний, случайные колебания параметров электрической сети и условий измерений, погрешности округления отсчетов и многие другие. В появлении таких погрешностей не наблюдается какой-либо закономерности, они проявляются при повторных измерениях одной и той же величины в виде разброса результатов измерений. Поэтому оценивание случайных погрешностей измерений возможно только на основе математической статистики (эта математическая дисциплина родилась как наука о методах обработки рядов измерений, отягощенных случайными погрешностями).

В отличие от систематических, случайные погрешности нельзя исключить из результатов измерений путем введения поправок, однако их влияние можно существенно уменьшить проведением многократных измерений.

2.2. Законы распределения случайных погрешностей измерений

2.2.1. Некоторые сведения из теории вероятностей

Из теории вероятностей известно, что наиболее полное описание случайной величины дается законом ее распределения, который может принимать две взаимосвязанные формы, называемые интегральной и дифференциальной функциями распределения. Интегральной функцией распределения $F_{\xi}(x)$ случайной величины ξ называют функцию x , равную вероятности того, что ξ принимает значение, меньшее x :

$$F_{\xi}(x) = P\{\xi < x\}. \quad (2.5)$$

График интегральной функции показан на рис. 4.

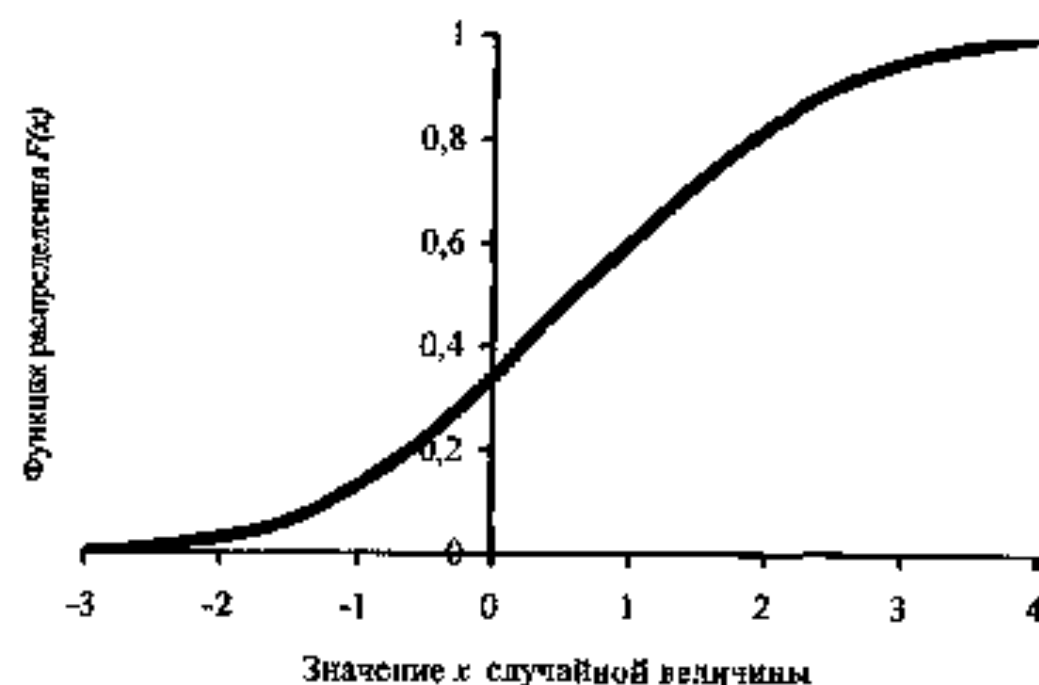


Рис. 4. Интегральная функция распределения $F_{\xi}(x)$

Из (2.5) следуют очевидные свойства $F_{\xi}(x)$:

- $F_{\xi}(x) \geq 0$ (неотрицательная функция);
- если $x_2 > x_1$, то $F_{\xi}(x_2) \geq F_{\xi}(x_1)$ (неубывающая функция x);
- $F_{\xi}(-\infty) = 0, F_{\xi}(\infty) = 1$;

$$P\{x_1 < \xi < x_2\} = F_{\xi}(x_2) - F_{\xi}(x_1). \quad (2.6)$$

Из (2.6) можно получить определение дифференциальной функции распределения:

$$f_{\xi}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F_{\xi}(x + \Delta x) - F_{\xi}(x)}{\Delta x} = \frac{dF_{\xi}(x)}{dx}. \quad (2.7)$$

График дифференциальной функции распределения $f_{\xi}(x)$ показан на рис. 5.

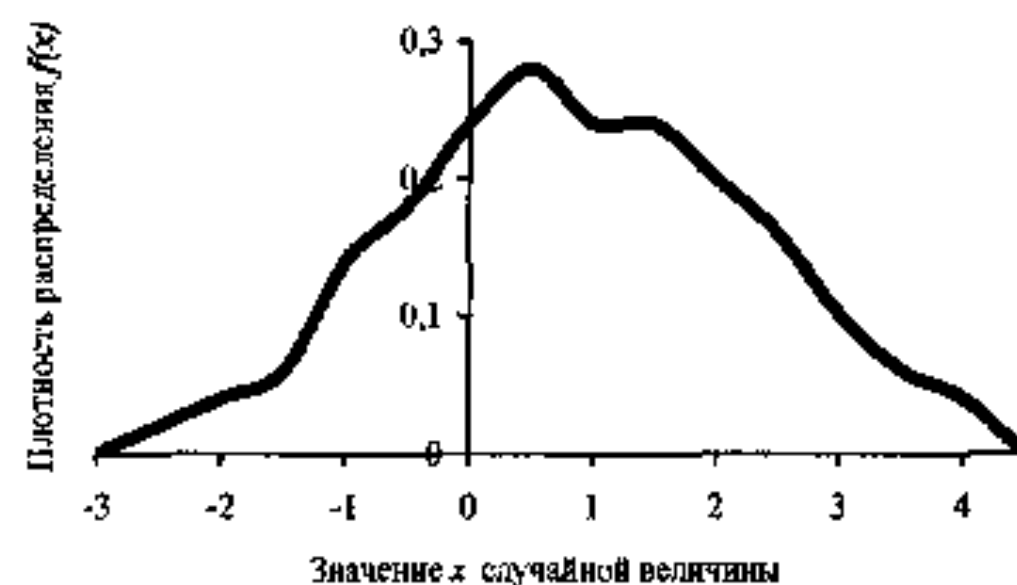


Рис. 5. Дифференциальная функция распределения $f_{\xi}(x)$

Видно, что $f_{\xi}(x) \geq 0$ при любом x . Из (2.7) следует, что

$$F'_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^x f_{\xi}(z) dz \text{ и, следовательно, } \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi}(z) dz = 1.$$

Вероятность нахождения случайной величины ξ в интервале $[x_1, x_2)$ равна

$$P(x_1 \leq \xi < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f_{\xi}(z) dz. \quad (2.8)$$

Из последнего уравнения следует, что вероятность попадания случайной величины в заданный интервал $[x_1, x_2)$ равна площади, заключенной под кривой $f_{\xi}(x)$ между абсциссами x_1 и x_2 . Если эту область представить в виде плоской геометрической фигуры, станет понятно, почему дифференциальная функция распределения чаще называется *плотностью распределения случайной величины*.

Каждый закон распределения может быть исчерпывающе охарактеризован бесконечной совокупностью числовых характеристик, называемых моментами распределения. Начальный момент

r -го порядка отсчитывается от начала координат и определяется формулой

$$\alpha_r = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f_{\xi}(x) dx, \quad r = 1, 2, \dots \quad (2.9)$$

Наиболее широко распространенным среди них является *первый начальный момент*, называемый *математическим ожиданием* случайной величины:

$$m_{\xi} = \alpha_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{\xi}(x) dx. \quad (2.10)$$

Математическое ожидание является наиболее вероятным значением случайной величины. Если, как и раньше, представить график плотности распределения в виде плоской геометрической фигуры, то точка на оси абсцисс с координатой m_{ξ} будет центром тяжести этой фигуры. Поэтому математическое ожидание трактуется как центр тяжести вероятностного распределения.

Центральный момент отсчитывается от математического ожидания и определяется формулой

$$\mu_r = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_{\xi})^r f_{\xi}(x) dx. \quad (2.11)$$

Наиболее известный центральный момент — второй, называемый *дисперсией* случайной величины:

$$D_{\xi} = \mu_2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_{\xi})^2 f_{\xi}(x) dx. \quad (2.12)$$

Дисперсия характеризует рассеивание случайной величины относительно математического ожидания.

Сравнительно точное экспериментальное определение третьего момента требует не менее 80 независимых измерений, четвертого — не менее 200. Дальнейшее увеличение порядка моментов распределения сопровождается таким же темпом увеличения объема необходимой измерительной информации. Поэтому в практике

и основном используют указанные выше моменты первых двух порядков.

С моментами распределения тесно связаны числовые характеристики вероятностных распределений. Как правило, применяют числовые характеристики двух видов: характеристики центра распределения и характеристики рассеивания случайной величины.

Центр распределения может быть определен несколькими способами. Наиболее фундаментальный способ заключается в определении математического ожидания m_{ξ} . Другой способ заключается в нахождении центра симметрии распределения, т. е. такой точки M_{ξ} на оси абсцисс, вероятности появления случайной величины слева и справа от которой одинаковы и равны 0,5:

$F_{\xi}(M_{\xi}) = 1 - F_{\xi}(M_{\xi}) = 0,5$. Значение M_{ξ} называется *медианой*, или 50% квантилем.

В качестве центра распределения может использоваться и мода Mo , которой называют точку абсцисс, соответствующую максимуму плотности распределения случайной величины ($f_{\xi}(Mo) = \max_{x \in (Mo-z, Mo+z)} f_{\xi}(x)$). Распределения с одним максимумом называются *одномодальными*, с двумя — *двухмодальными* и т. д.

Характеристикой рассеивания случайной величины является введенная выше дисперсия D_{ξ} . Дисперсия не всегда удобна для применения, поскольку ее размерность равна квадрату размерности случайной величины. Поэтому вместо нее часто используют *среднее квадратичное отклонение (СКО)*, равное квадратному корню из дисперсии, взятому с положительным знаком:

$$\sigma_{\xi} = \sqrt{D_{\xi}}. \quad (2.13)$$

СКО часто называют *стандартным отклонением*.

2.2.2. Нормальный закон распределения

Целью любого измерения является нахождение истинного (действительного) значения измеряемой величины. Однако в распоряжении экспериментатора находится не совокупность всех возможных значений случайной величины (она называется генеральной

совокупностью), а выборка из этой совокупности, включающая ограниченное число результатов измерений. Числовые характеристики этой выборки дают представление о характеристике центра распределения генеральной совокупности — математического ожидания. Однако из-за случайного характера выборки они сами являются случайными величинами, и их применение в качестве математического ожидания приводит к дополнительной погрешности. Поэтому необходимо выбрать среди них наилучшую, наиболее эффективную оценку.

В принципе центр распределения выборки $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ из n результатов измерений можно характеризовать следующими способами:

- средним арифметическим значением $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ (математическое ожидание, взятое по выборке);
- медианой $Me = \begin{cases} x_{(n+1)/2}, \dots, n — \text{нечетное,} \\ \frac{x_{n/2} + x_{(n+1)/2}}{2}, \dots, n — \text{четное;} \end{cases}$
- модой Mo (значением, при котором плотность является максимальной);
- средним геометрическим значением $g = \sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n}$;
- средним степенным значением $u = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^F \right)^{1/F}$, в том числе его частными случаями:

при $F = 1$ — математическим ожиданием,

при $F = 2$ — средним квадратичным значением

$$S = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2},$$

при $F = -1$ — средним гармоническим значением

$$h = n \left(\sum_{i=1}^n x_i^{-1} \right)^{-1}.$$

Какая из этих оценок является наилучшим приближением математического ожидания распределения случайной погрешности?

Ответ на этот вопрос 200 лет назад предложил Карл Гаусс. В работе «О движении небесных тел», опубликованной в 1809 г., он сформулировал следующие три постулата [13].

1. В серии независимых наблюдений погрешности разного знака встречаются одинаково часто.

2. Большие отклонения от истинного значения встречаются реже, чем малые.

3. Если какая-нибудь величина будет определена из многих наблюдений, произведенных при одинаковых обстоятельствах и с одинаковой тщательностью, то среднее арифметическое из всех наблюдавшихся значений окажется наиболее вероятным значением.

Из этих аксиом Гаусс вывел закон распределения случайных величин, нашедший огромное применение в науке и технике. Приведем это доказательство.

Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ — результаты n равнооточных измерений величины, истинное значение которой равно z . Случайные погрешности измерений $\epsilon_i = x_i - z$ распределены по некоторому неизвестному закону с плотностью распределения $f(x_i - z)$. В соответствии со вторым постулатом, вероятность больших значений случайной погрешности мала по сравнению с вероятностью ее малых значений. Поэтому вероятность того, что результат измерения

будет равен x_i , равна $P_i = \int_{x_i}^{x_i + \Delta x} f(y - z) dy \cong f(x_i - z) \Delta x$, где

Δx — малая величина. Вероятность получения ряда $x_1, x_2, \dots, x_n$ результатов измерений, по теореме умножения вероятностей, будет равна произведению вероятностей P_i :

$$P = P_1 \cdot P_2 \cdot \dots \cdot P_n \cong f(x_1 - z) \cdot f(x_2 - z) \cdot \dots \cdot f(x_n - z) \cdot (\Delta x)^n.$$

Существует такое $z = \theta$, при котором эта вероятность принимает максимальное значение $P_{\max}$. Так как $\ln P$ является монотонной функцией P , при $z = \theta$ функция $\ln P$ также примет максимальное значение:

$$\max[\ln P] = \ln P_{\max} = \left\{ \sum_{i=1}^n \ln[f(x_i - z)] \right\}_{z=\theta} + n \ln(\Delta x).$$

Из этого следует, что

$$\left. \frac{d \ln P}{dz} \right|_{z=\theta} = \sum_{i=1}^n \frac{f'(x_i - \theta)}{f(x_i - \theta)} = 0, \quad (2.14)$$

где $f'(x_i - \theta)$ — производная от плотности $f(x_i - \theta)$ по x_i .

В соответствии с третьим постулатом, $\theta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$. Это выра-

жение можно записать так: $\sum_{i=1}^n (x_i - \theta) = 0$. Объединяя его с (2.14),

получим: $\sum_{i=1}^n \left[\frac{f'(x_i - \theta)}{f(x_i - \theta)} + C(x_i - \theta) \right] = 0$. Для справедливости это-

го выражения при любых значениях x_i необходимо и достаточно, чтобы для любого $i = 1, 2, \dots, n$ выполнялось условие

$$\frac{f'(x_i - \theta)}{f(x_i - \theta)} = -C(x_i - \theta). \quad (2.15)$$

(2.15) является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными относительно неизвестной функции $f(x - \theta)$. Его решением является функция

$$f(x - \theta) = e^{-\frac{C(x-\theta)^2}{2}} \sqrt{\frac{C}{2\pi}}.$$

Далее, подставляя это выражение в уравнения (2.10) и (2.12), после преобразований можно получить, что математическое ожидание этого распределения m равно θ , а дисперсия $\sigma^2 = \frac{1}{C}$. С учетом этого плотность распределения результатов измерений x равна

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}. \quad (2.16)$$

Так как погрешность измерений $\varepsilon = x - m$, ее распределение имеет вид

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma^2}}. \quad (2.17)$$

Эта зависимость, описывающая распределение случайных погрешностей измерений, отличается от (2.16) тем, что имеет математическое ожидание, равное нулю.

Распределение (2.16) получило наименование «нормальное распределение случайной величины». Его также называют распределением Гаусса.

В соответствии с центральной предельной теоремой теории вероятностей, сумма n независимых случайных величин, каждая из которых мала по сравнению с суммой остальных величин, стремится к нормальному распределению при $n \rightarrow \infty$. Это дает основания считать, что нормальный закон — не искусственное математическое построение, а фундаментальная закономерность явлений природы и материального мира.

График плотности нормального распределения приведен на рис. 6. Оно обладает следующими свойствами.

1. Распределение симметрично относительно математического ожидания: $f(x - m) = f(-x + m)$. Поэтому $Me = Mo = m$ — медиана и мода распределения совпадают с математическим ожиданием.

2. Распределение является воспроизводящимся. Это означает, что сумма величин, распределенных нормально, также распределена нормально. Это свойство нормального распределения позволило обосновать семейство вероятностных распределений, широко используемых при статистической обработке результатов измерений.

$$1. \quad P\{a \leq x < b\} = \int_a^b f(x) dx = F\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - F\left(\frac{a-m}{\sigma}\right), \quad (2.18)$$

где $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-0.5t^2} dt$ — интегральная функция нормального распределения с $m = 0$ и $\sigma = 1$.

Определенный интеграл $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-0.5t^2} dt$ называется ин-

тегральной функцией Лапласа. Для нее справедливы следующие равенства: $\Phi(x) = F(x) - 0,5$; $\Phi(x) = -\Phi(-x)$; $\Phi(-\infty) = -0,5$; $\Phi(0) = 0$; $\Phi(\infty) = 0,5$. Поэтому другая запись (2.18): $P\{a \leq x < b\} = \Phi(\frac{b-m}{\sigma}) - \Phi(\frac{a-m}{\sigma})$.

При $a = -b$ она принимает широко известный вид:

$$P\{-b \leq x < b\} = \Phi(\frac{b+m}{\sigma}) + \Phi(\frac{b-m}{\sigma}).$$



Рис. 6. График плотности нормального распределения

при $m = \sigma$ и $t = \frac{x}{\sigma}$

Нормальное распределение очень удобно для получения интервальных оценок. Например, доверительные границы, соответствующие вероятности P , для нормально распределенной случайной величины с математическим ожиданием m и СКО σ вычисляются по формулам:

$$-\Delta_p = m - \lambda(P)\sigma,$$

$$\Delta_p = m + \lambda(P)\sigma,$$

где $\lambda(P)$ — двусторонний квантиль нормального распределения, соответствующий вероятности P , вычисляемый по формуле $\lambda(P) = \Phi^{-1}(2P - 1)$.

2.2.3. Обобщенный нормальный закон распределения

Справедливость третьего постулата, сформулированного Гауссом при выводе нормального закона распределения, как и многих других аксиом, лежащих в основе математических теорий, невозможно ни доказать теоретически, ни подтвердить экспериментально. Поэтому на протяжении двух столетий он неоднократно подвергался сомнению. В частности, было показано, что для многих СИ он не выполняется. Приведем пример такого СИ.

Пример 2.1. Уравнение измерений вольтметра электродинамической системы имеет вид

$$WY^2 = K \frac{X^2}{R^2} + M,$$

где X — измеряемая величина (входной сигнал прибора),

Y — показание (выходной сигнал прибора),

R — входное сопротивление,

W — жесткость пружины,

K — электродинамическая постоянная,

M — момент трения в опорах, знак которого определяется направлением изменения входного сигнала.

Основной источник случайной погрешности измерений — трение в опорах, которое подчиняется нормальному закону. Чтобы уменьшить эту погрешность, проводят серию из $2n$ измерений, каждый раз меняя направление изменения напряжения, и определяют результат измерений по формуле среднего арифметического

$$\bar{X} = R \sqrt{\frac{W}{K}} \cdot \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n (Y_{+i} + Y_{-i}),$$

где Y_{+i}, Y_{-i} — показания прибора при возрастании и убывании входного сигнала. Однако эта оценка измеряемой величины не является наи-

лучшей. Действительно, она является смещенной оценкой, поскольку при ней момент трения в опорах и, следовательно, погрешность от трения полностью не исключаются¹. Напротив, вычисление среднего квадратич-

ного значения $\bar{X}_2 = R \sqrt{\frac{W}{K} \cdot \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n (Y_{1,i}^2 + Y_{2,i}^2)}$ позволяет полностью исклю-

чить погрешность от трения. Можно показать, что $\bar{X}_2$ является несмещенной, состоятельной и эффективной оценкой этой величины, т. е. ее наилучшей оценкой.

Приведенный пример показал, что среднее арифметическое результатов измерений не всегда является наилучшей оценкой измеряемой величины. Теоретически доказано и более сильное утверждение: среднее арифметическое является эффективной оценкой измеряемой величины только при нормальном распределении погрешностей измерений. Поэтому, если закон распределения отличается от нормального, нахождение среднего арифметического не является наилучшим решением.

Тем не менее, не приходится подвергать сомнению целесообразность широкого применения нормального распределения при статистической обработке рядов измерений. Обработка результатов измерений должна заканчиваться определением интервала, в котором находится измеряемая величина. А это, если не применять методы статистического моделирования, практически осуществимо только при нормальном распределении ряда измерений, т. к. только оно полностью обеспечено статистическими распределениями, необходимыми для решения этой задачи. Поэтому на практике обработка результатов измерений, как правило, проводится при предположении об их нормальном распределении. По этой же причине актуаль-

¹ Некоторые сведения из теории статистических оценок:

- статистическая оценка величины является наилучшей, если она состоятельная, несмещенная и эффективная;
- статистическая оценка называется состоятельной, если при увеличении числа экспериментальных данных она стремится к истинному значению величины;
- статистическая оценка называется несмещенной, если ее математическое ожидание равно измеряемой величине;
- статистическая оценка называется эффективной, если ее СКО меньше СКО любой другой оценки этой величины.

но и обобщение нормального распределения случайных погрешностей измерений другим вероятностным законом, который, сохранив преимущества нормального распределения, в то же время благодаря своей гибкости был бы способен более точно аппроксимировать выборочные распределения рядов измерений. Такое распределение можно получить, если в приведенном в предыдущем разделе аксиоматическом выводе Гаусса заменить третий постулат следующим:

Если какая-нибудь величина будет определена из многих равнозначных измерений $x_1, \dots, x_n$, то среднее степенное

$\bar{x} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^F \right)^{1/F}$ из всех наблюдавшихся значений с параметром

F , значение которого определено по ряду $x_1, \dots, x_n$, окажется ее наиболее вероятным значением.

При этом произвольный показатель степени F определяется из выборки и в частном случае может равняться 1. Этот подход впервые применил в 1955 г. И.Г. Фридлендер [14]. В результате он получил новое распределение, обобщающее нормальный закон. Однако это распределение обладало существенным недостатком: ограничением области распространения неотрицательными значениями величин, противоречащим первому постулату К. Гаусса и природе погрешностей измерений. Но этот недостаток может быть легко устранен, если в качестве истинного значения измеряемой величины принять при $F \neq 0$ предел при $n \rightarrow \infty$ значения

$\hat{x} = \text{sign}[\hat{z}] \cdot |\hat{z}|^{1/F}$, где $\hat{z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{sign}(x_i) \cdot (|x_i|)^F$ ($\text{sign}(y)$ — знак величины y) [15]. В частном случае при $F = 0$ в качестве истинного значения можно принять предел при $n \rightarrow \infty$ значения

$\hat{x} = \text{sign}[\hat{z}_1] \cdot \exp[\hat{z}_1]$, где $\hat{z}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{sign}(x_i) \cdot \ln(|x_i|)$.

Из аксиоматического вывода Гаусса в этом случае следует, что по нормальному закону будут распределены значения

$$z_i = \text{sign}(x_i) \cdot \begin{cases} (|x_i|)^F, & F \neq 0, \\ \ln(|x_i|), & F = 0. \end{cases} \quad (2.19)$$

Так как значения z_i подчиняются нормальному распределению

с плотностью $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-m_F)^2}{2\sigma_F^2}}$, математическим ожиданием

m_F и стандартным отклонением σ_F , плотность распределения значений x_i равна [15]

$$f(x) = \frac{\partial z}{\partial x} e^{-\frac{(z-m_F)^2}{2\sigma_F^2}} = \begin{cases} \frac{|F| \cdot (|x|)^{F-1}}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\text{sign}(x)(|x|)^F - m_F)^2}{2\sigma_F^2}}, & F \neq 0, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma \cdot |x|} e^{-\frac{(\text{sign}(x) \ln(|x|) - m_F)^2}{2\sigma_F^2}}, & F = 0. \end{cases} \quad (2.20)$$

Выражение (2.20) описывает плотность обобщенного нормального распределения случайной погрешности измерений. В отличие от нормального распределения, это распределение является трехпараметрическим: к параметрам m_F и σ_F добавляется F . При этом оценки m_F и σ_F зависят от F . На рис. 7 приведены графики плотности этого распределения при различных значениях m_F , σ_F и F . Они показывают, что, изменяя параметр F , можно получить принципиально отличающиеся друг от друга плотности распределения: симметричные и несимметричные, с пологой вершиной и островершинные, одномодальные и двухмодальные.

Это же доказывают и графики коэффициента асимметрии и эксцесса, приведенные на рис. 8. Известно, что коэффициент асимметрии нормального распределения равен нулю, а эксцесс — трем. Графики показывают, что, изменяя F , можно получить коэффициент асимметрии в диапазоне от 0 до 5, а эксцесс — от 1 до 20.

Таким образом, подбирая значение F , можно почти любой экспериментальный ряд с высокой степенью точности аппроксимировать обобщенным нормальным распределением. При этом сохраняется возможность получения статистических границ для параметров этого распределения, т. к. значения z_i , определенные формулой (2.19), подчиняются нормальному распределению.

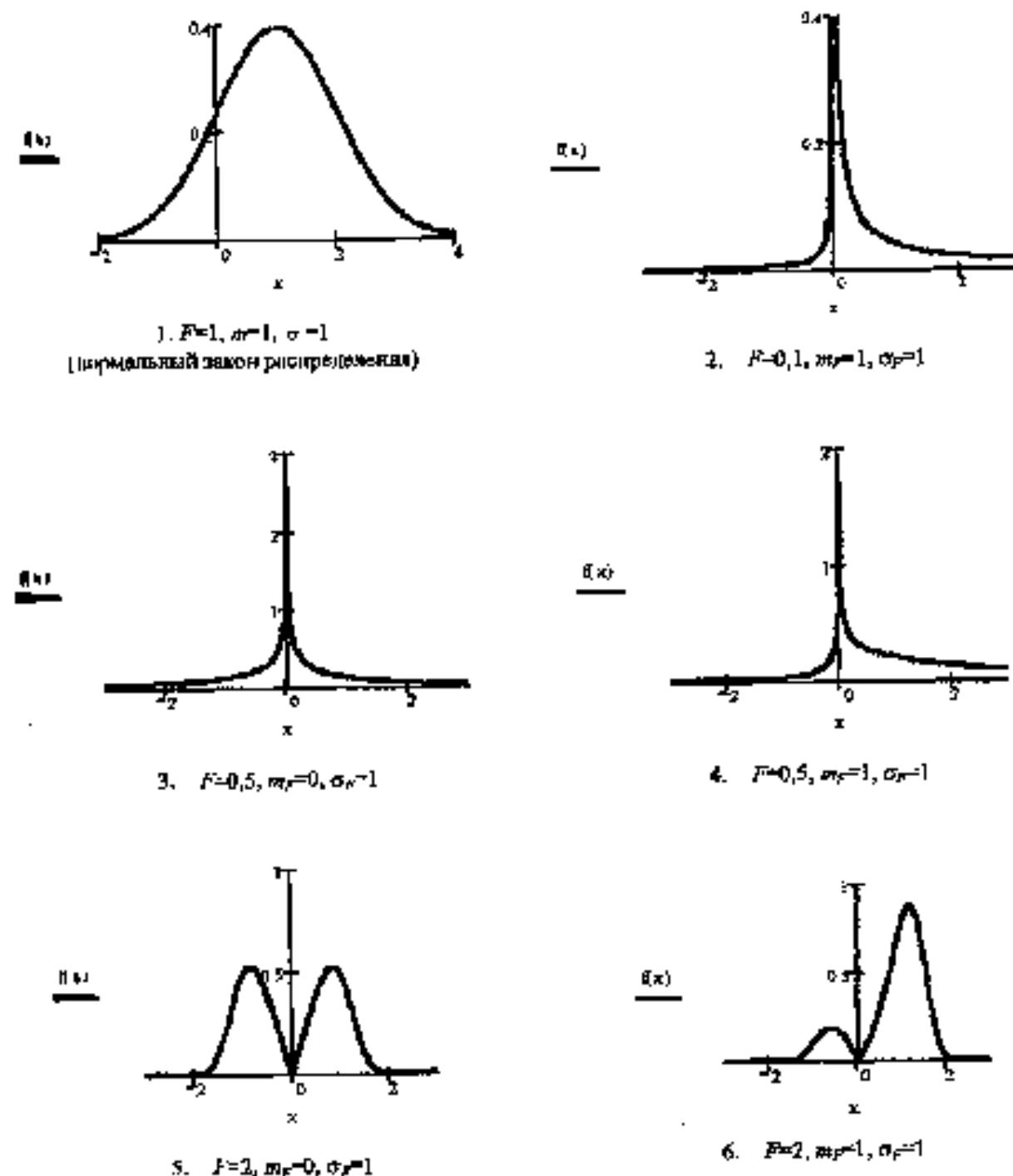
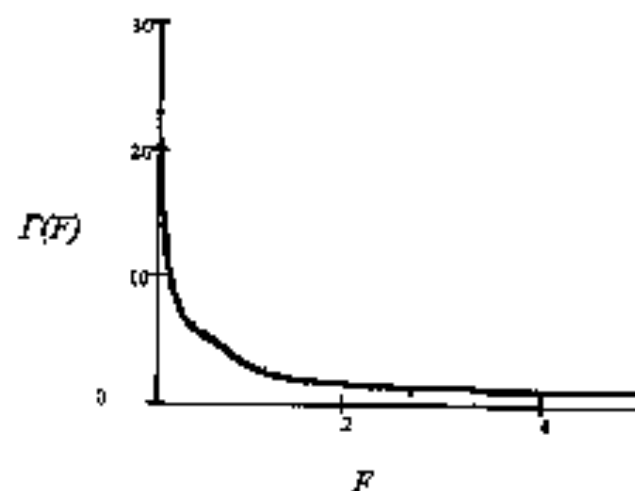
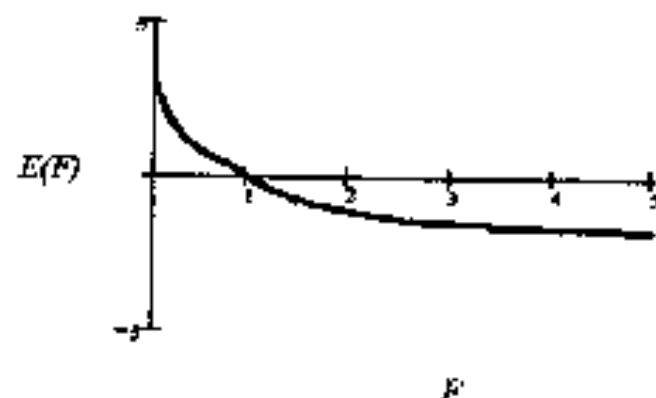


Рис. 7. Графики плотности обобщенного нормального распределения



1. Эксцесс при $k = \frac{m_F}{\sigma_F} = 0$



2. Коэффициент асимметрии при $k = \frac{m_F}{\sigma_F} = 1$

Рис. 8. Графики зависимостей эксцесса и коэффициента асимметрии от F

Вероятность, что случайная погрешность измерения, подчиняющаяся обобщенному нормальному распределению, находится в интервале $(a, b]$, вычисляется по формуле, аналогичной (2.18):

$$P\{a < x \leq b\} = \int_a^b f(x) dx = F\left(\frac{\text{sign}(b) \cdot h(b) - m_F}{\sigma_F}\right) - F\left(\frac{\text{sign}(a) \cdot h(a) - m_F}{\sigma_F}\right), \quad (2.21)$$

в которой $h(x) = \begin{cases} (|x|)^p, & p \neq 0, \\ \ln(|x|), & p = 0, \end{cases}$ — функция $x = a$ или b ,

m_F, σ_F — как в (2.20).

2.2.4. Основные статистические распределения, применяемые при обработке результатов измерений

Гипотеза о соответствии распределений случайных погрешностей измерений нормальному закону позволила обосновать ряд вероятностных распределений случайных величин, широко используемых при статистической обработке результатов измерений. Из них чаще всего применяются следующие распределения.

Распределение χ^2 [16]

Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ — нормально распределенные случайные величины с математическим ожиданием m и СКО σ . После замены переменных $\xi_i = \frac{x_i - m}{\sigma}$ ряд нормально распределенных случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ будет иметь математическое ожидание, равное нулю, и СКО, равное 1. Функция распределения величины $\chi^2 = \sum_{i=1}^n \xi_i^2$ носит название χ^2 -распределения (хи-квадрат распределение). Это распределение играет важную роль в метрологии. Плотность χ^2 -распределения имеет вид

$$\varphi(x) = \frac{x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})}, \quad x \geq 0, \quad (2.22)$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция, определяемая уравнением $\Gamma(x+1) = (x+1)\Gamma(x)$ (для целых положительных x выполняется равенство $\Gamma(x) = x!$),

n — параметр распределения, называемый числом степеней свободы.

График плотности этого распределения при $n = 1, 2$ и 6 приведен на рис. 9.

Наиболее известно применение χ^2 -распределения для проверки гипотезы о виде закона распределения результатов измерений.

Распределение Стюдента [16]

Распределение Стюдента описывает плотность распределения среднего арифметического, вычисленного по выборке из n случайных результатов измерений одной и той же величины, распределенных по нормальному закону. Распределение Стюдента получено следующим образом. Рассмотрен ряд $x_1, x_2, \dots, x_n$ нормально распределенных случайных величин с математическим ожиданием m и СКО σ . После замены переменных $\xi_i = \frac{x_i - m}{\sigma}$

ряд нормально распределенных случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ будет иметь математическое ожидание, равное нулю, и СКО, равное 1.

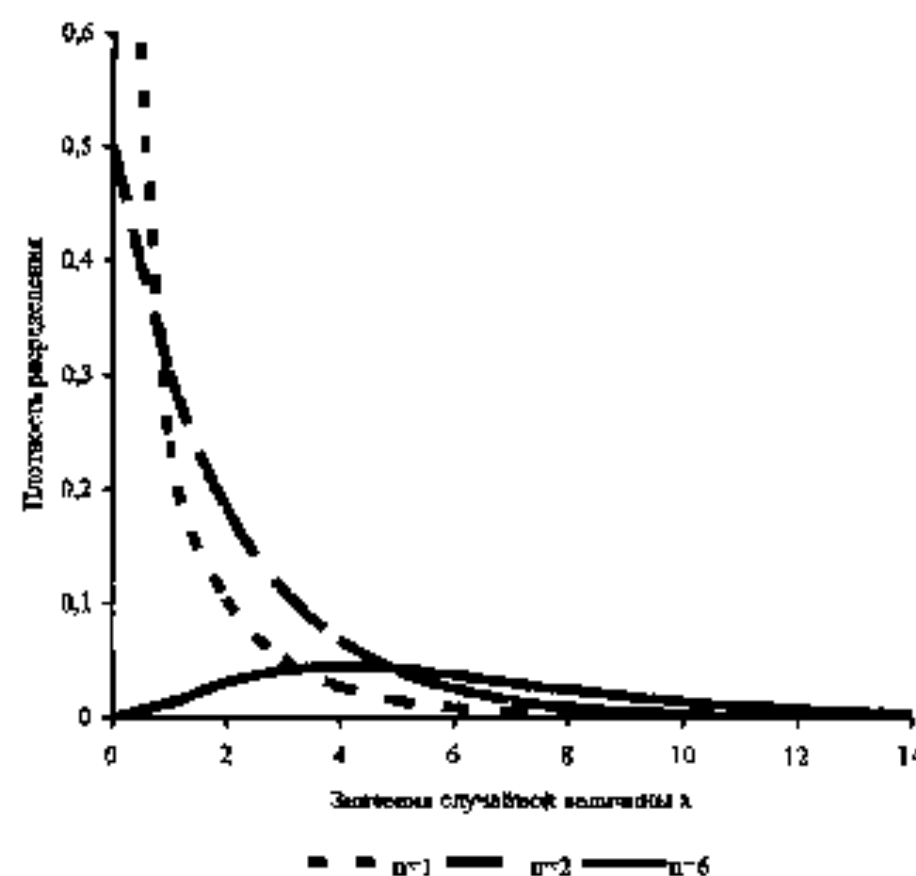


Рис. 9. Плотность χ^2 -распределения

Из силу воспроизводимости нормального распределения среднее арифметическое этой выборки $\bar{\xi} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i$ также распределено по

нормальному закону с плотностью $f(\xi) = \sqrt{\frac{n}{2\pi}} e^{-0,5n\xi^2}$. Выбороч-

ное стандартное отклонение η ряда $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ определяется по

формуле $\eta = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i^2} = \frac{\chi}{\sqrt{n}}$, где χ — как в (2.22). У.С. Госсет

показал, что частное от деления этих независимых случайных величин $\zeta = \frac{\bar{\xi}}{\eta}$ имеет плотность распределения

$$f(\zeta) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{n}{2})} (1 + \zeta^2)^{-\frac{n+1}{2}}. \quad (2.23)$$

Формула (2.23) описывает семейство, в зависимости от числа степеней свободы n , распределений Стюдента (псевдоним Госсета). Распределение Стюдента — симметричное относительно нуля, и поэтому его математическое ожидание равно нулю. Дисперсия этого распределения равна $D(\zeta) = \frac{n}{n-2}$. При увеличении

n распределение Стюдента переходит в нормальное распределение, однако при небольших n оно заметно от него отличается. График плотности распределения Стюдента при $n = 3$ приведен на рис. 10. Пунктиром показана плотность нормального распределения при $m = 0, \sigma = 1$.

Распределение Стюдента широко применяется при обработке результатов многократных измерений. Поскольку среднее арифметическое $\bar{x}$ нормально распределенной выборки подчиняется распределению Стюдента, доверительный интервал для него вычисляется по формуле

$$(\bar{x} - t(n-1, P) \frac{S}{\sqrt{n}}; \bar{x} + t(n-1, P) \frac{S}{\sqrt{n}}), \quad (2.24)$$

где $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ — результат многократных измерений,

$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$ — выборочное СКО результатов измерений,

$t(n-1, P)$ — квантиль распределения Стьюдента при числе степеней свободы $n-1$ и доверительной вероятности P .

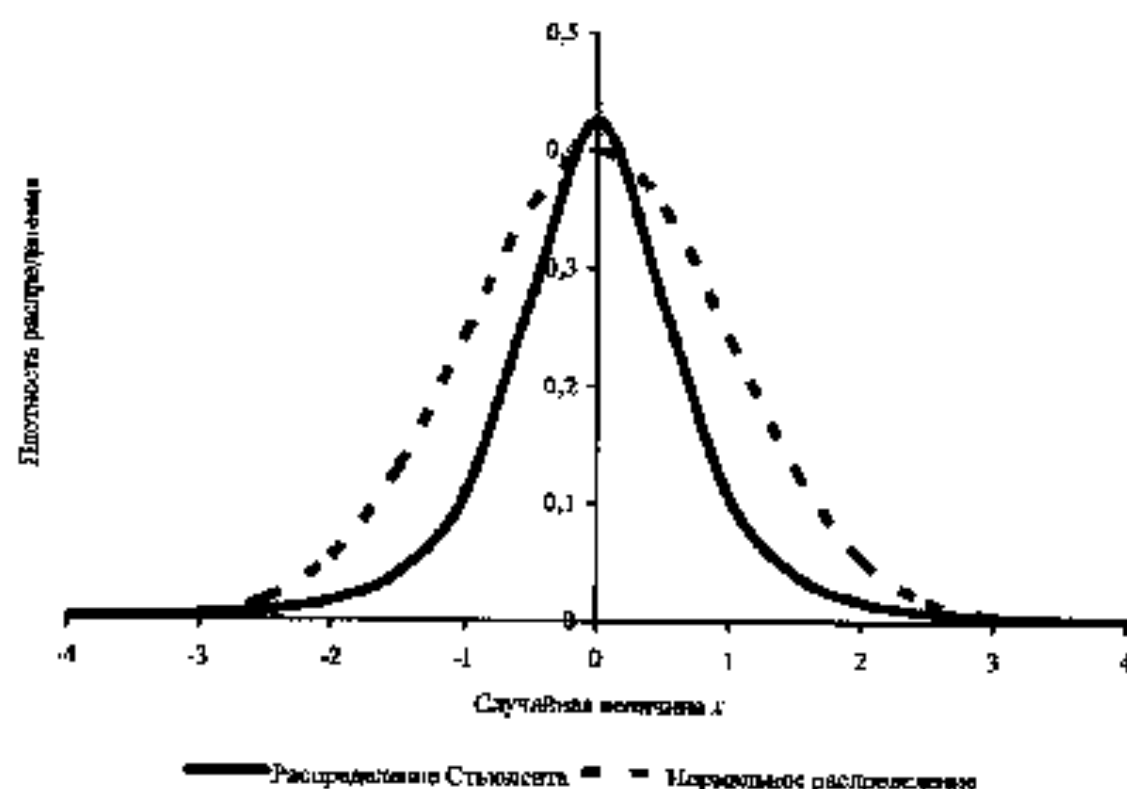


Рис. 10. Плотность распределения Стьюдента при $n=3$

Распределение Фишера [16]

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ — нормально распределенные независимые случайные величины с параметрами 0 и σ . Как указано выше, величины $\xi = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^m \xi_i^2$ и $\eta = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \eta_i^2$ имеют

χ^2 -распределение с m и n степенями свободы. Тогда, как показал

Р.А. Фишер, величина $\tau = \frac{\xi}{\eta} = \frac{\sum_{i=1}^m \xi_i^2}{\sum_{i=1}^n \eta_i^2}$ имеет плотность распре-

деления:

$$f_{\tau}(\tau) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{\tau^{\frac{n}{2}-1}}{(\tau+1)^{\frac{m+n}{2}}}, \quad x > 0. \quad (2.25)$$

Основное применение распределения Фишера — для проверки гипотезы о равенстве дисперсий двух рядов измерений.

2.3. Систематические погрешности измерений

Систематические погрешности искажают результат измерений наиболее существенно. Поэтому обнаружению и исключению систематических погрешностей придается большое значение. По источнику происхождения различают систематические погрешности, обусловленные:

- свойствами средства измерений;
- отклонением условий измерений от нормальных условий;
- несовершенством метода измерений;
- точностью действий оператора.

Рассмотрим эти составляющие систематической погрешности измерений.

2.3.1. Систематические погрешности, обусловленные свойствами средства измерений и отклонением условий измерений от нормальных условий

Сумму этих погрешностей часто называют инструментальной погрешностью измерений. Как правило, инструментальная погрешность вносит основной вклад в погрешность результата измерений. В формализованном виде причины возникновения инстру-

ментальной погрешности можно представить следующим образом. Пусть

$$y = f(x, R_i, \xi_j, P, \tau), \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m \quad (2.26)$$

— реальная функция преобразования СИ в момент измерения, выражающая зависимость выходного сигнала СИ y от измеряемой величины x , параметров R_i элементов СИ, условий измерений и неинформативных параметров измерительного сигнала² ξ_j , энергии P , отбираемой СИ от объекта измерений, и времени запаздывания³ измерительного сигнала τ . Результат измерений, равный

$$\hat{x} = f_k^{-1}(y), \quad (2.27)$$

определяется по калибровочной зависимости $y = f_k(x)$, приписанной СИ при его последней калибровке. Он не будет отягощен систематической составляющей инструментальной погрешности, если выполняются следующие условия:

$$f_k(x) = f_{ном}(x), \quad (2.28)$$

где $y = f_{ном}(x)$ — номинальная функция преобразования СИ, равная теоретической зависимости функции преобразования измерительного сигнала в СИ $y(x)$ в соответствии с реализуемым методом измерений;

- значения параметров R_i элементов СИ во время измерения будут точно совпадать с их значениями $R_{i,k}$ в момент проведения последней калибровки СИ;

² Неинформативным называется параметр, не несущий информации об измеряемой величине, например, при измерении напряжения частота переменного электрического тока является неинформативным параметром.

³ Промежуток времени между поступлением измерительного сигнала на вход СИ и его регистрацией.

- $\xi_j = \xi_{j,ном}$, $j = 1, \dots, m$ — условия измерений совпадают с нормальными условиями, а неинформативные параметры входного сигнала равны нулю;
- $P = 0$ — энергия, отбираемая СИ от объекта измерений, равна нулю;
- $\tau = 0$ — запаздывания сигнала нет.

Исследствие выполнения этих условий будет справедливо равенство

$$f(x, R_i, \xi_j, P, \tau) = f(x, R_{i,k}, \xi_{j,ном}, 0, 0) = f_k(x). \quad (2.29)$$

Подставим в (2.27) выражение (2.28):

$$\hat{x} = f_k^{-1}[f(x, R_i, \xi_j, P, \tau)]. \quad (2.30)$$

Разложим эту функцию в ряд Тейлора в окрестности прямой $(x, R_{i,k}, \xi_{j,ном}, 0, 0)$. При этом, поскольку систематическая погрешность является малой величиной по сравнению с результатом измерений, можно ограничиться первыми производными этого ряда. Обозначим через $\partial f(x, R_{i,k}, \xi_{j,ном}, 0, 0)$ производную $\partial f(x, R_i, \xi_j, P, \tau)$ при $R_i = R_{i,k}$, $\xi_j = \xi_{j,ном}$, $P = 0$, $\tau = 0$. Из выражений (2.28) и (2.29) получим:

$$f_k^{-1}[f(x, R_{i,k}, \xi_{j,ном}, 0, 0)] = f_{ном}^{-1}[f(x, R_{i,k}, \xi_{j,ном}, 0, 0)] = x,$$

$$\frac{\partial f_k^{-1}[f(x, R_{i,k}, \xi_{j,ном}, 0, 0)]}{\partial f(x, R_{i,k}, \xi_{j,ном}, 0, 0)} = \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{1}{\partial y / \partial x} = \frac{1}{W(x)},$$

где $W(x)$ — функция чувствительности СИ к изменению входного сигнала.

Тогда формулу (2.30) можно записать следующим образом:

$$\hat{x} = x + \frac{1}{W(x)} [\Delta f + \sum_{j=1}^m W(\xi_j) \cdot (\xi_j - \xi_{j,ном}) + W(P) \cdot P + W(\tau) \cdot \tau],$$

где $\Delta f = [f(x, R_i, \xi_{j\text{ном}}, 0, 0) - f_{\text{ном}}(x)] = \Delta f_1 + \Delta f_2$,

$\Delta f_1 = [f_k(x) - f_{\text{ном}}(x)]$ — отклонение калибровочной зависимости от номинальной функции преобразования СИ,

$\Delta f_2 = [f(x, R_i, \xi_{j\text{ном}}, 0, 0) - f_k(x)] = \sum_{i=1}^n W(R_i)(R_i - R_{\text{н}})$ — отклонение реальной функции преобразования от калибровочной зависимости вследствие нестабильности элементов СИ,

$W(\xi_j) = \frac{\partial f(x, R_{i,k}, \xi_{j\text{ном}}, 0, 0)}{\partial \xi_j}$ — функция чувствительности

СИ к j -му условию измерений (или неинформативному параметру входного сигнала),

$W(P) = \frac{\partial f(x, R_{i,k}, \xi_{j\text{ном}}, 0, 0)}{\partial P}$ — функция чувствительности

СИ к энергии, отбираемой от объекта измерений,

$W(R_i) = \frac{\partial f(x, R_{i,k}, \xi_{j\text{ном}}, 0, 0)}{\partial R_i}$ — функция чувствительности

СИ к изменению параметра R_i элементов СИ,

$W(\tau)$ — функция чувствительности СИ к времени запаздывания сигнала, которая равна $W(\tau) = \frac{\partial f(x, R_{i,k}, \xi_{j\text{ном}}, 0, 0)}{\partial \tau} = \frac{\partial f(x, R_{i,k}, \xi_{j\text{ном}}, 0, 0)}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \tau} = W(x) \cdot \frac{\partial x}{\partial \tau}$, так как $\frac{\partial f(x, R_{i,k}, \xi_{j\text{ном}}, 0, 0)}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial x} = W(x)$,
 $\frac{\partial x}{\partial \tau}$ — скорость изменения измерительного сигнала.

Следовательно, инструментальная составляющая систематической погрешности измерений $\Delta_{\text{инстр}} = \Delta x = \hat{x} - x$ равна

$$\Delta_{\text{инстр.}} = \frac{1}{W(x)} [\Delta f_1 + \Delta f_2 + \sum_{j=1}^m W(\xi_j) \cdot (\xi_j - \xi_{j\text{ном}}) + W(P) \cdot P] + \frac{\partial x}{\partial \tau} \tau. \quad (2.31)$$

В этой формуле представлены основные группы составляющих инструментальной погрешности измерений. Первые два слагаемых характеризуют первую группу, называемую основной погрешностью. Основная погрешность измерений — это погрешность измерений в нормальных условиях измерений. Она возникает вследствие отличия реальной функции преобразования СИ от номинальной функции преобразования.

$\frac{\Delta f_1}{W(x)}$ — часть основной погрешности, обусловленная отличием калибровочной зависимости от номинальной функции преобразования, отражающей преобразование измеряемой величины в точном соответствии с методом ее измерения. Прежде всего, она является следствием погрешности измерений при проведении калибровки СИ. Кроме того, она вызвана несовершенством конструкции СИ и технологии его изготовления. $\frac{\Delta f_2}{W(x)}$ — вторая часть основной погрешности, обуслов-

ленная отличием реальной функции преобразования СИ в момент измерений от калибровочной зависимости. Она является следствием нестабильности СИ, обусловленной старением и износом элементов СИ, накоплением различных неисправностей (деформация, коррозия и т. д.) и мелких дефектов вследствие механических, тепловых или электрических перегрузок.

Третье слагаемое характеризует погрешности второй группы, которые называют дополнительными погрешностями. Они содержат погрешности Δ_{θ_j} , обусловленные чувствительностью СИ к изменениям j -х влияющих величин и неинформативных параметров измерительного сигнала относительно их номинальных значений. Это могут быть тепловые и воздушные потоки, магнитные и электрические поля, изменения атмосферного давления, влажность воздуха, вибрации. Окружающая температура может существенно изменить результаты измерений, особенно при неравномерном

воздействии на СИ или объект измерения. Магнитные поля, создаваемые близко расположенными электрическими приборами, трансформаторами, проводами, вызывают намагничивание подвижных частей СИ, изготовленных из магнитных материалов, их взаимное притяжение и отклонение от нормального положения. Погрешности возникают также в результате воздействия электрических полей. Влияние магнитных и электрических полей на точность измерений возрастает с увеличением частоты переменного электрического тока, создающего эти поля. Температуры фазовых переходов (точки кипения, затвердевания, плавления) различных чистых веществ и соединений, широко используемые в температурных и аналитических измерениях, существенно зависят от атмосферного давления. Поэтому в этих видах измерений погрешность определения давления также является источником систематической погрешности. Причиной появления дополнительных погрешностей может быть и влажность. Влажность объекта измерений (например, нефти и природного газа) является неинформативным параметром измерительного сигнала, искажающим результаты измерений (например, массы нетто нефти и теплоты сгорания природного газа при измерении хроматографическим методом). Влажность окружающего воздуха влияет на гигроскопичные материалы, изменяя их свойства (например, электрическое сопротивление).

Четвертое слагаемое характеризует третью группу погрешностей — погрешности, которые образуются в результате взаимодействия СИ с объектом измерений. Суть этих погрешностей рассмотрим на следующем примере.

Пример 2.2. Измерение электрического сопротивления R методом сравнения с известным сопротивлением R_0 можно осуществить путем сравнения токов, протекающих эти сопротивления при их поочередном подключении к источнику тока неизменного напряжения. Уравнение измерения без учета сопротивления амперметра — $R = R_0 \frac{I_0}{I}$ (I и I_0 — токи при подключении R и R_0), действительное уравнение измерения — $R = (R_0 + r) \frac{I_0}{I} - r$, где r — сопротивление амперметра. Относительная погрешность измерения, обусловленная взаимодействием амперметра с

объектом измерения, составит $\delta R = \frac{r}{R} \cdot \frac{I_0 - I}{I}$. Следовательно, этот метод измерений можно применять для измерения больших ($R \gg r$) сопротивлений.

Пятое слагаемое характеризует четвертую группу погрешностей — погрешности, обусловленные инерционностью СИ и скоростью изменения измерительного сигнала. Их называют динамическими погрешностями.

2.3.2. Нормируемые метрологические характеристики средств измерений

При разработке методики измерений следует выбрать СИ, гарантирующее необходимую точность измерений. Однако, как следует из предыдущего раздела, особенность всех перечисленных групп погрешностей, кроме первой, состоит в том, что они связаны не только со свойствами СИ, но и с условиями измерений. Поэтому в процессе разработки этой методики следует оценить инструментальную составляющую погрешности измерений в заданных условиях измерений. В связи с этим при разработке любого СИ нормируют и указывают в эксплуатационной документации технические характеристики особого вида, называемые метрологическими характеристиками (свойства СИ, влияющие на погрешности измерений, называются метрологическими свойствами, а характеристики этих свойств — метрологическими характеристиками СИ). Номенклатура метрологических характеристик СИ и способы их нормирования установлены в [17]. Методология нормирования, установленная этим стандартом, исходит из следующего.

Нормируемые метрологические характеристики необходимы для решения двух основных задач:

- контроля каждого экземпляра СИ на соответствие установленным нормам,
- определения результатов измерений и априорного оценивания инструментальной погрешности измерения.

При этом следует иметь в виду, что метрологические свойства каждого конкретного экземпляра СИ в определенный момент времени постоянны, но по совокупности СИ данного типа они

изменяются случайным образом. Это происходит вследствие рассеивания технологических параметров при изготовлении СИ, различия условий эксплуатации, приводящего к случайному характеру процессов износа и старения его элементов, случайной погрешности измерений при периодических калибровках СИ и других аналогичных причин. Поэтому теоретически возможны нормируемые метрологические характеристики двух видов. К характеристикам первого вида, почти исключительно применяемым на практике, относятся пределы допускаемых значений метрологических характеристик СИ данного типа. Их используют как при контроле годности каждого экземпляра СИ, так и для оценки максимально возможной инструментальной погрешности измерения. К характеристикам второго вида, применяемым крайне редко, относятся математическое ожидание и СКО значений метрологической характеристики, вычисленные по совокупности СИ данного типа, пригодные для оценивания инструментальной погрешности измерений методом статистического суммирования.

Так, характеристиками систематической составляющей основной погрешности Δx_c являются либо пределы ее допускаемых значений $\pm \Delta_c$, либо эти пределы и математическое ожидание m_c и СКО σ_c , причем второй способ нормирования допускается использовать, если можно пренебречь изменениями этих характеристик при длительной эксплуатации и в различных условиях измерений. В остальных случаях нормируют только $\pm \Delta_c$. Для многих СИ, у которых различают несколько систематических составляющих основной погрешности, вместо $\pm \Delta_c$ можно нормировать пределы допускаемых значений этих составляющих $\pm \Delta_{c_i}$. При этом должно выполняться условие

$$\sqrt{\sum_{i=1}^m k_i^2 \Delta_{c_i}^2} \leq \Delta_c. \quad (2.32)$$

Пример 2.3. Для многих СИ вместо пределов систематической погрешности $\pm \Delta_c$ нормируют пределы: абсолютной аддитивной погрешности $\pm \Delta_a$, относительной мультипликативной погрешности $\pm \delta_a$ и приве-

денной (к максимальному значению x_{max} диапазона СИ) погрешности, обусловленной нелинейностью калибровочной зависимости $\pm \delta_{нел}$. Значения этих пределов должны удовлетворять условию:

$$\sqrt{\Delta_a^2 + (\delta_a \cdot x)^2 + (\delta_{нел} \cdot x_{max})^2} \leq \Delta_c(x),$$

где x — значение измеряемой величины, $\Delta_c(x)$ — предел абсолютной систематической погрешности измерений в этой точке диапазона СИ.

К характеристикам этой группы также относят характеристику случайной погрешности $\dot{\Delta}$ — предел допускаемых значений стандартного отклонения случайной погрешности $\sigma(\dot{\Delta})$ и характеристику случайной погрешности от гистерезиса $\dot{\Delta}_H$ — предел H допускаемой вариации выходного сигнала СИ⁴.

В тех случаях, когда случайная погрешность СИ незначительна, рекомендуется нормировать характеристику погрешности СИ — пределы $\pm \Delta$ допускаемой погрешности СИ и предел H допускаемой вариации выходного сигнала СИ. Можно также нормировать одну обобщающую характеристику основной погрешности измерений — предел $\pm \Delta_0$ допускаемой основной погрешности СИ.

Характеристиками чувствительности СИ к влияющим величинам и неинформативным параметрам измерительного сигнала ξ_j

являются функции влияния $\psi(\xi_j) = \frac{W(\xi_j)}{W(x)}$. При нормировании

устанавливают номинальную функцию влияния $\psi_{ном}(\xi_j)$ и пределы $\Delta\psi(\xi_j)$ допускаемых отклонений от нее. Номинальные

⁴ Вариацией выходного сигнала называется разность между двумя математическими ожиданиями информативного параметра выходного сигнала СИ, получаемыми при измерениях величины, имеющей одно и то же значение, с плавным медленным подходом к этому значению со стороны меньших и больших значений.

3. Оценка сверху относительной динамической погрешности линейного СИ вычисляется по формуле $\delta_{\text{дин}}^+ = \left| 1 - \frac{A(\omega_0)}{A(\omega)} \right|$ [18]. Следовательно,

$$\delta_{\text{дин}}^+ = \left| 1 - \frac{1}{A(\omega)} \right| = \left| 1 - \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \right| = \left| 1 - \sqrt{1 + (10 \cdot 0,005)^2} \right| \approx 0,025.$$

4. Оценка максимальной инструментальной погрешности в указанных условиях эксплуатации:

$$\Delta_{\text{инстр}} = \pm(\Delta_0 + \Delta_{\Delta 1} + \Delta_{\Delta 2} + \delta_{\text{дин}} \cdot W) = \\ = \pm(20 + 7,5 + 10 + 0,025 \cdot 600) = \pm 52,5 \text{ мВ.}$$

Данная оценка получена, в соответствии с [18], путем арифметического суммирования составляющих. Если же применить, как это рекомендуется международным Руководством [19], среднеквадратичное суммирование, то

$$\Delta_{\text{инстр}} = \pm \sqrt{\Delta_0^2 + \Delta_{\Delta 1}^2 + \Delta_{\Delta 2}^2 + (\delta_{\text{дин}} \cdot W)^2} = \\ = \pm \sqrt{20^2 + 7,5^2 + 10^2 + (0,025 \cdot 600)^2} = \pm 28,0 \text{ мВ.}$$

2.3.3. Методические погрешности измерений

Эти погрешности могут возникнуть из-за несовершенства выбранного метода измерений, ограниченной точности эмпирических формул, применяемых для описания явления, положенного в основу измерения, а также ограниченной точности используемых в уравнениях физических констант. Сюда же следует отнести и погрешности, обусловленные несоответствием принятой модели измерений реальному объекту вследствие принятых допущений или упрощений. В некоторых случаях влияние этих допущений на погрешность измерений оказывается незначительным, в других оно может оказаться существенным. Примером погрешности, обусловленной упрощением метода измерений, является пренебрежение массой воздуха, вытесненного, согласно закону Архимеда, гирей при взвешивании на рычажных весах. При проведении рабочих

измерений ею, как правило, пренебрегают. Однако при точных измерениях с нею приходится считаться, и вносится соответствующая поправка. Другим примером является измерение объемов тел, форма которых принимается (в модели измерений) геометрически правильной, путем измерения недостаточного числа линейных размеров. Так, существенную методическую погрешность будет иметь результат измерения объема помещения путем измерения одной длины, одной ширины и одной высоты. Для более точного измерения объема следовало бы измерить эти параметры по каждой стене в нескольких местах.

Погрешности метода присущи всем тем методам измерений, которые основаны на данных опытов, не имеющих строгого теоретического обоснования. Примером таких методов являются различные методы измерения твердости металлов. Один из них (метод Роквелла) определяет твердость по глубине погружения в испытываемый металл наконечника определенной формы под действием определенного импульса силы. В основу других методов (Бринелля и Виккерса) положена зависимость между твердостью и размером отпечатка, оставленного наконечником в определенных условиях воздействия. Каждый из этих методов измеряет твердость в своих шкалах, и перевод результата измерений из одной шкалы в другую производится приближенно. Объясняется это тем, что указанные методы используют различные явления, предположительно характеризующие твердость.

Оценки погрешностей формул и физических констант чаще всего известны. Когда они неизвестны, погрешности эмпирических формул переводят в разряд случайных, применяя прием рандомизации. С этой целью одну и ту же величину измеряют несколькими методами и по полученным экспериментальным данным вычисляют ее средневзвешенное значение.

Аналитические измерения отличаются от прочих тем, что они включают ряд предварительных операций: отбор пробы анализируемого объекта, ее доставка в измерительную лабораторию, хранение, подготовка пробы к инструментальным операциям (очистка, высушивание, перевод в другое фазовое состояние и т. д.), приготавление калибровочных растворов и другие. Эти операции при характеристике точности метода измерений часто не учитывают, считая измерением только его инструментальную часть. Легко доказать ошибочность этого положения. Вспомним, что погрешность измерения — это отклонение результата измерения от действи-

тельного значения измеряемой величины. Предположим, что необходимо оценить какую-то величину, отражающую физико-химическое свойство объекта (например, плотность продукта в партии, содержание химического компонента в воде озера или почве населенного пункта). Действительное значение этой величины должно характеризовать этот объект, а не отобранную из него пробу. Именно в этом заинтересован потребитель измерительной информации, и если произошло искажение результата измерения, то ему безразлично, на каком этапе это случилось. Следовательно, погрешность аналитического измерения должна учитывать и погрешности подготовительных операций.

Необходимость учета этих операций обусловлена и тем, что риск внесения систематических погрешностей в результаты измерений в этих операциях несопоставимо выше, чем в инструментальных. На практике систематическая погрешность измерения может возникать в этих операциях вследствие влияния многих возможных источников, в частности:

- извлеченная из объекта измерений проба может не быть представительной (неадекватно представлять измеряемую величину),
- измеряемая проба может измениться за время, прошедшее после того, как был произведен пробоотбор,
- влияние неинформативных параметров (мешающих компонентов пробы),
- загрязнение пробоотборника и лабораторной посуды, применяемой при приготовлении пробы,
- неточное измерение параметров окружающей среды,
- погрешности измерений масс и объемов,
- погрешности приготовления калибровочных растворов [20].

2.3.4. Систематические погрешности, возникающие из-за неточности действий оператора

Эти погрешности, называемые также субъективными, как правило, являются следствием индивидуальных свойств человека, обусловленных особенностями его организма или укоренившимися неправильными навыками. Например, неточные действия оператора могут привести к запаздыванию регистрации измерительного сигнала, асимметрии при установке указателя между штрихами. В возникновении субъективных систематических погрешностей большую роль играет скорость реакции на полученный сиг-

нал. У разных лиц она различна, но у каждого в течение более или менее продолжительного времени достаточно устойчива. Например, скорость реакции человека на световой сигнал колеблется в интервале от 0,15 до 0,225 с, на звуковой — от 0,08 до 0,2 с. Знаменитый астроном Бессель сравнил точность измерений времени по прохождению звезд, выполненных различными астрономами и им самим. Он установил, что между его данными и данными других исследователей имелись очень большие расхождения, причем довольно стабильные. Бессель пришел к выводу, что причина этих систематических погрешностей заключалась в различных скоростях реакции каждого из астрономов [3].

В настоящее время в связи с автоматизацией регистрации измерительной информации, к которой предъявляется требование высокой точности, субъективные погрешности измерений потеряли свое значение.

2.3.5. Исключение систематических погрешностей

Систематические погрешности вызывают смещение результата измерений. Наибольшую опасность представляют невыявленные систематические погрешности, о существовании которых даже не подозревают. Именно систематические погрешности неоднократно были причиной ошибочных научных выводов, брака продукции в производстве, нерациональных экономических потерь. Поэтому систематические погрешности подлежат исключению, насколько возможно, тем или иным способом. Способы исключения систематических погрешностей можно разделить на следующие группы:

- устранение источников погрешностей до начала измерений (профилактика);
- исключение систематических погрешностей в процессе измерений;
- внесение известных поправок в результат измерений.

Первый способ является наиболее рациональным, т. к. он существенно упрощает и ускоряет процесс измерения. Под устранением источника погрешности понимается как его удаление (например, удаление источника тепла), так и защита объекта измерений и измерительной аппаратуры от влияния этих источников. Чтобы предупредить появление температурной погрешности, применяют термостатирование — стабилизацию температуры окружающей среды в узком диапазоне значений. Термостатируют как помещения, в которых проводят измерения, так и измерительные установки

в целом или их отдельные части. Защита СИ от влияния магнитного поля Земли и магнитных полей, образованных постоянными и переменными токами, осуществляется путем установки магнитных экранов. Вредные вибрации устраняют путем амортизации (поглощения колебаний) СИ. Источники инструментальной погрешности, присущие данному экземпляру СИ, могут быть устранены до начала измерений путем проведения калибровки. Также до начала измерений можно устранить источники погрешностей, связанные с неправильной установкой СИ.

В процессе измерений могут быть исключены некоторые инструментальные погрешности, погрешности от неправильной установки и погрешности от вредных влияний. Это достигается путем применения ряда специальных приемов, связанных с проведением повторных измерений. К ним относятся методы измерений замещением и противопоставлением. При методе замещения измеряют искомую величину, а при повторном измерении измеряемый объект замещают мерой, находящейся в тех же условиях, в каких находился он сам. Определяя результат измерений по значению этой меры, добиваются исключения большого числа систематических эффектов, влияющих на положение равновесия измерительной схемы. Например, при измерениях параметров электрических цепей (электрического сопротивления, емкости или индуктивности) включают объект в измерительную цепь и уравнивают ее. После уравнивания заменяют измеряемый объект мерой переменного значения (магазин сопротивления, емкости или индуктивности) и, изменяя ее значение, добиваются восстановления равновесия цепи. В этом случае способ замещения позволяет исключить: остаточную неуравновешенность измерительной цепи; влияние на цепь магнитных и электрических полей; взаимные влияния отдельных элементов цепи, а также утечки и другие паразитные явления.

Способ противопоставления заключается в том, что измерение проводят дважды так, чтобы причина, вызывающая погрешность, при первом измерении оказала противоположное воздействие на результат второго. Погрешность исключается при вычислении результата этого совокупного измерения. Например, при взвешивании массы на равноплечих весах методом Гаусса результат первого измерения — $x = \frac{l_2}{l_1} m_1$, где $\frac{l_2}{l_1}$ — действительное отношение

плеч весов, m_1 — масса гирь, уравновесивших измеряемую величину. Затем объект измерений помещают на ту чашку весов, где находились гири, а гири — на ту, где находилась масса. Результат второго измерения — $x = \frac{l_1}{l_2} m_2$. Вычисляя квадратный корень из

произведения этих равенств, получим: $x = \sqrt{m_1 m_2}$. Видно, что этот способ измерения позволяет исключить погрешность от неравноплечести весов.

Частным случаем способа противопоставления является способ компенсации погрешности по знаку. При этом способе проводят два измерения так, чтобы погрешность входила в их результаты с противоположными знаками: $x_1 = x_d + \Delta$ и $x_2 = x_d - \Delta$, где x_d — действительное значение измеряемой величины, Δ — систематическая погрешность, которую необходимо исключить. Погрешность исключается при вычислении среднего значения:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2} = x_d.$$

Характерным примером применения этого способа является исключение погрешности, обусловленной влиянием магнитного поля Земли. При первом измерении СИ может находиться в любом положении. Перед вторым измерением СИ поворачивают в горизонтальной плоскости на 180° . При этом магнитное поле Земли будет оказывать на СИ противоположное воздействие, а погрешность от намагничивания равна погрешности первого измерения, взятой с обратным знаком.

Наиболее распространенным способом исключения систематических погрешностей является внесение поправок на известные составляющие систематической погрешности в результаты измерений. *Поправкой называется значение величины, вводимое в неисправленный результат измерения с целью исключения известных составляющих систематической погрешности (результаты измерений до внесения поправки называются неисправленными, после внесения поправки — исправленными).* В соответствии с международным Руководством [19], внесение поправок на известные систематические погрешности является обязательной операцией, предваряющей обработку результатов измерений. Обычно приме-

няется алгебраическое сложение неисправленного результата измерений и поправки (с учетом ее знака). В этом случае поправка по числовому значению равна абсолютной систематической погрешности и противоположна ей по знаку. В тех случаях, когда значение абсолютной систематической погрешности пропорционально значению измеряемой величины x ($\pm \Delta \equiv \pm \delta \cdot x$), ее исключают путем умножения результата измерения на поправочный коэффициент $K = 1 \pm \delta$. Как правило, информацию, необходимую для определения и внесения поправок, выявляют до проведения измерений. Однако ее можно определять и после измерения, с учетом апостериорной (полученной после проведения измерения) измерительной информации. Такой подход, в частности, используется при подведении на предприятиях балансов приема—потребления энергоносителей с учетом погрешностей средств измерений, применяемых для их коммерческого учета.

Тем не менее, полностью исключить систематические погрешности измерений практически невозможно. Прежде всего, это относится к методам измерений, систематические погрешности которых не изучены, а также к систематическим погрешностям, которые невозможно оценить действительным значением. К этой группе, например, относятся погрешность измерений при калибровке СИ и погрешность, обусловленная дрейфом параметров СИ после калибровки. Ко второй группе относятся погрешности вычисления и погрешности определения поправок на учтенные систематические погрешности.

Таким образом, после исключения составляющих систематической погрешности измерений остаются их остатки, которые называются неисключенными остатками систематической погрешности (НСП) (см. п. 2.1). НСП нельзя не только исключить, но и каким-либо образом экспериментально оценить по информации, содержащейся в ряде результатов измерений, поскольку она присутствует в неявном виде в каждом результате этого ряда. Поэтому приходится ограничиваться теоретической оценкой ее границ ($\pm \theta$). Значения θ обычно устанавливают путем ориентировочного расчета (например, принимают равными пределам допускаемых погрешностей СИ, если случайные составляющие погрешности измерений малы). Если имеется несколько причин возникновения НСП, то отдельно оценивают ЛСП, обусловленную каждой причиной, а затем их суммируют. Метод суммирования составляющих НСП регламентирован в [21] и [22]:

$$\theta = \begin{cases} \sum_{i=1}^m |\theta_i|, & m \leq 3, \\ k \sqrt{\sum_{i=1}^m \theta_i^2}, & m \geq 4, \end{cases} \quad (2.33)$$

где $\pm \theta_i$ — границы НСП, обусловленной i -й причиной,

m — число составляющих НСП,

k — коэффициент зависимости суммы составляющих от выбранной доверительной вероятности P при их равномерном распределении. При $P = 0,99$ $k = 1,4$, при $P = 0,95$ $k = 1,1$.

В международной практике применяется другой метод суммирования, который будет рассмотрен в следующей главе.

НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ ИЗМЕРЕНИЙ

3.1. Погрешность и неопределенность

Простая и логичная концепция точности, изложенная в предыдущей главе, в конце прошлого столетия в ряде зарубежных стран стала подвергаться критике. По убеждению автора, основной причиной неудовлетворенности являлся термин «погрешность». Дело в том, что, в отличие от русского языка, в английском и французском языках понятия «ошибка» (т. е. просчет, неверное действие) и «погрешность» не различаются (the error в английском языке, erreur во французском). По этой причине метрологическая терминология вошла в противоречие с получившей всеобщее признание и повсеместно применяемой в мире идеологией управления качеством товаров и услуг на основе стандартов ИСО серии 9000. Суть этой методологии заключается в обеспечении условий для безошибочного выполнения всех производственных функций и трудовых операций. В то же время такую идеальную картину производства портят **ошибки измерений** (в русском языке — погрешности, имеющие несколько другой смысл), которых, в отличие от обычных ошибок, нельзя избежать, поскольку они являются неизбежным следствием ограниченных возможностей измерительной техники и сопровождают каждое измерение.

Похожая проблема стояла в 1927 г. перед физиком Вернером Гейзенбергом, когда он готовил к публикации свою знаменитую статью «О наглядном содержании квантово-теоретической кинематики и механики». В этой работе он ввел в физику знаменитые соотношения (3.1), устанавливающие принципиальные ограничения снизу погрешностей измерений импульса силы Δp и координаты Δx , энергии ΔE и импульса Δt :

$$\begin{aligned}\Delta p \Delta x &\geq \frac{h}{2}, \\ \Delta E \Delta t &\geq \frac{h}{2},\end{aligned}\tag{3.1}$$

в которых $h = 1,05457266 \cdot 10^{-34}$ — постоянная Планка. Автор назвал эти фундаментальные неравенства соотношениями неопределенностей, применив термин «неопределенность» (the uncertainty) как синоним термина «погрешность».

После публикации этой статьи термин «неопределенность» стал часто употребляться в физике. Он был использован в новой концепции оценивания точности измерений, регламентированной в международном документе «Руководство по выражению неопределенности измерения» [19] (далее — Руководство). Этот документ был опубликован в 1993 г. от имени семи авторитетных международных организаций:

- Международное бюро мер и весов (МБМВ),
- Международная электротехническая комиссия (МЭК),
- Международная федерация клинической химии (МФКХ),
- Международная организация по стандартизации (ИСО),
- Международный союз по чистой и прикладной химии (ИЮПАК),
- Международный союз по чистой и прикладной физике (ИЮПАП),
- Международная организация законодательной метрологии (МОЗМ).

Руководство фактически приобрело статус международного регламента, обязательного к применению. Оно нацелено, во-первых, на обеспечение потребителей полной информацией о всех составляющих погрешности результатов измерений и, во-вторых, на международную унификацию отчетов об измерениях и оценке их точности, с целью формирования основы для международного сравнения результатов измерений. При этом имеется в виду, что всемирное единство в методах оценки точности измерений обеспечивает правильное использование результатов измерений во всех областях деятельности.

Концепция неопределенности, введенная в Руководстве, заключается в следующем. Базовые понятия классической теории точности: истинное значение, действительное значение и погрешность

измерения — не вводятся¹. Взамен введено понятие *неопределенность измерения*, понимаемое как *сомнение, неполное знание значения измеряемой величины после проведения измерений* (трактовка в широком смысле) и как *количественное описание этого неполного знания* (трактовка в узком смысле). Далее это понятие уточняется: *неопределенность — параметр, связанный с результатом измерения и характеризующий рассеяние значений, которые могли бы быть приписаны измеряемой величине*. В математической статистике известны два вида параметров, характеризующих рассеяние некоррелированных случайных величин: СКО и доверительный интервал. Они и принимаются в качестве характеристик неопределенности с наименованиями *стандартная неопределенность* и *расширенная неопределенность*. При этом, как и следовало ожидать, оказалось, что стандартная неопределенность является полным аналогом СКО погрешности измерений, а расширенная неопределенность — полным аналогом доверительных границ погрешности измерений. И в этом указанная концепция сомкнулась с традиционной постановкой задачи оценивания точности измерений.

Таким образом, в части практических приложений новая концепция оценивания точности измерений оказалась полностью идентичной классической. Более того, эти концепции тесно связаны друг с другом и, в принципе, известны давно. Это ставет очевидным, если обратиться к классическому труду М.Ф. Маликова [1]. В этой монографии приведены соотношения между величинами, используемыми при оценке результатов измерений. Для их записи введем следующие обозначения:

X — неизвестное истинное значение измеряемой величины,

I_i — n результатов однократных измерений этой величины,

$L = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_i$ — среднее арифметическое значений I_i , принятое

за результат многократных измерений этой величины,

$\Delta_i = I_i - X$ — n погрешностей однократных измерений,

¹ При этом подразумевается, что истинное (действительное) значение величины существует, поскольку признается, что целью измерения является нахождение этого значения.

$\nu_i = I_i - L$ — n отклонений результатов однократных измерений от их среднего арифметического, отражающих разброс этих наблюдений,

$\lambda = L - X$ — случайная погрешность результата многократных измерений.

Соотношения между этими величинами представлены в таблице 1.

Таблица 1

Соотношения между величинами, характеризующими погрешности и неопределенности измерений

X	$\lambda = L - X$	L
$\Delta_1 = I_1 - X$	$\nu_1 = \Delta_1 - \lambda$	$\nu_1 = I_1 - L$
.....		
$\Delta_i = I_i - X$	$\nu_i = \Delta_i - \lambda$	$\nu_i = I_i - L$
.....		
$\Delta_n = I_n - X$	$\nu_n = \Delta_n - \lambda$	$\nu_n = I_n - L$

Понятно, что величины Δ_i , представленные в левой части таблицы, являются погрешностями измерений, а ν_i , представленные в правой части таблицы, отражают разброс наблюдений относительно результата измерений, т. е. неопределенность этого результата. Налицо полная симметрия между этими величинами. При этом значения величин Δ_i нам совершенно неизвестны, а значения ν_i — известны из опытных данных. При увеличении числа наблюдений среднее арифметическое значение L стремится к истинному значению X . При этом их разность λ стремится к нулю, и величины ν_i — к соответствующим значениям Δ_i погрешностей. Это означает, что совокупность значений ν_i подчиняется тем же закономерностям, что и совокупность значений Δ_i .

Таким образом, можно констатировать, что эти концепции отличаются тем, к какой величине относят дисперсию, характеризующую разброс наблюдаемых значений. При классическом подходе ее относят к истинному значению измеряемой величины X , а в другом случае — к результату измерений L . Но это различие не влияет на подведение окончательных результатов, поскольку

и в классическом подходе погрешности измерений также приписывают результату измерений. Таким образом, обе концепции дополняют друг друга, сливаясь в единую концепцию оценивания точности результатов измерений. При этом, следуя причинно-следственным связям, целесообразно установить следующую последовательность введения основных понятий теории точности измерений: истинное значение величины $\Rightarrow$ действительное значение величины $\Rightarrow$ результат измерения $\Rightarrow$ погрешность измерения $\Rightarrow$ неопределенность результата измерения как характеристика этой погрешности.

Таким образом, понятия погрешность и неопределенность могут быть гармонично использованы без их взаимного противопоставления.

3.2. Классификация неопределенностей измерений

Аналогично погрешностям, неопределенности измерений могут быть классифицированы по различным признакам.

По способу выражения их подразделяют на абсолютные и относительные.

Абсолютная неопределенность измерения — неопределенность измерения, выраженная в единицах измеряемой величины.

Относительная неопределенность результата измерений — отношение абсолютной неопределенности к результату измерений.

2. По источнику возникновения неопределенности измерений, подобно погрешностям, можно разделять на инструментальные, методические и субъективные.

3. Как следует из п. 2.2, по характеру проявления погрешности разделяют на систематические, случайные и грубые. В Руководстве отсутствует классификация неопределенностей по этому признаку. В самом начале этого документа указано, что перед статистической обработкой рядов измерений все известные систематические погрешности должны быть из них исключены. Поэтому деление неопределенностей на систематические и случайные не вводилось. Вместо него приведено деление неопределенностей по способу оценивания на два типа:

- *неопределенность, оцениваемая по типу А (неопределенность типа А) — неопределенность, которую оценивают статистическими методами,*

- *неопределенность, оцениваемая по типу В (неопределенность типа В) — неопределенность, которую оценивают нестатистическими методами.*

Соответственно предлагается и два метода оценивания:

- *оценивание по типу А — получение статистических оценок на основе результатов ряда измерений,*
- *оценивание по типу В — получение оценок на основе априорной нестатистической информации.*

На первый взгляд, кажется, что это нововведение заключается лишь в замене существующих терминов известных понятий другими. Действительно, статистическими методами можно оценить только случайную погрешность, и поэтому неопределенность типа А — это то, что ранее называлось случайной погрешностью. Аналогично, НСП можно оценить только на основе априорной информации, и поэтому между неопределенностью по типу В и НСП также имеется взаимно однозначное соответствие.

Однако, с точки зрения автора, введение этих понятий является вполне разумным. Дело в том, что при измерениях по сложным методикам, включающим большое количество последовательно выполняемых операций, необходимо оценивать и учитывать большое количество источников неопределенности конечного результата. При этом их деление на НСП и случайные может оказаться ложно ориентирующим. Приведем два примера.

Пример 3.1. Существенную часть неопределенности аналитического измерения может составить неопределенность определения калибровочной зависимости прибора, являющаяся НСП в момент проведения измерений. Следовательно, ее необходимо оценивать на основе априорной информации нестатистическими методами. Однако во многих аналитических измерениях основным источником этой неопределенности является случайная погрешность взвешивания при приготовлении калибровочной смеси. Для повышения точности измерений можно применить многократное взвешивание этого стандартного образца и найти оценку погрешности этого взвешивания статистическими методами. Этот пример показывает, что в некоторых измерительных технологиях в целях повышения точности результата измерения ряд систематических составляющих неопределенности измерений может быть оценен статистическими методами, т. е. являться неопределенностями типа А.

Пример 3.2. По ряду причин, например, в целях экономии производственных затрат, методика измерения предусматривает проведение не

более трех однократных измерений одной величины. В этом случае результат измерений может определяться как среднее арифметическое, мода или медиана полученных значений, но статистические методы оценивания неопределенности при таком объеме выборки дадут очень грубую оценку. Более разумным представляется априорный расчет неопределенности измерения по нормируемым показателям точности СИ, т. е. ее оценка по типу Б. Следовательно, в этом примере, в отличие от предыдущего, неопределенность результата измерений, значительная часть которой обусловлена влиянием факторов случайного характера, является неопределенностью типа Б.

Вместе с тем, традиционное разделение погрешностей на систематические, НСП и случайные также не теряет своего значения, поскольку оно точнее отражает другие признаки: характер проявления в результате измерения и причинную связь с эффектами, являющимися источниками погрешностей. Таким образом, классификации неопределенностей и погрешностей измерений не являются альтернативными и взаимно дополняют друг друга.

В Руководстве имеются и некоторые другие терминологические нововведения. Ниже приведена сводная таблица терминологических отличий концепции неопределенности от классической теории точности.

Таблица 2

Термины — примерные аналоги концепции неопределенности и классической теории точности

Классическая теория	Концепция неопределенности
Погрешность результата измерения	Неопределенность результата измерения
Случайная погрешность	Неопределенность, оцениваемая по типу А
НСП	Неопределенность, оцениваемая по типу Б
СКО (стандартное отклонение) погрешности результата измерения	Стандартная неопределенность результата измерения
Доверительные границы результата измерения	Расширенная неопределенность результата измерения
Доверительная вероятность	Вероятность охвата (покрытия)
Квантиль (коэффициент) распределения погрешности	Коэффициент охвата (покрытия)

Новые термины, указанные в этой таблице, имеют следующие определения.

1. *Стандартная неопределенность* — неопределенность, выраженная в виде стандартного отклонения.

2. *Расширенная неопределенность* — величина, задающая интервал вокруг результата измерения, в пределах которого, как ожидается, находится большая часть распределения значений, которые с достаточным основанием могут быть приписаны измеряемой величине.

Примечания.

1. Каждому значению расширенной неопределенности сопоставляется значение ее вероятности охвата P .

2. Аналогом расширенной неопределенности являются доверительные границы погрешности измерений.

3. *Вероятность охвата* — вероятность, которой, по мнению экспериментатора, соответствует расширенная неопределенность результата измерений.

Примечания.

1. Аналогом этого термина является доверительная вероятность, соответствующая доверительным границам погрешности.

2. Вероятность охвата выбирается с учетом информации о виде закона распределения неопределенности.

4. *Коэффициент охвата* — коэффициент, зависящий от вида распределения неопределенности результата измерений и вероятности охвата и численно равный отношению расширенной неопределенности, соответствующей заданной вероятности охвата, к стандартной неопределенности.

5. *Число степеней свободы* — параметр статистического распределения, равный числу независимых связей оцениваемой статистической выборки.

3.3. Методика оценивания результата измерений и его неопределенности

Как бы ни относиться к терминологическим новациям Руководства, следует признать, что его внедрение привело к колоссальному положительному эффекту, способствуя повышению достовер-

ности оценок точности результатов измерений, применяемых во всех странах мира при сертификации продукции и взаимных расчетах между поставщиками и покупателями, в здравоохранении, научных исследованиях и других областях деятельности. Этот эффект обусловлен регламентацией единой методики оценивания результатов измерений и их неопределенностей и ее массовым применением измерительными и испытательными лабораториями. Во-вторых, этот эффект вызван тем, что регламентированная Руководством методика содержит гораздо более высокие требования к оценке точности, чем это практиковалось ранее. В связи с этим подробно рассмотрим эту методику в современном изложении [23].

Оценивание результата измерений и его неопределенности проводится в следующем порядке:

- составляют уравнение измерения,
- оценивают входные величины и их стандартные неопределенности,
- оценивают выходные величины и их стандартные неопределенности,
- составляют бюджет неопределенности,
- оценивают расширенную неопределенность результата измерения, представляют результат измерения.

Рассмотрим эти этапы оценивания.

1. Составление уравнения измерения.

Под уравнением измерения понимается математическая зависимость между измеряемыми величинами $X_1, \dots, X_k$ и результатом измерения Y

$$Y = f(X_1, \dots, X_k, X_{k+1}, \dots, X_n), \quad (3.2)$$

где $X_1, \dots, X_n$ — величины, влияющие на Y . К ним относятся как непосредственно измеряемые величины $X_1, \dots, X_k$, так и все другие влияющие величины $X_{k+1}, \dots, X_n$ — справочные данные, константы, поправки и др. В рассматриваемой методике они называются входными величинами (входная величина уравнения измерения или уравнения, используемого для оценивания неопределенности этого измерения). В отличие от них, результат измерения называется выходной величиной (выходная величина уравнения измерения — величина, значение которой определяют при измерении).

Уравнение измерений составляют следующим образом. Записывают функциональную зависимость результата измерения Y от измеряемых величин

$$Y = f(X_1, \dots, X_k). \quad (3.3)$$

являющуюся математическим описанием физического эффекта, положенного в основу метода измерений.

Затем анализируют условия измерений и другие факторы, влияющие на результат измерений. Величины, описывающие эти факторы, включают в уравнение (3.3). Следует иметь в виду, что факторы, влияющие на результат измерения и его точность, должны быть максимально полно учтены в уравнении измерения. Поэтому, если, например, в результат измерения вводится поправка, значение которой в конкретном случае равно нулю, то эта поправка все равно должна фигурировать в уравнении измерений в виде входной величины, поскольку неопределенность ее значения вносит вклад в суммарную неопределенность измерения.

2. Оценивание входных величин и их стандартных неопределенностей.

В качестве значения входной величины принимают среднюю оценку предполагаемого распределения ее значений, за ее стандартную неопределенность — оценку стандартного отклонения этой средней оценки.

Если имеются результаты $x_1, \dots, x_m$ независимых измерений одной из входных величин $X_i, i = 1, \dots, k$, проведенных в одинаковых условиях, применяют оценивание стандартной неопределенности по типу А, т. е. статистическое оценивание. Как следует из предыдущей главы, при нормальном распределении результатов измерений наилучшей оценкой x_i этой величины является среднее арифметическое значение

$$x_i = \bar{x}_i = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m x_{ij}, \quad (3.4)$$

стандартная неопределенность этой оценки равна СКО среднего арифметического значения

$$u_A(x_i) = u_A(\bar{x}_i) = \sqrt{\frac{1}{m(m-1)} \sum_{j=1}^m (x_{ij} - \bar{x}_i)^2}. \quad (3.5)$$

Оценки этих величин при обобщенном нормальном распределении результатов измерений приведены в п. 4.2.

Исходными данными для оценивания по типу Б величины и ее стандартной неопределенности являются следующие источники априорной информации:

- данные предыдущих измерений этой величины, содержащиеся в протоколах измерений, свидетельствах о калибровках и поверках или других документах;
- нормы точности измерений, указанные в технической документации на методы измерений и СИ;
- значения констант и справочных данных и их неопределенности;
- сведения о предполагаемом распределении значений величины, имеющиеся в технических отчетах и литературных источниках;
- опыт исследователя или знание общих закономерностей, которым подчиняются свойства применяемых материалов или приборов.

Различают следующие случаи оценивания по типу Б.

2.1. Если известно только одно значение величины X_i , например, результат однократного измерения, поправка или справочное данное, то это значение принимают в качестве оценки x_i . Оценку стандартной неопределенности $u_B(x_i)$ находят следующим образом:

- если известна оценка стандартной неопределенности $u(x_i)$, то $u_B(x_i) = u(x_i)$;
- если известны расширенная неопределенность $U(x_i)$ и коэффициент охвата k , стандартную неопределенность вычисляют по формуле

$$u_B(x_i) = \frac{U(x_i)}{k}. \quad (3.6)$$

Если коэффициент охвата не указан, его принимают с учетом имеющегося предположения о виде распределения неопределенности величины X_i и вероятности охвата, которой соответствует расширенная неопределенность $U(x_i)$. Типичные случаи приведены в таблице 3.

Таблица 3

Коэффициенты охвата распределений неопределенности входных величин

Предполагаемое распределение неопределенности входной величины	Вероятность охвата P , которой соответствует $U(x_i)$	Коэффициент охвата k
Равновероятное распределение	0,99–1,0	1,73
» »	0,95	1,65
Нормальное распределение	1 (предел допускаемых значений)	3
» »	0,99 ($U(x_i)$ первичных и вторичных эталонов)	2,6
» »	0,95 ($U(x_i)$ рабочих эталонов)	2
Распределение неизвестно	—	2

2.2. Если имеются предположения о распределении вероятностей величины X_i , то математическое ожидание и стандартное отклонение этого распределения принимают в качестве оценки x_i и ее стандартной неопределенности $u_B(x_i)$.

2.3. Если могут быть оценены только верхняя a_+ и нижняя a_- границы значений величины X_i , принимают равновероятное распределение. В этом случае

$$x_i = \frac{1}{2} \cdot (a_+ + a_-), \quad (3.7)$$

$$u_B(x_i) = \frac{a_+ - a_-}{2\sqrt{3}}. \quad (3.8)$$

$$\text{Если } a_+ = -a_- = a, \text{ то } x_i = a, u_B(x_i) = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

3. Оценивание выходных величин и их неопределенностей.

Результат измерений y вычисляют по формуле (3.2), в которую подставлены определенные на предыдущем этапе значения x_i входных величин:

$$y = f(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n). \quad (3.9)$$

Разлагая функцию $y = f(x_1, \dots, x_n)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $(x_1, \dots, x_n)$, получим зависимость погрешности Δy результата измерений y от погрешностей Δx_i оценок x_i входных величин:

$$\Delta y = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} \cdot \Delta x_i + o(\Delta x),$$

где $\frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} = \frac{\partial f(X_1, \dots, X_n)}{\partial X_i} \Big|_{X_s = x_s, s=1, \dots, n}$ — частная производная функции $f(X_1, \dots, X_n)$ по величине X_i , вычисленная при ожидаемых значениях всех входных величин.

Следовательно, вклад $u_i(y)$ каждой входной величины X_i в неопределенность результата измерения y определяется по формуле

$$u_i(y) = c_i \cdot u(x_i), \quad (3.10)$$

где $c_i = \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i}$ — коэффициент чувствительности выходной величины Y от входной величины X_i .

Коэффициенты чувствительности можно определять различными способами: непосредственно по формуле (3.10), численным дифференцированием уравнения измерений, экспериментальными исследованиями.

Если оценки входных величин коррелированы, находят коэффициенты их совместного влияния $c_{ij} = \frac{\partial^2 f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i \partial x_j}$ и коэффициенты корреляции

$$r(x_i, x_j) = \frac{u(x_i, x_j)}{u(x_i)u(x_j)}, \quad (3.11)$$

где $u(x_i, x_j)$ — ковариация значений x_i и x_j .

Ковариацию $u(x_i, x_j)$ можно оценить, если имеются m пар результатов x_{is}, x_{js} ($s = 1, \dots, m$) независимых повторных измерений двух величин x_i и x_j . В этом случае она равна

$$u(x_i, x_j) = \frac{1}{m(m-1)} \sum_{s=1}^m (x_{is} - \bar{x}_i)(x_{js} - \bar{x}_j). \quad (3.12)$$

Теперь все готово для вычисления суммарной стандартной неопределенности $u(y)$ результата измерений. В общем случае, при коррелированных оценках входных величин, ее вычисляют по формуле

$$u(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2(y) + \sum_{i,j=1, i \neq j}^n c_{ij} r(x_i, x_j) u_i(y) u_j(y)}. \quad (3.13)$$

При некоррелированных оценках входных величин $r(x_i, x_j) = 0$, и, следовательно,

$$u(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2(y)}. \quad (3.14)$$

Корреляцию двух входных величин допускается рассматривать как пренебрежимо малую, если:

- эти величины являются независимыми друг от друга (например, если они наблюдались многократно, но не одновременно, в различных, независимых один от другого экспериментах);
- одна из этих величин может рассматриваться как константа;
- не имеется никаких причин для корреляции между этими величинами.

Тем не менее, пренебрежение корреляциями между входными величинами может привести к ошибочной оценке стандартной неопределенности измеряемой величины. Поэтому, если степень корреляции величин X_i и X_j неизвестна, полезно оценить максимальное влияние этой корреляции на результат измерений с помощью оценки максимума стандартной неопределенности измеряемой величины. Эта оценка равна

$$u^2(y) \leq (|u_1(y)| + |u_2(y)|)^2 + u_3^2(y), \quad (3.15)$$

где $u_i(y)$ — вклад в стандартную неопределенность измеряемой величины остальных входных величин, которые считаются некоррелированными.

Примечания.

1. Если $f(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(X_i)$, то оценка выходной величины равна $y = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x_i)$, а ее абсолютная стандартная неопределенность — $u(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \varphi_i(x_i)}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i)}$.

В частном случае, при $\varphi_i(X_i) = p_i X_i, i = 1, \dots, n$ получается $u(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n p_i^2 u^2(x_i)}$.

2. Если $f(X_1, \dots, X_n) = \prod_{i=1}^n \varphi_i(X_i)$, то оценка выходной величины равна $y = \prod_{i=1}^n \varphi_i(x_i)$, а ее относительная стандартная неопределенность — $u_{rel}(y) = \frac{u(y)}{y} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \varphi_i(x_i)}{\varphi_i(x_i)}\right)^2 u^2(x_i)}$.

В частном случае, при $\varphi_i(X_i) = X_i^{p_i}, i = 1, \dots, n$ получается $u_{rel}(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n p_i^2 u_{rel}^2(x_i)}$, где $u_{rel}(x_i) = \frac{u(x_i)}{x_i}$ — относительная стандартная неопределенность величины X_i .

4. Составление бюджета неопределенности.

Под составлением бюджета неопределенности понимается формализованное краткое изложение процедуры оценивания неопределенности измерения. (Бюджетом неопределенности называют полный перечень источников неопределенности измерения с указанием их стандартной неопределенности и вклада в суммарную стандартную неопределенность результата измерений).

Бюджет неопределенности представляют в виде таблицы (см. таблицу 4).

Таблица 4

Рекомендуемая форма представления бюджета неопределенности

Величина	Оценка	Стандартная неопределенность	Тип оценивания (закон распределения)	Коэффициент чувствительности	Вклад в суммарную стандартную неопределенность
1	2	3	4	5	6
X_1	x_1	$u(x_1)$	A (Б)	$c_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}$	$u_1(y) = \left \frac{\partial f}{\partial x_1} \right \cdot u(x_1)$
...	...	...	...	...	...
X_n	x_n	$u(x_n)$	A (Б)	$c_n = \frac{\partial f}{\partial x_n}$	$u_n(y) = \left \frac{\partial f}{\partial x_n} \right \cdot u(x_n)$
Y	$y = f(x_i)$	$u(y)$			$u(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2(y)}$

В этой таблице в столбце 1 перечисляют входные величины уравнения измерения, в столбце 2 — оценки входных величин, полученные либо в результате измерений, либо на основе другой информации. В столбце 3 приводят значения стандартной неопределенности этих оценок. В столбце 4 указывают тип оценивания неопределенности. При необходимости указывают предполагаемый закон распределения оценки. Например, если оценка величины получена по результатам многократных измерений, то, как правило, предполагаются нормальный закон распределения ее значений и тип оценивания А. В столбце 5 приводят коэффициенты чувствительности входных величин $c_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$, в столбце 6 —

значения вкладов $u_i(y) = \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \cdot u(x_i)$ входных величин в суммарную стандартную неопределенность $u(y)$ (произведение значений столбца 3 и модуля значения из столбца 5).

В последней строке таблицы приводят результат измерений y и его стандартную неопределенность $u(y)$, равную среднеквадратичной сумме всех значений, приведенных в столбце 6. Все значения величин, приведенные в таблице, включают обозначения единиц этих величин.

5. Определение расширенной неопределенности. Представление результата измерения.

Расширенная неопределенность $U(y)$ равна произведению стандартной неопределенности $u(y)$ измерения выходной величины y на коэффициент охвата k :

$$U(y) = ku(y). \quad (3.16)$$

Коэффициент охвата Руководство рекомендует принимать равным квантили распределения Стьюдента при вероятности охвата $P = 0,95$ и числе эффективных степеней свободы ν_{eff} :

$$k = t_{P=0,95}(\nu_{eff}), \quad (3.17)$$

а число эффективных степеней свободы предлагается определять по эмпирической формуле Велча-Саттерстейта

$$\nu_{eff} = \frac{u^4(y)}{\sum_{i=1}^n \frac{u_i^4(y)}{\nu_i}}, \quad (3.18)$$

в которой ν_i — число степеней свободы оценки вклада в неопределенность результата измерений i -й входной величины.

Поэтому коэффициент охвата выбирают по таблицам распределения Стьюдента для вероятности $P = 0,95$ и числе степеней свободы, равном ν_{eff} , округленном до ближайшего целого числа, меньшего ν_{eff} . Эти значения приведены в таблице 5.

Таблица 5

Коэффициенты охвата k для различных степеней свободы ν_{eff}

ν_{eff}	1	2	3	4	5	6	7	8	10	20	50	∞
k	13,97	4,53	3,31	2,87	2,65	2,52	2,43	2,37	2,28	2,13	2,05	2,00

При оценке вклада неопределенности типа А величины X_i в неопределенность результата измерений число степеней свободы принимают равным $\nu_i = m_i - 1$, где m_i — число повторных измерений этой величины.

При оценке вклада неопределенности типа Б, подчиняющейся равномерному распределению, в неопределенность результата измерений число степеней свободы принимают равным бесконечности: $\nu_i = \infty$.

На практике часто по типу А оценивают неопределенность только одной входной величины, а неопределенности всех остальных входных величин оценивают по типу Б в соответствии с равномерным распределением. Легко показать, что в этом случае формула (3.18) упрощается:

$$\nu_{eff} = (m - 1) \cdot \frac{u^4(y)}{u_A^4(y)}, \quad (3.19)$$

где $u_A(y)$ — вклад в суммарную стандартную неопределенность величины, неопределенность которой оценена по типу А,

m — число повторных измерений этой величины.

Если имеются основания предполагать нормальное распределение вероятностей измеряемой величины y , коэффициент охвата принимают равным $k = 2$. При этом расширенная неопределенность результата измерения примерно соответствует вероятности покрытия 0,95.

В тех случаях, когда отсутствует информация о виде распределения неопределенности измеряемой величины, Руководство в целях международной унификации рекомендует также принимать $k = 2$ и считать, что при этом расширенная неопределенность результата измерения будет примерно соответствовать вероятности охвата 0,95.

В протоколе и аттестате измерения следует указывать результат измерения y , связанную с ним расширенную неопределенность $U(y)$ и коэффициент охвата k . Например: «Результат измерения длины детали составляет 153,2 мм. Расширенная неопределенность результата измерения составляет $\pm 1,4$ мм при коэффициенте охвата, равном 2».

Возможна и другая формулировка, при которой указывают интервал $(y - U(y), y + U(y))$, в котором находится значение изме-

ренной величины при соответствующем коэффициенте охвата. Например: «Измерения показали, что длина детали находится в интервале (151,8–154,6) мм при коэффициенте охвата, равном 2».

Пример 3.3. Измерение массы нетто нефти косвенным методом.

Масса нетто нефти косвенным методом измеряется в соответствии с уравнением измерений

$$M_n = V \cdot (1 - \varphi_w) \cdot g \cdot [1 - (x_{\text{х.с.}} + x_{\text{м.п.}})],$$

в котором V — объем жидкости, м^3 , φ_w — объемная доля воды, g — плотность обезвоженной нефти, т/м^3 , $x_{\text{х.с.}}$ и $x_{\text{м.п.}}$ — массовые доли хлористых солей и механических примесей.

Результаты измерений: $V = 1200,0 \text{ м}^3$, $\varphi_w = 0,011$, $g = 0,81 \text{ т/м}^3$, $x_{\text{х.с.}} = 0,002$, $x_{\text{м.п.}} = 0,01$.

Точность измерений этих величин характеризуется нормальным распределением погрешности и пределами допускаемой относительной погрешности: $\delta V = 0,003$, $\delta \varphi_w = 0,02$, $\delta g = 0,01$, $\delta x_{\text{х.с.}} = 0,03$, $\delta x_{\text{м.п.}} = 0,02$.

Результат измерений:

$$M_n = 1200 \cdot (1 - 0,011) \cdot 0,81 \cdot [1 - (0,002 + 0,01)] = 949,8 \text{ т.}$$

Неопределенность измерений всех входных величин характеризуется пределами допускаемой относительной погрешности. Следовательно, их оцениваем по типу Б и, с учетом допущения о нормальном законе, в соответствии с таблицей 3 принимаем коэффициенты охвата $k = 3$. Поэтому стандартные неопределенности входных величин: $u_{1,\text{rel}} = u_{\text{rel}}(V) = 0,001$, $u_{2,\text{rel}} = u_{\text{rel}}(\varphi_w) = 0,0067$, $u_{3,\text{rel}} = u_{\text{rel}}(g) = 0,0033$, $u_{4,\text{rel}} = u_{\text{rel}}(x_{\text{х.с.}}) = 0,01$, $u_{5,\text{rel}} = u_{\text{rel}}(x_{\text{м.п.}}) = 0,0067$.

Найдем коэффициенты чувствительности результата измерений к изменению входных величин. В соответствии с примечанием 2 п. 3, относительная стандартная неопределенность результата измерений вычисля-

ется по формуле $u_{\text{rel}}(M_n) = \sqrt{\sum_{i=1}^5 p_i^2 u_{i,\text{rel}}^2}$.

где $p_1 = p_3 = 1$, $p_2 = \frac{\varphi_w}{1 - \varphi_w} = 0,011$, $p_4 = \frac{x_{\text{х.с.}}}{1 - x_{\text{х.с.}} - x_{\text{м.п.}}} = 0,002$,

$p_5 = \frac{x_{\text{м.п.}}}{1 - x_{\text{х.с.}} - x_{\text{м.п.}}} = 0,0105$.

В таблице 6 приведен бюджет неопределенности этого измерения.

Таблица 6

Бюджет неопределенности измерений массы нетто нефти

Величина	Оценка	Относительная стандартная неопределенность	Тип оценивания (закон распределения)	Коэффициент чувствительности	Вклад в суммарную стандартную неопределенность
1	2	3	4	5	6
V	1200,0 м^3	0,001	Б (нормальный закон)	1	0,001
φ_w	0,011	0,0067	То же	0,011	0,000074
g	0,81 т/м^3	0,0033	—	1	0,0033
$x_{\text{х.с.}}$	0,002	0,01	—	0,002	0,00002
$x_{\text{м.п.}}$	0,01	0,0067	—	0,0105	0,00007
M_n	949,8 т				$u_{\text{rel}}(M_n) = 0,00345$

Расширенная неопределенность результата измерений оценивается, исходя из нормального распределения (поскольку все составляющие были распределены по этому закону) и вероятности охвата $P = 0,95$. В этом случае $k = 2$ и относительная расширенная неопределенность $U_{\text{rel}}(M_n) = 2 \cdot 0,00345 = 0,0069 \approx 0,7 \%$.

Таким образом, результат измерения массы нетто нефти составляет 949,8 т. Относительная расширенная неопределенность этого результата составляет 0,7 % при коэффициенте охвата 2, соответствующем вероятности охвата $P = 0,95$.

Пример 3.4. Калибровка резистора с номинальным значением 10 кОм [23].

Электрическое сопротивление четырехклемного резистора измеряется при помощи цифрового 7,5-значного вольтметра в режиме измерения электрического сопротивления и эталонного четырехклемного резистора, имеющего такое же номинальное электрическое сопротивление. Резисторы погружаются в масляную ванну, температура которой контролируется ртутным стеклянным термометром. Номинальная температура масляной ванны равна 23 °С. Измерения проводят методом замещения:

четырёхклемные разъемы каждого резистора по очереди подсоединяются к клеммам вольтметра. Установлено, что ток 100 мА не может вызвать сколько-нибудь существенное нагревание резисторов, имеющих номинальное значение 10 кОм. Влияние внешних утечек на результаты измерений электрических сопротивлений также можно считать незначимым.

1. Уравнение измерений:

$$R_Y = (R_{\lambda 3} + \delta R_{\lambda 3} + \delta R_{T3}) r_c - \delta R_{TX},$$

где R_Y — электрическое сопротивление калибруемого резистора при номинальной температуре,

$R_{\lambda 3}$ — значение электрического сопротивления, приписанное эталонному резистору при его последней калибровке,

$\delta R_{\lambda 3}$ — дрейф электрического сопротивления эталонного резистора после его последней калибровки,

δR_{T3} , δR_{TX} — изменение электрического сопротивления эталонного и калибруемого резисторов вследствие отличия их температуры от номинальной температуры,

$$r = \frac{\hat{R}_X}{\hat{R}_3} \text{ — отношение показываемых значений электрических сопротивлений калибруемого и эталонного резисторов } (\hat{R}_X = R_X + \delta R_{TX},$$

$$\hat{R}_3 = R_{\lambda 3} + \delta R_{\lambda 3} + \delta R_{T3}),$$

r_c — поправка на паразитные напряжения и разрешающую способность вольтметра.

2. Входные величины и их стандартные неопределенности.

2.1. Эталон: в сертификате калибровки эталонного сопротивления приведено значение $R_3 = 10\,000,053 \text{ Ом} \pm 5 \text{ мОм}$ (коэффициент охвата $k=2$) при температуре эталона 23°C . Поэтому стандартная неопределенность приписанного значения эталона $u_1 = u_3(R_3) = \frac{5}{2} = 2,5 \text{ мОм}$.

2.2. Дрейф значения эталонного резистора после его последней калибровки: ожидаемое значение $\delta R_{\lambda 3} = \pm 20 \text{ мОм}$. Неопределенность этой оценки оценивается по типу Б и описывается равномерным распределением в интервале $\pm 10 \text{ мОм}$. Его стандартная неопределенность вычисляется по формуле (3.8): $u_2 = u_3(\delta R_{\lambda 3}) = \frac{10}{\sqrt{3}} = 5,8 \text{ мОм}$.

2.3. Температура масляной ванны контролируется калиброванным термометром. Учитывая метрологические характеристики термометра и градиент температур в масляной ванне, считают, что отклонения температуры резисторов от заданной температуры 23°C не превышают $\pm 0,055 \text{ K}$. Значение температурного коэффициента (ТК) эталонного резистора $5 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ дает отклонение электрического сопротивления не более $\delta R_{T3} = \pm 10^7 \cdot 5 \cdot 10^{-6} \cdot 0,055 = \pm 2,75 \text{ мОм}$. В соответствии с технической документацией на калибруемый резистор, его ТК не более $10 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$. Соответственно, отклонение сопротивления калибруемого резистора из-за колебаний температуры не должны превышать $\delta R_{TX} = \pm 5,5 \text{ мОм}$. Их стандартные неопределенности также оцениваются по типу Б и описываются равномерным распределением с вероятностью охвата $0,99-1,0$ (так как указаны пределы возможных отклонений): $u_3 = u_3(\delta R_{T3}) =$

$$= \frac{2,75}{\sqrt{3}} = 1,6 \text{ мОм}, \quad u_4 = u_4(\delta R_{TX}) = \frac{5,5}{\sqrt{3}} = 3,2 \text{ мОм}.$$

2.4. Так как для измерения R_X и R_3 используется один и тот же миллиметр, их вклады в неопределенность коррелированы. Измерение отношения сопротивлений r уменьшает корреляцию, т. к. во внимание принимается только относительная разность между показаниями. При этом воздействие систематических эффектов (паразитные напряжения и расширение прибора), которые оцениваются в пределах $\pm 0,5 \cdot 10^{-6}$ для одного показания, существенно уменьшается. Результирующее распределение отношения r_c — равномерное со средним $1,0000000$ и пределами $|1,0000000 \pm 1,0 \cdot 10^{-6}|$. Поэтому стандартная неопределенность, обусловленная этими факторами, равна

$$u_5 = u_5(r_c) = \frac{1 \cdot 10^{-6}}{1,73} = 0,58 \cdot 10^{-6}.$$

2.5. Выполнено пять измерений отношения r : $1,0000104$; $1,0000107$; $1,0000106$; $1,0000103$; $1,0000105$. Результат измерений

$$\bar{r} = 1,0000100 + \frac{4+7+6+3+5}{5} \cdot 10^{-7} = 1,0000105, \text{ его стандартная неопре-}$$

$$\text{деленность } u_6 = u_6(\bar{r}) = \sqrt{\frac{1}{4 \cdot 5} (1^2 + 2^2 + 1^2 + 2^2 + 0) \cdot 10^{-7}} = 0,071 \cdot 10^{-6}.$$

2.6. Коэффициенты чувствительности.

Для величин r_c и r коэффициент чувствительности $c_i = \frac{\partial R_x}{\partial r}$

$\cong \hat{R}_x r_c \cong 10000 \text{ Ом}$. Для других величин $c_i = r_c r \cong 1,0$.

2.7. Бюджет неопределенности представлен в таблице 7.

Таблица 7

Бюджет неопределенности калибровки резистора

Параметр X_i	Оценка x_i	Стандартная неопределенность $u_i = u(x_i)$	Распределение вероятностей	Коэффициент чувствительности c_i	Вклад $u_i(R_x)$
$R_{\text{нз}}$	10000,053 Ом	2,5 мОм	Равномерное	1	2,5 мОм
$\delta R_{\text{нз}}$	0,020 Ом	5,8 мОм	То же	1	5,8 мОм
$\delta R_{\text{тз}}$	0,000 Ом	1,6 мОм	»	1	1,6 мОм
$\delta R_{\text{тх}}$	0,000 Ом	3,2 мОм	»	1	3,2 мОм
r_c	1,0000000	$0,58 \cdot 10^{-6}$	»	10 000 Ом	5,8 мОм
r	1,0000105	$0,07 \cdot 10^{-6}$	Нормальное	10 000 Ом	0,71 мОм
R_x	10000,178 Ом			$u(R_x) =$	9,28 мОм

2.8. Расширенная неопределенность:

$$U(R_x) = ku(R_x) = 2 \cdot 9,28 \cong 19 \text{ мОм}.$$

2.9. Окончательные результаты: результат измерений электрического сопротивления резистора номинального значения 10 кОм при температуре 23 °С составляет $(10\,000,178 \pm 0,019) \text{ Ом}$. Заявленная расширенная неопределенность измерения устанавливается как стандартная неопределенность измерения, умноженная на коэффициент охвата $k = 2$, который для нормального распределения соответствует приблизительно вероятности охвата 0,95.

Глава 4

МЕТОДЫ ОЦЕНИВАНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ И ИХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

4.1. Исключение выбросов из ряда измерений

Ряд результатов измерений $x_1, \dots, x_n$ может содержать значение, сильно отличающееся от других. Например, имеется какое-то минимальное значение $x_{\min}$, которое значительно меньше остальных, или какое-то максимальное значение $x_{\max}$, которое значительно больше остальных. Эти значения могут являться следствием возникновения маловероятного события — случайной погрешности, подчиняющейся распределению случайных погрешностей длинного измерительного процесса, но существенно отличающейся по величине от остальных членов ряда измерений. Но они могут быть и следствием промахов, о которых говорилось в п. 2.1. В этой связи возникает потребность выявления и устранения результатов измерений, которые в этом смысле несовместимы с остальными и могут исказить статистические выводы.

Такие результаты измерений называют резко выделяющимися результатами, или выбросами. В принципе выбросом в ряду чисел считается число, в определенном смысле несовместимое с остальными [24]. При обработке результатов измерений это понятие конкретизируется: под выбросом понимают результат, для которого значение статистики, соответствующей выбранному критерию совместимости, превышает критическое значение, соответствующее 99% доверительному интервалу. Вводится также понятие *критического* выброса. Под ним понимают результат, который превышает критическое значение, соответствующее 95% доверительному интервалу, но не превышает критическое значение, соответствующее 99% доверительному интервалу.

В математической статистике разработано большое количество критериев совместности. Рассмотрим критерий Граббса, являющийся одним из наиболее употребительных критериев в измерительной практике. В соответствии с ним подлежащие анализу результаты измерений сначала располагают в порядке возрастания, образуя монотонный ряд $\{x_i\}$, $i = 1, \dots, n$, в котором $x_1 = x_{\min}$, $x_n = x_{\max}$ являются экстремальными значениями. Статистики Граббса имеют вид:

$$G_n = \frac{x_n - \bar{x}}{S}, \quad G_1 = \frac{\bar{x} - x_1}{S}, \quad (4.1)$$

где $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$, $S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$ — среднее арифметическое значение и стандартное отклонение ряда. В таблице 8 приведены пороговые значения статистики Граббса. Выброс или квазивыброс устанавливается в случае превышения значениями статистики Граббса приведенных в этой таблице 1 % или 5 % критических значений соответственно.

Если при этой проверке окажется, что ряд измерений не имеет выбросов, целесообразно дополнительно проверить на выбросы два максимальных или два минимальных результата. Статистика Граббса для совместной проверки двух максимальных результатов имеет вид

$$G = \frac{S_{n-1,n}^2}{S_0^2}, \quad (4.2)$$

где $S_0^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$, $S_{n-1,n}^2 = \sum_{i=1}^{n-2} (x_i - \bar{x}_{n-1,n})^2$, $\bar{x}_{n-1,n} = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{n-2} x_i$.

Аналогично статистика Граббса для совместной проверки двух минимальных результатов имеет вид

$$G = \frac{S_{1,2}^2}{S_0^2}, \quad (4.3)$$

где $S_{1,2}^2 = \sum_{i=3}^n (x_i - \bar{x}_{1,2})^2$, $\bar{x}_{1,2} = \frac{1}{n-2} \sum_{i=3}^n x_i$.

Выброс или квазивыброс устанавливается в случае, если значения статистики Граббса меньше 1 % или 5 % критических значений соответственно, приведенных в таблице 8.

Пример 4.1. Результаты измерений массовой доли серы в угле в процентах представляют следующий монотонный ряд: $x_1 = 0,660$; $x_2 = 0,667$; $x_3 = 0,677$; $x_4 = 0,680$; $x_5 = 0,690$; $x_6 = 0,703$; $x_7 = 0,708$; $x_8 = 0,733$. Среднее арифметическое и стандартное отклонение ряда:

$$\bar{x} = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 x_i = 0,690 \%, \quad S = \sqrt{\frac{1}{7} \sum_{i=1}^8 (x_i - 0,690)^2} = 0,024 \%. \quad \text{Статистики}$$

$$\text{Граббса равны } G_8 = \frac{0,733 - 0,690}{0,024} = 1,792, \quad G_1 = \frac{0,690 - 0,660}{0,024} = 1,25. \text{ Так}$$

как они меньше 1 %-х и 5 %-х критических значений при $n = 8$ (соответственно 2,274 и 2,126), анализируемая выборка не содержит выбросов и квазивыбросов. Проверку на выбросы двух максимальных и двух минимальных результатов не проводим ввиду небольшого объема выборки.

Таблица 8

Критические значения статистики Граббса [25]

n	Одно наибольшее или одно наименьшее		Два наибольших или два наименьших	
	Свыше 1 %	Свыше 5 %	Свыше 1 %	Свыше 5 %
3	1,155	1,155	—	—
4	1,496	1,481	0,000	0,000
5	1,764	1,715	0,001	0,009
6	1,973	1,887	0,011	0,034
7	2,139	2,020	0,030	0,070
8	2,274	2,126	0,056	0,110
9	2,387	2,215	0,085	0,149
10	2,482	2,290	0,115	0,186
11	2,564	2,355	0,144	0,221
12	2,636	2,412	0,173	0,253
14	2,755	2,507	0,228	0,311
16	2,852	2,585	0,276	0,360
18	2,932	2,651	0,320	0,402
20	3,001	2,709	0,358	0,439
25	3,135	2,822	0,437	0,512
30	3,236	2,908	0,498	0,567
40	3,381	3,036	0,586	0,644

4.2. Проверка гипотезы о нормальном распределении экспериментальных данных

Проверить гипотезу о том, что распределение экспериментальных данных не противоречит теоретическому распределению можно по ряду критериев. Ниже будет рассмотрен наиболее известный из них — критерий «хи-квадрат» Пирсона. Этот критерий дает хорошие результаты при числе экспериментальных данных $n \geq 50$, хотя часто применяется и при меньших объемах выборки. Вычисления целесообразно проводить по следующей схеме.

1. Данные группируют по интервалам. Рекомендуемое число интервалов l приведено в таблице 9.

Таблица

Рекомендуемое число интервалов группирования

Число экспериментальных данных	Рекомендуемое число интервалов
25–100	6–9
100–500	8–12
500–1000	10–16
1000–10000	12–22

Кроме того, следует иметь в виду, что длина интервала группирования

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{l}, \quad (4.4)$$

где $x_{\max}$, $x_{\min}$ — наибольшее и наименьшее значения в ряду экспериментальных данных, должна быть больше погрешности округления при записи этих данных. Вычисленное по этой формуле значение h округляют. Затем вычисляют середины интервалов $\hat{x}_i$, соответствующие им эмпирические частоты (число попаданий в интервал) $\hat{n}_i$.

2. Вычисляют среднее арифметическое значение $\bar{x}$ и оценку СКО S .

3. Для каждого интервала определяют

$$z_i = \frac{\hat{x}_i - \bar{x}}{S} \quad (4.5)$$

и теоретическое число попавших в него экспериментальных данных

$$n_i = n \frac{h}{S} f(z_i), \quad (4.6)$$

где $f(z_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.5z_i^2}$ — плотность стандартного (с нулевым математическим ожиданием и СКО, равным 1) нормального распределения.

4. Для каждого интервала вычисляют

$$\chi_i^2 = \frac{(\hat{n}_i - n_i)^2}{n_i}, \quad (4.7)$$

и затем — статистику

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^l \chi_i^2. \quad (4.8)$$

5. Определяют число степеней свободы $k = l - 3$.

6. Выбрав уровень значимости критерия q , по таблицам распределения χ^2 находят χ_{α}^2 и χ_{β}^2 , удовлетворяющие неравенствам $P\{\chi^2 > \chi_{\alpha}^2\} = 1 - 0.5q$ и $P\{\chi^2 > \chi_{\beta}^2\} = 0.5q$. Гипотеза о нормальности согласуется с экспериментальными данными, если

$$\chi_{\alpha}^2 < \chi^2 < \chi_{\beta}^2. \quad (4.9)$$

Пример 4.2. Для определения плотности дистиллированной воды при температуре $T = 20^\circ\text{C}$ было проведено 25 независимых измерений. Результаты измерений составили $\rho_i = (0.998 + x_i \cdot 10^{-6})$ кг/л, где x_i — значения, приведенные в таблице 10.

Таблица 10

Результаты измерений плотности дистиллированной воды

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	205	191	207	208	196	201	191	195	206
i	10	11	12	13	14	15	16	17	18
x_i	204	200	203	208	201	205	198	196	191
i	19	20	21	22	23	24	25		
x_i	193	195	197	192	196	194	198		

Среднее арифметическое значение этой выборки составляет

$$\bar{x} = \frac{1}{25} \sum_{i=1}^{25} x_i = 198,8.$$

Проверка гипотезы о нормальном распределении погрешностей этих измерений представлена в таблице 11.

Таблица 11

Проверка гипотезы о нормальном распределении погрешностей

i	Интервал	n_i	$\hat{x}_i$	z_i	n_i	χ^2
1	190–193	5	191,5	-1,24	2,467	2,602
2	193–196	6	194,5	-0,71	4,163	0,810
3	196–199	3	197,5	-0,17	5,271	0,978
4	199–202	3	200,5	0,36	5,005	0,803
5	202–205	3	203,5	0,90	3,564	0,089
6	205–208	5	206,5	1,44	1,904	5,034
		$\bar{x} = 198,8; S = 5,6$				$\chi^2 = 10,317$

Как видно из таблицы, статистика $\chi^2 = 10,317$. Число степеней свободы составит $k = 6 - 3 = 3$. Примем значение уровня значимости $q_n = 97,5\%$ и $q_n = 2,5\%$, что обеспечивает доверительную вероятность 0,95. Для этих чисел степеней свободы $k = 3$ из таблиц распределения χ^2 получим $\chi^2_{0,975} = 0,216$; $\chi^2_{0,025} = 9,348$. Так как $\chi^2 > \chi^2_{0,025}$, делаем вывод, что гипотеза о нормальном законе распределения погрешности измерений не согласуется с экспериментальными данными. Следовательно, необходимо проверить гипотезу об обобщенном распределении погрешности измерений. Эта процедура выполнена в п. 4.4.

4.3. Прямые многократные измерения, подчиняющиеся нормальному распределению

При многократных измерениях результат находят путем статистической обработки ряда экспериментальных данных, часто полученных параллельными измерениями. Итак, при измерении получают ряд экспериментальных данных $y_1, \dots, y_n$. Результат измерения y_i может содержать не только случайную погрешность, но и систематическую, и поэтому называется неисправленным результатом измерения. Систематическую погрешность стараются исключить, используя специальные приемы. Если представляется возможным оценить систематическую погрешность Δ_c , то в экспериментальные данные вносят поправку, равную оценке систематической погрешности, взятой с обратным знаком:

$$x_i = y_i - \Delta_c.$$

Значения x_i называются исправленными результатами измерений. Они отягощены случайной погрешностью и оставшейся частью систематической погрешности (НСП). Случайная погрешность оценивается статистическими методами и поэтому определяет неопределенность результата измерений типа А. НСП, оцениваемая на основе априорной информации, определяет неопределенность типа Б.

Статистическая обработка проводится следующим образом.

1. За результат измерений принимают среднее арифметическое экспериментальных данных

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad (4.10)$$

где x_i — исправленный результат i -го измерения,
 n — число измерений.

С целью удобства вычислений эту формулу можно записать в виде

$$\bar{x} = x_0 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i, \quad (4.11)$$

где x_0 — близкое к $\bar{x}$ значение, удобное для расчета,

$$z_i = x_i - x_0.$$

2. Определяют стандартную неопределенность типа А ряда измерений по формуле

$$u_A(x) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

либо
$$u_A(x) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2}, \quad (4.12)$$

где $\bar{z} = \bar{x} - x_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i$.

Деление суммы в этой формуле на $n-1$, а не на n связано с необходимостью получения несмещенной оценки СКО рассеивания экспериментальных данных относительно центра распределения.

Эту формулу также можно записать в виде

$$u_A(x) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \cdot (\bar{x})^2 \right]}$$

либо
$$u_A(x) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^n z_i^2 - n \cdot (\bar{z})^2 \right]}. \quad (4.13)$$

3. Определяют стандартную неопределенность типа А результата измерений по формуле

$$u_A(\bar{x}) = \frac{u_A(x)}{\sqrt{n}}. \quad (4.14)$$

4. Оценивают все составляющие неопределенности результата измерений типа Б. j -я составляющая (НСП, обусловленная j -м фактором) оценивается интервалом $[-U_j, +U_j]$. Для каждой со-

ставляющей, исходя из представлений о виде ее распределения и вероятности охвата P , определяют коэффициент охвата k_j .

5. Оценивают все стандартные неопределенности типа Б по формуле

$$u_{Bj}(x) = \frac{U_j}{k_j}. \quad (4.15)$$

При равновероятном распределении j -й составляющей в интервале $[-U_j, +U_j]$ стандартную неопределенность находят по формуле $u_{Bj}(x) = \frac{U_j}{\sqrt{3}}$.

6. Оценивают суммарную стандартную неопределенность результата измерений по формуле

$$u(\bar{x}) = \sqrt{u_A^2(\bar{x}) + \sum_{j=1}^m u_{Bj}^2(x)}. \quad (4.16)$$

7. Оценивают расширенную неопределенность результата измерений интервалом $[-U(\bar{x}), +U(\bar{x})]$, границы которого вычисляют по формуле

$$U(\bar{x}) = k_p \cdot u(\bar{x}), \quad (4.17)$$

в которой k_p — коэффициент охвата распределения неопределенности, принимаемый равным квантилю распределения Стьюдента $k_p = t_p(v_{eff})$ при вероятности охвата P и эффективном числе степеней свободы распределения неопределенности v_{eff} , вычисляемом по формуле

$$v_{eff} = (n-1) \cdot \frac{u_A^4(\bar{x})}{u_A^4(\bar{x})}. \quad (4.18)$$

Пример 4.3. Калибровка государственного стандартного образца (ГСО) молярной доли СО в азоте в баллоне под давлением.

Номинальное значение ГСО составляет $x_{CO} = 40$ ppm. Результаты 14 измерений этой величины представлены в таблице 12.

Таблица 12

Результаты измерений значения ГСО молярной доли СО в азоте

i	1	2	3	4	5	6	7
x_i , ppm	45,00	36,25	42,50	45,00	37,50	38,33	37,50
i	8	9	10	11	12	13	14
x_i , ppm	43,33	40,63	36,25	42,50	39,17	45,00	40,83

Составляющие стандартной неопределенности, оцениваемой по типу Б, имеют следующие оценки: $u_{B1}(x_{CO}) = 0,2$ ppm, $u_{B2}(x_{CO}) = 0,5$ ppm, $u_{B3}(x_{CO}) = 0,05$ ppm, $u_{B4}(x_{CO}) = 0,033 \cdot \bar{x}_{CO}$ ppm.

Результат измерений определяется по формуле (4.10):

$$\bar{x}_{CO} = \frac{1}{14} \sum_{i=1}^{14} x_i = \frac{569,78}{14} = 40,70 \text{ ppm. Это значение приписывается ГСО.}$$

Найдем оценку его неопределенности. Стандартная неопределенность, оцениваемая по типу А, в соответствии с формулами (4.12) и (4.14) равняется

$$u_A(\bar{x}_{CO}) = \sqrt{\frac{1}{13 \cdot 14} \sum_{i=1}^{14} (x_i - \bar{x}_{CO})^2} = \sqrt{\frac{136,93}{13 \cdot 14}} \approx 0,87 \text{ ppm.}$$

Суммарная стандартная неопределенность результата измерений в соответствии с формулой (4.16) равняется

$$u(\bar{x}_{CO}) = \sqrt{0,87^2 + 0,2^2 + 0,5^2 + 0,05^2 + (0,02 \cdot 40,7)^2} = 1,31 \text{ ppm.}$$

Оценим расширенную неопределенность результата измерений. Эффективное число степеней свободы находим по формуле (4.18):

$$\nu_{eff} = 13 \cdot \frac{1,31^4}{0,87^4} = 66,8. \text{ Для этого значения найдем по таблице 5 значения коэффициента охвата } k_{0,95} = t_{0,95}(66,8) = 2,05. \text{ И, наконец, по формуле}$$

(4.17) вычислим расширенную неопределенность результата измерений: $U(\bar{x}_{CO}) = 2,05 \cdot 1,31 = 2,7$ ppm.

Таким образом, действительное значение ГСО молярной доли СО в азоте с вероятностью охвата 0,95 находится в интервале [38,0–43,4] ppm.

Пример 4.4. Проведение многократных измерений концентрации составляющих атмосферы с помощью масс-спектрометра¹.

В основе масс-спектрометрического метода измерений лежит наиболее универсальное свойство материи — различие масс составляющих ее частиц — атомов и молекул. Сущность этого метода заключается в превращении атомов и молекул анализируемой смеси газов в заряженные ионы — ионы, разделении ионов на отдельные фракции, в каждой из которых будут представлены ионы только одного массового числа

$M = \frac{m}{e}$, где m, e — масса и заряд иона, и подсчете количества ионов в каждой фракции.

Мерой количества ионов в одной фракции служит величина постоянного электрического тока, возбуждаемого в цепи коллектора. Результаты измерений тока коллектора x_i приведены в таблице 13.

Таблица 13

Показания масс-спектрометра (ток коллектора в мА)

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	390	379	344	422	368	376	368	383	397
i	10	11	12	13	14	15	16	17	18
x_i	393	405	407	385	395	415	397	393	371
i	19	20	21	22	23	24	25	26	27
x_i	410	384	366	390	378	395	390	431	367
i	28	29	30	31	32	33	34	35	36
x_i	405	336	432	405	402	396	412	396	410
i	37	38	39	40	41	42	43	44	45
x_i	356	419	412	432	393	390	393	349	432
i	46	47	48	49	50	51	52	53	54
x_i	427	398	397	406	410	405	401	415	413
i	55	56	57	58	59	60	61	62	
x_i	417	363	434	412	357	398	415	419	

¹ Лабораторная работа кафедры «Информационные системы экологической безопасности» СПбГПУ.

Среднее арифметическое значение этой выборки составляет $\bar{x} = \frac{1}{62} \sum_{i=1}^{62} x_i = 396$ мА, стандартная неопределенность ряда измерений

$$u_A(x) = \sqrt{\frac{1}{61} \sum_{i=1}^{62} (x_i - 396)^2} = 22,7 \text{ мА.}$$

Проверим ряд измерений на наличие выбросов. $x_{\max} = 434$ мА, $x_{\min} = 336$ мА. Тогда $G_{\text{вн}} = \frac{434 - 396}{22,7} = 1,674$, $G_{\text{вн}} = \frac{396 - 336}{22,7} = 2,643$. По-

скольку эти значения меньше порогового значения при уровне значимости $q = 0,05$, равного 3,036 (см. таблицу 8), ряд измерений выбросы не содержит.

Проверим гипотезу о нормальном распределении погрешностей этих измерений. В соответствии с таблицей 9, для $n \geq 60$ принимаем число интервалов $l = 7$. Ширина интервала $h = \frac{434 - 336}{7} \approx 14$. Устанавливаем границы интервалов: 336; 350; 364; 378; 392; 406; 420; 434 мА. Дальнейшая проверка представлена в таблице 14.

Таблица 14

Проверка гипотезы о нормальном распределении ряда измерений

i	Интервал	$\hat{n}_i$	$\hat{x}_i$, мА	ε_i	n_i	χ_i^2
1	336-350	3	343	-2,34	0,99	4,095
2	350-364	3	357	1,72	3,48	0,067
3	364-378	7	371	-1,11	8,25	0,191
4	378-392	8	385	-0,49	3,55	2,274
5	392-406	20	399	0,13	15,15	1,550
6	406-420	14	413	0,75	11,53	0,528
7	420-434	7	427	1,36	6,06	0,146

Статистика $\chi^2 = \sum_{i=1}^l \chi_i^2 = 8,85$, число степеней свободы $k = l - 3 = 7 - 3 = 4$.

По таблицам распределения χ^2 для уровня значимости $q = 0,025$ и $k = 4$ находим $\chi_{\alpha}^2 = 0,872$ и $\chi_{\alpha}^2 = 16,81$. Так как $0,872 < 8,85 < 16,81$, гипотеза о нормальном распределении принимается.

Стандартная неопределенность типа А результата многократных измерений равна $u_A(\bar{x}) = \frac{u_A(x)}{\sqrt{n}} = \frac{22,7}{\sqrt{62}} = 2,88$ мА. Так как неопределенно-

сти типа Б неизвестны, считаем, что суммарная стандартная неопределенность $u(\bar{x}) = u_A(\bar{x}) = 2,88$ мА. Расширенная неопределенность равна $U(\bar{x}) = k \cdot u(\bar{x}) = 2,04 \cdot 2,88 = 5,87$, т. к., в соответствии с таблицей 5, $k = t_{0,95}(v_{\text{эф}}) = 2,04$ при $v_{\text{эф}} = n - 1 = 61$.

Окончательный результат многократных измерений: ионный ток масс-спектрометра находится в границах [390-402] мА при коэффициенте охвата $k = 2,04$, соответствующем распределению Стьюдента и вероятности охвата $P = 0,95$.

4.4. Прямые многократные измерения, подчиняющиеся обобщенному нормальному распределению

1. Определяют базовое значение измеряемой величины x_0 по формуле среднего арифметического

$$x_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad (4.19)$$

где x_i — исправленный результат i -го измерения, n — число измерений.

Если бы закон распределения случайной погрешности измерений был нормальным, то базовое значение являлось бы эффективной оценкой истинного значения измеряемой величины. Поскольку проверкой гипотезы о нормальности установлено, что закон распределения отличается от нормального, предпринимаются действия, направленные на уточнение этой оценки на основе обобщенного нормального распределения.

2. По формуле

$$y_i = x_i - x_0 \quad (4.20)$$

определяют значения y_i ($i = 1, \dots, n$) ряда, для которого будет подбираться обобщенное нормальное распределение с пока еще неизвестным параметром F .

Поскольку обобщенный нормальный закон распределения значений y_i соответствует нормальному закону распределения значений $z_i = \text{sign}(y_i) \cdot (|y_i|)^F$, статистическая обработка результа-

тов измерений состоит в последовательном выполнении следующих процедур:

- переход от ряда $y_1, \dots, y_n$ к ряду $z_1, \dots, z_n$;
- вычисление среднего арифметического $\bar{z}$ ряда $z_1, \dots, z_n$ и его стандартной и расширенной неопределенностей в соответствии с правилами статистической обработки нормально распределенных экспериментальных данных;
- обратный переход от ряда $z_1, \dots, z_n$ к ряду $y_1, \dots, y_n$ — вычисление результата измерений и его расширенной неопределенности.

3. Находят оценку $\hat{F}$ параметра F методом максимума правдоподобия, обеспечивающим эффективность получаемых статистических оценок. Определение неизвестного параметра закона распределения случайной величины по выборке результатов измерений $y_1, \dots, y_n$ методом максимума правдоподобия заключается в нахождении такого значения этого параметра, который делает наиболее правдоподобным появление именно этой выборки. Другими словами, неизвестный параметр распределения находят из условия максимума вероятности получения выборки $y_1, \dots, y_n$. Так как все n результатов измерений являются взаимно независимыми, функция правдоподобия имеет вид

$$L(y_1, \dots, y_n) = \prod_{i=1}^n f(y_i), \quad (4.21)$$

где $f(y_i)$ — плотность обобщенного нормального распределения, определяемая (2.20). Условие максимума функции правдоподобия $L(p, y_1, \dots, y_n) = \max$ преобразуется в уравнение относительно неизвестного F [15]:

$$\omega(F) = \ln\left(\frac{u_A(z)}{|F|}\right) - \frac{F-1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(|y_i|) = \min, \quad (4.22)$$

в котором $u_A(z) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2}$ — стандартная неопре-

деленность типа А ряда значений $z_i = \text{sign}(y_i) \cdot (|y_i|)^F$,

$$\bar{z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i \text{ — среднее арифметическое этого ряда.}$$

Уравнение (4.22), как видно из примера к этому разделу, легко решается численными методами.

Найденное из этого уравнения значение $\hat{F}$ является статистической оценкой параметра F . В [26] показано, что относительная стандартная неопределенность типа А этой оценки равняется

$$u_{rel}(\hat{F}) = \frac{1}{2\sqrt{n}}. \quad (4.23)$$

Закон распределения рассеивания оценки $\hat{F}$ неизвестен, и поэтому точно определить ее расширенную неопределенность не представляется возможным. Поэтому поступим стандартным способом, рекомендованным Руководством: примем коэффициент охвата $k = 2$, соответствующий вероятности охвата 0,95. Тогда с вероятностью 0,95 истинное значение параметра F будет удовлетворять следующему неравенству:

$$\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \hat{F} \leq F \leq \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \hat{F}.$$

После нахождения F формируется ряд $z_i = \text{sign}(y_i) \times (|y_i|)^F, i = 1, \dots, n$. После этого рекомендуется провести дополнительную проверку согласия гипотезы об обобщенном нормальном законе с экспериментальными данными. Она проводится путем проверки гипотезы о нормальном распределении ряда z_i (см. п. 4.2).

4. Вычисляют статистические характеристики ряда $z_1, \dots, z_n$ среднее значение $\bar{z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i$ и стандартную неопределенность

$$u_A(z) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2}.$$

5. Вычисляют результат измерений. Он равен базовому значению x_0 , уточненному введением поправки $\bar{y} = \text{sign}(\bar{z}) \cdot (|\bar{z}|)^F$. Таким образом, результат измерений выражается формулой

$$x^* = x_0 + \text{sign}(\bar{z}) \cdot (|\bar{z}|)^F. \quad (4.24)$$

6. Определяют стандартную неопределенность типа А значений $\bar{z}$ по формуле

$$u_A(\bar{z}) = \frac{u_A(z)}{\sqrt{n}}. \quad (4.25)$$

7. Оценивают все составляющие расширенной неопределенности типа Б результатов измерений x_j (и, следовательно, члены ряда y_j); j -я составляющая оценивается интервалом $[-U_j, +U_j]$. Для каждой составляющей, исходя из представления о виде ее распределения и вероятности охвата P , определяют коэффициент охвата k_j .

8. Определяют границы всех составляющих расширенной неопределенности типа Б ряда z_i , соответствующие границам неопределенности $\pm U_j$ ряда y_i :

$$\pm U_{Bj}(z) = \pm U_j^F. \quad (4.26)$$

9. Определяют стандартные неопределенности типа Б ряда z_i . При законе распределения неопределенности типа Б значений y_i , отличном от равномерного, для этого можно воспользоваться формулой (3.6) и другими рекомендациями п. 3.3.

Если неопределенность типа Б значений y_i имеет равномерное распределение $f_B(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{2a}, & -a \leq \xi \leq a, \\ 0, & \xi < -a, \xi > a \end{cases}$, можно получить

типичную оценку. Для этого найдем математическое ожидание m_η и дисперсию D_η распределения неопределенности типа Б η значений z_i . В соответствии с правилами теории вероятностей эти характеристики распределения случайной величины $\eta = g(\xi) = \text{sign}(\xi) \cdot (|\xi|)^F$ вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} m_\eta &= \int_{-a}^a g(\xi) \cdot f_B(\xi) d\xi = \int_{-a}^a \text{sign}(\xi) \cdot (|\xi|)^F \cdot \frac{1}{2a} d\xi = \\ &= \int_0^a \xi^F \cdot \frac{1}{2a} d\xi + \left[- \int_{-a}^0 (-\xi)^F \cdot \frac{1}{2a} d\xi \right] = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_\eta &= \int_{-a}^a [g(\xi) - m_\eta]^2 \cdot f_B(\xi) d\xi = \int_{-a}^a \text{sign}(\xi) \cdot (|\xi|)^{2F} \cdot \frac{1}{2a} d\xi = \\ &= \frac{a^{2F+1} - (-a^{2F+1})}{2a(2F+1)} = \frac{a^{2F}}{2F+1}. \end{aligned}$$

Таким образом, стандартная неопределенность по типу Б значений z_i , равная СКО этого распределения, выражается формулой

$u_B(z_i) = \frac{a^F}{\sqrt{2F+1}}$. Из этой формулы следует, что при равномерном распределении j -й составляющей неопределенности ряда y_i соответствующие стандартные неопределенности значений z_i вычисляются по формуле

$$u_{Bj}(z) = \frac{U_{Bj}(z)}{\sqrt{2F+1}}. \quad (4.27)$$

9. Оценивают суммарную стандартную неопределенность значения $\bar{z}$ по формуле

$$u(\bar{z}) = \sqrt{u_A^2(\bar{z}) + \sum_{j=1}^m u_{Bj}^2(z_j)}. \quad (4.28)$$

10. Оценивают суммарную расширенную неопределенность значения $\bar{z}$

$$U(\bar{z}) = k_p \cdot u(\bar{z}), \quad (4.29)$$

где k_p — как в (4.17).

11. Теперь необходимо перейти от границ $\pm U(\bar{z})$ значения $\bar{z}$ к нижней и верхней границам $U^-(\bar{y})$ и $U^+(\bar{y})$ расширенной неопределенности поправки $\bar{y}$. Они равны

$$\begin{aligned} U^-(\bar{y}) &= \text{sign}[\bar{z} - U(\bar{z})] \cdot [|\bar{z} - U(\bar{z})|]^{\frac{1}{F}}, \\ U^+(\bar{y}) &= \text{sign}[\bar{z} + U(\bar{z})] \cdot [|\bar{z} + U(\bar{z})|]^{\frac{1}{F}}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Прибавив к этим границам базовое значение величины, получим интервал неопределенности результата измерений:

$$\begin{aligned} \{x_0 + \text{sign}[\bar{z} - U(\bar{z})] \cdot [|\bar{z} - U(\bar{z})|]^{\frac{1}{F}}, \\ x_0 + \text{sign}[\bar{z} + U(\bar{z})] \cdot [|\bar{z} + U(\bar{z})|]^{\frac{1}{F}}\}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Эта формула показывает, что, в отличие от нормального распределения, интервал неопределенности не является симметричным относительно результата измерений:

$$x^* = x_0 + \text{sign}(\bar{z}) \cdot [|\bar{z}|]^{\frac{1}{F}}.$$

Пример 4.5. Обработка результатов эксперимента по определению плотности дистиллированной воды при температуре $T = 20^\circ\text{C}$ (см. пример 4.2).

Результаты 25 независимых измерений представлены в виде $\rho_i = (0,998 + x_i \cdot 10^{-6})$ кг/л, где x_i — значения, приведенные в таблице 10 и в первом столбце таблицы 15. В указанном примере было найдено среднее значение плотности $\rho_0 = (0,998 + x_0 \cdot 10^{-6})$ кг/л, где $x_0 = 198,8$. Расчеты, которые предполагается провести в этом примере, имеют целью уточнение этого результата. С этой целью ρ_0 принимается за опорное значение искомой величины, и находятся по формуле (4.20) отклонения $y_i \cdot 10^{-6}$ кг/л результатов измерений от этого опорного значения. Значения y_i приведены во втором столбце таблицы 15. Статистическая проверка, проведенная в п. 4.2, показала, что гипотеза о нормальном распределении погрешности измерений отвергается с уровнем значимости критерия $q_\alpha = 2,5\%$. Проверим теперь возможность принятия гипотезы об обобщенном нормальном распределении. Найдем значение параметра F распределения значений y_i , удовлетворяющее условию максимума правдоподобия, т. е. условию минимума функции $\omega(F)$ (формула (4.22)). Это значение будем искать в интервале от 0,5 до 2,0 с шагом 0,1. Расчеты, проведенные в системе «Excel», представлены в таблице 15.

В последней строке этой таблицы приведены значения $\omega(F)$. Видно, что минимум этой функции достигается при $F = 1,6$. Расширенная неопределенность этого значения при коэффициенте охвата $k = 2$ равна $[(1 - \frac{1}{\sqrt{25}}) \cdot 1,6; (1 + \frac{1}{\sqrt{25}}) \cdot 1,6] = [1,28; 1,92]$. То, что этот интервал не включает значение $F = 1$, соответствующее нормальному распределению, служит дополнительным подтверждением справедливости решения об отклонении этой гипотезы.

На всякий случай, проверим по критерию χ^2 гипотезу об обобщенном нормальном распределении значений y_i с параметром $F = 1,6$. Для этого достаточно убедиться в нормальном распределении значений $z_i = \text{sign}(y_i) \cdot (|y_i|)^{1,6}$. Проверку проведем в табличной форме, аналогично примеру 4.2. Как видно из таблицы 15, минимальное значение z_i равняется $-27,0$, а максимальное равно $34,6$. Примем $z_{\min} = -28$, $z_{\max} = 35$, число интервалов $n = 6$. Тогда ширина интервала $h = \frac{35 - (-28)}{6} = 10,5$.

Эти интервалы представлены в столбце 2 таблицы 16. В столбце 3 приведены эмпирические частоты попаданий в i -й интервал $\hat{n}_i$, в столбце 4 — центральные точки z_{i0} этих интервалов, в столбце 5 — нормированные значения этих точек $\xi_{i0} = \frac{z_{i0} - \bar{z}}{S(z)}$.

В столбце 6 приведены теоретические значения частот попадания в эти интервалы, вычисленные по формуле $n_i = n \frac{h}{S(z)} f(\xi_{i0})$, где $f(\xi_{i0})$ — плотность нормального распределения с нулевым средним значением и СКО, равным 1. В последнем столбце приведены значения $\chi_i^2 = \frac{(\hat{n}_i - n_i)^2}{n_i}$ и их сумма — статистика $\chi^2 = 6,845$.

Таблица 16

Проверка гипотезы об обобщенном нормальном распределении значений y_i

i	Интервал значений z_i	$\hat{n}_i$	z_{i0}	$\xi_{i0} = \frac{z_{i0} - \bar{z}}{S(z)}$	n_i	χ_i^2
1	-28-(-17,5)	5	-22,75	-1,391	2,396	1,074
2	-17,5-(-7,0)	6	-12,25	-0,759	4,729	0,112
3	-7,0-3,5	3	-1,75	-0,126	6,258	1,202
4	3,5-14,0	3	8,75	0,506	5,550	2,271
5	14,0-24,5	3	19,25	1,138	3,300	0,027
6	24,5-35	5	29,75	1,771	1,315	2,159
		$\bar{z} = 0,35;$ $S(z) = 16,60$				$\chi^2 = 6,845$

Как и в предыдущем примере, число степеней свободы $k = 3$. Примем, как и ранее, $q_\alpha = 97,5\%$ и $q_\beta = 2,5\%$. Для них и $k = 3$ из таблиц распределения χ^2 получим: $\chi_\alpha^2 = 0,216$; $\chi_\beta^2 = 9,348$. Так как $0,216 < 6,845 < 9,348$, делаем вывод, что гипотеза об обобщенном нормальном распределении случайной погрешности измерений с параметром $F = 1,6$ согласуется с экспериментальными данными.

Таблица 15

Определение параметра F

x_0	y_1	$\ln(y_1)$	$z_0 = \text{sign}(y_1) \cdot (y_1)^F$ при F , равном																
			0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	
205	6,16	1,82	2,48	2,98	3,57	4,28	5,14	6,16	7,39	8,86	10,63	12,75	15,29	18,34	21,99	26,38	31,64	37,95	
191	-7,84	2,06	-2,80	-3,44	-4,23	-5,19	-6,38	-7,84	-9,63	-11,84	-14,54	-17,87	-21,95	-26,97	-33,14	-40,72	-50,03	-61,64	
207	8,16	2,10	2,86	3,52	4,35	5,36	6,61	8,16	10,07	12,42	15,32	18,90	23,31	28,75	35,47	43,76	53,08	66,59	
208	9,16	2,21	3,03	3,78	4,71	5,88	7,34	9,16	11,43	14,27	17,80	22,22	27,72	34,60	43,17	53,88	67,24	83,91	
196	-2,84	1,04	-1,87	-2,08	-2,30	-2,56	-2,84	-3,15	-3,50	-3,88	-4,31	-4,79	-5,31	-5,90	-6,55	-7,27	-8,07		
201	2,16	0,77	1,47	1,59	1,71	1,85	2,00	2,16	2,33	2,52	2,72	2,94	3,17	3,43	3,70	4,00	4,32	4,67	
191	-7,84	2,06	-2,80	-3,44	-4,23	-5,19	-6,38	-7,84	-9,63	-11,84	-14,54	-17,87	-21,95	-26,97	-33,14	-40,72	-50,03	-61,64	
195	-3,84	1,35	-1,96	-2,24	-2,56	-2,93	-3,38	-3,84	-4,39	-5,03	-5,75	-6,58	-7,52	-8,61	-9,85	-11,27	-12,89	-14,75	
206	7,16	1,97	2,68	3,26	3,97	4,83	5,88	7,16	8,72	10,61	12,92	15,74	19,16	23,33	28,40	34,58	42,11	51,27	
204	5,16	1,64	2,27	2,68	3,15	3,72	4,38	5,16	6,08	7,16	8,44	9,95	11,72	13,81	16,27	19,18	22,60	26,63	
200	1,16	0,15	1,08	1,09	1,11	1,13	1,14	1,16	1,18	1,19	1,21	1,23	1,25	1,27	1,29	1,31	1,33	1,35	
203	4,16	1,43	2,04	2,35	2,71	3,13	3,61	4,16	4,80	5,53	6,36	7,36	8,48	9,78	11,28	13,01	15,01	17,31	
208	9,16	2,21	3,03	3,78	4,71	5,88	7,34	9,16	11,43	14,27	17,80	22,22	27,72	34,60	43,17	53,88	67,24	83,91	
201	2,16	0,77	1,47	1,59	1,71	1,85	2,00	2,16	2,33	2,52	2,72	2,94	3,17	3,43	3,70	4,00	4,32	4,67	
205	6,16	1,82	2,48	2,98	3,57	4,28	5,14	6,16	7,39	8,86	10,63	12,75	15,29	18,34	21,99	26,38	31,64	37,95	
198	-0,84	-0,17	-0,92	-0,90	-0,89	-0,87	-0,85	-0,84	-0,83	-0,81	-0,80	-0,78	-0,77	-0,76	-0,74	-0,73	-0,72	-0,71	
196	-2,84	1,04	-1,69	-1,87	-2,08	-2,30	-2,56	-2,84	-3,15	-3,50	-3,88	-4,31	-4,79	-5,31	-5,90	-6,55	-7,27	-8,07	
191	-7,84	2,06	-2,80	-3,44	-4,23	-5,19	-6,38	-7,84	-9,63	-11,84	-14,54	-17,87	-21,95	-26,97	-33,14	-40,72	-50,03	-61,64	
193	-5,84	1,76	-2,42	-2,88	-3,44	-4,10	-4,90	-5,84	-6,97	-8,31	-9,92	-11,83	-14,11	-16,84	-20,09	-23,96	-28,59	-34,11	
195	-3,84	1,35	-1,96	-2,24	-2,56	-2,93	-3,38	-3,84	-4,39	-5,03	-5,75	-6,58	-7,52	-8,61	-9,85	-11,27	-12,89	-14,75	
197	-1,84	0,61	-1,36	-1,44	-1,53	-1,63	-1,73	-1,84	-1,96	-2,08	-2,21	-2,35	-2,50	-2,65	-2,82	-3,00	-3,19	-3,39	
192	-6,84	1,92	-2,62	-3,17	-3,84	-4,66	-5,64	-6,84	-8,29	-10,05	-12,18	-14,76	-17,89	-21,68	-26,28	-31,85	-38,60	-46,79	
196	-2,84	1,04	-1,69	-1,87	-2,08	-2,30	-2,56	-2,84	-3,15	-3,50	-3,88	-4,31	-4,79	-5,31	-5,90	-6,55	-7,27	-8,07	
194	-4,84	1,58	-2,20	-2,58	-3,02	-3,53	-4,13	-4,84	-5,67	-6,63	-7,77	-9,09	-10,65	-12,47	-14,60	-17,09	-20,01	-23,43	
198	-0,84	-0,17	-0,92	-0,90	-0,89	-0,87	-0,85	-0,84	-0,83	-0,81	-0,80	-0,78	-0,77	-0,76	-0,74	-0,73	-0,72	-0,71	
$\bar{x} =$ $= 198,8$	$n_1(z_p) =$ $\alpha(F) =$		2,25	2,68	3,21	3,87	4,66	5,64	6,84	8,30	10,10	12,30	15,01	18,33	22,41	27,44	33,61	41,21	
			2,191	2,048	1,937	1,851	1,783	1,730	1,689	1,659	1,637	1,623	1,615	1,613	1,615	1,623	1,634	1,649	

Статистические характеристики ряда z , найдем по членам ряда, представленным в таблице 15: среднее значение $\bar{z} = 0,82$, несмещенное стандартное отклонение $S(z) = 18,33$. Стандартная неопределенность типа А значения $\bar{z}$, следовательно, равняется $u_A(\bar{z}) = \frac{18,33}{\sqrt{25}} = 3,67$.

Найдем для ряда z , стандартную неопределенность типа Б. Расширенная неопределенность типа Б результата измерений плотности дистиллированной воды обусловлена неточностью учета поправки на плотность воздуха и оценивается значением $0,75 \cdot 10^{-6} \frac{\text{кг}}{\text{л}}$. Следовательно,

$U_B(y) = 0,75$. Расширенная неопределенность типа Б значений z , равна $U_B(z) = 0,75^{1,6} = 0,63$, стандартная неопределенность —

$u_B(\bar{z}) = \frac{0,63}{\sqrt{2 \cdot 1,6 + 1}} = 0,31$. С учетом этих оценок суммарная стандартная

неопределенность значения $\bar{z}$ равна $u_c(\bar{z}) = \sqrt{3,67^2 + 0,31^2} = 3,68$.

Эффективное число степеней свободы равно $v_{\text{эф}} = 24 \cdot \frac{3,68^4}{3,67^4} \approx 24$. По таблице 5 для этого числа степеней свободы и вероятности охвата $P = 0,95$ найдем $t_{0,95}(24) = 2,12$. Следовательно, суммарная расширенная неопределенность значения $\bar{z}$ $U(\bar{z}) = 2,12 \cdot 3,68 = 7,80$.

Теперь можно найти результат измерений и его расширенную неопределенность. $\bar{y} = \text{sign}(\bar{z}) \cdot (\bar{z})^{\frac{1}{1,6}} = 0,82^{\frac{1}{1,6}} = 0,9$. $p^* = p_0 + \bar{y} \cdot 10^{-6} = 0,998 + (x_0 + \bar{y}) \cdot 10^{-6} = 0,998 + (198,8 + 0,9) \cdot 10^{-6} = 0,9981997 \text{ кг/л}$. Расширенная неопределенность $\bar{y}$ в соответствии с (4.30) равна $[-7,80 - 0,82]^{\frac{1}{1,6}}$;

$[7,80 + 0,82]^{\frac{1}{1,6}} = [-3,37; 3,84]$.

Следовательно, расширенная неопределенность результата измерений: $[p^-; p^+] = 0,998 + (198,8 + [-3,37; 3,84]) \cdot 10^{-6} = 0,9981988 + [-3,37; 3,84] \cdot 10^{-6} = [0,9981954; 0,9982026] \text{ кг/л}$.

Итак, результат измерений плотности дистиллированной воды при $T = 20^\circ \text{C}$: $\bar{p} = 0,9981997 \text{ кг/л}$. Видно, что статистическая обработка результатов этого эксперимента на основе обобщенного нормального рас-

пределения позволила уточнить значение данной физической константы на одну единицу шестого знака после запятой. Оценка неопределенности этого измерения свидетельствует о том, что истинное значение этой константы с вероятностью охвата 0,95 находится в интервале $[0,9981954; 0,9982026] \text{ кг/л}$.

4.5. Косвенные измерения

При проведении косвенных измерений искомое значение величины находят, решая уравнение измерений

$$y = f(x_1, \dots, x_n), \quad (4.32)$$

связывающее значение y измеряемой величины Y со значениями x_i других величин $X_1, \dots, X_n$, непосредственно измеряемых или известных, названных в п. 3.3 входными величинами. По виду функциональной зависимости косвенные измерения делятся на два вида — измерения при линейных и нелинейных зависимостях. Математический аппарат статистической обработки косвенных измерений первого вида разработан детально. При нелинейной зависимости математически строгого метода решения нет. Для таких задач используют несколько приближенных методов, основными из которых являются методы линеаризации и приведения.

4.5.1. Статистическая обработка при линейной зависимости результата измерений от входных величин

В этом случае уравнение измерений имеет вид

$$y = \sum_{i=1}^n a_i x_i, \quad (4.33)$$

где a_i — постоянные коэффициенты при величинах x_i , являющихся аргументами уравнения, n — число аргументов.

Если коэффициенты a_i также определяют экспериментально, то результат измерений находят поэтапно: сначала оценивают каждое слагаемое $a_i x_i$ как результат косвенного измерения величины, равной произведению двух других величин; затем вычисляют значение $\bar{y}$ искомой величины и оценку его неопределенности.

Результат косвенного измерения $\bar{y}$ находят следующим образом. Измеряют величины $X_1, \dots, X_n$ и вносят в результаты этих измерений поправки на все известные систематические погрешности. Определяют оценки $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ измеренных величин. Если величина X_i измерялась один раз, то $\bar{x}_i = x_{i1}$, где x_{i1} — результат однократного измерения. Если эта величина измерялась многократно, то

$$\bar{x}_i = \frac{1}{m_i} \sum_{j=1}^{m_i} x_{ij}, \quad (4.34)$$

где m_i — число измерений величины X_i . В дальнейшем имеется в виду только (4.34), т. к. результат однократного измерения является ее частным случаем.

Вычисляют результат косвенного измерения по формуле

$$\bar{y} = \sum_{i=1}^n a_i \bar{x}_i. \quad (4.35)$$

На следующем этапе вычисляют стандартные неопределенности $u(x_i)$, $i = 1, \dots, n$, аргументов. Если имеются основания предполагать коррелированность результатов измерений $\bar{x}_i$ и $\bar{x}_j$ всех или части аргументов, то вычисляют коэффициенты их корреляции r_{ij} .

Методика оценивания стандартных неопределенностей приведена в п. 3.3. Стандартную неопределенность по типу А вычисляют по формуле СКО случайной погрешности результата многократных измерений

$$u_A(\bar{x}_i) = \sqrt{\frac{1}{m_i(m_i - 1)} \sum_{j=1}^{m_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2}. \quad (4.36)$$

Если оценка величины Y получена с учетом результата одного измерения величины X_i , для оценки неопределенности проводят

еще $(m_i - 1)$ ее измерений, и на их основании вычисляют $u(\bar{x}_i)$ по формуле СКО случайной погрешности результата однократного измерения

$$u_A(\bar{x}_i) = \sqrt{\frac{1}{(m_i - 1)} \sum_{j=1}^{m_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2}. \quad (4.37)$$

Исходные данные для оценивания стандартной неопределенности по типу Б перечислены в п. 3.3. Неопределенности этого типа обычно представляют в виде границ $\pm U_{Bj}(x_i)$, $j = 1, \dots, l_i$, расширенной неопределенности, с указанием коэффициента охвата k_{Bj} (здесь l_i — число источников неопределенности типа Б результата измерений $\bar{x}_i$). При неизвестном законе распределения наиболее распространенным является предположение о равномерном законе распределения в указанных границах. При этом $k_{Bj} = \sqrt{3}$.

Стандартные неопределенности типа Б, в соответствии с п. 3.3, вычисляют по формуле

$$u_{Bj}(\bar{x}_i) = \frac{U_{Bj}(x_i)}{k_{Bj}}. \quad (4.38)$$

Стандартная неопределенность результата $\bar{x}_i$ равна среднеквадратичной сумме этих оценок:

$$u(\bar{x}_i) = \sqrt{u_A^2(\bar{x}_i) + \sum_{j=1}^{l_i} u_{Bj}^2(\bar{x}_i)}. \quad (4.39)$$

Коэффициенты корреляции оценивают в соответствии с (3.11) и (3.12). Анализируют существенность корреляционных связей между оценками аргументов. Критерием отсутствия этой связи является выполнение неравенства

$$\left| \frac{r(x_i, x_j)}{\sqrt{1-r^2(x_i, x_j)}} \right| < \frac{t_p(m-2)}{\sqrt{m-2}}, \quad (4.40)$$

где $t_p(m-2)$ — коэффициент распределения Стьюдента при вероятности P и $(m-2)$ -х степенях свободы,

$$m = \min(m_i, m_j).$$

Вычисляют суммарную стандартную неопределенность $u(\bar{y})$. При некоррелированных оценках $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ ее определяют по формуле

$$u(\bar{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2 u^2(\bar{x}_i)}, \quad (4.41)$$

а при наличии корреляции — по формуле

$$u(\bar{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2 u^2(\bar{x}_i) + \sum_{i,j=1, i \neq j}^n a_i a_j r(x_i, x_j) \bar{u}(x_i) \bar{u}(x_j)}. \quad (4.42)$$

Расширенную неопределенность результата измерений определяют по формуле (3.16), в которой коэффициент охвата k определяют по (3.17), а эффективное число степеней свободы ν_{eff} вычисляют по формуле

$$\nu_{eff} = \frac{u^4(\bar{y})}{\sum_{i=1}^n \frac{a_i^4 u^4(\bar{x}_i)}{\nu_{i,eff}}}, \quad (4.43)$$

в которой $\nu_{i,eff}$ — эффективное число степеней свободы при определении оценки $\bar{x}_i$.

Если все неопределенности типа Б оценены по равновероятному закону, то для каждой из них выполняется $\nu_i = \infty$. Тогда эффективное число степеней свободы для оценки $\bar{x}_i$ равно

$$\nu_{i,eff} = (m_i - 1) \cdot \frac{u^4(\bar{x}_i)}{u_A^4(\bar{x}_i)}, \text{ где } m_i \text{ — число измерений величины } X_i.$$

Подставляя эту формулу в (4.43), получим для этого случая:

$$\nu_{eff} = \frac{u^4(\bar{y})}{\sum_{i=1}^n \frac{a_i^4 u_A^4(\bar{x}_i)}{m_i - 1}}. \quad (4.44)$$

Рассмотрим теперь нелинейную зависимость $y = f(x_1, \dots, x_n)$.

4.5.2. Метод линеаризации нелинейной зависимости

Этот метод предполагает разложение этой функции в ряд Тейлора

$$y = f(x_1, \dots, x_n) = f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)}{\partial x_i} \Delta x_i + R, \quad (4.45)$$

где $\frac{\partial f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)}{\partial x_i}$ — первая производная от функции $f(x_1, \dots, x_n)$

по x_i , вычисленная в точке $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$,

$$\Delta x_i = x_i - \bar{x}_i,$$

$$R = \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)}{\partial x_i^2} (\Delta x_i)^2 + \sum_{i,k=1, i \neq k}^n \frac{\partial^2 f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)}{\partial x_i \partial x_k} \Delta x_i \Delta x_k \right] \text{ —}$$

остаточный член разложения.

Метод линеаризации допустим, если приращение функции $\Delta f(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) - f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ можно заменить ее полным дифференциалом $\sum_{i=1}^n \frac{\partial f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)}{\partial x_i} \Delta x_i$, пренебрегая остаточным членом. Условие малости R :

$$R < 0,8u(\bar{y}). \quad (4.46)$$

При проверке этого условия отклонения Δx_i следует брать такими, чтобы они были реально возможными и при них достигался максимум функции $f(x_1, \dots, x_n)$. Таким образом, при методе реализации решение сводится к линейной зависимости измеряемой величины от входных величин. За результат измерений принимается

$$\bar{y} = f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n). \quad (4.47)$$

Второе слагаемое формулы (4.45) служит для оценки неопределенности этого результата измерения. Уравнение

$$\Delta y = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)}{\partial x_i} \Delta x_i \quad (4.48)$$

является уравнением косвенных измерений абсолютной погрешности измерения Δy , которая определяется по известным погрешностям Δx_i . С другой стороны, это уравнение измерений относится к линейным уравнениям, метод корректного решения которых рассмотрен выше. Поэтому, положив $a_i = \frac{\partial f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)}{\partial x_i}$ и приняв

за аргументы абсолютные погрешности измерений Δx_i , получим, по аналогии с формулами (4.41) и (4.42), при некоррелированных значениях входных величин

$$u(\bar{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)}{\partial x_i} \right]^2 u^2(\bar{x}_i)}, \quad (4.49)$$

а при наличии корреляции —

$$u(\bar{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(\bar{x}_i) + \sum_{i \neq j} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j} r(x_i, x_j) u(x_i) u(x_j)}. \quad (4.50)$$

Расширенную неопределенность результата измерений определяют по формуле (3.16), в которую подставляют коэффициент охвата, определенный с учетом эффективного числа степеней свободы, вычисляемого по формуле (4.43). Если все неопределенности типа Б оценены по равновероятному закону, то эффективное число степеней свободы определяют, в соответствии с формулой (4.44), так:

$$v_{\text{eff}} = \frac{u^4(\bar{y})}{\sum_{i=1}^n \frac{\left[\frac{\partial f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)}{\partial x_i} \right]^2 u_A^4(\bar{x}_i)}{m_i - 1}}. \quad (4.51)$$

Пример 4.6. Необходимо оценить результат косвенного измерения плотности твердого тела и его неопределенность.

Найдем плотность твердого тела по формуле $\rho = \frac{M}{V}$, где M — масса тела, V — его объем. Для этого выполним 11 измерений массы и объема и вычислим результаты измерений входных величин:

$$m_M = m_V = m = 11, \bar{M} = 252,9120 \text{ кг}, \bar{V} = 195,3798 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3,$$

$$u^2(\bar{M}) = 19,4 \cdot 10^{-14} \text{ кг}^2,$$

$$u^2(\bar{V}) = 16,4 \cdot 10^{-20} \text{ м}^6, \max(|\Delta M|) = 31 \cdot 10^{-7} \text{ кг},$$

$$\max(|\Delta V|) = 32 \cdot 10^{-10} \text{ м}^3.$$

Результат измерений равен

$$\bar{\rho} = \frac{\bar{M}}{\bar{V}} = \frac{252,9120}{195,3798 \cdot 10^{-3}} = 1,294463 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3.$$

Для оценки неопределенности этого результата воспользуемся методом линеаризации. Найдем производные:

$$\frac{\partial \rho(\bar{M}, \bar{V})}{\partial M} = \frac{\partial \rho(M, V)}{\partial M} \Big|_{M=\bar{M}, V=\bar{V}} = \frac{1}{V} \Big|_{V=\bar{V}} = \frac{1}{\bar{V}},$$

$$\frac{\partial \rho(\bar{M}, \bar{V})}{\partial V} = \frac{\partial \rho(M, V)}{\partial V} \Big|_{M=\bar{M}, V=\bar{V}} = -\frac{M}{V^2} \Big|_{M=\bar{M}, V=\bar{V}} = -\frac{\bar{M}}{\bar{V}^2} = -\frac{\bar{\rho}}{\bar{V}},$$

$$\frac{\partial^2 \rho(\bar{M}, \bar{V})}{\partial M^2} = \frac{\partial^2 \rho(M, V)}{\partial M^2} \Big|_{M=\bar{M}, V=\bar{V}} = \left[\frac{\partial}{\partial M} \left(\frac{1}{V} \right) \right] \Big|_{M=\bar{M}, V=\bar{V}} = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \rho(\bar{M}, \bar{V})}{\partial V^2} &= \frac{\partial^2 \rho(M, V)}{\partial V^2} \Big|_{M=\bar{M}, V=\bar{V}} = \left[\frac{\partial}{\partial V} \left(-\frac{M}{V^2} \right) \right] \Big|_{M=\bar{M}, V=\bar{V}} = \\ &= 2 \frac{M}{V^3} \Big|_{M=\bar{M}, V=\bar{V}} = 2 \frac{\bar{M}}{\bar{V}^3} = 2 \frac{\bar{\rho}}{\bar{V}^2}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \rho(\bar{M}, \bar{V})}{\partial M \partial V} = \frac{\partial^2 \rho(M, V)}{\partial M \partial V} \Big|_{M=\bar{M}, V=\bar{V}} = \left[\frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{1}{V} \right) \right] \Big|_{V=\bar{V}} = -\frac{1}{V^2} \Big|_{V=\bar{V}} = -\frac{1}{\bar{V}^2}$$

Стандартная неопределенность результата измерений равна

$$\begin{aligned} u(\bar{\rho}) &= \sqrt{\left[\frac{\partial \rho(\bar{M}, \bar{V})}{\partial M} \right]^2 \cdot u^2(\bar{M}) + \left[\frac{\partial \rho(\bar{M}, \bar{V})}{\partial V} \right]^2 \cdot u^2(\bar{V})} = \sqrt{\frac{u^2(\bar{M}) + \bar{\rho}^2 \cdot u^2(\bar{V})}{\bar{V}^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{19,4 \cdot 10^{-14} + (1,294463 \cdot 10^3)^2 \cdot 16,4 \cdot 10^{-20}}{(195,3798 \cdot 10^{-3})^2}} = 3,5 \cdot 10^{-6} \text{ кг/м}^3. \end{aligned}$$

Остаточный член разложения в ряд Тейлора равен

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\partial^2 \rho(\bar{M}, \bar{V})}{\partial M^2} \cdot (\Delta M)^2 + \frac{\partial^2 \rho(\bar{M}, \bar{V})}{\partial V^2} \cdot (\Delta V)^2 + 2 \frac{\partial^2 \rho(\bar{M}, \bar{V})}{\partial M \partial V} \cdot \Delta M \cdot \Delta V \right] = \\ &= \frac{\bar{\rho} \cdot (\Delta V)^2 + \Delta M \cdot \Delta V}{\bar{V}^2}. \end{aligned}$$

Так как приращения ΔM и ΔV могут быть как

$$\begin{aligned} R &= \frac{\bar{\rho} \cdot (\Delta V)^2 + \Delta M \cdot \Delta V}{\bar{V}^2} = \\ &= \frac{1,294463 \cdot 10^3 \cdot 32^2 \cdot 10^{-20} + 31 \cdot 10^{-7} \cdot 32 \cdot 10^{-10}}{195,3798^2 \cdot 10^{-6}} = 6,07 \cdot 10^{-11}. \end{aligned}$$

Так как условие (4.46) выполняется ($6,07 \cdot 10^{-11} \ll 0,8 \cdot 3,5 \cdot 10^{-6}$), применение метода линеаризации допустимо. Найдем расширенную неопределенность результата измерений. Эффективное число степеней свободы по формуле (4.51) будет равно

$$v_{\text{эф}} = \frac{u^4(\bar{\rho})}{\left[\frac{\partial \rho(\bar{M}, \bar{V})}{\partial M} \right]^4 u^4(\bar{M}) + \left[\frac{\partial \rho(\bar{M}, \bar{V})}{\partial V} \right]^4 u^4(\bar{V})} = (m-1) \bar{V}^4 \cdot \frac{u^4(\bar{\rho})}{u^4(\bar{M}) + \bar{\rho}^4 u^4(\bar{V})} =$$

$$= 10 \cdot (195,3798 \cdot 10^{-3})^4 \cdot \frac{(3,5 \cdot 10^{-6})^4}{(19,4 \cdot 10^{-14})^2 + (1,294463 \cdot 10^3)^4 \cdot (16,4 \cdot 10^{-20})^2} =$$

$$= 10 \cdot \frac{(1,953798 \cdot 3,5)^4}{19,4^2 + 1,294463^4 \cdot 16,4^2} = \frac{10 \cdot 2186,7}{376,36 + 755,17} \approx 19.$$

Коэффициент охвата k в соответствии с таблицей 5 будет равен 2,14. Расширенная неопределенность результата измерений составит $U(\bar{\rho}) = 2,14 \cdot 3,5 \cdot 10^{-6} = 7,5 \cdot 10^{-6} \text{ кг/м}^3$. Следовательно, измеряемая величина при коэффициенте охвата 2,14, соответствующем вероятности охвата 0,95, находится в интервале:

$$\begin{aligned} &[(1,294463 - 7,5 \cdot 10^{-6}) - (1,294463 + 7,5 \cdot 10^{-6})] \text{ кг/м}^3 = \\ &= (1,294455 - 1,294470) \text{ кг/м}^3. \end{aligned}$$

4.5.3. Метод приведения [4]

Этот метод обработки результатов косвенных измерений применяют, когда метод линеаризации не гарантирует требуемую точность результата измерений из-за невыполнения условия (4.46). Он заключается в представлении совокупности значений косвенно измеряемой величины в виде ряда результатов прямых измерений. Различные сочетания отдельных результатов измерений x_{ij} входных величин X_i подставляют в уравнение косвенного измерения (4.32) и вычисляют соответствующие значения y_s ($s = 1, \dots, m$) измеряемой величины Y . Полученный таким образом ряд значений y_s можно рассматривать как ряд результатов прямых измерений. Результат измерений вычисляют по формуле $\bar{y} = \frac{1}{m} \sum_{s=1}^m y_s$.

стандартную неопределенность типа А — по формуле

$$u_A(\bar{y}) = \sqrt{\frac{1}{m(m-1)} \sum_{i=1}^m (y_i - \bar{y})^2}, \text{ расширенную неопределенность}$$

типа А — по формуле $U_A(\bar{y}) = t_p(m-1)u_A(\bar{y})$, где $t_p(m-1)$ — квантиль распределения Стьюдента. Оценки неопределенности типа Б и суммарной неопределенности также можно рассчитать обычным способом. Однако при этом рекомендуется не забывать, что последние получены на основе применения ряда допущений, в данном случае отвергнутых практикой (в частности, условие (4.46)), и, следовательно, являются весьма приближительными.

4.6. Совместные и совокупные измерения

В практике измерений встречаются случаи, когда искомые величины не могут быть измерены непосредственно или представлены как явные функции непосредственно измеряемых величин. В таких случаях измеряют величины, функционально связанные с искомыми величинами, а значения последних рассчитывают по системе неявных уравнений

$$F_j(x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{nj}, y_1, y_2, \dots, y_k) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (4.52)$$

где F_j — символ функциональной зависимости между величинами в j -м опыте,

$x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{nj}$ — результаты измерений непосредственно измеряемых величин $X_1, X_2, \dots, X_n$ в j -м опыте,

$y_1, y_2, \dots, y_k$ — искомые значения измеряемых величин $Y_1, Y_2, \dots, Y_k$.

Если $Y_1, Y_2, \dots, Y_k$ и $X_1, X_2, \dots, X_n$ являются величинами разного рода, измерения, описываемые уравнениями (4.52), называются совместными. Если же все эти величины являются однородными, измерения называются совокупными.

После подстановки в исходную систему уравнений результатов x_{ij} прямых или косвенных измерений она принимает вид

$$F_j(y_1, y_2, \dots, y_k) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (4.53)$$

Эти уравнения не являются точным отражением истинного соотношения между искомыми значениями $y_1, y_2, \dots, y_k$, т. к. ониотягощены погрешностями результатов измерений x_{ij} . Поэтому их называют условными. Общий метод решения таких систем уравнений заключается в следующем. Среди бесконечного множества возможных решений этой системы (а число решений будет бесконечным при $m > k$) находится некое наилучшее решение $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_k$. Если это решение подставить в условные уравнения, то, вследствие неопределенностей результатов измерений x_{ij} , правые части уравнений будут отличаться от левых частей. Для получения тождеств нужно записать

$$F_j(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_k) + v_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (4.54)$$

где v_j — остаточные погрешности условных уравнений, называемые *невязками*.

В соответствии с принципом Лежандра искомые уравнения имеют наиболее достоверное решение, если сумма квадратов всех невязок будет минимальной:

$$\sum_{j=1}^m v_j^2 = \min. \quad (4.55)$$

Решение условных уравнений по принципу Лежандра называется способом наименьших квадратов. Из (4.55) следует, что полный дифференциал должен равняться нулю:

$$d\left(\sum_{j=1}^m v_j^2\right) = \frac{\partial\left(\sum_{j=1}^m v_j^2\right)}{\partial \bar{y}_1} d\bar{y}_1 + \frac{\partial\left(\sum_{j=1}^m v_j^2\right)}{\partial \bar{y}_2} d\bar{y}_2 + \dots + \frac{\partial\left(\sum_{j=1}^m v_j^2\right)}{\partial \bar{y}_k} d\bar{y}_k = 0.$$

В свою очередь, это равенство будет выполняться при любых значениях дифференциалов $d\bar{y}_i$, только тогда, когда будут справедливы уравнения

$$\frac{\partial(\sum_{j=1}^m v_j^2)}{\partial \bar{y}_i} = 0, i = 1, \dots, k. \quad (4.56)$$

Система (4.56) называется системой нормальных уравнений. Она состоит из k уравнений относительно k неизвестных и дает единственное решение искомых значений $\bar{Y}$, величин Y_i .

При решении этой задачи в общем случае, при нелинейных условных уравнениях и коррелированности результатов отдельных измерений, возникает ряд непреодолимых трудностей. Поэтому на практике всегда стараются привести, тем или иным способом, нелинейные условные уравнения к линейному виду. Один из наиболее распространенных способов заключается в замене неизвестных так, чтобы условные уравнения были линейными относительно новых искомых величин. Другой способ — разложение нелинейной функции в ряд Тейлора с отбрасыванием нелинейной части ряда.

В качестве примера рассмотрим совместные измерения трех разнородных величин — X, Y и Z на основе уравнения связи

$$ax + by + cz = l, \quad (4.57)$$

в котором a, b, c и l — значения непосредственно измеряемых величин (входных величин), x, y и z — искомые значения величин X, Y и Z (выходные величины).

Итак, подставляя в (4.57) результаты измерений a_i, b_i, c_i, l_i , получают ряд условных уравнений:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= l_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z &= l_2, \\ &\dots\dots\dots \\ a_mx + b_my + c_mz &= l_m. \end{aligned}$$

Если число уравнений меньше числа искомых величин, задача неразрешима. Если равно, для каждой величины можно найти числовое значение. Однако они будут отягощены неизвестными погрешностями из-за неопределенностей измерений величин a_i, b_i, c_i, l_i . Поэтому число уравнений в этой системе должно

превышать число неизвестных. Если учесть погрешности измерений входных величин, то эту систему надо переписать в виде

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z - l_1 + v_1 &= 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z - l_2 + v_2 &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ a_mx + b_my + c_mz - l_m + v_m &= 0, \end{aligned}$$

где $v_1, v_2, \dots, v_m$ — невязки уравнений.

Для составления нормальных уравнений учтем, что

$$\sum_{j=1}^m v_j^2 = \sum_{j=1}^m (a_j a_j x^2 + 2a_j b_j xy + 2a_j c_j xz - 2a_j l_j x + b_j b_j y^2 + 2b_j c_j yz - 2b_j l_j y + c_j c_j z^2 - 2c_j l_j z + l_j^2).$$

Следовательно, первое

$$\text{уравнение имеет вид } \frac{\partial(\sum_{j=1}^m v_j^2)}{\partial x} = 2 \sum_{j=1}^m (a_j a_j x + a_j b_j y + a_j c_j z - a_j l_j) = 0, \text{ или в обозначениях Гаусса } ([aa] = \sum_{j=1}^m a_j a_j \text{ и т. д.):}$$

$$[aa]x + [ab]y + [ac]z = [al].$$

Аналогично найдем остальные уравнения. Тогда система нормальных уравнений относительно неизвестных x, y, z примет вид

$$\begin{aligned} [aa]x + [ab]y + [ac]z &= [al], \\ [ab]x + [bb]y + [bc]z &= [bl], \\ [ac]x + [bc]y + [cc]z &= [cl]. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Ее решение дает результат измерений — наилучшие по критерию Лежандра значения искомых величин:

$$\bar{x} = \frac{Da}{D}, \quad \bar{y} = \frac{Db}{D}, \quad \bar{z} = \frac{Dc}{D}, \quad (4.59)$$

где $D = \begin{vmatrix} [aa] & [ab] & [ac] \\ [ab] & [bb] & [bc] \\ [ac] & [bc] & [cc] \end{vmatrix}$ — определитель системы (4.58),

$D_a = \begin{vmatrix} [al] & [ab] & [ac] \\ [bl] & [bb] & [bc] \\ [cl] & [bc] & [cc] \end{vmatrix}$, и т. д. Для оценивания неопределенности

этих значений их подставляют в условные уравнения и вычисляют остаточные погрешности:

$$v_1 = a_1 \tilde{x} + b_1 \tilde{y} + c_1 \tilde{z} - l_1,$$

$$v_2 = a_2 \tilde{x} + b_2 \tilde{y} + c_2 \tilde{z} - l_2,$$

.....

$$v_m = a_m \tilde{x} + b_m \tilde{y} + c_m \tilde{z} - l_m.$$

Стандартная неопределенность системы условных уравнений равна

$$u_A(\sum_{j=1}^m v_j^2) = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^m v_j^2}{m-k}}, \quad (4.60)$$

где m — число условных уравнений, k — число нормальных уравнений, равное числу неизвестных. В рассматриваемом случае $k=3$.

Далее определяют стандартные неопределенности типа А результатов измерений:

$$u_A(\tilde{x}) = \sqrt{\frac{D_{11}}{D}} u_A(\sum_{j=1}^m v_j^2), \quad u_A(\tilde{y}) = \sqrt{\frac{D_{22}}{D}} u_A(\sum_{j=1}^m v_j^2),$$

$$u_A(\tilde{z}) = \sqrt{\frac{D_{33}}{D}} u_A(\sum_{j=1}^m v_j^2), \quad (4.61)$$

$$\text{где } D_{11} = \begin{vmatrix} [bb] & [bc] \\ [bc] & [cc] \end{vmatrix}, \quad D_{22} = \begin{vmatrix} [aa] & [ac] \\ [ac] & [cc] \end{vmatrix}, \quad D_{33} = \begin{vmatrix} [aa] & [ab] \\ [ab] & [bb] \end{vmatrix}.$$

После этого способами, рассмотренными в п. 3.3, находят стандартные неопределенности типа Б и расширенные неопределенности результатов измерений. При этом число степеней свободы принимается равным $m-k$.

Как следует из (4.60), точность результатов измерений тем выше, чем больше число условных уравнений. Если это число невелико или мало отличается от числа неизвестных, то результаты измерений определяются с грубым приближением. Точность этого метода также существенно зависит от знания функциональной зависимости условных уравнений. Их приближенность резко искажает результаты измерений. Если условные уравнения представляют собой грубые эмпирические формулы, то применение способа наименьших квадратов не дает хороших результатов даже при очень точных экспериментальных данных.

Следует отметить, что изложенный метод широко применяется при калибровках СИ для экспериментального определения калибровочных зависимостей. Это зависимости функции преобразования СИ $y(x)$ линейного вида $y = ax + b$, экспоненциального $y = ax^b$, логарифмического $y = a + b \ln x$ и других. В этом случае входными величинами являются результаты измерений величин X и Y на входе и выходе СИ, а искомыми значениями — коэффициенты a и b калибровочной зависимости.

Рассмотрим примеры применения этого метода при совокупных и совместных измерениях.

Пример 4.7. Измерение углов на местности (совокупные измерения).

Необходимо измерить углы x , y и z между объектами A , B , C и D на местности (O — точка, в которой находится наблюдатель), приведенные на рис. 11, и оценить неопределенность результатов измерений, оцениваемую по типу А, при вероятности охвата $P = 0,95$.

Проведено измерение шести углов:

$$\angle AOB = x = 48,3^\circ, \quad \angle AOC = y = 96,8^\circ, \quad \angle AOD = z = 152,9^\circ,$$

$$\angle BOC = y - x = 48,5^\circ, \quad \angle BOD = z - x = 104,4^\circ, \quad \angle COD = z - y = 56,1^\circ.$$

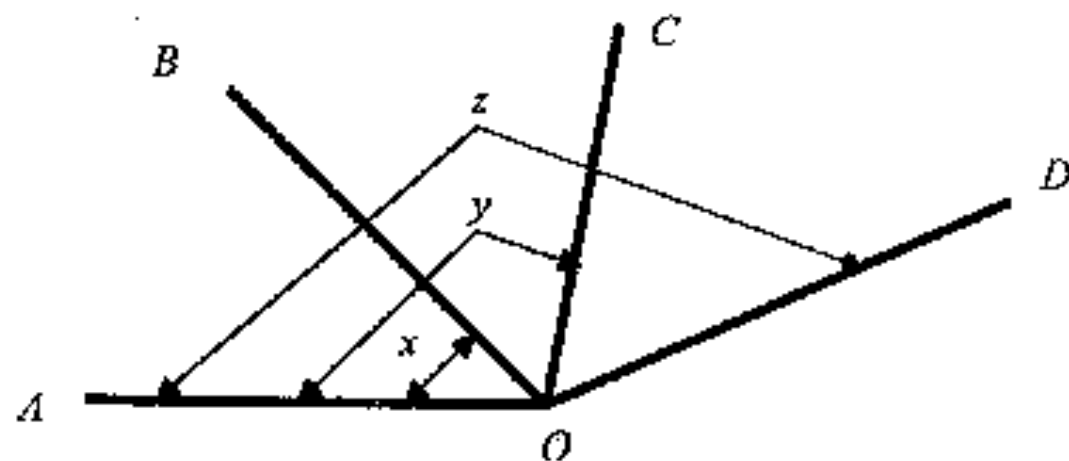


Рис. 11. Измерение углов на местности

Система условных уравнений будет следующей:

$$\begin{cases} 1 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 48,3, \\ 0 \cdot x + 1 \cdot y + 0 \cdot z = 96,8, \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z = 152,9, \\ (-1) \cdot x + 1 \cdot y + 0 \cdot z = 48,5, \\ (-1) \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z = 104,4, \\ 0 \cdot x + (-1) \cdot y + 1 \cdot z = 56,1. \end{cases}$$

Найдем коэффициенты Гаусса:

$$[aa] = 1^2 + 0^2 + 0^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + 0^2 = 3,$$

$$[ab] = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 0 \cdot (-1) = -1,$$

$$[ac] = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 1 = -1,$$

$$[bb] = 0^2 + 1^2 + 0^2 + 1^2 + 0^2 + (-1)^2 = 3,$$

$$[bc] = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 = -1,$$

$$[cc] = 0^2 + 0^2 + 1^2 + 0^2 + 1^2 + 1^2 = 3,$$

$$[a'] = 1 \cdot 48,3 + 0 \cdot 96,8 + 0 \cdot 152,9 + (-1) \cdot 48,5 + (-1) \cdot 104,4 + 0 \cdot 56,1 = -104,6,$$

$$[b'] = 0 \cdot 48,3 + 1 \cdot 96,8 + 0 \cdot 152,9 + 1 \cdot 48,5 + 0 \cdot 104,4 + (-1) \cdot 56,1 = 89,2,$$

$$[c'] = 0 \cdot 48,3 + 0 \cdot 96,8 + 1 \cdot 152,9 + 0 \cdot 48,5 + 1 \cdot 104,4 + 1 \cdot 56,1 = 313,4.$$

Таким образом, система нормальных уравнений (4.58) приняла вид:

$$\begin{cases} 3x - y - z = -104,6, \\ -x + 3y - z = 89,2, \\ -x - y + 3z = 313,4. \end{cases}$$

Определители этой системы: $D = 16$, $D_a = 773,6$, $D_b = 1549$, $D_c = 2446$.
Находим наилучшие результаты измерений:

$$\bar{x} = \frac{773,6}{16} = 48,350^\circ, \quad \bar{y} = \frac{1549}{16} = 96,813^\circ, \quad \bar{z} = \frac{2446}{16} = 152,875^\circ.$$

Теперь вычислим остаточные погрешности:

$$v_1 = 48,35 - 48,3 = 0,05^\circ,$$

$$v_2 = 96,813 - 96,8 = 0,013^\circ,$$

$$v_3 = 152,875 - 152,9 = -0,025^\circ,$$

$$v_4 = -48,35 + 96,813 - 48,5 = -0,037^\circ,$$

$$v_5 = -48,35 + 152,875 - 104,4 = 0,125^\circ,$$

$$v_6 = -96,813 + 152,875 - 56,1 = -0,038^\circ.$$

Стандартная неопределенность системы условных уравнений равна

$$u_A(\sum_{j=1}^6 v_j^2) = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^6 v_j^2}{6-3}} = \sqrt{\frac{0,022}{3}} = 0,086^\circ.$$

Далее, в формулах (4.61) $D_{11} = D_{22} = D_{33} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 8$, и стандартные неопределенности типа А результатов измерений будут следующими:

$$u_A(\bar{x}) = u_A(\bar{y}) = u_A(\bar{z}) = \sqrt{\frac{8}{16}} \cdot 0,086 = 0,061^\circ.$$

В соответствии с таблицей 5, коэффициент охвата при $P = 0,95$ и числе степеней свободы $n = 3$ равен $k = 3,31$. Поэтому расширенная неопределенность результатов измерений углов $U_A(\bar{x}) = U_A(\bar{y}) = U_A(\bar{z}) = 3,31 \cdot 0,061 = 0,202^\circ$.

Таким образом, при вероятности охвата 0,95 измеренные углы находятся в следующих границах: $x = (48,350 \pm 0,2)^\circ$, $y = (96,813 \pm 0,2)^\circ$, $z = (152,875 \pm 0,2)^\circ$.

Пример 4.8. Калибровка газоанализатора (совместные измерения).

В таблице 17 приведены результаты измерений, проведенных при калибровке газоанализатора. Найти линейную калибровочную характеристику прибора $W = x + Cy$ и ее расширенную неопределенность при вероятности охвата $P = 0,95$. Относительная расширенная неопределенность типа Б, обусловленная неопределенностью приписанных значений эталонных мер, составляет $U_{rel}(C) = 0,05$ при $P = 0,95$. Оценить также неопределенность калибровочной характеристики в эксплуатации. Нестабильность аддитивной и мультипликативной погрешностей газоанализатора оцениваются расширенными неопределенностями $U_K(x) = 0,1$ В и $U_K(y) = 0,05$ В/ррт при $P = 0,95$.

Таблица 17

Измерения при калибровке газоанализатора

Номер i измерения	Объемная доля C , ррт	Выходной сигнал прибора W , В
1	0,5	0,5
2	1,0	3,2
3	1,5	5,9
4	2,0	8,5

Система условных уравнений будет следующей:

$$\begin{cases} 1 \cdot x + 0,5 \cdot y = 0,5, \\ 1 \cdot x + 1,0 \cdot y = 3,2, \\ 1 \cdot x + 1,5 \cdot y = 5,9, \\ 1 \cdot x + 2,0 \cdot y = 8,5. \end{cases}$$

Коэффициенты Гаусса: $[aa] = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 4$,

$$[ab] = 1 \cdot 0,5 + 1 \cdot 1,0 + 1 \cdot 1,5 + 1 \cdot 2,0 = 5,0,$$

$$[bb] = 0,5^2 + 1,0^2 + 1,5^2 + 2,0^2 = 7,5,$$

$$[af] = 1 \cdot 0,5 + 1 \cdot 3,2 + 1 \cdot 5,9 + 1 \cdot 8,5 = 18,1,$$

$$[bf] = 0,5 \cdot 0,5 + 1,0 \cdot 3,2 + 1,5 \cdot 5,9 + 2,0 \cdot 8,5 = 29,30.$$

Система нормальных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} 4x + 5y = 18,1, \\ 5x + 7,5y = 29,30. \end{cases}$$

Определители этой системы: $D = 5,0$, $D_x = -10,75$, $D_y = 26,70$. Наилучшие результаты измерений: $\hat{x} = \frac{-10,75}{5} = -2,15$ В, $\hat{y} = \frac{26,70}{5} = 5,34$ В/ррт.

Теперь вычислим невязки (остаточные погрешности):

$$v_1 = -2,15 + 0,5 \cdot 5,34 - 0,5 = 0,02 \text{ В},$$

$$v_2 = -2,15 + 1,0 \cdot 5,34 - 3,2 = -0,01 \text{ В},$$

$$v_3 = -2,15 + 1,5 \cdot 5,34 - 5,9 = -0,04 \text{ В},$$

$$v_4 = -2,15 + 2,0 \cdot 5,34 - 8,5 = 0,03 \text{ В}.$$

Стандартная неопределенность системы условных уравнений равна

$$u_A(\sum_{j=1}^4 v_j^2) = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^4 v_j^2}{4-2}} = \sqrt{\frac{0,003}{2}} = 0,039 \text{ В}.$$

Далее, в формулах (4.61) $D_{11} = 7,5$, $D_{22} = 4$, и стандартные неопределенности типа А результатов измерений будут следующими:

$$u_A(\hat{x}) = \sqrt{\frac{7,5}{5}} \cdot 0,039 = 0,048 \text{ В}, \quad u_A(\hat{y}) = \sqrt{\frac{4}{5}} \cdot 0,039 = 0,035 \text{ В/ррт}.$$

В соответствии с таблицей 5, коэффициент охвата при $P = 0,95$ и числе степеней свободы $n = 2$ равен $k = 4,53$.

Найдем оценки расширенной неопределенности результатов калибровки. По условиям задачи неопределенность в начальной точке шкалы обусловлена только неопределенностью типа А. Поэтому $U(x) = U_A(x) = k \cdot u_A(x) = 4,53 \cdot 0,048 = 0,22$ В. Неопределенность калибровочного коэффициента обусловлена неопределенностью типа А, оцененной выше ($u_A(\hat{y}) = 0,035$ В/ррт), и неопределенностью приписанных значений эталонных мер. Стандартная неопределенность, обусловленная последним источником, оценивается, при ее равновероятном распределении и $P = 0,95$, значением $u_E(y) = \frac{0,05}{1,65} = 0,03$ В/ррт. Суммарная стандартная неопределенность равна

$$u(y) = \sqrt{u_A^2(y) + u_B^2(y)} = \sqrt{0,035^2 + 0,03^2} = 0,046 \text{ В/ррт.}$$

Эффективное число степеней свободы по формуле (3.18) равняется $v_{\text{эф}} = \frac{0,046^4}{\frac{0,035^4}{2} + \frac{0,03^4}{\infty}} = 6,0$. В соответствии с таблицей 5 этому значению соответствует коэффициент охвата $k = 2,52$. При этом $U(y) = 2,52 \cdot 0,046 = 0,116 \text{ В/ррт.}$ Поскольку распределения неопределенности значений x и y взаимно независимы, расширенную неопределенность калибровочной характеристики в точке C диапазона измерений можно оценить их среднеквадратичной суммой: $U_{\text{эксп}}[W(C)] = \sqrt{0,22^2 + (0,116C)^2}$. На рис. 12 представлены графики калибровочной зависимости $W(C) = -(-2,15 + 5,34C) \text{ В}$ и их границ $W_{\text{min}}(C) = W(C) - U[W(C)]$, $W_{\text{max}}(C) = W(C) + U[W(C)]$, соответствующих вероятности охвата 0,95.

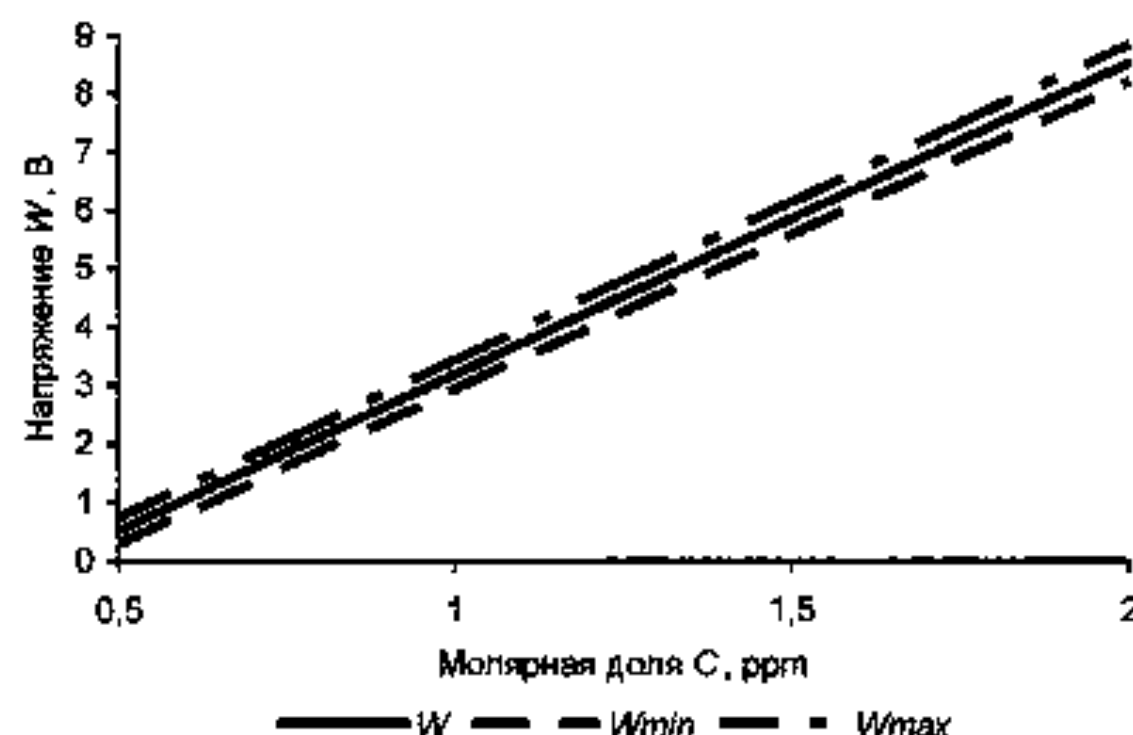


Рис. 12. Калибровочная характеристика газовализатора и ее границы, соответствующие вероятности охвата 0,95

Оценим теперь нестабильность калибровочной характеристики. Стандартные неопределенности, обусловленные нестабильностью аддитивной и мультипликативной погрешностей газовализатора,

равны $u_x(x) = \frac{0,1}{1,65} = 0,06 \text{ В}$ и $u_x(y) = \frac{0,05}{1,65} = 0,03 \text{ В/ррт.}$ Суммарные стандартные неопределенности этих значений равны $u(x) = \sqrt{0,048^2 + 0,06^2} = 0,077 \text{ В}$ и $u(y) = \sqrt{0,046^2 + 0,03^2} = 0,055 \text{ В/ррт.}$ Эффективные числа их степеней свободы по формуле (3.18) равняются $v_{\text{эф}}(x) = \frac{0,077^4}{\frac{0,048^4}{2} + \frac{0,06^4}{\infty}} = 13,2$ и $v_{\text{эф}}(y) = \frac{0,055^4}{\frac{0,035^4}{2} + \frac{0,03^4}{\infty}} = 12,2$. В соответствии с таблицей 5 им соответствуют коэффициенты охвата $k(x) = 2,23$ и $k(y) = 2,25$. При этом $U(x) = 2,23 \cdot 0,077 = 0,172 \text{ В}$ и $U(y) = 2,25 \cdot 0,055 = 0,124 \text{ В/ррт.}$ Расширенная неопределенность калибровочной характеристики в точке C диапазона измерений равняется $U_{\text{эксп}}[W(C)] = \sqrt{0,172^2 + (0,124C)^2}$.

Пример 4.9. Экологическая оценка производственного шума (совместные измерения)².

Производственным шумом называют нежелательный беспорядочный набор звуков, вредно воздействующий на состояние здоровья работающих. Различные по частоте и интенсивности звуки распространяются в виде продольных колебаний в воздушной среде. Человеческое ухо слышит звуки в диапазоне частот от 16–20 до 20 000 Гц, реагируя не на абсолютное значение звукового давления, а на его относительное изменение. И поскольку между энергией раздражения и слуховым восприятием существует приблизительно логарифмическая зависимость, для удобства измерения шума введена величина — уровень силы звука L в дБ, который определяется по формуле

$$L = 10 \cdot \lg_{10} \left(\frac{I}{I_0} \right), \quad (4.62)$$

где I — сила звука, Вт/м², $I_0 = 1 \cdot 10^{-12} \text{ Вт/м}^2$ — пороговая сила звука.

Наличие в помещении большого количества отражающих поверхностей существенно повышает уровень силы звука. Силу звука в таком помещении оценивают по формуле

² Лабораторная работа кафедры «Информационные системы экологической безопасности» СПбГПУ.

$$I = N \left[\frac{1}{4\pi r^2} + \frac{4(1 - \alpha_{\text{ср}})}{\alpha_{\text{ср}} S} \right], \quad (4.63)$$

где N — мощность источника звука, Вт, r — расстояние до источника звука, м, S — общая площадь ограждающих поверхностей, м^2 , $\alpha_{\text{ср}}$ — средний коэффициент звукопоглощения в помещении.

В процессе исследования производственного шума в помещении можно измерить S , расстояние до источника шума r , различных точек помещения и силу звука I , в этих точках. По этим данным затем оценивают мощность источника звука N и санитарную характеристику помещения — его средний коэффициент звукопоглощения $\alpha_{\text{ср}}$.

С метрологической точки зрения это — совместные измерения. Однако зависимость между искомыми и измеряемыми величинами не является линейной. Поэтому преобразуем ее методом замены переменных. Введем следующие обозначения:

$$a = \frac{1}{4\pi r^2}, \quad b = \frac{4}{S}, \quad x = N, \quad y = N \cdot \frac{1 - \alpha_{\text{ср}}}{\alpha_{\text{ср}}}, \quad l = I = I_0 \cdot 10^{L/10}.$$

Прежде всего, необходимо измерить постоянную величину b . Результат измерения площади ограждающих поверхностей $S = (90,5 \pm 0,5) \text{ м}^2$ (неопределенность распределена по равновероятному закону). Поэтому $b = \frac{4}{S} = 0,0442 \text{ м}^{-2}$. Затем в помещении выбраны точки i , в которых проведены измерения расстояний до источника звука r_i и, с помощью шумомера, уровни силы звука L_i . Результаты этих измерений приведены в столбцах 2 и 4 таблицы 18. По значениям r_i, L_i вычислены значения a_i, l_i , приведенные в столбцах 3 и 5 этой таблицы.

Система условных уравнений в этом случае имеет вид:

$$\begin{cases} a_1 x + by = l_1, \\ a_2 x + by = l_2, \\ \dots \\ a_n x + by = l_n. \end{cases}$$

Таблица 18

Протокол измерений

Помер i измерения	Расстояние $r_i, \text{м}$	$a_i, 1/\text{м}^2$	Уровень L_i , дБ	Сила звука $I_i, \text{Вт/м}^2$	Несвязка $y_i, \text{Вт/м}^2$
1	2	3	4	5	6
1	1	0,0796	111,5	0,01412	0,00628
2	2	0,0199	108	0,00631	-0,00081
3	3	0,0088	105	0,00316	-0,00042
4	4	0,0050	102	0,00158	0,00020
5	5	0,0032	98	0,00063	0,00070
6	6	0,0022	91	0,00013	0,00096
7	7	0,0016	87	0,00005	0,00089
8	8	0,0012	83	0,00002	0,00083

Методом, описанным выше, эта система преобразована в систему нормальных уравнений $\begin{cases} [aa]x + [ab]y = [al], \\ [ab]x + [bb]y = [bl], \end{cases}$ где $[aa] = \sum_{i=1}^n a_i^2$, $[ab] =$

$$= \sum_{i=1}^n a_i b = b \sum_{i=1}^n a_i, \quad [bb] = \sum_{i=1}^n b^2 = nb^2, \quad [al] = \sum_{i=1}^n a_i l_i, \quad [bl] = \sum_{i=1}^n b l_i = b \sum_{i=1}^n l_i.$$

Решение этой системы уравнений — $\hat{x} = \frac{D_b}{D}$, $\hat{y} = \frac{D_a}{D}$, где главный

определитель $D = \begin{vmatrix} [aa] & [ab] \\ [ab] & [bb] \end{vmatrix} = b^2 [n \sum_{i=1}^n a_i^2 - (\sum_{i=1}^n a_i)^2]$, $D_a = \begin{vmatrix} [al] & [ab] \\ [bl] & [bb] \end{vmatrix} =$
 $= b^2 [n \sum_{i=1}^n a_i l_i - \sum_{i=1}^n a_i \sum_{i=1}^n l_i]$, $D_b = \begin{vmatrix} [aa] & [al] \\ [ab] & [bl] \end{vmatrix} = b [\sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n l_i - \sum_{i=1}^n a_i \sum_{i=1}^n a_i l_i]$. Та-
 ким образом,

$$\hat{x} = \frac{n \sum_{i=1}^n a_i l_i - \sum_{i=1}^n a_i \sum_{i=1}^n l_i}{n \sum_{i=1}^n a_i^2 - (\sum_{i=1}^n a_i)^2}, \quad \hat{y} = \frac{1}{b} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n l_i - \sum_{i=1}^n a_i \sum_{i=1}^n a_i l_i}{n \sum_{i=1}^n a_i^2 - (\sum_{i=1}^n a_i)^2}. \quad (4.64)$$

Подставив в эти уравнения $b = 0,0442 \text{ м}^{-2}$, $n = 8$, $\sum_{i=1}^8 a_i = 0,1216 \text{ 1/м}^2$,

$\sum_{i=1}^8 a_i^2 = 0,00686 \text{ 1/м}^2$, $\sum_{i=1}^8 l_i = 0,026 \text{ Вт/м}^2$, $\sum_{i=1}^8 a_i l_i = 0,00129 \text{ Вт/м}^2$, полу-
 чим $\hat{x} = 0,25 \text{ Вт}$, $\hat{y} = 0,012 \text{ Вт}$.

Для оценивания неопределенности этих значений вычислены невязки условных уравнений, приведенные в столбце 6 таблицы. Стандартная неопределенность системы условных уравнений в соответствии с (4.60) равна

$$u_A(\sum_{i=1}^8 v_i^2) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^8 v_i^2}{8-2}} = \sqrt{\frac{4,3 \cdot 10^{-5}}{6}} = 0,00268 \text{ Вт/м}^2.$$

$$D_{11} = [bb] = nb^2, \quad D_{22} = [aa] = \sum_{i=1}^n a_i^2,$$

$$u_A(\bar{x}) = \sqrt{\frac{D_{11}}{D}} \cdot u_A(\sum_{i=1}^8 v_i^2) = \sqrt{\frac{8}{8 \sum_{i=1}^8 a_i^2 - (\sum_{i=1}^8 a_i)^2}} \cdot u_A(\sum_{i=1}^8 v_i^2) =$$

$$= \sqrt{\frac{8}{8 \cdot 0,00686 - 0,1216^2}} \cdot 0,00268 = 0,038 \text{ Вт},$$

$$u_A(\bar{y}) = \sqrt{\frac{D_{22}}{D}} \cdot u_A(\sum_{i=1}^8 v_i^2) = \frac{1}{b} \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^8 a_i^2}{n \sum_{i=1}^8 a_i^2 - (\sum_{i=1}^8 a_i)^2}} \cdot u_A(\sum_{i=1}^8 v_i^2) =$$

$$= \frac{1}{0,0442} \cdot \sqrt{\frac{0,00686}{8 \cdot 0,00686 - 0,1216^2}} \cdot 0,00268 = 0,025 \text{ Вт}.$$

Переходим к измеряемым величинам. Проведя обратную замену переменных, получим значения измеряемых величин: $\hat{N} = \bar{x} = 0,25 \text{ Вт}$,

$$\hat{y} \cdot \hat{\alpha}_{\text{эф}} = \bar{x} \cdot (1 - \hat{\alpha}_{\text{эф}}), \text{ откуда } \hat{\alpha}_{\text{эф}} = \frac{\bar{x}}{\bar{x} + \bar{y}} = \frac{0,25}{0,25 + 0,012} = 0,95. \text{ Вычислим}$$

стандартные неопределенности значений $\hat{N}$ и $\hat{\alpha}_{\text{эф}}$. $u_A(\hat{N}) = u_A(\bar{x}) = 0,038 \text{ Вт}$. Для оценки неопределенности $\hat{\alpha}_{\text{эф}}$ разложим

функцию $\alpha_{\text{эф}} = f(x, y) = \frac{x}{x+y}$ в ряд Тейлора около значения $\hat{\alpha}_{\text{эф}} = \frac{\bar{x}}{\bar{x} + \bar{y}}$, ограничиваясь только его линейной частью. Тогда, учитывая, что

$$\Delta f(x, y) = f(\bar{x}, \bar{y}) - f(x, y) = \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{x=\bar{x}, y=\bar{y}} \Delta x + \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{x=\bar{x}, y=\bar{y}} \Delta y,$$

$$\text{где } \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{y}{(x+y)^2}, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = -\frac{x}{(x+y)^2}, \text{ а также то, что величины}$$

x и y не коррелированы, получим:

$$u_A(\hat{\alpha}_{\text{эф}}) = \frac{\sqrt{\bar{y}^2 u_A^2(\bar{x}) + \bar{x}^2 u_A^2(\bar{y})}}{(\bar{x} + \bar{y})^2} = \frac{\sqrt{0,0442^2 \cdot 0,038^2 + 0,25^2 \cdot 0,025^2}}{(0,0442 + 0,25)^2} = 0,075.$$

Стандартная неопределенность результата измерения площади отражающих поверхностей $u_A(S) = \frac{0,5}{1,73} = 0,3 \text{ м}^2$. Следовательно, стандартная

неопределенность величины b равна $u_b(b) = \left| \frac{\partial b}{\partial S} \right| \cdot u_A(S) = b \cdot \frac{u_A(S)}{S} =$
 $= 0,0442 \cdot \frac{0,3}{90} \approx 0,00015 \text{ м}^2$. Формулы (4.64) показывают, что она влияет

только на результат измерений $\alpha_{\text{эф}}$. $u_B(\hat{\alpha}_{\text{эф}}) = \left| \frac{\partial \alpha_{\text{эф}}}{\partial y} \right| \cdot \left| \frac{\partial y}{\partial b} \right| \cdot u_b(b) =$
 $= \frac{\bar{x}}{(\bar{x} + \bar{y})^2} \cdot \frac{\bar{y}}{b} \cdot u_b(b) = \frac{0,25 \cdot 0,012}{(0,25 + 0,12)^2 \cdot 0,0442} \cdot 0,00015 \approx 0,00015$ — несущественно по сравнению с $u_A(\hat{\alpha}_{\text{эф}}) = 0,075$.

Таким образом, $u(\hat{N}) = u_A(\hat{N}) = 0,038 \text{ Вт}$, $u(\hat{\alpha}_{\text{эф}}) \approx u_A(\hat{\alpha}_{\text{эф}}) = 0,075$.

Расширенная неопределенность определяется по формулам (3.16), (3.17), в которых $v_{\text{эф}}(\hat{N}) = n - 2 = 6$, и, по формуле (3.18),

$$v_{\text{эф}}(\hat{\alpha}_{\text{эф}}) = (n - 2) \cdot \frac{(\bar{x} + \bar{y})^3 u^4(\hat{\alpha}_{\text{эф}})}{\bar{y}^4 u_A^4(\bar{x}) + \bar{x}^4 u_A^4(\bar{y})} = 6 \cdot \frac{0,262^8 \cdot 0,075^4}{0,012^4 \cdot 0,038^4 + 0,25^4 \cdot 0,025^4} =$$

$\approx 6 \cdot 0,46 = 2,76$. В соответствии с таблицей 5, этим значениям соответствуют коэффициенты охвата $k(\hat{N}) = 2,52$, $k(\hat{\alpha}_{\text{эф}}) = 3,0$. Поэтому $U(\hat{N}) = 2,52 \cdot 0,038 = 0,1 \text{ Вт}$, $U(\hat{\alpha}_{\text{эф}}) = 3,0 \cdot 0,075 = 0,225$.

Итак, мощность источника шума $N = (0,25 \pm 0,1) \text{ Вт}$, ожидаемое значение среднего коэффициента звукопоглощения помещения $\hat{\alpha}_{\text{эф}} = 0,95$, а расширенная неопределенность этой величины находится в границах $u_{\text{эф}} = [0,725 - 1]$. Приведенные оценки расширенной неопределенности получены при предположении об их соответствии распределению Стьюдента и вероятности охвата $P = 0,95$.

МЕЖДУНАРОДНАЯ СИСТЕМА ЕДИНИЦ SI

5.1. Системы единиц, принцип их построения

Единство измерений подразумевает согласованность размеров единиц всех величин. Это становится очевидным, если вспомнить о возможности измерения одной и той же величины прямыми и косвенными измерениями. Такая согласованность достигается созданием системы единиц. Но, хотя преимущества системы единиц по сравнению с набором разобщенных единиц были осознаны очень давно, первая система единиц появилась только в конце XVIII века. Это была знаменитая метрическая система (метр, килограмм, секунда), утвержденная 26 марта 1791 г. Учредительным собранием Франции. Первую научно обоснованную систему единиц, как совокупность произвольных основных единиц и зависящих от них производных единиц, в 1832 г. предложил К. Гаусс. Он построил систему единиц, названную абсолютной, за основу которой были приняты три произвольные, независимые друг от друга единицы: миллиметр, миллиграмм и секунда. Развитием системы Гаусса были появившаяся в 1881 г. система СГС (сантиметр, грамм, секунда), удобная для применения в электромагнитных измерениях, и различные ее модификации.

Развитие промышленности и торговли в эпоху первой промышленной революции потребовало унификации единиц в международном масштабе. Начало этому процессу было положено 20 мая 1875 г. подписанием 17 странами (в том числе Россией, Германией, США, Францией, Англией) Метрической конвенции, к которой в дальнейшем присоединились многие страны. Согласно этой конвенции было установлено международное сотрудничество в области метрологии. В Севре, расположенном в пригороде Парижа, было создано Международное бюро мер и весов (МБМВ) с целью проведения международных метрологических исследований и хранения

международных эталонов. Для руководства МБМВ был учрежден Международный комитет мер и весов (МКМВ), включающий консультативные комитеты по единицам и ряду видов измерений. Для решения принципиальных вопросов международного метрологического сотрудничества стали регулярно проводить международные конференции, называемые Генеральными конференциями по мерам и весам (ГКМВ). Все страны, подписавшие Метрическую конвенцию, получили прототипы международных эталонов длины (метр) и массы (килограмм). Были также организованы периодические сличения этих национальных эталонов с международными эталонами, хранящимися в МБМВ. Тем самым метрическая система единиц впервые получила международное признание. Однако после подписания Метрической конвенции были разработаны системы единиц для различных областей измерений — СГС, СГСЭ, СГСМ, МТС, МКС, МКГСС. Вновь возникает проблема единства измерений, уже между различными областями измерений. И в 1954 г. Х ГКМВ предварительно, а в октябре 1960 г. XI ГКМВ окончательно принимают Международную систему единиц SI, которая с незначительными изменениями действует по настоящее время. На следующих заседаниях ГКМВ в нее неоднократно вносились изменения и дополнения. В настоящее время система единиц SI регламентирована стандартом ИСО 31 [27] и по существу является международным регламентом, обязательным для применения. В нашей стране стандарт ИСО 31 утвержден в качестве государственного стандарта ГОСТ 8.417-02 [28].

Система единиц SI образована в соответствии с общим принципом образования систем единиц, который был предложен К. Гауссом в 1832 г. В соответствии с ним все физические величины подразделяют на две группы: величины, принятые за независимые от других величин, которые называют основными величинами; все остальные величины, называемые производными, которые выражают через основные и уже определенные производные величины при помощи физических уравнений. Из этого следует и классификация единиц: единицы основных величин являются основными единицами системы, а единицы производных величин — производными единицами.

Итак, сначала образуется система величин — совокупность величин, образованная в соответствии с принципом, когда одни величины принимаются за независимые, а другие являются функциями независимых величин. Величина, входящая в систему величин

и условно принятая в качестве независимой от других величин этой системы, называется основной величиной. Величина, входящая в систему величин и определяемая через основные и уже определенные производные величины, называется производной величиной.

Единица основной величины данной системы величин называется основной единицей. Производная единица — это единица производной величины данной системы величин, образованная в соответствии с уравнением, связывающим ее с основными единицами или же с основными единицами и уже определенными производными единицами.

Таким путем образуется система единиц величин — совокупность основных и производных единиц заданной системы величин.

5.2. Основные единицы SI

Минимальное число основных единиц определяется следующим образом. Пусть между числовыми значениями N разнородных физических величин имеется n уравнений связи, в качестве которых выступают известные физические закономерности. В каждом уравнении имеется свой коэффициент пропорциональности, которому можно придать любое значение и, в частности, приравнять его к единице. Таким образом, эти коэффициенты являются известными числами, а величины — неизвестными, искомыми. Число величин всегда больше числа уравнений связи: $N > n$. Для того чтобы найти значения этих N величин из имеющейся системы n уравнений, необходимо добавить в эту систему еще $N - n$ уравнений, т. е. задать значения $N - n$ величин. Следовательно, эти величины должны иметь единицы, независимые от других величин.

Таким образом, минимальное количество основных величин равно $N - n$. Такая система величин считается теоретически оптимальной. На практике число основных величин больше: $N - n + p$. В этом случае в системе, состоящей из n уравнений, число неизвестных меньше n , т. к. равно $N - (N - n + p) = n - p$. Следовательно, эта система уравнений переопределена и имеет бесконечное множество решений. Для того чтобы обеспечить единственное решение, необходимо в эту систему добавить p уравнений. Поэтому приходится p коэффициентов уравнений принимать равными

не единице, а некоторым числам, определяемым в результате решения данной системы уравнений. Эти коэффициенты называются фундаментальными физическими константами. Примерами таких констант являются гравитационная постоянная, постоянные Планка и Больцмана.

Какие единицы из общей их совокупности следует выбрать в качестве основных единиц системы? Однозначного ответа на этот вопрос нет. При решении этой проблемы руководствуются практической целесообразностью, принимая во внимание различные аргументы, например, такие как:

- выбор в качестве основных минимального числа величин, отражающих наиболее общие свойства материи,
- наиболее ясное отражение взаимосвязи основных величин, принадлежащих различным разделам физики,
- высокая точность воспроизведения единиц и передачи их размеров,
- простота образования производных величин и единиц,
- преемственность единиц, т. е. сохранение их размеров и наименований при внесении изменений в систему единиц.

Эти критерии часто вступают в противоречие друг с другом. Поэтому выбор окончательного варианта является предметом соглашения, закрепляемого решением ГКМВ.

Рассмотрим, как это реализовано в системе SI. В измерениях пространства и времени основным является уравнение движения

$$v = K \frac{dl}{dt},$$

где v — скорость, l — длина, t — время, K — произ-

вольно выбранный коэффициент, значение которого зависит от выбора единиц. Добавление остальных величин (площади, объема, ускорения и др.) сопровождается добавлением соответствующего уравнения связи и поэтому кардинально ничего не меняет. Итак, $N = 3$ и $n = 1$, следовательно, $N - n = 2$. Поэтому приняты две основные величины: длина l и время t и, соответственно, две основные единицы: метр и секунда. В 1983 г. скорости света в вакууме, истинное значение которой неизвестно в принципе, по соглашению было придано точное значение — 299 792 458 м/с. При этом единица длины — метр была определена как расстояние, которое проходит свет в вакууме за $1/299\,792\,458$ долей секунды. При таком определении метра коэффициент пропорциональности K

в уравнении движения остался равным 1. Если бы было сохранено старое определение метра и одновременно постулировалось постоянство скорости света, K нельзя было бы принять равным 1, и он был бы фундаментальной физической константой.

В соответствии со своим теоретическим определением метр воспроизводится посредством измерения длины волны сверхстабильных гелий-неоновых и аргоновых лазеров. Относительная неопределенность его воспроизведения не превышает $1 \cdot 10^{-9}$. Другая основная единица — секунда — определена как время, равное 9 192 631 770 периодам излучения, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия-133. Она воспроизводится посредством измерения частоты излучения атомов цезия-133 с относительной неопределенностью, не превышающей $1 \cdot 10^{-13}$. Видно, что неопределенность воспроизведения метра на 4 порядка больше, чем неопределенность воспроизведения секунды. Сличение эталонов длины и частоты теоретически возможно на основе известного соотношения $L = \frac{h}{\nu}$ длины волны L и частоты ν (h — постоянная Планка).

Практически это станет осуществимо, когда ведущие метрологические центры мира будут оснащены усовершенствованными компараторами, пригодными для сличений эталонов частоты на границе оптического и радиодиапазонов (так называемыми РОМЧ — радиооптическими частотными мостами). Поэтому вполне вероятно, что в перспективе с целью повышения точности измерений длины ее единица будет воспроизводиться путем сличения с эталонами частоты. При этом длина фактически станет производной величиной, зависимой от времени. Но, скорее всего, формально метр будет по-прежнему являться основной единицей SI.

При переходе к механическим измерениям уравнение движения дополняется законом Ньютона $F = K_1 m a$ (F — сила, m — масса, a — ускорение) и законом всемирного тяготения $F = K_2 \frac{m_1 m_2}{r^2}$ (r — расстояние между телами). Если положить $K_1 = K_2 = 1$, то добавляются две величины (F и m) и два уравнения связи.

Следовательно, теоретически можно не вводить дополнительные независимые величины и считать массу производной величиной. Например, при $m = m_1 = m_2$ из этих уравнений следует: $m = a r^2$. Если воспроизвести это уравнение, единица массы будет массой такой материальной точки, которая сообщает единичное ускорение другой материальной точке, находящейся на единичном расстоянии. Однако точность воспроизведения такой единицы была бы очень низкой. Поэтому введена третья основная единица — единица массы (килограмм) — масса международного прототипа килограмма, хранящегося в МБМВ. При этом для того чтобы сохранить единственность решения системы величин, пришлось в закон всемирного тяготения ввести коэффициент пропорциональности, отличный от единицы, — гравитационную постоянную $\gamma = (6,6720 \pm 0,041) \cdot 10^{-11} \text{ (Н} \cdot \text{м}^2\text{)/кг}^2$. γ является фундаментальной физической константой.

Единица массы к настоящему времени осталась единственной основной единицей, воспроизводимой не на основе физического эффекта, а искусственно созданной мерой (материальным прототипом). Б.Н. Тейлор еще в 1977 г. отметил пять основных недостатков такого определения единицы: возможность повреждения и даже утраты; прототип аккумулирует посторонние вещества и его трудно очистить от них; прототип стареет неизвестным образом; его нельзя часто использовать из-за боязни износа; он доступен только в одной лаборатории. Кроме того, к точности прототипа (относительная неопределенность на уровне $1 \cdot 10^{-7}$) уже подбираются требования к точности ряда измерительных технологий, использующих измерения массы. Поэтому в настоящее время проводятся работы по поиску оптимального способа переопределения единицы массы на основе того или иного физического явления. В 2005 г. ГКМВ принял Рекомендацию № 1 (SI-2005) «Подготовительные шаги к новым определениям килограмма, ампера, кельвина и моля через фундаментальные константы» [29]. Поэтому недалек тот день, когда масса станет воспроизводиться через другие величины SI, формально, видимо, оставаясь основной величиной.

В термодинамике одну и ту же величину — термодинамическую температуру T — определяют четыре уравнения связи:

- закон Менделеева — Клайперона $pV = \frac{m}{M}RT$ (p — давление, M — молярная масса, R — универсальная газовая постоянная);
- уравнение средней кинетической энергии поступательного движения молекулы идеального газа $W = 1,5k_B T$ (k_B — постоянная Больцмана);
- закон Стефана — Больцмана $W_R = \sigma T^4$ (σ — постоянная Стефана — Больцмана), связывающий объемную плотность электромагнитного излучения W_R с температурой;
- закон смещения Вина $\lambda_m = \frac{b}{T}$ (b — постоянная Вина), связывающий длину волны максимального излучения λ_m с температурой.

При этом добавляются одна величина (температура) и четыре коэффициента уравнений. С теоретической точки зрения этих уравнений достаточно, чтобы определить температуру как производную величину. Однако историческое развитие науки и то исключительное место, которое занимает температура в физике, сделали целесообразным ее принятие в качестве основной величины. Выделение температуры в число основных величин привело к регламентации новой фундаментальной физической константы — постоянной Больцмана k_B и определению остальных констант этой области измерений (R , σ и b) через нее и другие константы.

Единица термодинамической температуры — кельвин (К) — $1/273,16$ часть термодинамической температуры тройной точки воды. Измерения температур в термодинамической шкале сложны, трудоемки и требуют уникальной дорогостоящей аппаратуры. Кроме того, случайные погрешности такого измерения существенно превышают случайные погрешности платиновых термометров сопротивления. Поэтому для измерений используют практические температурные шкалы, построенные путем интерполяции большого количества реперных точек, в качестве которых используют тройные точки, точки плавления и затвердевания различных чистых веществ. В настоящее время действует максимально приближенная к термодинамической шкале международная практическая шкала

МТШ-90, принятая 17 сессией Консультативного комитета по термометрии в 1989 г. В соответствии с [29] определение кельвина также будет уточнено.

В электромагнетизме к уравнениям механики необходимо добавить два уравнения: закон Кулона $F = K \frac{q_1 q_2}{r^2}$ (q — электрический заряд) и взаимосвязь тока I с электрическим зарядом

$$I = \frac{q}{t}.$$

В этих двух уравнениях введены три новых величины: q , I и K . Все остальные единицы электрических величин определяются из законов электростатики и электродинамики. Следовательно, $N - n = 1$. Поэтому в системе SI вводится новая основная единица — единица тока ампер (А). Тогда заряд выразится из соотношения $q = It$. Коэффициент пропорциональности в законе

Кулона принял вид $K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$, где ϵ_0 — фундаментальная физическая константа, получившая название «диэлектрическая проницаемость вакуума». Закон Кулона при этом выражается так:

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Ампер определен как сила неизменяющегося тока, который при прохождении по двум параллельным проводникам бесконечной длины и ничтожно малой площади кругового поперечного сечения, расположенным в вакууме на расстоянии 1 м один от другого, вызвал бы на каждом участке проводника длиной 1 м силу взаимодействия, равную $2 \cdot 10^{-7}$ Н. Воспроизведение этой единицы на основе данного определения возможно с помощью специальных измерительных установок, называемых токовыми весами. Однако достигнутая к настоящему времени точность этих установок невелика: относительная стандартная неопределенность составляет не менее $4 \cdot 10^{-6}$. При этом с использованием эталонов вольта и ома ампер воспроизводится с относительной стандартной неопределенностью не более $1 \cdot 10^{-8}$. Поэтому в настоящее время в электрических измерениях имеется противоречивая ситуация: теоретически ампер считается основной единицей SI, а вольт — производной. На

Основные единицы SI

Наименование	Величина		Единица	
	Размерность	Рекомендуемое обозначение	Наименование	Обозначение
Длина	L	l	метр	м
Масса	M	m	килограмм	кг
Время	T	t	секунда	с
Сила электрического тока	I	I	ампер	А
Термодинамическая температура	θ	T	кельвин	К
Сила света	J	J	кандела	кд
Количество вещества	N	n	моль	моль

Приведенное рассмотрение показывает, что основным принципом построения системы единиц является удобство ее использования. Преимущественно этими соображениями руководствуются при определении числа основных единиц, выборе основных единиц, выборе их размера. Все другие принципы отталкиваются от этого как основного. Преимущественно по этой причине во многих случаях привычка специалистов и населения к традиционной системе величин и единиц становится более сильным аргументом, чем возможность выбора в качестве основной той единицы, которая воспроизводится с наивысшей точностью. Это подчеркивается и таким фактом, как использование в целом ряде стран систем единиц, отличных от SI. Так, англоязычные страны упорно продолжают использовать свои архаичные системы единиц (дюйм, ярд, фут, миля, фунт, градус Фаренгейта и др.), запрещенные международным стандартом ИСО 31. Имеются и более обоснованные случаи — применение *внесистемных единиц*, разрешенных стандартом ИСО 31. К ним относятся единицы атомной системы единиц, более удобные при решении задач ядерной физики, астрономические единицы длины, такие единицы, как тонна, час, сутки, гектар.

практике же вольт воспроизводят на основе эффекта Джозефсона независимо от других единиц. Ампер, наоборот, зависит от вольты и фактически является производной единицей. Следовательно, применяемые в настоящее время единицы электрических величин находятся вне SI. В соответствии с [29] эта ситуация в ближайшие годы будет исправлена.

Между энергетическими и световыми величинами существует однозначная взаимосвязь, и, строго говоря, для измерений световых величин не требуется введение новой основной величины. Однако, учитывая исторически сложившееся число основных единиц, было принято решение ввести единицу силы света — канделу (кд). В соответствии с ныне действующим определением, *кандела — сила света в заданном направлении источника, испускающего монохроматическое излучение частотой $540 \cdot 10^{12}$ Гц, энергетическая сила света которого в этом направлении составляет $1/683$ Вт/ср.*

Последним в число основных единиц SI был включен в 1971 г. решением XIV ГКМВ моль. *Единица количества вещества — моль — есть количество вещества системы, содержащей столько же структурных элементов, сколько содержится атомов в углероде-12 массой 0,012 кг. Структурные элементы могут быть атомами, молекулами, ионами, электронами и другими частицами или группами частиц.* Эталоны моля никогда не создавались и не создаются, т. к. физическая величина, которую он представляет (число структурных элементов), по существу является счетной величиной. Поэтому и моль является счетной величиной, равной числу Авогадро — $6,02214199(47) \cdot 10^{23}$ частиц. Моль отнесен к числу основных единиц в связи с тем, что он участвует в образовании важнейших производных единиц физической химии — молярной концентрации и молярной доли компонента. Однако эти производные единицы невозможно воспроизвести с участием СИ, хранящих моль, т. к. такие СИ просто не существуют. Их воспроизводят, опираясь на другие основные единицы — метр и килограмм, гравиметрическим методом с использованием известных значений молярных масс компонентов. Ничем, кроме удобства использования моля в химических измерительных задачах, его включение в число основных единиц SI объяснить невозможно [6]. Поэтому целесообразность этого решения до сих пор остается дискуссионной.

Итак, в SI в качестве основных единиц приняты единицы, перечисленные в таблице 19.

5.3. Производные единицы SI. Размерность величин и единиц. Кратные и дольные единицы

В соответствии с принципом К. Гаусса производные единицы должны воспроизводиться методом косвенных измерений путем материализации соответствующего уравнения связи между единицами взаимосвязанных величин. В SI, являющейся когерентной системой единиц, производные единицы образуют при помощи уравнений связи между величинами, в которых числовые коэффициенты равны 1. (Когерентная система единиц — система единиц, в которой все производные единицы связаны с другими единицами системы уравнениями, в которых числовые коэффициенты приняты равными 1.) Например, для определения производной единицы давления используется уравнение связи между величинами $P = \frac{F}{S}$, где P — давление, вызванное силой F , равномерно

распределенной по поверхности; S — площадь поверхности, расположенной перпендикулярно силе. Запишем это уравнение в виде уравнения между единицами: $[P] = \frac{[F]}{[S]}$. Подставив в это урав-

нение единицы силы 1 Н и площади 1 м², получим: $[P] = 1 \text{ Н} : 1 \text{ м}^2 = 1 \text{ Н/м}^2$. Этой производной единице присвоено специальное наименование «паскаль» (Па). Производные единицы SI, имеющие специальные наименования, приведены в таблице 20.

Важным понятием систем единиц является размерность величины (и, соответственно, единицы этой величины). Размерность производной величины показывает, во сколько раз изменится ее единица при определенных изменениях основных единиц. Если с изменением основной единицы в n раз производная единица изменится в n^p раз, говорят, что производная единица обладает размерностью p относительно основной единицы. Например, площадь имеет размерность два относительно длины, ускорение — минус два относительно времени.

Таблица 20

Производные единицы SI, имеющие специальные наименования

Величина		Единица		
Наименование	Формулы размерности	Наименование	Обозначение	Выражение через основные единицы SI
Плоский угол	Отсутствует	радиан	рад	—
Телесный угол	»	стерадиан	ср	—
Частота	T^{-1}	герц	Гц	s^{-1}
Сила	$LM T^{-2}$	ньютон	Н	$m \cdot kg \cdot s^{-2}$
Давление	$L^{-1} M T^{-2}$	паскаль	Па	$m^{-1} \cdot kg \cdot s^{-2}$
Энергия, работа, количество теплоты	$L^2 M T^{-2}$	джоуль	Дж	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}$
Мощность	$L^2 M T^{-3}$	ватт	Вт	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3}$
Количество электричества	TI	кулон	Кл	$c \cdot A$
Электрическое напряжение, потенциал, ЭДС	$L^2 M T^{-3} I^{-1}$	вольт	В	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$
Электрическая емкость	$L^2 M^{-1} T^4 I^2$	фарад	Ф	$m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot s^4 \cdot A^2$
Электрическое сопротивление	$L^2 M T^{-3} I^{-2}$	ом	Ом	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-2}$
Электрическая проводимость	$L^2 M^{-1} T^3 I^2$	сименс	См	$m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot s^3 \cdot A^2$
Поток магнитной индукции	$L^2 M T^{-2} I^{-1}$	вебер	Вб	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$
Магнитная индукция	$M T^{-2} I^{-1}$	тесла	Тл	$kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$
Индуктивность	$L^2 M T^{-2} I^{-2}$	генри	Гн	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-2}$
Световой поток	J	люмен	лм	$cd \cdot sr$

Величина		Единица		
Наименование	Формула размерности	Наименование	Обозначение	Выражение через основные единицы SI
Освещенность	$L^{-2}J$	люкс	лк	$m^{-2} \cdot cd \cdot sr$
Активность радионуклида	T^{-1}	беккерель	Бк	s^{-1}
Поглощенная доза ионизирующего излучения	L^2T^{-2}	грей	Гр	$m^2 \cdot s^{-2}$
Эквивалентная доза излучения	L^2T^{-2}	зиверт	Зв	$m^2 \cdot s^{-2}$

Таким образом, формула размерности величины — это выражение в форме степенного одночлена, являющегося произведением символов основных величин в различных степенях, отражающих связь данной величины с основными величинами. Пусть символами основных величин являются: L — длина, T — время, M — масса, θ — температура, I — сила электрического тока, J — сила света, N — количество вещества. Тогда в рассмотренном выше примере размерность силы равна LM/T^2 , и, следовательно, размерность давления равна $LM/T^2L^2 = M/T^2L$.

Отметим следующие свойства размерности:

1. Обозначим размерность величины A через $\bar{A}$. Тогда очевидны следующие свойства размерности:

- если $C = AB$, то $\bar{C} = \bar{A} \cdot \bar{B}$;
- если $C = A/B$, то $\bar{C} = \bar{A}/\bar{B}$;
- если $C = A^n$, то $\bar{C} = [\bar{A}]^n$.

2. Размерность не зависит от коэффициентов в уравнениях, связывающих величины. Например, размерность площади круга

$$\bar{S}_{\text{кр}} = \frac{\pi}{4}(\bar{d})^2 = \bar{L}^2 \text{ — та же, что и у площади квадрата.}$$

3. Размерность отражает глубинные связи между величинами, более общие, чем связи, описываемые физическими уравнениями.

Одна и та же размерность может быть присуща величинам, имеющим разную природу. Например, работа силы F на расстоянии l равна $A = Fl$. Кинетическая энергия тела массой m , движущегося со скоростью v , равна $B = 0,5mv^2$. Размерности этих качественно различных величин одинаковы: $\bar{A} = \bar{B} = ML^2/T^2$.

Применительно к этому свойству все величины подразделяют на размерные и безразмерные. Величина, в формуле размерности которой символ хотя бы одной из основных величин возведен в степень, не равную нулю, называется размерной величиной. Следовательно, сила и давление являются размерными величинами. Величина, в формулу размерности которой все основные величины входят в степени, равной нулю, называется безразмерной. Например, молярная доля компонента является безразмерной величиной, т. к. в формуле для определения ее размерности моли в числителе и знаменателе взаимно сокращаются.

Таким образом, значение размерной величины всегда записывается именованным числом, а значение безразмерной — именованным (именованным числом называется число с наименованием составляющих его единиц). Однако это не означает, что безразмерная величина является не полноценной физической величиной, существующей в материальном мире, а всего лишь числом, математической абстракцией. В определении величины говорится, что величина является одним из свойств физического объекта. Это полностью соответствует и содержанию понятия безразмерной величины. Далее, единица любой безразмерной величины может быть материализована. Например, молярная доля компонента B

определяется выражением $x_B = \frac{n_B}{n}$, где n_B — количество вещества компонента B , n — количество вещества системы. Следовательно, для того, чтобы воспроизвести единицу молярной доли компонента B , необходимо получить чистое, без примесей, вещество этого компонента. Действительно, в этом веществе $n = n_B$ и, следовательно, $x_B = 1$.

Система SI содержит также кратные и дольные единицы. Кратной единицей называется единица величины, в целое число раз большая системной единицы. Например, единица длины

1 км = 10³ м, т. е. кратна метру. Дольной единицей называется единица величины, в целое число раз меньшая системной единицы. Например, дольная единица длины 1 нм (нанометр) = 10⁻⁹ м является дольной от метра. Для удобства применения все кратные и дольные единицы СИ образуются в соответствии с десятичной системой чисел — они равняются системной единице, умноженной на приставку, равную 10^K, где показатель степени *K* является положительным числом для кратных единиц и отрицательным для дольных единиц. Показатели степени *K* и соответствующие им приставки приведены в таблице 21.

Таблица 21

Приставки для образования кратных и дольных единиц СИ

Показатель степени <i>K</i>	Приставка	Обозначение приставки		Показатель степени <i>K</i>	Приставка	Обозначение приставки	
		международное	русское			международное	русское
18	экса	E	Э	-1	деци	d	д
15	пета	P	П	-2	санти	c	с
12	тера	T	Т	-3	милли	m	м
9	гига	G	Г	-6	микро	μ	мк
6	мега	M	М	-9	нано	n	н
3	кило	k	к	-12	пико	p	п
2	гекто	h	г	-15	фемто	f	ф
1	дека	da	да	-18	атто	a	а

5.4. Величины и единицы физико-химических измерений

Специальное рассмотрение величин и единиц физико-химических измерений в общем курсе метрологии имеет смысл, поскольку эти измерения чрезвычайно широко распространены в современном обществе, и в них имеется определенная специфика. Наиболее распространенные величины и единицы этой области измерений приведены в таблице 22.

Таблица 22

Наиболее распространенные величины и единицы физико-химических измерений

Наименование величины	Определяющее уравнение	Единица
Массовая концентрация компонента В	$\rho_B = \frac{m_B}{V}$, где m_B — масса компонента В в системе, V — объем системы	кг/м ³
Молярная концентрация компонента В	$c_B = \frac{n_B}{V}$, где n_B — количество вещества компонента В в системе	моль/м ³ моль/дм ³
Молекулярная (атомарная) концентрация компонента В	$C_B = \frac{N_B}{V}$, где N_B — число молекул (атомов) компонента В в системе	1/м ³ 1/дм ³
Массовая доля компонента В	$w_B = \frac{m_B}{m}$, где m — масса системы	%
Молярная доля компонента В	$x_B = \frac{n_B}{n}$, где n — количество вещества системы	%, ‰ ppm (млн ⁻¹), ppb (млрд ⁻¹)
Объемная доля компонента В	$\varphi_B = \frac{V_B}{\sum x_A V_{m,A}^*}$, где V_B — объем компонента В в системе, $V_{m,A}^*$ — молярные объемы чистых веществ	%, ppm, ppb
Массовое отношение компонента В	$R_B = \frac{m_B}{m - m_B}$	%
Моляльность компонента В	$b_B = \frac{n_B}{m_A}$, где m_A — масса растворителя	моль/кг
Парциальное давление компонента В	$P_B = x_B \cdot P$, где P — давление газовой смеси	Па

Как видно из таблицы 22, существует обширная группа различных физических величин, отражающих состав веществ. Удобство изложения материалов в научных публикациях, нормативных документах и технических отчетах вызвало потребность в обобщенном наименовании величин этой группы. Так появилось понятие *содержание компонента*, под которым понимается *обобщенное наименование группы величин, отражающих состав веществ*. Употребление наряду с ним в качестве обобщающего понятия термина «концентрация компонента» недопустимо, поскольку давно сложилось более узкое определение этого понятия. В фундаментальной монографии Л.А. Сена «Единицы физических величин и их размерности» [30] написано: «относя число единиц к единице объема, мы получим величину, называемую концентрацией». Этот принцип реализован и в стандарте ИСО 31, и в других нормативных документах: термин «концентрация» является родовым для физических величин, характеризующих содержание компонента в единице объема. Действительно, обратимся к таблице 22. Из нее видно, что понятия, за исключением двух специфических, делятся на две группы: величины, определяющие содержание компонента в единице объема, и относительные величины. Для первой группы родовым понятием является понятие «концентрация», для второй — «доля». Обобщенное наименование всех этих понятий — «содержание компонента» — не повторяется ни одним из подчиненных понятий. Это исключает возможность его двусмысленного толкования. Если употреблять «концентрацию» как синоним понятия «содержание», то получится, что два различных понятия, обобщенное и подчиненное, будут иметь одинаковые термины. Сознавая опасность такого смешения понятий, Л.Р. Стоцкий в справочнике по физическим величинам и единицам [31] написал: «Долно — безразмерную относительную величину — ни в коем случае нельзя называть концентрацией».

Обратимся снова к величинам, представленным в таблице 22. Бросается в глаза, что при конкретном химическом составе и заданных условиях эксперимента между этими величинами имеется взаимно однозначное соответствие, и поэтому можно осуществить пересчет одной величины в другую. Например, можно написать такую цепочку равенств:

$$\frac{m_B}{V} = \frac{m_B}{m} \cdot \frac{m}{V} = \frac{n_B}{V} \cdot \frac{m_B}{n_B} = \frac{V_B}{V} \cdot \frac{m_B}{V_B}$$

Так как $\frac{m}{V} = \rho$ и $\frac{m_B}{V_B} = \rho_B$ — плотность системы и компонента В, а $\frac{m_B}{n_B} = M_B$ — молярная масса компонента В, из этих равенств следуют соотношения между массовой концентрацией ρ_B , массовой долей ω_B , молярной концентрацией c_B и объемной долей φ_B компонента В:

$$\rho_B = \omega_B \cdot \rho = c_B \cdot M_B = \varphi_B \cdot \rho_B$$

Взаимный пересчет этих величин широко применяется в физико-химических измерениях. Такая практика может привести к мнению, что в химическом анализе имеется только одна величина, характеризующая состав объекта, — именно сам состав, а величины, приведенные в таблице 22, есть всего лишь различные способы выражения этой величины [32]. Однако это разные понятия. *Состав* — это совокупность каких-либо элементов, входящих в качестве образующих частей в какое-либо химическое соединение, вещество, а *свойство* — качество, признак, составляющие отличительную особенность чего-либо [33]. Разница между этими понятиями очевидна. Один и тот же состав объекта имеет разные отличительные признаки, характеризуется разными свойствами и, следовательно, величинами. Например, массовая доля характеризует отношение масс компонента и объекта, а объемная доля — отношение их объемов. Ясно, что это не одно и то же, особенно если учесть, что первая не изменяется при изменении температуры объекта, а вторая — изменяется.

С метрологической точки зрения неоднородные величины можно считать тождественными, если единица любой из этих величин может быть получена расчетным путем из единицы другой величины без увеличения неопределенности. Этому требованию соответствует запись величины в любой из кратных или дольных единиц. Если же, осуществляя пересчет одной единицы в другую, используют значения иных величин, например, фундаментальные физические константы, то при этом к неопределенности первой единицы добавляются неопределенности этих значений. При этом неопределенность второй единицы становится больше

неопределенности исходной единицы. Следовательно, эти единицы нетождественны, и в результате пересчета мы перешли к другой величине.

В качестве примера приведем длину волны и частоту. Эти величины нетождественны, т. к. их взаимный пересчет опирается на фундаментальную физическую константу — постоянную Планка, известную с некоторой неопределенностью. Поэтому они являются разнородными величинами. Точно так же разнородными величинами являются различные свойства, отражающие химический состав веществ.

Глава 6

ОБЕСПЕЧЕНИЕ ЕДИНСТВА ИЗМЕРЕНИЙ

6.1. Единство и прослеживаемость измерений

Измерения имеют существенное значение в любой области человеческой деятельности. Но для того чтобы можно было эффективно применять измерения в практической деятельности, необходимо быть уверенным в том, что их результаты останутся неизменными (в пределах требуемой точности) при применении другого средства и метода измерений, изменении оператора, времени и места выполнения измерений и других компонентов измерительных процессов. Это свойство измерений в России и других странах СНГ называют единством измерений.

Чтобы понять значение единства измерений, рассмотрим пример одного из видов измерений. Предположим, перестала функционировать государственная служба единого времени, и все предприятия и граждане страны стали руководствоваться своими часами, не калибруя их по сигналам точного времени. Через некоторое время появится множество проблем, связанных с началом рабочего дня, графиком движения различных видов транспорта, временем работы магазинов и предприятий бытового обслуживания населения. Например, пассажир придет на вокзал, а ему скажут: ваш поезд уже ушел. Со временем число подобных случаев будет стремительно расти, и в конечном итоге это приведет к коллапсу всей транспортной системы страны. Несвоевременная поставка оборудования, сырья и комплектующих изделий, кормов и другой продукции приведет к дезорганизации работы предприятий и обоснованным отказам заказчиков оплачивать такие поставки, что в итоге приведет к кризису финансовой системы страны. Без знания единого времени станет невозможной работа систем связи и навигации, органов здравоохранения и образования и т. д. Ясно,

что функционирование государственной службы единого времени является необходимым условием существования любого государства.

То же самое можно сказать и о других видах измерений. Единство является главным, определяющим признаком измерений, принципиально отличающим их от других видов экспериментального оценивания. Если единство обеспечено, то это значит, что рассматриваемый процесс экспериментальной оценки можно отнести к измерениям. Если же оно не обеспечено, то это говорит о несостоятельности этого процесса как измерительного, вследствие чего он им и не является. В этом случае это какой-либо другой процесс познания — наблюдение, органолептическое оценивание, индикация и т. п., но не измерение. Поэтому, в силу своей важности, обеспечение единства измерений является главной целью и основным содержанием теоретической и практической деятельности метрологов.

Что же понимается под единством измерений? В соответствии с классическим определением, приведенным в [9], *единство измерений — это такое состояние измерений, при котором все их результаты выражены в узаконенных единицах, а погрешности известны с заданной вероятностью*. Это определение, сформулированное в 1960-е годы профессором К.П. Широковым, в значительной степени устарело. Во-первых, условие «все результаты измерений выражены в узаконенных единицах» было включено в это определение по конъюнктурным соображениям, поскольку в то время внедрение Международной системы единиц SI было первоочередной задачей отечественных метрологов. К настоящему времени вопросы внедрения SI давно решены в нашей стране и многих других странах в полном объеме. К тому же, как показывает опыт США и других англоязычных стран, массовое применение в быту, торговле и промышленности традиционных для этих стран единиц, запрещенных SI (фунт, фут, градус Фаренгейта и др.), не имеет серьезных отрицательных последствий.

Второе условие «погрешности измерений известны с заданной вероятностью», по смыслу отвечающее трактовке единства измерений, но не конкретное, в следующем терминологическом НД [34] было сформулировано иначе. Однако и новая формулировка «погрешности измерений не выходят за установленные границы» является декларацией, выражающей основную цель метрологии, на практике недостижимую (как недостижимо истинное значение величины). Поскольку из-за случайного характера погрешности

измерений в любой измерительной технологии вероятность измерительного брака больше нуля, всегда найдется хотя бы одно измерение, погрешность которого превысила установленные границы. Следовательно, если буквально трактовать данное определение, единства измерений никогда не было и не будет.

Так какой же смысл следует вложить в понятие «единство измерений»? При ответе на этот вопрос учтем, что для того чтобы результаты измерений не зависели от выбора средств измерений, парк СИ должен удовлетворять следующему условию: все СИ одной величины должны хранить один и тот же размер единицы. Естественный способ выполнения этого условия заключается в воспроизведении единицы одним исходным эталоном и последующей передаче от него этого размера единицы всем остальным СИ данной величины. Отсюда вытекает принятый в международной практике другой термин, выражающий анализируемое понятие, — *прослеживаемость (the traceability) измерения*. Под ней понимается тот факт, что результат измерения получен путем сравнения размера измеряемой величины с размером единицы, воспроизведенным исходным эталоном данной величины (буквально: результат измерений прослеживается до исходного эталона). Это означает, что все они как бы выполнены одним СИ — исходным эталоном. Очевидно, что единство измерений является следствием их прослеживаемости, и это дает основание считать эти термины синонимами. При этом новое определение лучше, чем классическое, проясняет суть понятия «единство измерений». В дальнейшем будем пользоваться более привычным термином — единство измерений.

6.2. Обеспечение единства измерений

Задача обеспечения единства измерений стоит с незапамятных времен, ибо потребность в этом возникла одновременно с потребностью в измерениях. При этом по мере развития науки и промышленности непрерывно возрастал уровень требований к единству измерений. Это выражается всесторонне:

- охватывается все большее количество областей и видов измерений, непрерывно увеличиваются диапазоны измерений;
- охватываются все сферы приложения измерительной информации (торговля, различные отрасли промышленности

- и сельского хозяйства, военное дело, наука, здравоохранение, транспорт, связь, природоохранная деятельность и т. д.);
- непрерывно возрастают достигнутый уровень точности измерений и требования к точности измерений;
- расширяется территория, охваченная единством измерений, — в средние века отдельный рынок или предприятие, затем населенный пункт, далее регион, государство и, наконец, весь мир;
- повышаются значимость единства измерений и, соответственно, материальные, финансовые и трудовые ресурсы, выделяемые на его обеспечение.

К концу XX века складывавшаяся веками (назовем ее классической) система обеспечения единства измерений сформировалась окончательно. В ее основе лежит определение прослеживаемости, приведенное в п. 6.1. Для того чтобы обеспечить единство в каком-либо виде измерений, необходимо:

- выработать коллегиально и узаконить теоретическое определение единицы этой величины,
- воспроизвести эту единицу каким-то определенным эталоном, являющимся исходным, с возможно более высокой точностью,
- регулярно, с периодичностью, обусловленной нестабильностью СИ, передавать размер единицы, хранимый исходным эталоном, всем СИ данной величины, также с возможно более высокой точностью.

Для решения первой задачи наиболее авторитетные физические и метрологические лаборатории мира проводят научные исследования, направленные на познание новых физических закономерностей и уточнение фундаментальных физических констант. На основании результатов этих исследований высший коллегиальный орган метрологического сообщества мира — Генеральная конференция по мерам и весам — периодически утверждает новые теоретические определения единиц физических величин.

Для решения остальных задач создают иерархические системы:

- эталонов, в которых все они, кроме исходных эталонов, подчиняются другим, более точным эталонам,
- метрологических документов, регламентирующих воспроизведение единиц и передачу их размеров,
- метрологических служб, выполняющих эти работы.

В России первая из названных систем называется технической основой системы обеспечения единства измерений, вторая — нормативной основой, третья — организационной основой.

В промышленно развитых государствах иерархические системы эталонов большинства видов измерений образуют централизованные системы воспроизведения единиц и передачи их размеров. В состав этих систем входят исходные для страны эталоны, называемые национальными эталонами, и иерархические цепочки подчиненных эталонов, осуществляющих передачу размера единицы от национального эталона всем СИ данной величины, применяемым в стране. В виде исключения, в ряде видов измерений встречаются децентрализованные системы обеспечения единства измерений, при которых национальные эталоны отсутствуют. В этом случае единицу воспроизводят одним из двух способов:

- несколькими исходными эталонами, находящимися в различных лабораториях, при этом исходным эталонам размер единицы передают в зарубежных метрологических центрах;
- методом косвенных измерений непосредственно в измерительных лабораториях.

Централизованная система способна обеспечить более высокий уровень единства измерений. Поэтому, как правило, децентрализованные системы применяются на начальной стадии развития вида измерений. Совершенствование любого вида измерений идет путем разработки методов и средств относительных измерений и создания стандартных образцов, на основе которых возникают иерархические цепочки эталонов. Естественный финал этого процесса — создание национального эталона в централизованной системе воспроизведения единицы и передачи ее размера.

6.3. Эталоны единиц величин

Из п. 6.2 следует, что в России и многих других странах мира единство измерений обеспечивается функционированием централизованных систем воспроизведения единиц величин и передачи их размеров, которые представляют собой иерархические цепочки эталонов различной точности. *Эталон — СИ (или комплекс СИ), предназначенное для воспроизведения и (или) хранения единицы и передачи ее размера другим СИ.* По месту в этой иерархической цепочке эталоны подразделяют на первичные, вторичные и рабочие.

Первичным эталоном называют эталон, который воспроизводит единицу и передает ее размер вторичным эталонам. Первичный эталон выполняет задачу воспроизведения единицы величины

для ее использования при всех измерениях данной величины. Очевидно, что уровни точности наиболее ответственных метрологических и рабочих измерений определяются точностями первичных эталонов. Поэтому при создании первичных эталонов всегда стремятся обеспечить наиболее высокую точность, которую можно достигнуть на данном этапе развития науки и техники. После воспроизведения единицы ее размер по иерархической цепочке эталонов доводится до каждого эталона.

Рисунок 13 иллюстрирует этот процесс. Из рисунка видно, что передача размера единицы идет двояко: не только от более точных эталонов менее точным, но и путем расширения диапазонов величины и условий измерений. При этом, поскольку результат каждого измерения отягощен какой-то неопределенностью, в системе передачи размера единицы непрерывно возрастает неопределенность этой единицы. Первичный эталон передает размер единицы вторичным эталонам, которые функционируют в более широком диапазоне измерений, но являются менее точными. Вторичные эталоны передают размер единицы рабочим эталонам (образцовым СИ (далее ОСИ)), а те — менее точным рабочим эталонам (ОСИ).

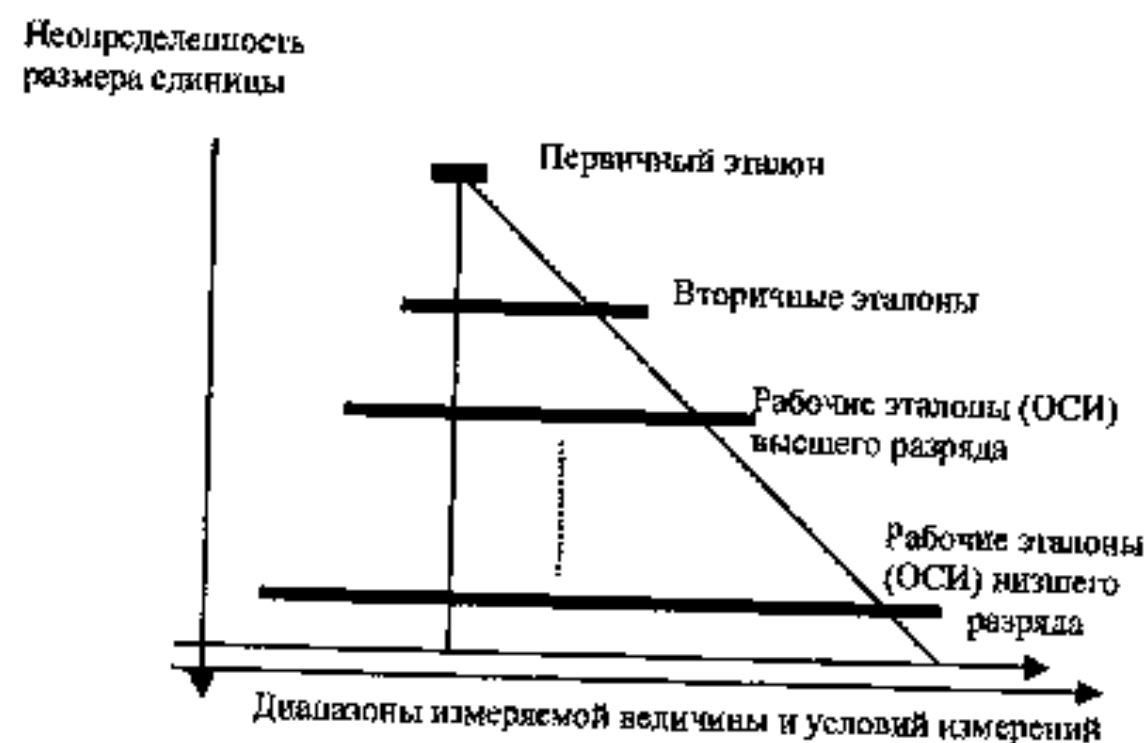


Рис. 13. Схема воспроизведения единицы и передачи ее размера эталонам

Количество ступеней передачи определяется требованиями к точности рабочих СИ и поэтому не может быть очень большим. Во многих видах измерений увеличение диапазонов величины и условий измерений (частота, температура и т. д.) привело к невозможности обеспечить передачу размера единицы с требуемой точностью от действующего первичного эталона всем СИ этого вида. В этих случаях создают несколько первичных эталонов одной единицы, отличающихся диапазонами измерений или условиями измерений. Например, в России единицу давления воспроизводят семь различных первичных эталонов, шесть из которых хранятся во ВНИИМ им. Д.И. Менделеева и один во ВНИИФТРИ. Другой пример: единицу удельной теплоемкости воспроизводят четыре первичных эталона, хранящихся во ВНИИМ им. Д.И. Менделеева, УНИИМ, НПО «Дальстандарт» и ВНИИФТРИ. Такая группа первичных эталонов фактически является эталонным набором, предназначенным для воспроизведения единицы во всем диапазоне измерений. При этом в России один из этих эталонов получает наименование «первичный эталон». Остальные эталоны этого набора называют специальными первичными эталонами (краткая форма — специальные эталоны). В приведенных примерах первичными эталонами называются государственные эталоны, хранящиеся во ВНИИМ им. Д.И. Менделеева, единиц давления в диапазоне 0,05–10 МПа и удельной теплоемкости в диапазоне температур 273,15–700 К. Для обеспечения единства измерений размеры единицы, воспроизводимые этими эталонами, согласуются в граничных областях значений.

Все остальные эталоны не участвуют в воспроизведении единиц. Они хранят размеры единиц, полученные от более точных эталонов, и (или) передают их менее точным эталонам и рабочим СИ. Передача размеров единиц от эталонов рабочим СИ иллюстрируется рис. 14. Вторичные эталоны получают размеры единиц от первичных эталонов и передают их рабочим эталонам. Рабочие эталоны предназначены для поверки и калибровки рабочих СИ. При необходимости их подразделяют на разряды: 1-й, 2-й, 3-й и т. д. В этом случае рабочие эталоны 1-го разряда также передают размер единицы рабочим эталонам 2-го разряда, рабочие эталоны 2-го разряда — рабочим эталонам 3-го разряда и т. д.

Приведенные выше наименования соответствуют международной классификации эталонов, признанной во всем мире, в том числе и в России. В то же время классификация, принятая в России, несколько отличается от международной. Рабочие эталоны по

международной классификации до последнего десятилетия в нашей стране назывались образцовыми СИ (ОСИ). Эти термины фактически являются синонимами: в свое время так перевели на русский язык французское слово «эталон». Но в России всегда имелись существенные различия в статусе первичных и вторичных эталонов (совокупность которых называют эталонной базой страны) и ОСИ и обусловленные ими различия в финансировании и системе метрологического обслуживания. После перехода на международную классификацию статус ОСИ (в том числе серийно выпускаемых ОСИ низших разрядов) как бы сравнился со статусом первичных и вторичных эталонов, со всеми вытекающими последствиями негативного характера для последних. Чтобы восстановить прежнее положение и в то же время не противоречить международной классификации эталонов, в настоящее время принято решение оба термина (и рабочий эталон, и ОСИ) применять в России как равноправные.

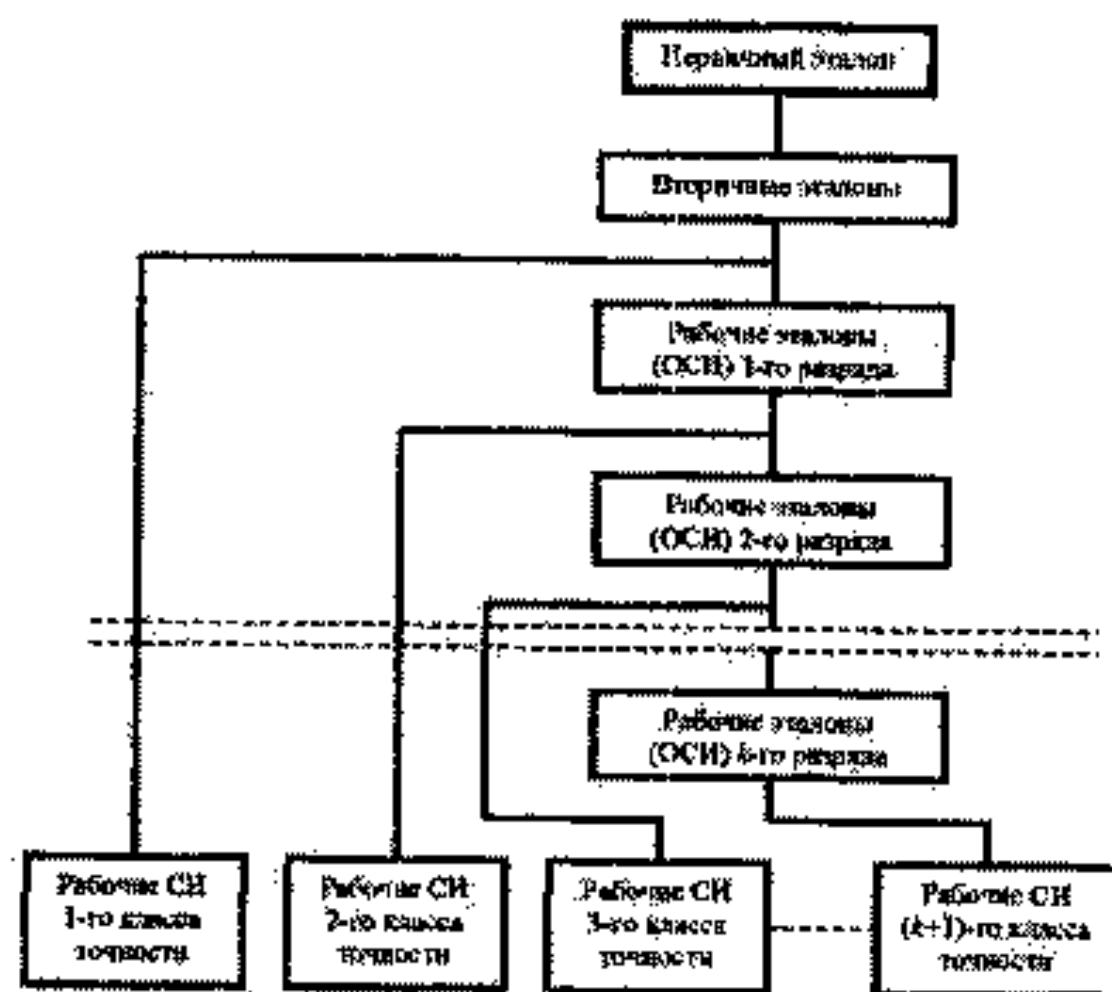


Рис. 14. Передача размеров единиц от эталонов рабочим СИ

В состав эталонов включают:

- средства воспроизведения единицы (первичные измерительные преобразователи, измерительные установки);
- средства хранения размеров единицы (меры);
- средства передачи размеров единицы (компараторы, эталоны сравнения);
- средства хранения и передачи размеров единицы (измерительные приборы);
- другие СИ и технические средства (средства контроля условий измерений, вычислительные средства, системы питания, измерительные принадлежности и др.).

Конструктивно эталоны и ОСИ могут быть оформлены в виде измерительных установок, называемых в этом случае поверочными установками. Основные метрологические требования к эталонам и ОСИ должны обеспечивать высокую точность результатов измерений при воспроизведении единицы, хранении и (или) передаче ее размера. Важнейшим требованием является высокая стабильность, позволяющая обеспечить неизменность размера единицы. Именно этим объясняется осуществленный на рубеже XX и XXI веков переход на воспроизведение основных и многих производных единиц путем реализации высокостабильных квантовых физических эффектов. Необходимыми также являются высокая чувствительность и малая случайная погрешность эталона, а также его низкая чувствительность к изменению условий измерений.

Средством повышения точности измерений на эталоне и уменьшения личных погрешностей оператора является автоматизация измерительных и вычислительных операций. В то же время размер диапазона условий измерений не является существенной характеристикой, т. к. в целях повышения точности эталонных измерений эталоны, как правило, применяются при фиксированных (чаще всего нормальных) условиях измерений.

По числу одноименных СИ, входящих в эталон, различают одиночные эталоны, эталонные наборы и групповые эталоны.

Одиночный эталон состоит из одного СИ. Другая разновидность эталонов — эталонный набор — представляет собой объединение одиночных эталонов с различными номинальными значениями, которое позволяет расширить диапазон воспроизводимых, хранимых

как стандартное отклонение среднего арифметического значения, равна $u[\bar{v}(t)] = \frac{u_v(t)}{\sqrt{n}}$.

Таким образом, стабильность группового эталона, включающего n мер одного типа, в $\sqrt{n}$ раз выше стабильности любой меры этого эталона. Выше будет и точность группового эталона: стандартная неопределенность его значения в момент t равна

$$u_{г.э} = \sqrt{\frac{u_A^2}{n} + u_B^2 + \frac{u_v^2(t)}{n}}. \quad (6.4)$$

Сравнение с формулой (6.2) иллюстрирует эффект от применения групповых эталонов в системах передачи размеров единиц.

Централизованную систему обеспечения единства измерений можно организовывать в метрологических службах различного уровня: на отдельном предприятии, в ведомстве, в стране в целом. При этом иерархическую цепочку передачи размера единицы всем СИ этого вида измерений, применяемым в данной метрологической службе, будет возглавлять один, наиболее точный эталон. Этот эталон называется исходным эталоном (предприятия, ведомства, страны). Таким способом обеспечивается прослеживаемость всех измерений, выполняемых на предприятии или в ведомстве, к своим исходным эталонам, а через них — к исходным эталонам страны.

Исходные эталоны страны в международной метрологической практике называются национальными эталонами, в нашей стране их называют государственными эталонами. Национальные эталоны, являясь наиболее точными СИ своих стран, во многом определяют их научные и технологические возможности. Обычно они хранятся и применяются в национальных метрологических институтах (НМИ). Существуют три различные методики их создания [36].

В соответствии с первой методикой НМИ создает первичный эталон, который осуществляет воспроизведение единицы в точном соответствии с ее определением. Это наиболее фундаментальный подход, обеспечивающий прочную связь между определением единицы и ее физическим воплощением в первичном эталоне. Однако это наиболее трудный и дорогостоящий подход.

Вторая методика также предусматривает создание первичного эталона, но не путем физической реализации теоретического

определения, а на основе квантовых физических эффектов, использование которых позволяет реализовать размер единицы, значение которого согласовано с ее определением. Такой способ позволяет создавать эталоны, обладающие высокой степенью воспроизводимости. Примерами служат использование частотно-стабилизированных лазеров для создания эталона метра, эффекта Джозефсона — для ома и эффекта Холла — для вольт.

Третья методика заключается в использовании в качестве национального эталона вторичного эталона, которому размер единицы передается путем периодического сличения с национальным эталоном какого-либо другого НМИ.

Наиболее крупные и развитые в научном и технологическом плане страны, в их числе и Россия, имеющие потребность в как можно более высоком уровне точности во всех видах измерений, используют первую или вторую методику. Поэтому национальные эталоны этих государств, как правило, являются первичными эталонами. Небольшие страны, не обладающие полным спектром современных отраслей промышленности и поэтому не ощущающие потребность в высокой точности в ряде видов измерений, при создании национальных эталонов часто вынуждены использовать третью методику, как менее затратную. Учитывая это, МБМВ установило, что каждый НМИ при создании своих национальных эталонов имеет право самостоятельного выбора методики их создания.

6.4. Поверка и калибровка средств измерений

Процедура передачи размера единицы от эталона менее точному эталону или рабочему СИ может осуществляться в двух различных формах — посредством калибровки или поверки.

Калибровка — более простая форма, включающая только передачу размера единицы. Калибровкой СИ называют совокупность операций, устанавливающих соотношение между значением величины, полученным с помощью данного СИ, и соответствующим значением величины, определенным с помощью эталона. Из этого определения следует, что при калибровке происходит передача размера единицы величине, воспроизводимой или хранимой эталоном, менее точному СИ путем определения соотношения между значениями величины, хранимыми эталоном, и соответствующими значениями калибруемого СИ. В последующем, при применении

СИ по назначению, это соотношение используется для преобразования показаний СИ в результаты измерений. В процессе калибровки оценивают и приписывают мерам — новые значения, измерительным приборам и измерительным преобразователям — новые калибровочные характеристики (*калибровочная характеристика — зависимость между выходным сигналом y измерительного прибора и измеряемой величиной x*). Значение меры, определенное при калибровке, указывают приписанным значением или аддитивной поправкой, равной отклонению этого значения от значения, приписанного мере на первичной или предыдущей калибровке. Калибровочную характеристику измерительного прибора или измерительного преобразователя, определенную при калибровке, указывают в виде новой зависимости $x = f(y)$ или $y = f(x)$ (функцией, таблицей или графиком). Если калибровочная характеристика является линейной ($y = A + Kx$), новую характеристику можно указать поправками (аддитивной и мультипликативной) к приписанной калибровочной характеристике. *Аддитивной поправкой называют поправку, не зависящую от измеряемой величины, мультипликативной поправкой — поправку, прямо пропорциональную измеряемой величине.* Очевидно, что аддитивная поправка указывает новое значение A , а мультипликативная поправка — новое значение K . Если конструкция калибруемого измерительного прибора позволяет перед его применением проводить установку нуля, можно считать, что $A = 0$. В этом случае калибровочная характеристика задается в виде калибровочного коэффициента K , постоянного для всех точек диапазона (или части диапазона) измерительного прибора. Очевидно, что в процессе калибровки систематические погрешности СИ, накопленные к этому моменту, в основном будут устранены, какими бы значительными они ни были, и СИ восстановит свои начальные метрологические характеристики. Поэтому СИ при калибровке не может быть забраковано в принципе. Целью калибровки не является оценка соответствия СИ установленным техническим требованиям. Этот вопрос решается при поверке.

Поверка — установление органом государственной метрологической службы пригодности СИ к применению на основании экспериментальных исследований его погрешностей. Из этого определения видно, что поверка состоит из двух различных процедур: технической и директивной. Техническая процедура заключается

в экспериментальной оценке погрешностей СИ. Поскольку при измерении значения x величины погрешность СИ равна

$\Delta(x) = \hat{x} - x$, где $\hat{x}$ — результат измерения этой величины поверяемым СИ, x — значение измеряемой величины, определенное с помощью эталона, понятно, что техническая процедура в принципе аналогична процедуре калибровки СИ. Директивная процедура заключается в вынесении решения о соответствии поверяемого СИ установленным требованиям, выраженным в виде пределов допускаемых значений погрешности $\pm \Delta_0(x_i)$, и оформлении документа о допуске или недопуске СИ к дальнейшей эксплуатации. При выполнении условия $-\Delta_0(x_i) \leq \Delta(x_i) \leq \Delta_0(x_i)$ во всех контролируемых точках x_i диапазона измерений поверочный орган выдает владельцу СИ свидетельство, разрешающее дальнейшую эксплуатацию СИ, при нарушении этого условия хотя бы в одной точке x_i — запрещает эксплуатацию. Интересно, что в некоторых странах это разделение функций доведено до логического конца — указанные процедуры выполняются разными службами: экспериментальная оценка погрешностей — калибровочными лабораториями, а принятие решения о соответствии, называемое верификацией, — государственными органами верификации на основании свидетельства калибровочной лаборатории.

Этот факт подчеркивает различие правового статуса калибровки и поверки. Поверка является одним из видов государственного метрологического контроля, который распространяется на измерения, выполняемые при: защите жизни и здоровья человека, охране окружающей среды, обеспечении безопасности, осуществлении торговых операций и взаимных расчетов между покупателем и продавцом. Перечень СИ, подлежащих поверке, утверждается Правительством РФ. Отсюда вытекает ряд жестких требований:

- недопустимость применения для измерений, подлежащих государственному метрологическому контролю и надзору, СИ неповеренных или с просроченным сроком очередной поверки;
- проведение поверки исключительно органами государственного метрологического контроля и надзора или организациями, уполномоченными этими органами;

- строгое соблюдение требований методики поверки, утвержденной на государственном уровне, и установленных межповерочных интервалов.

Все остальные СИ подлежат калибровке. В отличие от поверки, калибровка не является обязательной. Она выполняется по желанию организации, применяющей СИ, собственными силами или специализированными калибровочными лабораториями на коммерческой основе, по методике калибровки, согласованной с организацией, применяющей СИ. То, что к калибровке нет обязательных требований, контролируемых государством, логично, поскольку ущерб от неверных измерений таких СИ в первую очередь несут организации, их применяющие. В то же время, в условиях глобализации современного рынка продукции и услуг обязательным требованием к продукции является документальное подтверждение прослеживаемости измерений, выполненных в процессе производства. Такое подтверждение обеспечивают сертификаты калибровки, выданные калибровочными лабораториями, аккредитованными в европейской или российской системе калибровки. Поэтому предприятия, применяющие СИ, как правило, предпочитают обеспечивать высокое качество калибровки, выполняя ее в аккредитованных калибровочных лабораториях и по утвержденным методикам, соблюдать установленный межкалибровочный интервал, хранить правильно заполненные свидетельства о калибровках.

Калибровка обеспечивает более высокую точность измерений, чем обычная поверка, поскольку при ней происходит восстановление начальной точности СИ. При обычной поверке этого не происходит — СИ, признанное годным, после поверки отправляют в дальнейшую эксплуатацию со всеми погрешностями, которые у него были при поступлении в поверочную лабораторию. Такой упрощенный алгоритм поверки оправдан для торговых весов и гирь, щитовых электроизмерительных приборов и многих других СИ невысокой точности, откалиброванных при первичной поверке на заводе-изготовителе, поскольку он существенно облегчает поверку и эксплуатацию СИ. Если же СИ, подлежащие поверке, применяются для высокоточных измерений, то их поверка, сохраняя все присущие ей правовые признаки (проведение органами государственного метрологического контроля и надзора, обязательность соблюдения межповерочного интервала и др.), проводится с восстановлением начальной точности, т. е. по методике калибровки.

6.5. Увеличение неопределенности размера единицы при его передаче калибруемому и поверяемому СИ

Как указывалось в п. 6.2, в иерархической цепочке эталонов при любой форме передачи размера единицы, и при калибровке, и при поверке, увеличивается неопределенность размера единицы. Но происходит это по-разному.

Результат калибровки будет отягощен не только неопределенностью размера единицы, хранимого эталоном, но и многими другими составляющими. Стандартная неопределенность значения единицы, полученного СИ при калибровке, при некоррелированных составляющих будет выражаться формулой

$$u = \sqrt{u_0^2 + u_A^2 + \sum_{i=1}^n u_{B_i}^2}, \quad (6.5)$$

где u_0 — стандартная неопределенность значения единицы, воспроизводимого или хранимого вышестоящим эталоном, использованным при калибровке,

u_A — стандартная неопределенность измерений, оцениваемая по типу А, источниками которой являются случайные погрешности эталона, поверяемого СИ и метода измерений,

u_{B_i} — стандартная неопределенность измерений, оцениваемая по типу В, обусловленная i -м источником погрешности передачи размера единицы,

n — число источников погрешности передачи.

Например, при калибровке измерительного прибора методом прямых измерений калибровочную характеристику определяют на основании результатов многократных измерений калибруемым прибором величин, воспроизводимых эталонными мерами. Источником неопределенности калибровочной характеристики являются, во-первых, неопределенности эталонных мер, обусловленные нестабильностью этих мер и неопределенностями результатов их калибровки. Но, кроме них, к источникам неопределенности следует отнести: случайную погрешность калибруемого измерительного прибора; отличие влияющих величин, определяющих условия

измерений при калибровке (температура, давление, влажность и т. д.) от их номинальных значений; погрешность построения калибровочной характеристики методом наименьших квадратов, округление результатов измерений и др. Поэтому всегда $m > m_0$, т. е. точность любого СИ после его калибровки всегда ниже точности эталона, использованного при калибровке этого СИ.

Механизм увеличения неопределенности размера единицы при поверке совершенно другой. Поскольку поверка по существу является процедурой контроля СИ на соответствие контрольному допуску Δ , для нее характерно такое неприятное явление, как статистические ошибки¹. Обратимся к теории статистических ошибок поверки СИ. Обозначим через x погрешность поверяемого СИ, через y погрешность измерений при поверке. Вследствие погрешности измерений результат измерения погрешности СИ при поверке будет равен $x + y$. СИ является годным при выполнении условия $-\Delta \leq x \leq \Delta$, где Δ — предел допускаемой погрешности поверяемого СИ. Но при поверке СИ будет признано годным при выполнении условия $-\Delta \leq x + y \leq \Delta$, которое можно переписать так: $-\Delta - y \leq x \leq \Delta - y$. Ошибки поверки обусловлены различием этих условий. При $y > 0$ годное СИ будет ошибочно забраковано (ошибка 1-го рода), если $\Delta - y < x \leq \Delta$, а бракованное СИ будет ошибочно признано годным (ошибка 2-го рода), если $-\Delta - y < x \leq -\Delta$. При $y < 0$, наоборот, ошибка 1-го рода будет при $-\Delta \leq x < -\Delta - y$, ошибка 2-го рода — при $\Delta \leq x < \Delta - y$.

Иллюстрация этого эффекта приведена на рисунке 15. Там показаны плотность $f(x)$ распределения погрешности СИ по совокупности СИ одного типа, находящихся в эксплуатации, и интервалы значений погрешности x , при которых происходят статистические

¹ Эти ошибки называют статистическими, чтобы отличать их от ошибок, обусловленных нарушением методики измерений или промахами оператора. В отличие от них, статистические ошибки не могут быть поставлены в вину оператору, т. к. они являются объективным следствием неопределенности измерений при поверке.

ошибки поверки. Поскольку вероятность того, что в этой совокупности имеются СИ, погрешность которых находится в этих интервалах, всегда больше нуля, возникновение статистических ошибок поверки неизбежно. Полностью искоренить их нельзя, можно лишь стремиться к уменьшению их доли в общем массиве результатов поверок.

Таким образом, статистическая ошибка 1-го рода заключается в том, что вследствие погрешности измерений при поверке будет ошибочно забраковано фактически годное СИ. Статистическая ошибка 2-го рода заключается в том, что вследствие погрешности измерений при поверке будет ошибочно признано годным бракованное СИ.

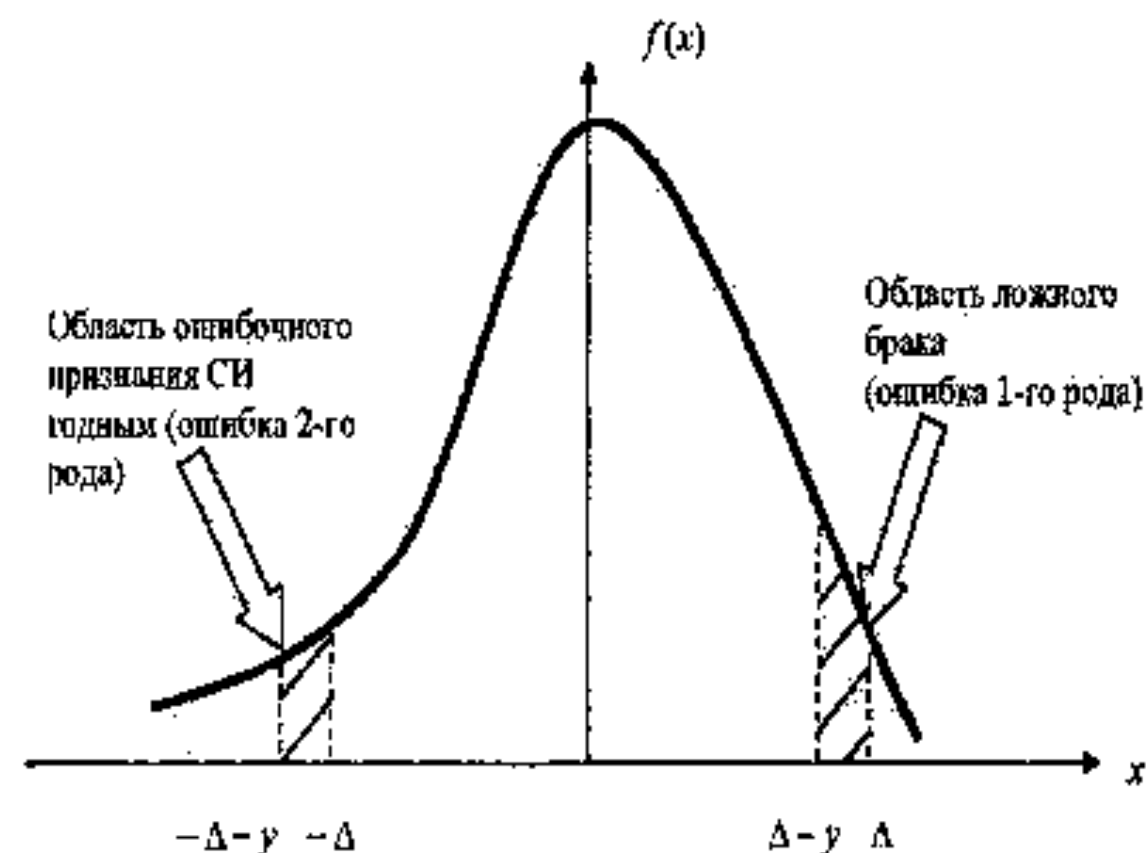


Рис. 15. Области значений погрешности СИ, при которых возникают статистические ошибки поверки, при $y > 0$

Оценим вероятности статистических ошибок поверки 1-го рода P_1 и 2-го рода P_2 при поверке СИ, случайная погрешность которых незначительна по сравнению с систематической погрешностью. Пусть $f(x)$ — плотность распределения погрешности x поверяемого СИ по совокупности СИ данного типа, $g(y/x)$ — условная плотность распределения погрешности измерений при поверке y .

Ошибка 1-го рода произойдет, когда одновременно будут выполнены условия: $-\Delta \leq x \leq \Delta$ и $y < -\Delta - x$ или $y > \Delta - x$. В соответствии с формулой полной вероятности выразим P_1 следующим интегралом

$$P_1 = \int_{-\Delta}^{\Delta} \int_{-\infty}^{-\Delta-x} f(x)g(y/x)dydx + \int_{-\Delta}^{\Delta} \int_{\Delta-x}^{\infty} f(x)g(y/x)dydx. \quad (6.6)$$

Ошибка 2-го рода произойдет, когда одновременно будут выполнены условия: $x < -\Delta$ или $x > \Delta$ и $-\Delta - x \leq y \leq \Delta - x$. Поэтому вероятность ошибки 2-го рода равна

$$P_2 = \int_{-\infty}^{-\Delta} \int_{-\Delta-x}^{\Delta-x} f(x)g(y/x)dydx + \int_{\Delta}^{\infty} \int_{-\Delta-x}^{\Delta-x} f(x)g(y/x)dydx. \quad (6.7)$$

Погрешность измерений при поверке не зависит от систематической погрешности поверяемого СИ. Поэтому $g(y/x) = g(y)$ не зависит от x , и формулы (6.6) и (6.7) упрощаются:

$$\begin{aligned} P_1 &= \int_{-\Delta}^{\Delta} f(x)[G(-\Delta-x) + 1 - G(\Delta-x)]dx, \\ P_2 &= \int_{-\infty}^{-\Delta} f(x)[G(\Delta-x) - G(-\Delta-x)]dx + \\ &+ \int_{\Delta}^{\infty} f(x)[G(\Delta-x) - G(-\Delta-x)]dx, \end{aligned} \quad (6.8)$$

где $G(z) = \int_{-\infty}^z g(y)dy$ — функция распределения погрешности измерений при поверке.

Обычно при оценке статистических ошибок поверки принимают, что распределение систематических погрешностей СИ по совокупности СИ одного типа подчиняется нормальному закону с нулевым математическим ожиданием: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, где σ —

стандартное отклонение этого распределения. Также принимают, что распределение погрешности измерений при поверке подчиняется нормальному закону. Далее рассмотрим две различные постановки задачи.

1. Оценка статистических ошибок поверки при использовании конкретного эталона. В этом случае погрешность измерений $y = m + \xi$, где m — систематическая погрешность измерений, ξ — случайная погрешность измерений. При стандартной неопределенности u , оцениваемой по типу А, плотность распределения y равна $g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}u} e^{-\frac{(y-m)^2}{2u^2}}$.

Далее,

$$G(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}u} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{(y-m)^2}{2u^2}} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{z-m}{u}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi\left(\frac{z-m}{u}\right),$$

где $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ — функция распределения стандартизованной нормальной величины (табулированная функция), т. е. величины, плотность распределения которой равна

$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$. Подставив в (6.8) эти выражения, получим:

$$\begin{aligned}
P_1 &= \int_{-\Delta}^{\Delta} f(x) \left[\Phi\left(-\frac{\Delta+x+m}{u}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{\Delta-x-m}{u}\right) \right] dx = \\
&= \int_{-\Delta/\sigma}^{\Delta/\sigma} \varphi(t) \left[\Phi\left(-\frac{\Delta+t\sigma+m}{u}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{\Delta-t\sigma-m}{u}\right) \right] dt = \\
&= \int_{-\frac{k}{\alpha}}^{\frac{k}{\alpha}} \varphi(t) \left[\Phi\left(-\frac{k+t+\mu}{\alpha}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{k-t-\mu}{\alpha}\right) \right] dt = \\
&= \int_{-\frac{k(1+\beta)}{k(1-\beta)}}^{\frac{k(1+\mu)}{k(1-\beta)}} \varphi(s-\beta k) \left[\Phi\left(-\frac{k+s}{\alpha}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{k-s}{\alpha}\right) \right] ds, \quad (6.9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left[\Phi\left(\frac{\Delta-x-m}{u}\right) - \Phi\left(-\frac{\Delta+x+m}{u}\right) \right] dx + \\
&+ \int_{\Delta}^{\infty} f(x) \left[\Phi\left(\frac{\Delta-x-m}{u}\right) - \Phi\left(-\frac{\Delta+x+m}{u}\right) \right] dx = \\
&= \int_{-\infty}^{\Delta/\sigma} \varphi(t) \left[\Phi\left(\frac{\Delta-t\sigma-m}{u}\right) - \Phi\left(-\frac{\Delta+t\sigma+m}{u}\right) \right] dt + \\
&+ \int_{\Delta/\sigma}^{\infty} \varphi(t) \left[\Phi\left(\frac{\Delta-t\sigma-m}{u}\right) - \Phi\left(-\frac{\Delta+t\sigma+m}{u}\right) \right] dt = \\
&= \int_{-\infty}^{\frac{k}{\alpha}} \varphi(t) \left[\Phi\left(\frac{k-t-\mu}{\alpha}\right) - \Phi\left(-\frac{k+t+\mu}{\alpha}\right) \right] dt + \\
&+ \int_{\frac{k}{\alpha}}^{\infty} \varphi(t) \left[\Phi\left(\frac{k-t-\mu}{\alpha}\right) - \Phi\left(-\frac{k+t+\mu}{\alpha}\right) \right] dt = \\
&= \int_{\frac{k(1-\beta)}{k(1+\beta)}}^{\frac{k(1-\mu)}{k(1+\beta)}} \varphi(s-\beta k) \left[\Phi\left(\frac{k-s}{\alpha}\right) - \Phi\left(-\frac{k+s}{\alpha}\right) \right] ds + \\
&+ \int_{\frac{k(1+\mu)}{k(1+\beta)}}^{\infty} \varphi(s-\beta k) \left[\Phi\left(\frac{k-s}{\alpha}\right) - \Phi\left(-\frac{k+s}{\alpha}\right) \right] ds, \quad (6.10)
\end{aligned}$$

где $k = \frac{\Delta}{\sigma}$, $\alpha = \frac{u}{\sigma}$, $\mu = \frac{m}{\sigma} = \frac{m}{\Delta} \cdot k$, $\beta = \frac{\mu}{k} = \frac{m}{\Delta}$.

Подставив в формулы (6.9) и (6.10) известные параметры: характеристику серийнопригодности² типа СИ, подвергаемых поверке, k и стандартную неопределенность измерений на данном эталоне u , оцениваемую по типу А, можно оценить вероятности ошибок поверки при различных значениях систематической погрешности измерений m . Далее, исходя из установленных пределов допускаемых значений P_1 и P_2 , определяют критическое (максимально допустимое) значение систематической погрешности измерений m_s . Значением m_s руководствуются при метрологическом обслуживании этого эталона, например, при установлении межкалибровочных интервалов, разработке методики статистического регулирования точности и др.

Пример 6.1. Поверочная установка имеет следующие характеристики точности: $k = \frac{\Delta}{\sigma} = 3$, $\alpha = \frac{u}{\sigma} = \frac{1}{3}$. Определить предел m^* систематической погрешности измерений, обеспечивающий средний процент ошибочного признания годными СИ не более 5 %.

Подставляя $k = 3$ и $\alpha = \frac{1}{3}$ в (6.9) и (6.10), найдем зависимости $P_1(\beta)$ и $P_2(\beta)$. Они представлены на рис. 16. Рисунок показывает, что при этих значениях k и α увеличение m не приводит к росту $P_2(\beta)$ (максимальное значение этой вероятности составляет 0,00135). В то же время $P_1(\beta)$ весьма значительна и при $m = \Delta$ составляет 0,5. Подставляя $P_1(\beta) = 0,05$, получим $\beta = 0,4$ и $m^* = 0,4\Delta$. Таким образом, систематическая погрешность измерений не должна превышать 40 % от предела допускаемой погрешности поверяемого СИ.

² Характеристика серийнопригодности изделий, равная отношению допуска на контролируемый параметр к стандартному распределению значений этого параметра по совокупности изделий данного типа, определяет вероятность признания годными изделий этого типа при их измерительном контроле. Для успешного прохождения этого контроля она должна быть не менее трех.

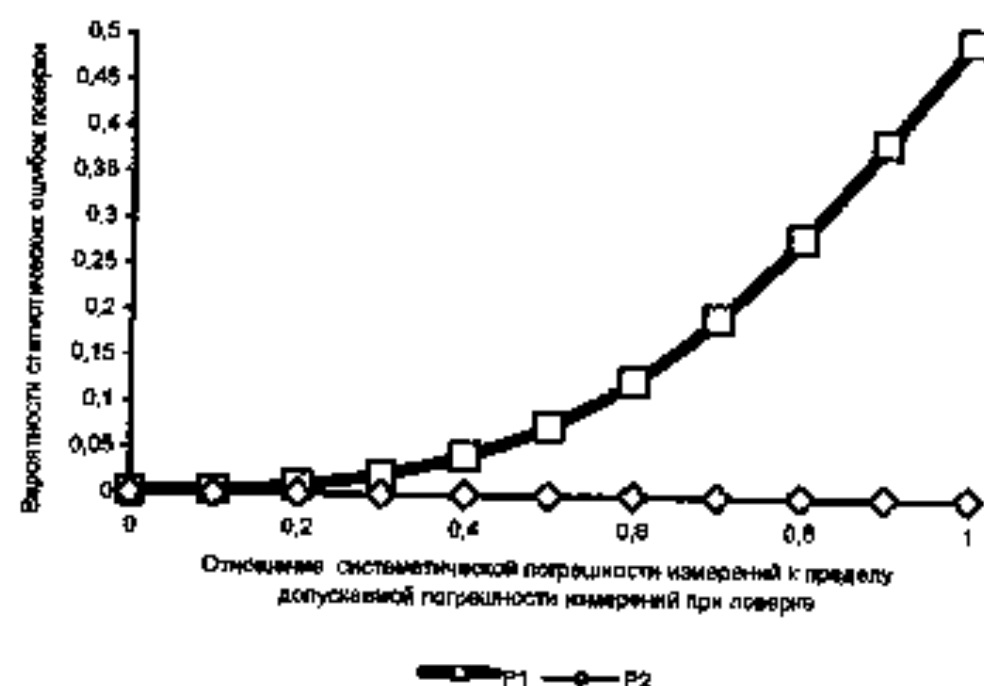


Рис. 16. Зависимость вероятностей статистических ошибок поверки от отношения $\beta = \frac{m}{\Delta}$ систематической погрешности измерений m к пределу допустимой погрешности поверяемого СИ Δ

2. При разработке нормативных документов на государственные поверочные схемы и методики поверки необходимо обосновать требования к точности измерений при поверке любых экземпляров СИ одного класса точности на любом эталоне определенного типа. При этом естественно предположить, что распределение погрешности эталонов этого типа подчиняется нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и стандартным отклонением σ , характеризующим разброс погрешности по совокупности эталонов указанного типа. В этом случае вероятности статистических ошибок поверки определяются формулами (6.9) и (6.10), в которых $\beta = 0$, т. е. выражениями

$$P_1 = \int_{-k}^k \varphi(s) \left[\Phi\left(-\frac{k+s}{\alpha}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{k-s}{\alpha}\right) \right] ds,$$

$$P_2 = \int_{-\infty}^{-k} \varphi(s) \left[\Phi\left(\frac{k-s}{\alpha}\right) - \Phi\left(-\frac{k+s}{\alpha}\right) \right] ds + \int_k^{\infty} \varphi(s) \left[\Phi\left(\frac{k-s}{\alpha}\right) - \Phi\left(-\frac{k+s}{\alpha}\right) \right] ds. \quad (6.11)$$

В таблице 23 представлены значения этих вероятностей, рассчитанные для ряда значений α и k по формуле (6.11).

Таблица 23

Вероятности статистических ошибок поверки

α	k	P_1	P_2
$\frac{1}{1}$	2	0,128	0,017
	3	0,032	0,0011
$\frac{1}{1,5}$	2	0,065	0,014
	3	0,011	0,0010
$\frac{1}{2}$	2	0,041	0,012
	3	0,0054	0,0008
$\frac{1}{3}$	2	0,022	0,010
	3	0,0024	0,0007
$\frac{1}{5}$	2	0,011	0,007
	3	0,0010	0,0005

Таблица показывает, что для того, чтобы обеспечить долю ошибок поверки на уровне 1–2 %, необходимо принимать $\alpha \leq \frac{1}{3}$.

Исходя из этого, в метрологии широко распространено правило: предел допускаемой погрешности поверяемого СИ должен быть не менее чем в 3 раза больше предела допускаемой погрешности эталона. В этом и заключается механизм увеличения неопределенности передаваемого размера единицы при поверке СИ.

Таким образом, общая схема увеличения неопределенности в системе воспроизведения и передачи размера единицы представляется следующей.

На первых l ступенях системы, считая от первичного эталона, передача осуществляется методом калибровки. Возрастание неопределенности описывается формулой (6.5). В соответствии с ней, стандартная неопределенность эталона l -й ступени выражается формулой

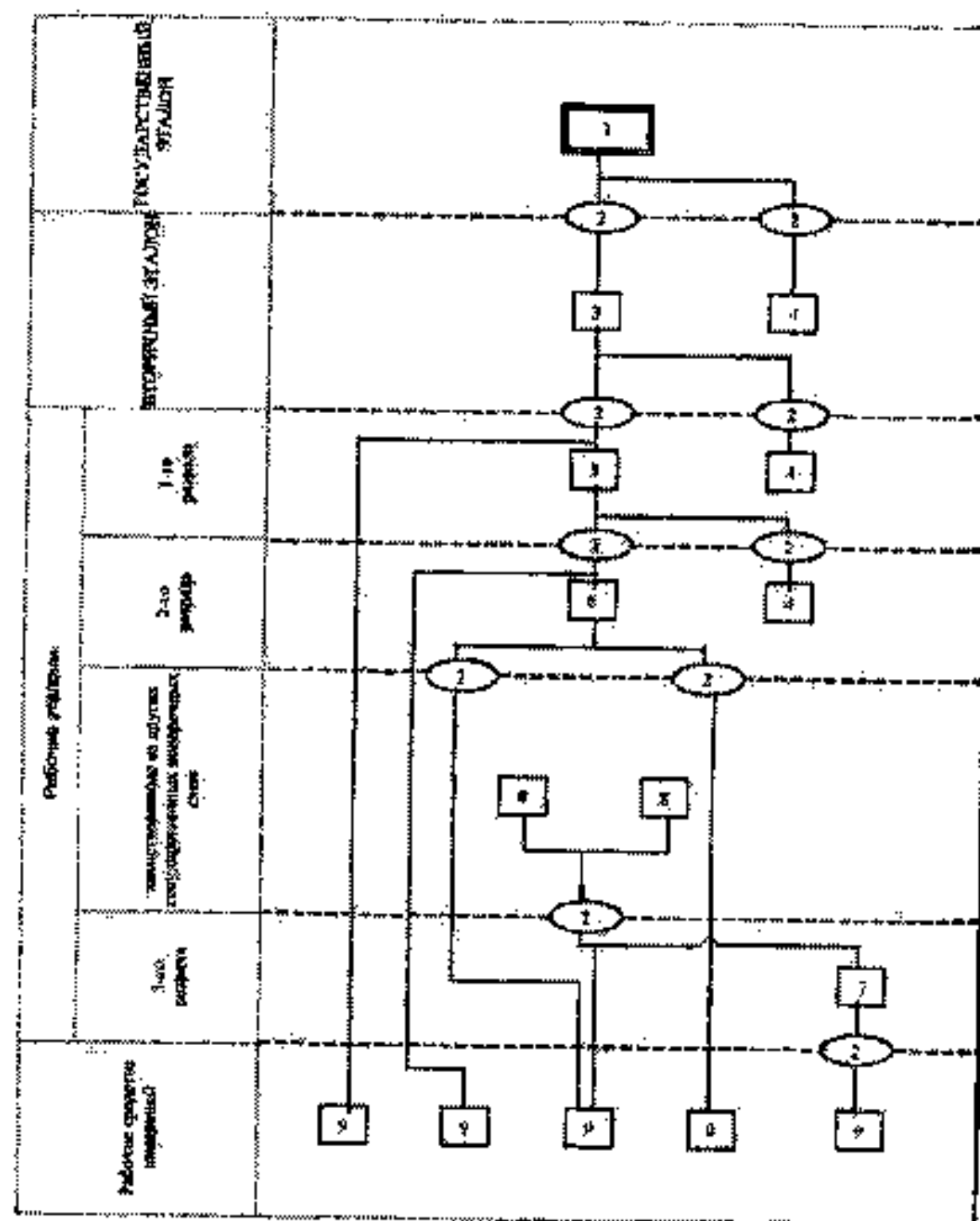


Рис. 17. Пример компоновки государственной (межгосударственной) поверочной схемы

1 — государственный эталон; 2 — метод поверки; 3 — вторичный эталон;
4 — эталон сравнения; 5–7 — рабочие эталоны соответствующих разрядов;
8 — рабочие эталоны, заимствованные из других государственных поверочных схем; 9 — рабочие СИ

В разрывах этих линий допускается размещать овалы с указанием метода передачи размера единицы, погрешности этого метода и дополнительной информации. Различают пять методов передачи:

- непосредственное сличение, применяемое при сличении измерительных приборов;
- сличение при помощи эталона сравнения, применяемое при сличении измерительных приборов, которые невозможно сличить непосредственно друг с другом;
- сличение при помощи компаратора, применяемое при сличении мер;
- прямые измерения, применяемые при поверке и калибровке меры по эталонному измерительному прибору или измерительного прибора по набору эталонных мер;
- косвенные измерения (воспроизведение единицы методом косвенных измерений).

Из этого описания следует, что информация о методе передачи размера единицы является избыточной, т. к. метод однозначно определяется видом групп СИ, указанных в прямоугольниках. Поэтому можно их не указывать и опускать овалы в тех случаях, когда нет необходимости в дополнительной информации.

В предыдущем разделе было показано, что на всех этапах передачи размера единицы по ступеням государственной поверочной схемы, от государственного эталона и до рабочих СИ, происходит увеличение неопределенности передаваемого размера единицы. Каждая лишняя ступень передачи размера единицы ухудшает качество поверки и калибровки рабочих СИ, стоящих в конце этой цепочки. Поэтому число полей государственной поверочной схемы должно быть минимально необходимым, отвечающим условию полного удовлетворения потребности в поверках и калибровках рабочих СИ, эксплуатируемых в стране.

Пример 6.2. Государственная поверочная схема для СИ содержания компонентов в газовых средах.

Государственная поверочная схема для СИ содержания компонентов в газовых средах регламентирована ГОСТ 8.578–2008 [38]. Она устанавливает порядок и основные требования к передаче размеров единиц молярной доли (%) и массовой концентрации (мг/м^3) от государственного первичного эталона с помощью рабочих эталонов рабочим СИ содержания компонентов в газовых средах. Возглавляет эту схему государственный первичный эталон единиц молярной доли и массовой концентрации компонентов

в газовых средах, который включает эталонные комплексы аналитической и газосмесительной аппаратуры, эталоны сравнения и комплект специализированных баллонов. Эталонные комплексы аппаратуры включают:

- аналитический комплекс для воспроизведения единицы молярной доли компонентов в диапазонах от $2 \cdot 10^{-8}$ до $5 \cdot 10^{-3} \%$ (для компонентов-примесей) и от 99,5 до 99,99995 % (для основного компонента);
- газосмесительный гравиметрический комплекс для воспроизведения единицы молярной доли инертных, постоянных и химически активных газов, углеводородных компонентов (метан, этан и другие, в том числе сжиженные углеводороды) и фреонов в промежуточных точках шкалы в диапазоне от $1 \cdot 10^{-4}$ до 99,5 %;
- гравиметрический комплекс для воспроизведения единицы массовой концентрации химически активных газов и углеводородов в диапазоне производительности от $2 \cdot 10^{-2}$ до 50,0 мкг/мин;
- комплекс динамического и объемного масштабного преобразования для воспроизведения единицы молярной доли компонентов в диапазоне от $5 \cdot 10^{-7}$ до 5 % и единицы массовой концентрации компонентов в диапазоне от $8,0 \cdot 10^{-3}$ до $1,5 \cdot 10^3$ мг/м³;
- комплекс для воспроизведения и передачи размера единицы молярной доли озона в диапазоне от $5 \cdot 10^{-8}$ до $1 \cdot 10^{-3} \%$;
- аналитические комплексы для аттестации эталонов сравнения чистых газов и газовых смесей в баллонах под давлением в диапазоне молярной доли от $2 \cdot 10^{-8}$ до 99,99995 %;
- аналитические комплексы для аттестации эталонов сравнения источников микропотоков газов и паров в диапазоне массовой концентрации от $8,0 \cdot 10^{-3}$ до $1,5 \cdot 10^3$ мг/м³.

В качестве эталонов сравнения применяют чистые газы и газовые смеси в баллонах под давлением в диапазоне молярной доли от $2 \cdot 10^{-8}$ до 99,99995 % и источники микропотоков газов и паров в диапазоне производительности от 0,02 до 50 мкг/мин.

Государственный первичный эталон применяют для передачи размера единиц молярной доли и массовой концентрации компонентов рабочим эталонам 0-го и 1-го разрядов и рабочим СИ высокой точности методами прямых измерений и сличения при помощи компаратора или эталона сравнения.

В качестве рабочих эталонов 0-го разряда используют комплексы аналитических и газосмесительных установок и стандартные образцы соот-

ветствующих смесей в баллонах под давлением. Их применяют для передачи размера единицы молярной доли рабочим эталонам 1-го разряда и рабочим СИ высокой точности методами прямых измерений и сличения при помощи компаратора или стандартных образцов.

В качестве рабочих эталонов 1-го разряда используют комплексы аналитических и газосмесительных установок, генераторы газовых смесей и чистых газов, стандартные образцы состава чистых газов и газовых смесей в баллонах под давлением и источники микропотоков газов и паров. Их применяют для передачи размера единицы молярной доли рабочим СИ средней и низкой точности методами прямых измерений и сличения при помощи компаратора или стандартных образцов и единицы массовой концентрации рабочим эталонам 2-го разряда методом косвенных измерений.

В качестве рабочих эталонов 2-го разряда используют комплексы аналитических и газосмесительных установок, генераторы газовых смесей и стандартные образцы состава чистых газов и газовых смесей в баллонах под давлением. Их применяют для передачи размера единиц молярной доли и массовой концентрации рабочим СИ низкой точности методами прямых измерений и сличения при помощи стандартных образцов состава чистых газов и газовых смесей 2-го разряда в баллонах под давлением.

В качестве рабочих СИ используют специализированные и универсальные газоаналитические СИ (газоанализаторы, газоаналитические станции и посты контроля загрязнения атмосферы, хроматографы, масс-спектрометры и другие типы газоаналитической аппаратуры). Их относят к одной из трех групп точности: высокой, средней и низкой. Метрологические характеристики эталонов и рабочих СИ приведены на рисунке 18.

Государственная поверочная схема для средств измерений содержания компонентов в газовых средах (ГОСТ 8.578-2008)

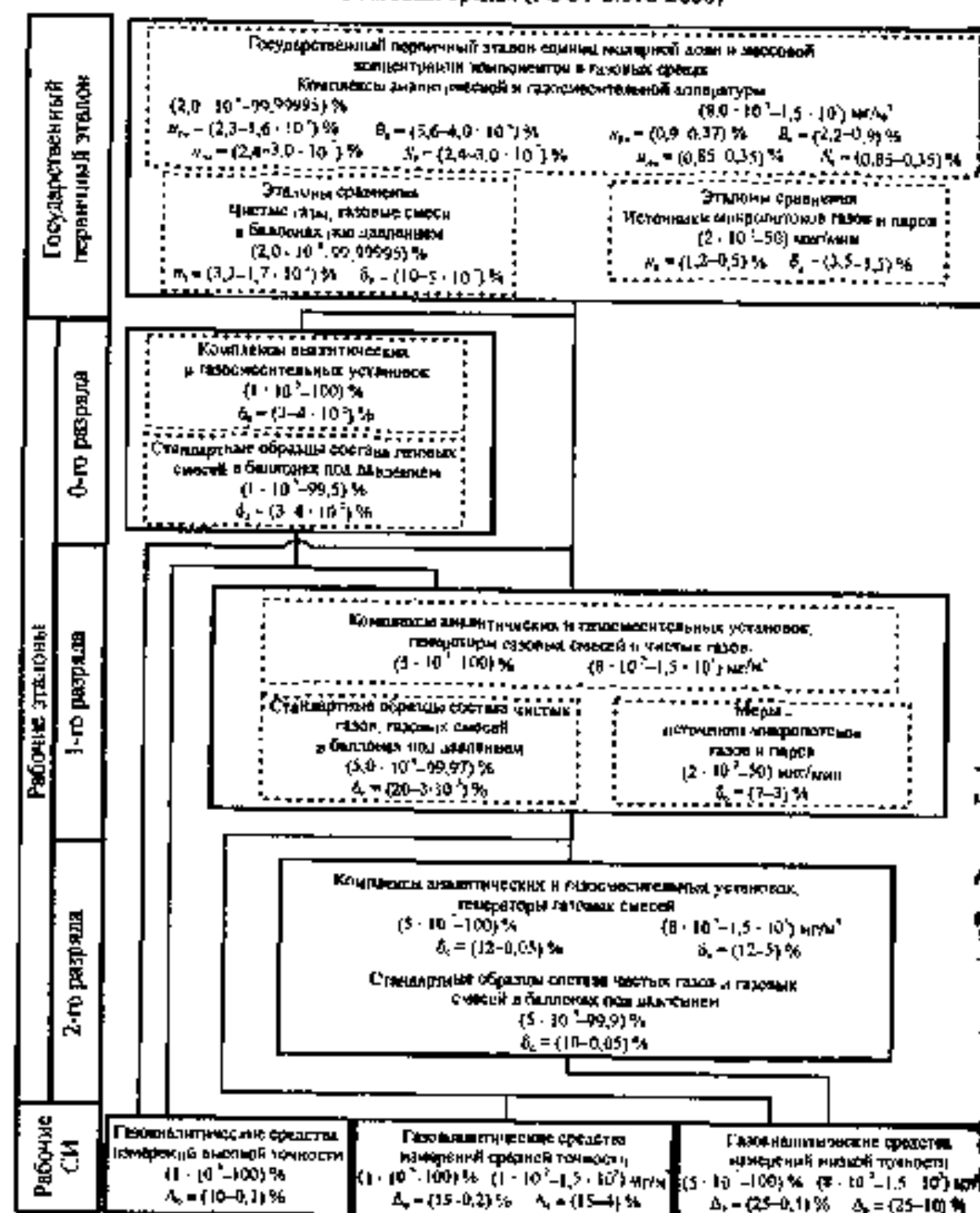


Рис. 18. Государственная поверочная схема для СИ содержания компонентов в газовых средах

6.7. Организационная основа обеспечения единства измерений

Управление системой обеспечения единства измерений в стране является важнейшей государственной функцией. Анализ опыта зарубежных стран показывает, что и в них эта деятельность — сфера государственного управления. В США эта функция поручена Министерству торговли и промышленности, которому подчиняется Национальный институт эталонов и технологий (НИСТ), в Англии — Государственному секретарю по торговле и промышленности, в ведении которого находится Национальная физическая лаборатория (НФЛ), в Германии — Министерству экономики, которому подчинен Физико-технический институт (ПТБ) [39]. В России с 20 мая 2004 г. эту функцию выполняет Федеральное агентство по техническому регулированию и метрологии (Ростехрегулирование), которое входит в систему федеральных органов исполнительной власти Российской Федерации и находится в ведении Министерства промышленности и энергетики РФ⁴. В сфере метрологии Ростехрегулирование осуществляет функции по государственному метрологическому контролю и надзору. Закон РФ «Об обеспечении единства измерений», принятый в 1993 г., установил следующие виды государственного метрологического контроля:

- утверждение типа СИ,
 - поверка СИ, в том числе эталонов,
 - лицензирование деятельности юридических и физических лиц на право изготовления, ремонта, продажи и проката СИ.
- Видами государственного метрологического надзора являются:
- надзор над состоянием и применением СИ, методик выполнения измерений, соблюдением иных метрологических правил и норм,
 - надзор над количеством фасованных товаров в упаковках любого вида при их расфасовке, продаже и импорте,

⁴ Начиная с 1954 г., когда на базе Управления по стандартизации при Госплане СССР и ВНИИМ им. Д.И. Менделеева впервые был образован Комитет стандартов, мер и измерительных приборов при СМ СССР, орган государственного управления метрологией, имеющий различные наименования, но аналогичные функции, всегда входил в состав федеральных органов исполнительной власти.

- надзор над количеством товаров, отчуждаемых при совершении торговых операций, а также за состоянием и применением игровых автоматов с денежным выигрышем и их программным обеспечением.

Ростехрегулирование организует и координирует деятельность по обеспечению единства измерений в стране, в том числе деятельность подчиненных метрологических организаций, в число которых входят:

- 8 НИИ, выполняющих функции национальных метрологических институтов (НМИ) России — ВНИИМ им. Д.И. Менделеева, ВНИИМС, ВНИИФТРИ, ВНИИОФИ, ВНИИР, ВНИИФТРИ, ВНИИФТИ «Дальстандарт» и ВНИИЦСМВ;
- Государственная служба времени и частоты и определение параметров вращения Земли;
- Государственная служба стандартных справочных данных о физических константах и свойствах веществ и материалов;
- Государственная служба стандартных образцов состава и свойств веществ и материалов;
- 86 Центров стандартизации, метрологии и сертификации (ЦСМ), осуществляющих функции по государственному метрологическому контролю (поверка СИ и другие виды метрологического контроля, перечисленные выше);
- территориальные органы государственного надзора во всех автономных республиках, краях и областях страны, осуществляющие функции по государственному метрологическому надзору.

Кроме того, Ростехрегулирование, непосредственно и через подчиненные НМИ, участвует в деятельности международных организаций по метрологии и является официальным представителем Российской Федерации в этих организациях.

Основной задачей НМИ России является проведение фундаментальных исследований в области метрологии, создание, совершенствование, хранение и применение государственных эталонов, участие в международных работах в области метрологии. НМИ в своих государственных эталонах воспроизводят единицы физических величин и передают их размеры в ЦСМ, т. е. вторичным и рабочим эталонам, являющимся исходными эталонами этих организаций. Далее ЦСМ передают размеры единиц исходным эталонам метрологических служб органов исполнительной власти и юридических лиц, с помощью которых осуществляется поверка

и калибровка рабочих СИ. Таким образом, сложилась организационная система воспроизведения единицы и передачи ее размера, аналогичная технической системе, рассмотренной в п. 6.3. Блок-схема этой системы приведена на рис. 19.



Рис. 19. Организационная система воспроизведения единицы и передачи ее размера

6.8. Обеспечение единства измерений в мире на основе Договора о договоренности директоров национальных метрологических институтов

После подписания в 1875 г. Метрической конвенции постепенно повышается уровень единства измерений в масштабах всей планеты. Эта деятельность возглавляется Генеральной конференцией по мерам и весам (ГКМВ) и ее органами, схема которых приведена на рис. 20. МКМВ и МБМВ координируют работы в области единства измерений региональных метрологических организаций (РМО), перечень которых приведен в таблице 24.

В последние десятилетия этот процесс пошел значительно более быстрыми темпами. Это объясняется крупными изменениями, которые накопились к концу второго тысячелетия и характеризуются термином «глобализация». Прежде всего, к ним относятся развитие международной производственной кооперации и торговли на основе международной стандартизации, международная унификация транспортных систем, ликвидация всех барьеров между национальными экономиками, приводящая к их фактическому объединению в единую мировую экономическую систему. Это и создание единого информационного пространства, и непрерывно расширяющееся международное сотрудничество в различных областях — науке, образовании, медицине, экологии, метеорологии, сельском хозяйстве и др. Вследствие глобализации возникла проблема признания всеми странами мира результатов измерений и испытаний, проводимых в каждой стране. Например, торговые соглашения между государствами требуют это от всех сторон, подписавших договор. Единство измерений является также необходимым условием успешного выполнения международных научных программ, решения многих других задач. Так, в настоящее время МБМ ставит задачу создания всемирной системы обеспечения единства клинических медицинских анализов [40].

Решение этой проблемы связано с созданием системы аккредитации измерительных и испытательных лабораторий. Но все СЭ этих лабораторий подвергаются калибровке или поверке. Поэтому необходимо также создание системы аккредитации калибровочных и поверочных лабораторий, которая обеспечит механизм международного признания сертификатов калибровки и поверки И, наконец, поскольку эти лаборатории получают размеры единиц от национальных эталонов, хранящихся в НМИ, требуется согласование размеров этих единиц.

Необходимость согласования вызвана тем, что централизованные системы обеспечения единства измерений ограничены рамками отдельных государств. Вследствие этого размеры единицы, производимые или хранимые национальными эталонами разных стран, могут существенно отличаться друг от друга. Схема, иллюстрирующая описанные причинно-следственные связи, приведена на рис. 21.

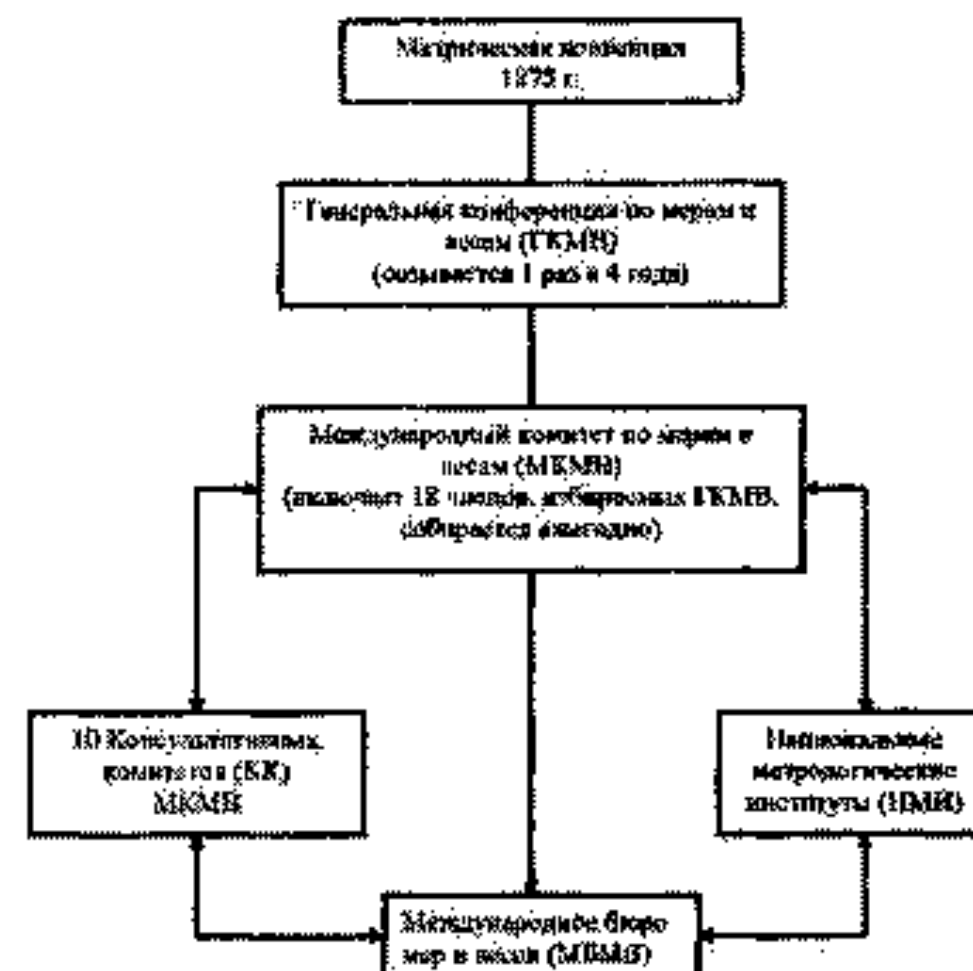


Рис. 20. Структура органов Генеральной конференции по мерам и весам

Таблица 24

Региональные метрологические организации

Наименование	Обозначение	
	английское	русское
Азиатско-тихоокеанская метрологическая программа	APMP	АПМП
Евразийское сотрудничество национальных метрологических институтов	COOMET	КООМЕТ
Европейская ассоциация национальных метрологических институтов	EURAMET	ЕВРАМЕТ
Межамериканская метрологическая система	SIM	СИМ
Южноафриканское сообщество развития сотрудничества в неопределенности измерений	SADCMET	САДКМЕТ

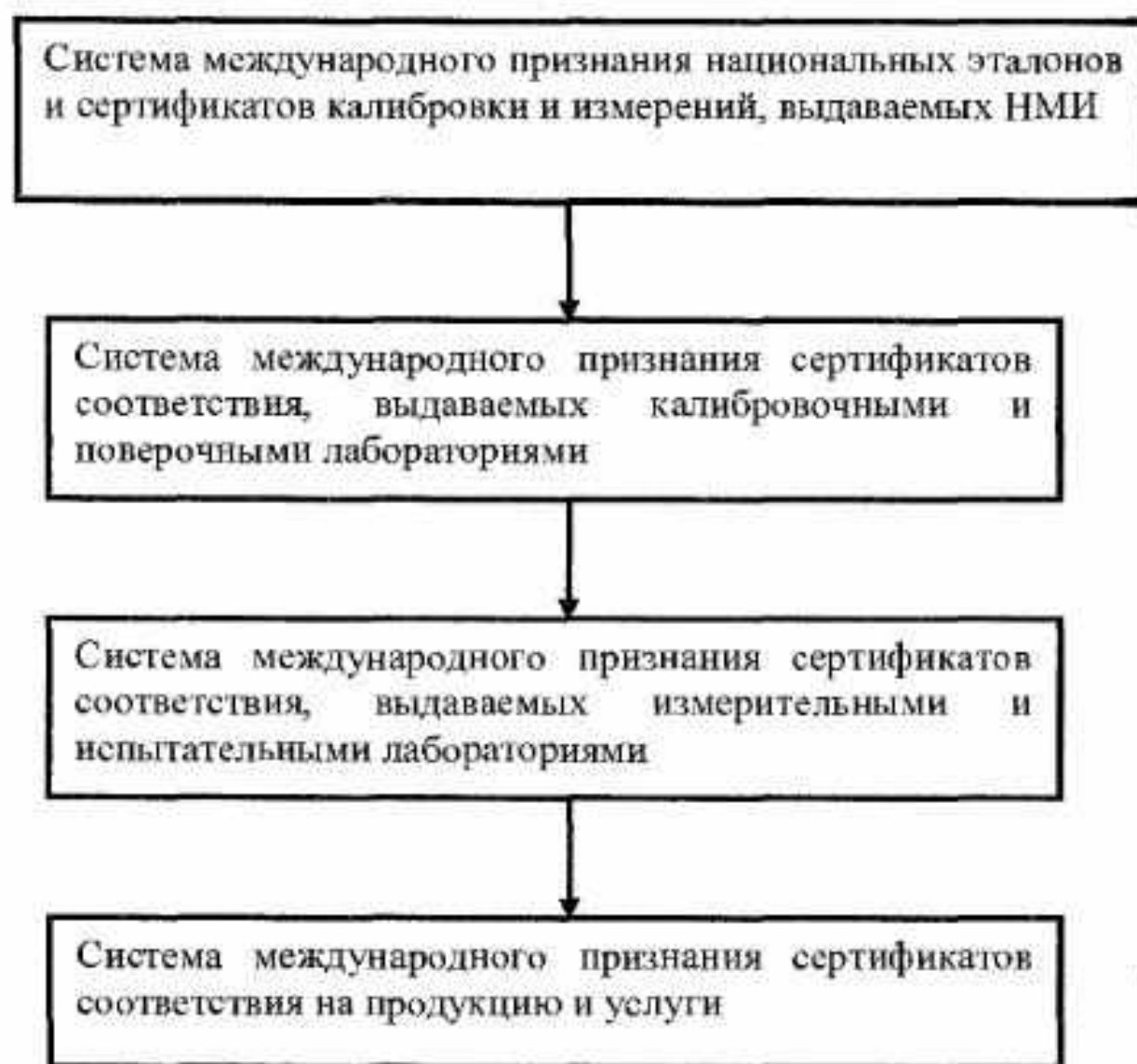


Рис. 21. Иерархическая схема систем международного признания сертификатов соответствия

Традиционный способ согласования заключается в создании первичного эталона, от которого размер единицы передается всем национальным эталонам. Однако в масштабах всей планеты это очень дорогой и технически трудно осуществимый путь достижения поставленной цели. Поэтому эту задачу решает активно развивающаяся в настоящее время международная система подтверждения метрологической эквивалентности национальных эталонов (*по метрологической эквивалентности эталонов понимается соответствие уровней точности воспроизводимых и (или) хранимых ими единиц*).

Начало созданию системы международного признания национальных эталонов было положено МКМВ, который 14 октября

1999 г. открыл для подписания директорами НМИ документ, названный «Договоренности о взаимном признании национальных измерительных эталонов и сертификатов калибровки и измерений, выдаваемых национальными метрологическими институтами» (далее ДВП) [41]. При этом были провозглашены следующие цели:

- установление степени метрологической эквивалентности национальных эталонов,
- обеспечение взаимного признания сертификатов калибровки и измерений, выдаваемых НМИ,
- обеспечение надежной технической базы для более широких договоренностей в области международной торговли, коммерческой деятельности и стандартизации, в частности, договоренностей о взаимном признании сертификатов калибровки, измерений и испытаний, выдаваемых аккредитованными лабораториями других стран.

В основу этой системы были положены ключевые сличения, проводимые консультативными комитетами по видам измерений МКМВ и РМО. Кроме них, ДВП требуют также выполнение следующих условий:

- функционирование системы качества в каждом НМИ и подтверждение компетентности НМИ,
- успешное участие каждого НМИ в дополнительных сличениях.

Этот процесс заканчивается публикацией заявлений об измерительных возможностях каждого НМИ, которые вводятся в базу данных МБМВ и публикуются в Интернете на сайте МБМВ.

Ключевые сличения заключаются в измерении всеми участниками значения величины, хранимого эталоном сравнения или другой высокостабильной мерой, и сравнении результатов этих измерений. Ключевые сличения МКМВ проводятся консультативными комитетами по видам измерений (КК). КК на каждом заседании изучает потребность в сличениях и решает, с учетом мнений РМО, какие сличения необходимо инициировать. К участию в ключевых сличениях МКМВ приглашаются лаборатории (НМИ) — участники КК и другие лаборатории, обладающие наивысшей технической компетенцией и опытом в данном виде измерений. Для организации и проведения сличения назначаются пилотная лаборатория и 2–3 лаборатории в помощь пилотной лаборатории. Пилотная лаборатория вместе с назначенными помощниками составляют подробный технический протокол (техническое руководство, которое детально описывает методику проведения сличения) и график

сличений. Затем пилотная лаборатория приготавливает и исследует эталон сравнения и организует его отправку участникам в соответствии с графиком сличений. Лаборатории — участники сличения независимо друг от друга и в строгом соответствии с техническим протоколом проводят измерения присланной меры и на основании этих измерений определяют значение меры и его неопределенность. Затем они представляют эти результаты с необходимой дополнительной информацией в пилотную лабораторию. Пилотная лаборатория анализирует и обрабатывает полученные результаты и определяет опорное значение сличений и его расширенную неопределенность [42].

Под опорным значением понимается значение величины, неопределенность измерения которой всеми признана достаточно незначительной, чтобы служить основой для сличения со значениями однородных величин. Из этого определения следует, что опорное значение величины является аналогом действительного значения величины. Например, в измерениях массы, где по определению единицей является масса международного прототипа килограмма, опорным значением единицы является значение, приписанное этому прототипу. В других видах измерений такого прототипа нет, и поэтому в качестве опорного значения единицы принимают средневзвешенное арифметическое ряда ее значений, воспроизводимых наиболее точными национальными эталонами, которые хранятся в НМИ — участниках ключевого сличения МКМВ:

$$x_{\text{МКМВ}} = \sum_{i=1}^n x_i p_i, \quad (6.14)$$

где x_i — результат измерения значения эталона сравнения на i -м национальном эталоне,

$$p_i = \frac{\frac{1}{u_i^2}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{u_i^2}} \text{ — «вес» результата измерений } x_i,$$

u_i — стандартная неопределенность этого результата измерений,
 n — число НМИ, участвующих в сличении.

Стандартная неопределенность опорного значения при независимости значений x_i равна

$$u(x_{\text{МКМВ}}) = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{u_i^2}}. \quad (6.15)$$

Опорное значение ключевого сличения МКМВ является исходным в системе сличений. Его принимают за репер при определении опорных значений ключевых сличений РМО, которые, в свою очередь, выполняют функцию репера при проведении дополнительных сличений. В итоге сложилась иерархическая цепочка сличений национальных эталонов, являющаяся аналогом иерархической цепочки «первичный эталон—вторичный эталон—рабочий эталон». По существу в системе сличений национальных эталонов реализована идея централизованной системы обеспечения единства измерений в мире.

Опорное значение ключевого сличения МКМВ является исходным значением не только в системе сличений, но и вообще в мировой системе обеспечения единства измерений данного вида. Через систему сличений это значение передается национальным эталонам, а от них через национальные системы передачи размеров единиц — всем СИ, калиброванным в данной единице (см. рис. 22). Если представить, что национальные эталоны, участвующие в ключевых сличениях МКМВ, являются единым групповым эталоном, утвержденным в качестве мирового первичного эталона, то тогда опорное значение будет значением единицы, воспроизводимой этим мировым эталоном.

Но опорное значение ключевого сличения МКМВ имеет и другую важную функцию: оно служит для оценки степени эквивалентности национальных эталонов. По определению, *степень эквивалентности национального эталона — это степень, с которой значение эталона соответствует опорному значению ключевого сличения МКМВ* [11]. Поэтому количественно она выражается как отклонение от опорного значения

$$d_i = x_i - x_{\text{МКМВ}} \quad (6.16)$$

в совокупности со стандартной неопределенностью этого отклонения, вычисляемой по формуле

$$u(d_i) = \sqrt{u^2(x_i) + u^2(x_{\text{МКМВ}}) - 2u(x_i, x_{\text{МКМВ}})}, \quad (6.17)$$

где $u(x_i, x_{\text{МКМВ}})$ — ковариация значения x_i и опорного значения.

Заявленная точность национального эталона подтверждается с вероятностью 0,95, если выполняется неравенство

$$|d_i| < 2u(d_i). \quad (6.18)$$

Если же для какого-то национального эталона это условие не выполняется, то это свидетельствует о том, что сличением не была подтверждена его точность, заявленная НМИ. Следовательно, оказывается невыполненным сформулированное в ДВП обязательное условие международного признания сертификатов калибровки и измерений, выданных данным НМИ. Это обстоятельство может привести к серьезным последствиям для НМИ и страны, которую он представляет, поскольку, как видно из рис. 20, отказ в признании сертификатов калибровки и измерений в каком-то виде измерений, выданных НМИ, автоматически приводит к правовой несостоятельности сертификатов соответствия результатов всех измерений этого вида, проведенных в этой стране. Чтобы не допустить этого часто пересматривают в сторону увеличения оценку неопределенности данного эталона, и информация об его измерительных возможностях публикуется МБМВ с этой увеличенной оценкой неопределенности.

По похожей схеме проводятся ключевые сличения РМО. Их целью является распространение метрологической эквивалентности на национальные эталоны стран РМО, не принимавшие участие в ключевых сличениях МКМВ. К участию в этих ключевых сличениях приглашаются все национальные эталоны стран — члены РМО, не участвовавшие в ключевых сличениях МКМВ. Кроме них приглашаются один или несколько национальных эталонов, принимавших участие в ключевых сличениях МКМВ. Их называют связующими эталонами. Связующие национальные эталоны в ключевых сличениях РМО не подтверждают свою эквивалентность, поскольку это было сделано в ключевых сличениях МКМВ. Они выполняют функцию передачи опорного значения ключевого сличения МКМВ в РМО.

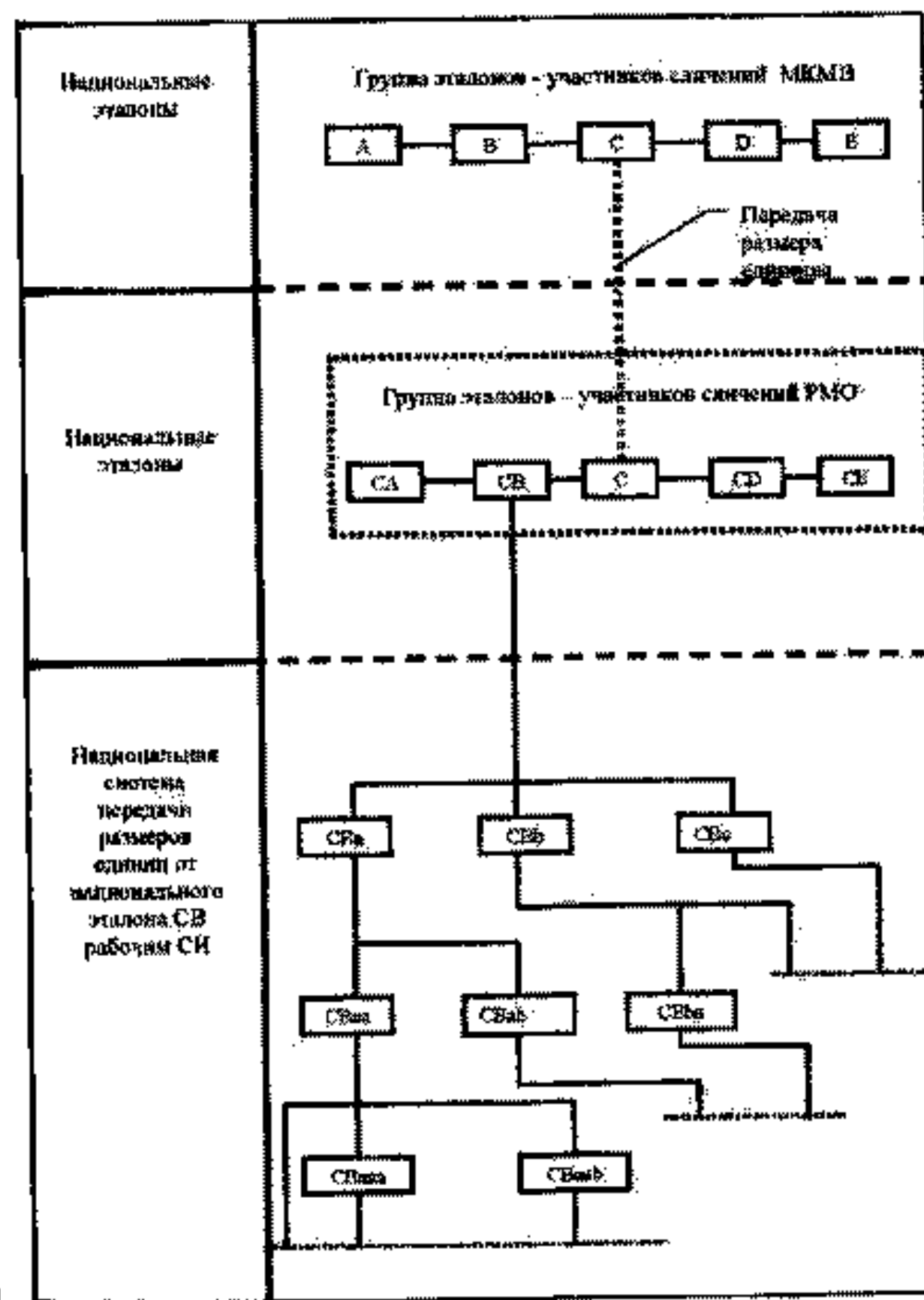


Рис. 22. Структура мировой системы обеспечения единства измерений на основе ключевых сличений

Методику проведения ключевых сличений РМО и статистической обработки их результатов разработала руководитель ТК КОOMET «Ключевые сличения» А.Г. Чуновкина [43, 44]. Их проводят следующим образом. После формирования группы участников, составления технического протокола и графика сличений пилотная лаборатория направляет эталон сравнения участникам сличений. Все участники проводят измерения значения эталона сравнения и получают результаты измерений $\tilde{x}_i$ и оценки их стандартной неопределенности $u(\tilde{x}_i)$.

После окончания измерений необходимо привести их результаты $\tilde{x}_i$ к опорному значению ключевого сличения МКМВ. С этой целью пилотная лаборатория делает следующее:

- на основании результатов измерений связующих эталонов вычисляет аддитивную поправку Δ к результатам измерений $\tilde{x}_i$ и оценку стандартной неопределенности $u(\Delta)$ этой поправки:

$$\Delta = \frac{\sum_{i=1}^I \frac{\Delta_i}{S_i^2}}{\sum_{i=1}^I \frac{1}{S_i^2}}, \quad (6.19)$$

$$u(\Delta) = \sqrt{\frac{2}{\sum_{i=1}^I \frac{1}{S_i^2}}}, \quad (6.20)$$

где $\Delta_i = x_i^* - \tilde{x}_i^*$,

$x_i^*, \tilde{x}_i^*$ — результаты измерений связующего эталона в ключевых сличениях МКМВ и РМО соответственно,

S_i — стандартная неопределенность результатов аналогичных измерений на i -м связующем эталоне;

I — число связующих эталонов;

- определяет трансформированные (приведенные к опорному значению ключевого сличения МКМВ) результаты измерений всех лабораторий-участников и их неопределенности по формулам

$$\tilde{x}_i^* = \tilde{x}_i + \Delta, \quad i = 1, \dots, n, \quad (6.21)$$

$$u(\tilde{x}_i^*) = \sqrt{u^2(\tilde{x}_i) + u^2(\Delta)}, \quad (6.22)$$

где n — число эталонов — участников сличения.

Далее для всех национальных эталонов участников сличения, кроме связующих эталонов, оценивают степень эквивалентности

$$d_i = \tilde{x}_i^* + \Delta - x_{\text{МКМВ}} \quad (6.23)$$

и его стандартную неопределенность

$$u(d_i) = \sqrt{u^2(x_i) + u^2(x_{\text{МКМВ}}) + u^2(\Delta) [1 - u^2(x_{\text{МКМВ}})] \cdot \sum_{j=1}^I \frac{1}{u^2(x_j^*)}}. \quad (6.24)$$

Затем проверяют эквивалентность этих эталонов. Если выполняется неравенство (6.18), то оценки неопределенности результатов, заявленные НМИ, с вероятностью 0,95 согласуются с данными сличений. Это является подтверждением заявленной точности национального эталона. В этом случае заявление об измерительных возможностях НМИ вводится в базу данных МБМВ и публикуется в Интернете на сайте МБМВ. Если же условие (6.18) не выполняется, то это свидетельствует о том, что заявленная НМИ точность национального эталона не была подтверждена. Тогда пересматривают в сторону увеличения оценку неопределенности данного эталона, и информация об его измерительных возможностях публикуется с этой увеличенной оценкой неопределенности.

Определяют действительные значения единиц $\hat{x}_i$, хранимые национальными эталонами, и оценки их неопределенности $u(\hat{x}_i)$:

$$\hat{x}_i = Q_{\text{МРО}}(\tilde{x}_i - d_i), \quad (6.25)$$

$$u(\hat{x}_i) = \frac{\partial Q_{\text{МРО}}}{\partial x} \cdot \sqrt{u^2(\tilde{x}_i) + u^2(d_i) - 2u(\tilde{x}_i, d_i)}, \quad (6.26)$$

где Q_{MPO} — известная функция связи значения единицы и значения эталона сравнения, использованного в ключевых сличениях МРО.

Далее оценивают опорное значение ключевых сличений МРО и его стандартную неопределенность:

$$x_{MPO} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{\tilde{x}_i}{u^2(\tilde{x}_i)}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{u^2(\tilde{x}_i)}} + \Delta, \quad (6.27)$$

$$u(x_{MPO}) = \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{u^2(\tilde{x}_i)}} + u^2(\Delta)}. \quad (6.28)$$

Между опорными значениями ключевых сличений МКМВ и МРО имеется существенное различие: опорное значение x_{MPO} не отражает действительное значение единицы, передаваемое национальным эталонам стран данного региона, и поэтому в системе передачи размера единицы оно не задействовано. Его функция другая: x_{MPO} служит для определения средней степени эквивалентности группы этих эталонов. Она равна

$$d_{MPO} = x_{MPO} - x_{МКМВ}, \quad (6.29)$$

а оценка ее неопределенности —

$$u(d_{MPO}) = \sqrt{u^2(x_{MPO}) + u^2(x_{МКМВ}) - 2u(x_{MPO}, x_{МКМВ})}. \quad (6.30)$$

d_{MPO} и $u(d_{MPO})$ являются обобщенными характеристиками точности национальных эталонов и высокоточных измерений в данном регионе. Они могут служить критериями при сравнительной оценке разных МРО по уровню точности измерений в НМИ.

В настоящее время система подтверждения измерительных возможностей НМИ посредством ключевых сличений национальных эталонов активно развивается. Так, к началу 2007 г. в базе данных МБМВ было зарегистрировано 356 только ключевых сличений МКМВ [45]. Положительное влияние этих сличений на уровень единства измерений отмечается всеми специалистами. Стало очевидным, что открытие ДВП для подписания НМИ — крупнейший шаг в обеспечении единства измерений в мире, по значимости сравнимый с подписанием Метрической конвенции.

МЕЖПОВЕРОЧНЫЕ И МЕЖКАЛИБРОВОЧНЫЕ ИНТЕРВАЛЫ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ

7.1. Основные понятия

В п. 6.2 указывалось, что к основным элементам системы обеспечения единства измерений относятся периодические поверки и калибровки СИ, при которых осуществляется контроль соответствия метрологических характеристик СИ установленным требованиям или их приведение в соответствие с этими требованиями. Поэтому межповерочный или межкалибровочный интервал (МПИ) — важнейший параметр метрологического обслуживания СИ, непосредственно влияющий на уровень единства измерений. Чем меньше МПИ, тем выше этот уровень. С другой стороны, чем меньше МПИ, тем больше финансовые затраты на проведение поверок и (или) калибровок СИ, а также издержки производства, связанные с изъятиями СИ с места эксплуатации. Таким образом, налицо противоречие, которое должно быть разрешено путем определения оптимального значения МПИ.

Наиболее естественным критерием оптимальности МПИ является экономический критерий — условный минимум экономических издержек эксплуатации СИ, складывающихся из убытков из-за недостаточной точности измерений и расходов, связанных с проведением поверок, калибровок и ремонтов СИ, забракованных при поверке.

На рис. 23 приведена графическая иллюстрация этого подхода при определении межкалибровочного интервала. Видно, что среднегодовые суммарные издержки, приходящиеся на одно СИ, складывающиеся из потерь из-за измерительного брака и затрат на проведение калибровок, являются минимальными в диапазоне [0,6–1,2] г. Следовательно, целесообразно принять МПИ, равным 1 году.



Рис. 23. Определение оптимального МПИ по экономическому критерию

Методы обоснования МПИ разрабатывались в рамках научного направления теоретической метрологии, получившего название «теория метрологической надежности средств измерений» [46–48].

Основные понятия и определения метрологической надежности СИ регламентированы в [34, 49, 50]. Их взаимосвязь иллюстрируется рис. 23, на котором показаны траектории случайного процесса изменения метрологической характеристики (МХ) СИ одного типа (например, систематической составляющей основной погрешности, СКО случайной составляющей основной погрешности или другой МХ, определенной в соответствии с [17]).

Пересечение траекторией пределов « $\pm \Delta$ » допускаемых значений МХ является метрологическим отказом, обрыв траектории — отказом функционирования. Показатели точности, стабильности и метрологической надежности СИ соответствуют различным функционалам, построенным на этих траекториях. Точность СИ оценивается значением МХ в рассматриваемый момент времени, а по совокупности СИ — распределением этих значений (показаны распределения МХ после первичной калибровки и в момент поверки). Стабильность СИ, отражающая неизменность во времени его свойств, оценивается распределением приращений МХ за заданное время. Метрологическая надежность СИ определяется

как надежность СИ в части сохранения метрологической исправности, т. е. такого состояния, в котором все МХ соответствуют установленным нормам. Следовательно, она оценивается распределением моментов наступления метрологических отказов. Очевидно, что метрологическая надежность СИ зависит от его стабильности, но, кроме того, от установленных нормативов и условий эксплуатации СИ — пределов допускаемых значений МХ, методики калибровки, МПИ и др. Поэтому по сравнению со стабильностью она является как бы «внешним» свойством СИ. Из этого вытекает следующее принципиальное положение: оценка метрологической надежности СИ возможна только после исследования его стабильности.

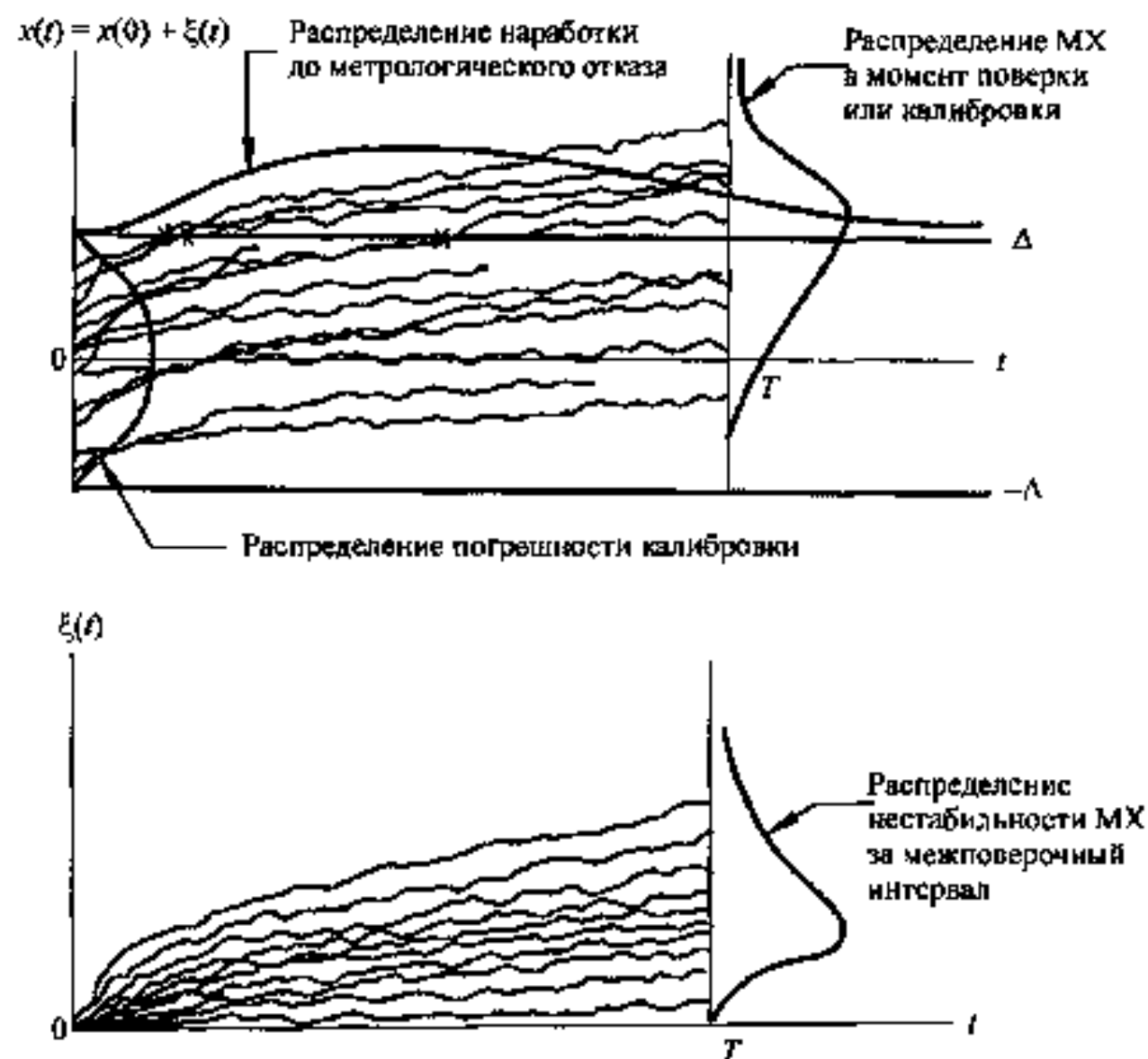


Рис. 24. Изменение МХ СИ во времени

Ниже приводятся основные термины теории метрологической надежности и их определения.

1. Метрологическая исправность СИ — состояние СИ, определяемое соответствием его нормируемых МХ установленным требованиям.
2. Метрологическая надежность СИ — надежность СИ в части сохранения его метрологической исправности.
3. Метрологический отказ СИ — отказ СИ, состоящий в потере его метрологической исправности.
4. Стабильность СИ — качественная характеристика СИ, отражающая неизменность во времени его МХ.
5. Нестабильность МХ СИ — изменение МХ СИ за установленный интервал времени.

Примечание.

Если стабильность СИ оценивается по одной из МХ, вместо этого термина можно употреблять термин «нестабильность СИ».

6. Средняя нестабильность МХ СИ — показатель нестабильности МХ СИ, равный математическому ожиданию нестабильности этой характеристики по группе СИ данного типа или по совокупности периодов эксплуатации одного СИ.
7. Стандартное отклонение нестабильности МХ СИ — показатель нестабильности МХ СИ, отражающий рассеивание нестабильности в группе СИ одного типа или в совокупности периодов эксплуатации одного СИ и равный корню квадратному из дисперсии.

Примечание.

Вместо этого термина можно применять термин «стандартная неопределенность нестабильности МХ».

8. Доверительные границы нестабильности МХ СИ — верхняя и нижняя границы интервала, охватывающего нестабильность МХ СИ с некоторой доверительной вероятностью.

Примечание.

Вместо этого термина можно применять термин «расширенная неопределенность нестабильности МХ».

9. Вероятность метрологической исправности СИ — показатель метрологической надежности СИ, равный вероятности того, что в заданный момент времени СИ окажется метрологически исправным.

10. Вероятность работы СИ без метрологических отказов (вероятность безотказной работы) — показатель метрологической надежности СИ, равный вероятности того, что в течение заданной наработки или заданного времени эксплуатации метрологический отказ СИ не возникнет.

11. Коэффициент метрологической исправности СИ — показатель метрологической надежности СИ, равный средней доле МПИ, в течение которой СИ находилось в метрологически исправном состоянии.

12. Межповерочный (межкалибровочный) интервал — промежуток времени или наработка СИ между двумя последовательными поверками (калибровками).

7.2. Основные положения теории метрологической надежности

7.2.1. Математическая модель дрейфа МХ

Для простоты изложения рассмотрим МХ СИ, характеризуемые одним числовым значением во всем диапазоне измерений. К ним относятся коэффициент преобразования измерительного преобразователя, основная погрешность однозначной меры, стандартное отклонение случайной составляющей основной погрешности СИ, характеристики аддитивной и мультипликативной погрешностей СИ при линейной функции преобразования, его динамической погрешности и некоторые другие. Это ограничение не является принципиальным, поскольку в [51] показано, что полученные результаты легко распространяются на МХ, значения которых изменяются по шкале СИ.

Рассмотрим одну из этих МХ. В совокупности СИ одного типа ее значения являются случайными величинами, имеющими одинаковое распределение, а их изменение во времени — случайными траекториями. Поэтому математической моделью процесса дрейфа этой МХ является нестационарный случайный процесс. Для конкретизации этой модели принимается следующее допущение:

Траектории дрейфа МХ СИ в любой момент времени являются непрерывно дифференцируемыми с вероятностью 1.

Это означает, что скачкообразные изменения скорости дрейфа МХ маловероятны¹. Другими словами, почти каждая траектория процесса дрейфа в любой момент времени t имеет конечную первую производную $\xi'(t)$, значения которой слева и справа равны ($\xi'_-(t) = \xi'_+(t)$).

Одним из примеров такого процесса является неслучайная функция случайных аргументов $\xi(t) = f(t, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$, где α_i ($i = 1, \dots, n$) — случайные величины, в общем случае коррелированные.

Такое допущение полностью соответствует современным описаниям процессов старения и износа и способу представления исходных данных о дрейфе МХ (средняя нестабильность $m(t)$ и стандартное отклонение нестабильности $\sigma(t)$ задаются в виде гладких функций времени). Кроме того, эта модель учитывает возможности сбора экспериментального материала о нестабильности СИ, т. к. контроль значений МХ осуществляется через определенные промежутки времени, и, следовательно, при проведении эксперимента нельзя зафиксировать мгновенные скачки скорости дрейфа. Достоинством данной модели также является то, что она не предполагает монотонное изменение МХ, не соответствующее имеющимся представлениям о нестабильности многих видов СИ.

7.2.2. Основное уравнение нестабильности, его решение

На основании этого допущения путем строгих математических преобразований получено дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $P(t, x, y)$, равной вероятности того, что нестабильность МХ $\xi(t)$ за время t находится между произвольными границами x и y :

¹ Для понимания модели важно иметь в виду, что моделируется изменение не погрешности измерений, определяемой МХ СИ, а изменение этих МХ; погрешность измерений, включающая случайную составляющую, естественно, может скачкообразно изменяться в любой момент времени.

$$\frac{\partial P(t, x, y)}{\partial t} + \mu(t, x) \frac{\partial P(t, x, y)}{\partial x} + \mu(t, y) \frac{\partial P(t, x, y)}{\partial y} = 0, \quad (7.1)$$

где t — промежуток времени или наработка СИ от начала эксплуатации до рассматриваемого момента времени,

$\mu(t, \xi)$ — условное математическое ожидание скорости дрейфа МХ $v(t)$ в момент времени t при условии, что нестабильность МХ за время t равна $\xi(t) = \xi$.

В теории вероятностей условное математическое ожидание величины Y при условии, что величина X приняла определенное значение, называется регрессией Y на X . Поэтому $\mu(t, \xi)$ называется *регрессией мгновенной скорости дрейфа МХ $v(t)$ на нестабильность $\xi(t)$ за время t* .

Уравнение (7.1) называется основным уравнением нестабильности.

Учитывая, что $\mu(t, \xi)$ непрерывна по t и ξ , найдем решение уравнения (7.1) при естественных начальных условиях $x|_{t=0}=x$,

$y|_{t=0}=y$, $P(t, x, y)|_{t=0}=P(0, x, y)=\int_x^y \varphi_0(\xi) d\xi$, где $\varphi_0(\xi)$ — плотность

распределения ξ в начальный момент времени. Легко показать, что оно всегда существует и является единственным. Этим решением является функция

$$P(t, x, y) = \int_x^y \varphi_0[\psi(t, \xi)] \frac{\partial \psi(t, \xi)}{\partial \xi} d\xi, \quad (7.2)$$

где $\psi(t, \xi)$ — решение дифференциального уравнения регрессии

$$\frac{d\xi}{dt} = \mu(t, \xi) \quad (7.3)$$

в виде $\psi(t, \xi) = C$ при начальном условии $\psi(0, \xi) = \xi$ (в дальнейшем будем ее называть функцией регрессии).

Из (7.2) следует, что плотность распределения нестабильности МХ в произвольный момент времени t равна

$$\varphi_t(\xi) = \varphi_0[\psi(t, \xi)] \frac{\partial \psi(t, \xi)}{\partial \xi}. \quad (7.4)$$

Таким образом, плотность распределения нестабильности МХ в произвольный момент времени равна умноженной на соответствующий нормирующий множитель плотности ее начального распределения, в которую в качестве переменной подставлена функция регрессии.

Можно доказать, что функция регрессии имеет следующие свойства:

1. $\psi(t, \xi)$ является монотонной функцией ξ .
2. $\psi_t(\tau, \xi)$ обладает свойством воспроизводимости:
 $\psi_t[\tau, \psi_{t+\tau}(t, \xi)] = \psi_t(\tau + t, \xi)$.
3. $\frac{\partial \psi(t, \xi)}{\partial t} = -\frac{\partial \psi(t, \xi)}{\partial \xi} \mu(t, \xi)$.

Можно также доказать, что $\varphi_0(\xi)$ является плотностью нормального распределения². Формулы (7.3) и (7.4) позволяют обосновать возможные виды законов распределения нестабильности МХ.

7.2.3. Законы распределения нестабильности

В технических приложениях часто оказывается достаточным аппроксимировать регрессию линейной средней квадратичной функцией. Линейная средняя квадратичная регрессия скорости дрейфа МХ на ее изменение за время t выражается зависимостью

$$\mu(t, \xi) = m'(t) + r_1(t)[\xi - m(t)], \quad (7.5)$$

где $m(t)$ — математическое ожидание распределения $\varphi_t(\xi)$,

$$r_1(t) = \frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)} \text{ — коэффициент регрессии,}$$

² Вывод уравнения (7.1), его решение и математически строгое обоснование других результатов этой главы приведены в главе 9 «Теория метрологической надежности средств измерений» коллективной монографии [47].

$\sigma(t)$ — стандартное отклонение распределения $\varphi_i(\xi)$.

В этом выражении наследственный характер дрейфа МХ проявляется наиболее простым и естественным способом: в любой момент времени отклонение скорости дрейфа МХ конкретного СИ от средней скорости дрейфа МХ прямо пропорционально отклонению значения нестабильности МХ этого СИ за предыдущий период от средней нестабильности МХ за тот же период.

Подставляя указанную зависимость в уравнение (7.3) и решая его, получим функцию регрессии

$$\psi(t, \xi) = G(t, \xi) \cdot \sigma(0) + m(0). \quad (7.6)$$

где $G(t, \xi) = \frac{\xi - m(t)}{\sigma(t)}$ — функция дрейфа.

При этом начальная форма распределения нестабильности МХ сохраняется, а изменяются только его математическое ожидание $m(t)$ и СКО $\sigma(t)$:

$$\varphi_i(\xi) = \varphi_0[(\xi - m(t)) \frac{\sigma(0)}{\sigma(t)} + m(0)] \frac{\sigma(0)}{\sigma(t)}.$$

Таким образом, при линейной средней квадратичной регрессии скорости дрейфа МХ на ее нестабильность плотность распределения нестабильности подчинена нормальному закону:

$$\varphi_i(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(t)} \exp\left\{-\frac{[\xi - m(t)]^2}{2\sigma^2(t)}\right\}. \quad (7.7)$$

Более общие представления основаны на учете закономерностей протекания физико-химических процессов, вызывающих старение и износ СИ. В первом приближении уравнение скорости $v(t)$ любого процесса деградации может быть представлено в виде неслучайной функции со случайными аргументами

$$v(t) = s'(t) = Q[T, \alpha_1, \dots, \alpha_n] s^{1-F}(t), \quad (7.8)$$

где $Q[T, \alpha_1, \dots, \alpha_n]$ — коэффициент пропорциональности, зависящий от температуры T и n случайных параметров

$\alpha_i, i = 1, \dots, n$, характеризующих химический состав и свойства материалов, свойства поверхности материалов, конфигурацию детали, окружающую среду, приложенные нагрузки и другие подобные факторы,

$s(t)$ — значение определяющего параметра процесса в момент t ,

F — показатель степени, различный для разных процессов, но для каждого конкретного процесса принимающий определенное значение.

Сопоставим (7.8) с выражением линейной регрессии $v(t)$ на $s(t)$. При $F = 1$ $m'(t) = M[Q]$ и $m(t) = M[Q]t$, где $M[Q]$ — математическое ожидание $Q[T, \alpha_1, \dots, \alpha_n]$. Для конкретной траектории имеем $\xi'_i(t) = Q_i$ и $\xi_i = Q_i t$. Поэтому

$$\xi'_i(t) = Q_i = M[Q] + (Q_i - M[Q]) = m'(t) + r_1(t)[\xi_i - m(t)],$$

$$\text{так как } r_1(t) = \frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)} = \frac{\sigma[Q]}{\sigma[Q]t} = \frac{1}{t}.$$

Таким образом, при $F = 1$ линейная средняя квадратичная регрессия $v(t)$ на $s(t)$ совпадает с точной зависимостью этой регрессии, и ошибка аппроксимации $\mu(t, \xi)$ становится равной нулю. Отсюда следует:

нормальный закон распределения точно описывает нестабильность в тех случаях, когда средняя скорость дрейфа в любой момент времени не зависит от нестабильности объекта за предыдущий период.

Этому условию, как правило, соответствуют скорости коррозии, линейного изнашивания поверхности и некоторых других процессов деградации, протекающих из-за воздействия механических нагрузок [52]. Во всех остальных случаях применение модели линейной средней квадратичной регрессии $v(t)$ на $s(t)$ будет приводить к дополнительной методической погрешности. Однако ее можно исключить простыми преобразованиями.

Например, целый ряд химических процессов старения, таких как рекристаллизация, диффузия, хемосорбция и другие гетерогенные реакции i -го порядка, а также некоторые процессы механического разрушения (например, развитие трещины) характеризуются

$F = 0$ [52]. Для этого случая разделим левую и правую части уравнения (7.8) на s . Тогда это уравнение запишется так:

$$[\ln |s(t)|]' = Q[T, \alpha_1, \dots, \alpha_n].$$

Так как производная от логарифма $|s(t)|$ зависит только от Q , линейная модель будет точным описанием ее регрессии на $\ln |s(t)|$. Поэтому примем, по аналогии с предыдущим,

$$\mu(t, \ln |\xi|) = m'_{\ln}(t) + r_1(t)[\ln |\xi| - m_{\ln}(t)],$$

где $r_1(t) = \frac{\sigma'_{\ln}(t)}{\sigma_{\ln}(t)}$, $m_{\ln}(t)$ и $\sigma_{\ln}(t)$ — математическое ожидание и стандартное отклонение зависимости $\ln |s(t)|$, определяемые формулами

$$m_{\ln}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sign} \xi \cdot \ln |\xi| \cdot \varphi_t(\xi) d\xi,$$

$$\sigma_{\ln}(t) = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} [\text{sign} \xi \cdot \ln |\xi| - m_{\ln}(t)]^2 \cdot \varphi_t(\xi) d\xi \right\}^{0.5}.$$

Из очевидного равенства $\xi' = \xi \cdot (\ln |\xi|)'$ следует, что $\mu(t, \xi) = \xi \cdot \mu(t, \ln |\xi|)$. Это означает, что в качестве интенсивности дрейфа в уравнениях (7.1) и (7.3) принимается выражение

$$\mu(t, \xi) = \xi \{m'_{\ln}(t) + r_1(t)[\ln |\xi| - m_{\ln}(t)]\}. \quad (7.9)$$

Отсюда при начальном условии $\psi(0, \xi) = \text{sign} \xi \cdot \ln |\xi|$:

$$\psi(t, \xi) = G(t, \xi) \cdot \sigma_{\ln}(0) + m_{\ln}(0),$$

$$\text{где } G(t, \xi) = \frac{\text{sign} \xi \cdot \ln |\xi| - m_{\ln}(t)}{\sigma_{\ln}(t)},$$

$$\text{и } \varphi_t(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\ln}(t)\xi} \exp\left\{-\frac{[\text{sign} \xi \cdot \ln |\xi| - m_{\ln}(t)]^2}{2\sigma_{\ln}^2(t)}\right\}. \quad (7.10)$$

Таким образом, при процессах старения и износа, удовлетворяющих условию $F = 0$, нестабильность подчиняется логарифмически нормальному распределению.

На практике часто встречаются значения F , не равные 1 или 0. Например, $F > 1$ характерно для процессов с внутренним сопротивлением деформации (упругие элементы, системы с обратной связью), $F < 0$ — для гетерогенных химических реакций n -го порядка [52]. Преобразуя (7.8) к виду $[s^F(t)]' = \frac{1}{F} \cdot Q[T, \alpha_1, \dots, \alpha_n]$, примем, по аналогии с предыдущим,

$$\mu(t, |\xi|^F) = \frac{1}{F} \cdot \{m'_F(t) + r_1(t)[|\xi|^F - m_F(t)]\},$$

$$\text{где } r_1(t) = \frac{\sigma'_F(t)}{\sigma_F(t)}, \quad m_F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sign} \xi \cdot |\xi|^F \cdot \varphi_t(\xi) d\xi,$$

$$\sigma_F(t) = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} [\text{sign} \xi \cdot |\xi|^F - m_F(t)]^2 \varphi_t(\xi) d\xi \right\}^{0.5}.$$

Следовательно, в качестве интенсивности дрейфа в уравнениях (7.1) и (7.3) принимается

$$\mu(t, \xi) = \frac{1}{F} \cdot \text{sign} \xi \cdot (|\xi|)^{1-F} \cdot \{m'_F(t) + r_1(t)[\text{sign} \xi \cdot |\xi|^F - m_F(t)]\}. \quad (7.11)$$

Отсюда при начальном условии $\psi(0, \xi) = \text{sign} \xi \cdot |\xi|^F$ получим:

$$\psi(t, \xi) = G(t, \xi) \cdot \sigma_F(0) + m_F(0),$$

где $G(t, \xi) = \frac{\text{sign} \xi \cdot |\xi|^F - m_F(t)}{\sigma_F(t)}$,

$$\text{и } \varphi_F(\xi) = \frac{|F| \cdot (|\xi|)^{F-1}}{\sqrt{2\pi} \sigma_F(t)} \exp\left\{-\frac{[\text{sign} \xi \cdot (|\xi|)^F - m_F(t)]^2}{2\sigma_F^2(t)}\right\}. \quad (7.12)$$

Это распределение, называемое обобщенным нормальным распределением, описано в 2.2.3. Анализируя этот и ранее полученные в этом разделе результаты, можно сделать следующий вывод:

нестабильность МХ СИ подчиняется обобщенному нормальному распределению. Частными случаями этого распределения являются нормальное распределение, получающееся при $F = 1$, и логарифмически нормальное распределение, получающееся при $F = 0$.

В принципе возможно обоснование и других, более сложных модификаций обобщенного нормального закона распределения, если в уравнении (7.8) поменять множитель $s^{1-F}(t)$ на функцию $f[s(t)]$ различного вида (это характерно, например, для процессов увлажнения материала и износа опор измерительных приборов [52]).

7.3. Критерии назначения межповерочных и межкалибровочных интервалов

В качестве критериев назначения МПИ принимают следующие показатели метрологической надежности:

- вероятность метрологической исправности СИ в заданный момент времени t — $P_{\text{ин}}(t)$;
- коэффициент метрологической исправности $K_{\text{ин}}(t)$;
- вероятность безотказной работы за заданное время t — $P(t)$.

7.3.1. Вероятность метрологической исправности

1. При калибровке СИ (или поверке способом калибровки) происходит восстановление начальных значений МХ. Поэтому плотность распределения погрешности СИ по совокупности СИ одного типа после проведения их калибровки равна начальной плотности

$\varphi_0(\xi)$, а через наработку (время) t после калибровки — $\varphi_t(\xi)$, определяемой формулой (7.4). Отсюда следует, что вероятность метрологической исправности в момент t СИ, подвергаемых калибровке, выражается формулой

$$\begin{aligned} P_{\text{ин}}(t) &= P(t, -\Delta, \Delta) = \int_{-\Delta}^{\Delta} \varphi_t(\xi) d\xi = \int_{-\Delta}^{\Delta} \varphi_0[G(t, \xi)] \frac{\partial G(t, \xi)}{\partial \xi} d\xi = \\ &= \Phi[G(t, \Delta)] - \Phi[G(t, -\Delta)] = \\ &= \Phi\left(\frac{\Delta^F - m_F(t)}{\sigma_F(t)}\right) - \Phi\left(\frac{-\Delta^F - m_F(t)}{\sigma_F(t)}\right), \end{aligned} \quad (7.13)$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-0.5y^2} dy$ — интегральная функция нормального распределения,

$G(t, \xi)$ — функция дрейфа МХ СИ,

Δ — предел допускаемых значений МХ.

2. При поверке СИ, целью которой является определение пригодности к применению по критерию точности Δ , бракуются и заменяются новыми или отремонтированными только те экземпляры, погрешность которых превышает эту норму. Остальные экземпляры не подвергаются калибровке и покидают поверочную лабораторию с той же погрешностью, которую они имели при поступлении на поверку. Поэтому совокупность СИ, поступающих в поверочную лабораторию в каждый момент времени, включает экземпляры с различной наработкой после последней калибровки: проработавшие один временной интервал T , два интервала $2T$, три интервала $3T$ и т. д. Оценка метрологической надежности такой совокупности СИ возможна в рамках модели установившегося процесса эксплуатации, характеризуемого следующими условиями:

- длительность процесса эксплуатации СИ данного типа (при условии замены экземпляров, выработавших свой срок службы, новыми СИ) не ограничена;
- средний возраст совокупности СИ, поступающих на поверку, а также средние показатели точности и метрологической надежности этой совокупности остаются постоянными.

В [53] показано, что для существования такого процесса необходимо, чтобы, начиная с некоторого момента времени, количество новых СИ, поступающих в эту совокупность, являлось постоянной величиной.

Максимальное количество проверок одного СИ n составляет $\lceil \frac{T_{cs}}{T} \rceil$, если T_{cs} делится на T без остатка, и $\lceil \frac{T_{cs}}{T} \rceil + 1$ в противном случае (T_{cs} — срок службы СИ, T — МПИ, $[x]$ — антье x (целая часть числа, ближайшая к нему снизу)). Вероятность $Q_{mi}(T)$ метрологической исправности СИ, поступающих на проверку через МПИ T за ограниченный срок службы T_{cs} , найдем по формуле полной вероятности:

$$Q_{mi}(T) = \sum_{s=1}^n Q_{op}[(n-s)T] \cdot Q_s(T), \quad (7.14)$$

где $Q_{op}[(n-s)T] = 1 - Q_{mi}[(n-s)T]$ — вероятность забракования СИ и его замены новым при $(n-s)$ -й проверке после ввода в эксплуатацию,

$Q_s(T) = \int_{-\Delta}^{\Delta} \varphi_{sT}(\xi) d\xi$ — вероятность метрологической исправности при 1-й, 2-й, ..., s -й проверках включительно. Подставляя в эту формулу функцию $\varphi_{sT}(\xi)$, получим:

$$Q_s(T) = \max\{\Phi[B_s(T)] - \Phi[-A_s(T)], 0\},$$

$$\text{где } A_1(T) = \frac{\Delta^F + m_F(T)}{\sigma_F(T)}, \quad B_1(T) = \frac{\Delta^F - m_F(T)}{\sigma_F(T)},$$

а остальные слагаемые подсчитывают рекуррентно по формулам

$$A_i(T) = \min\left[\frac{\Delta^F + m_F(iT)}{\sigma_F(iT)}; A_{i-1}(T)\right],$$

$$B_i(T) = \min\left[\frac{\Delta^F - m_F(iT)}{\sigma_F(iT)}; B_{i-1}(T)\right], \quad i = 2, 3, \dots, s.$$

При установившемся процессе эксплуатации совокупности СИ $Q_{mi}[(n-s)T] = \text{const} = Q_{mi}(T)$. Подставим эту зависимость в (7.14):

$$Q_{mi}(T) = [1 - Q_{mi}(T)] \sum_{s=1}^n Q_s(T).$$

Переводя в левую часть уравнения слагаемые, содержащие $Q_{mi}(T)$, получим

$$Q_{mi}(T) = \frac{\sum_{s=1}^n Q_s(T)}{1 + \sum_{s=1}^n Q_s(T)}.$$

С другой стороны, как безусловная

вероятность метрологической исправности СИ за ограниченный срок службы T_{cs} , она равна

$Q_{mi}(T) = P_{mi}(T) \cdot R(T_{cs})$, где $P_{mi}(T)$ — условная вероятность метрологической исправности СИ при условии, что наработка СИ ограничена T_{cs} , $R(T_{cs})$ — вероятность этого условия. Поэтому

$$P_{mi}(T) = \frac{1}{R(T_{cs})} \cdot \frac{\sum_{s=1}^n Q_s(T)}{1 + \sum_{s=1}^n Q_s(T)}. \quad (7.15)$$

Вероятность $R(T_{cs})$ является постоянной величиной, одинаковой при любых значениях $Q_s(T)$. Поэтому положим $Q_s(T) = 1$ при $s = 1, 2, \dots, n$. Так как при этом в совокупности СИ не будет ни одного метрологического отказа, то и $P_{mi}(T) = 1$. Подставив эти

значения в (7.15), получим: $1 = \frac{1}{R(T_{\text{ср}})} \cdot \frac{n}{1+n}$, откуда

$R(T_{\text{ср}}) = \frac{n}{n+1}$. Таким образом, окончательно имеем:

$$P_{\text{ми}}(T) = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{\sum_{s=1}^n Q_s(T)}{1 + \sum_{s=1}^n Q_s(T)}, \quad (7.16)$$

где $n = \begin{cases} \left\lfloor \frac{T_{\text{ср}}}{T} \right\rfloor, & \text{если это число целое,} \\ \left\lfloor \frac{T_{\text{ср}}}{T} \right\rfloor + 1, & \text{если это число не целое.} \end{cases}$

$$Q_s(T) = \max\{\Phi[B_s(T)] - \Phi[-A_s(T)], 0\},$$

$$A_1(T) = \frac{\Delta^F + m_F(T)}{\sigma_F(T)}, \quad B_1(T) = \frac{\Delta^F - m_F(T)}{\sigma_F(T)},$$

а остальные слагаемые подсчитывают рекуррентно по формулам

$$A_i(T) = \min\left[\frac{\Delta^F + m_F(iT)}{\sigma_F(iT)}; A_{i-1}(T)\right],$$

$$B_i(T) = \min\left[\frac{\Delta^F - m_F(iT)}{\sigma_F(iT)}; B_{i-1}(T)\right], \quad i = 2, 3, \dots, s.$$

Если срок службы СИ не ограничен, принимают $T_{\text{ср}} = \infty$. В этом случае

$$P_{\text{ми}}(T) = \frac{\sum_{s=1}^{\infty} Q_s(T)}{1 + \sum_{s=1}^{\infty} Q_s(T)}. \quad (7.17)$$

7.3.2. Коэффициент метрологической исправности

Коэффициент метрологической исправности $K_{\text{ми}}(t)$ равен средней доле времени на интервале $[0, t]$, в течение которого СИ находится в метрологически исправном состоянии. В соответствии с этим определением, $K_{\text{ми}}(t)$ вычисляется по формуле

$$K_{\text{ми}}(T) = \frac{1}{T} \int_0^T P_{\text{ми}}(t) dt. \quad (7.18)$$

7.3.3. Вероятность работы без метрологических отказов (вероятность безотказной работы)

Вычисление вероятности безотказной работы — наиболее сложная задача прогнозирования метрологической надежности. Обычно ее оценивают по формуле

$$P(t) = \begin{cases} \frac{\Phi[G(t, \Delta)] - \Phi[G(t, -\Delta)]}{\Phi[G(0, \Delta)] - \Phi[G(0, -\Delta)]}, & \text{или} \\ \frac{\Phi[G(t, \Delta)]}{\Phi[G(0, \Delta)]} & \text{при допущении о одностороннем дрейфе,} \end{cases} \quad (7.19)$$

Однако данное выражение не точно, т. к. оно оценивает не вероятность безотказной работы на интервале $[0, T]$, а вероятность метрологической исправности СИ в конечный момент этого интервала. Поэтому она может служить оценкой $P(t)$ только для таких процессов дрейфа, у которых все траектории являются монотонными функциями. Это молчаливо и предполагается, хотя чаще всего специально не оговаривается. Оправданием такого подхода является то, что задача оценивания вероятности выбросов нестационарных случайных процессов за заданные границы (чем по существу является определение $P(t)$) в общем случае не имеет аналитического решения.

В то же время оказывается возможным найти решение этой задачи для случайных процессов с траекториями, непрерывно дифференцируемыми с вероятностью 1. Строгий математический

вывод искомого выражения достаточно сложен³. Поэтому ограничимся изложением идеи доказательства. Оно заключается в следующем.

Разделим интервал времени $[0, T]$ на $n = 2^k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) одинаковых частей, равных $\tau(k) = \frac{T}{2^k}$. Предположим, что контроль метрологической исправности СИ осуществляется в моменты времени $t_i = i \cdot \frac{T}{2^k}$ ($i = 0, 1, \dots, n$). Вероятность метрологической исправности $P_{\text{ин}}(t_i)$ в каждый из моментов t_i определяется (7.19). Событие, заключающееся в том, что СИ метрологически исправно во все эти моменты времени, вместе взятые, является пересечением указанных событий⁴:

$$\begin{aligned} & \text{«метрологическая исправность в } t_0, t_1, \dots, t_n = \\ &= \bigcap_{i=0}^n \{\text{метр. исправно в } t_i\} \text{»}. \end{aligned}$$

Следовательно, вероятность того, что СИ метрологически исправно во все эти моменты времени при условии, что оно было метрологически исправно в начальный момент времени, как вероятность пересечения этих событий, равняется

$$\begin{aligned} P_{\text{ин}}(t_0, t_1, \dots, t_n) &= \\ &= P\left[\bigcap_{i=0}^n \{\text{метр. исправно в } t_i / \text{метр. исправно в } t_0 = 0\}\right] = \\ &= \frac{\Phi[\min_{i=0, \dots, n} G(t_i, \Delta)] - \Phi[\max_{i=0, \dots, n} G(t_i, -\Delta)]}{\Phi[G(0, \Delta)] - \Phi[G(0, -\Delta)]}. \end{aligned}$$

Теперь устремим k к бесконечности. При этом, т. к. $\tau(k) \rightarrow 0$, точки t_i будут постепенно заполнять интервал $[0, T]$, и если

³ Этот вывод приведен в главе 9 [47]

⁴ Пересечение множеств A и B — множество, являющееся общей частью A и B

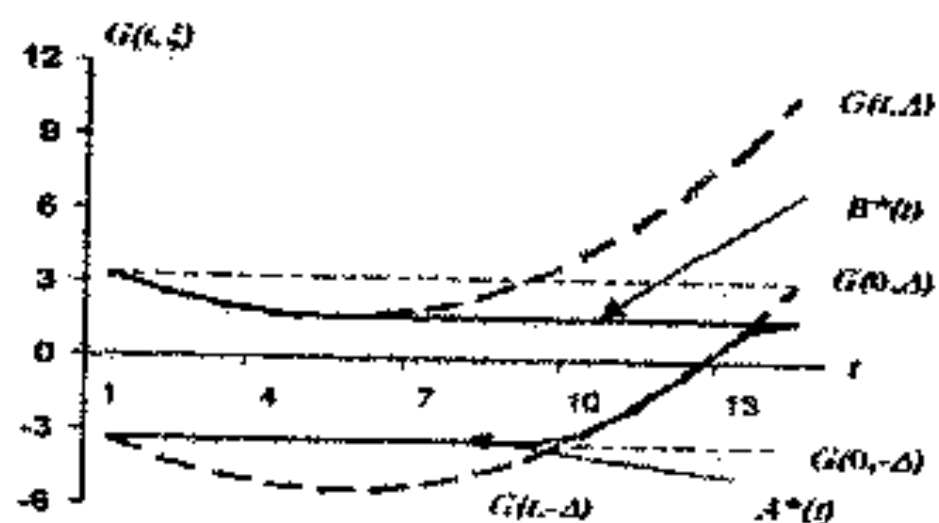
предельный переход является корректным, вероятность безотказной работы определится как предел при $k \rightarrow \infty$ вероятности метрологической исправности СИ во всех 2^k точках этого интервала:

$$P(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} P_{\text{ин}}(0, t_1, \dots, t_{2^k}) = \frac{\Phi[B(t)] - \Phi[A(t)]}{\Phi[G(0, \Delta)] - \Phi[G(0, -\Delta)]}, \quad (7.20)$$

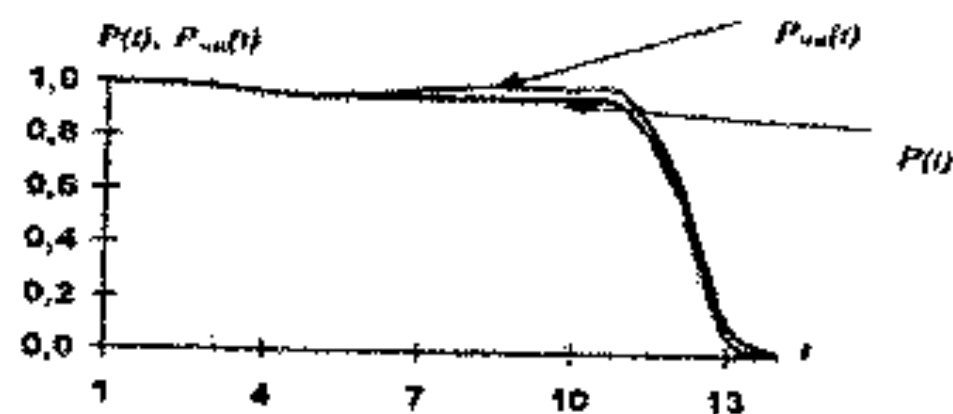
где $A(t) = \max_{\tau \in [0, t]} [G(\tau, -\Delta)]$, $B(t) = \min_{\tau \in [0, t]} [G(\tau, \Delta)]$.

Пример 7.1. Пределы допускаемой систематической погрешности СИ составляют $\pm \Delta = \pm 1\%$. Начальная погрешность СИ определяется погрешностью калибровки и характеризуется $m(0) = 0$ и $\sigma(0) = 0,3\%$. Распределение неустойчивости систематической погрешности подчиняется нормальному закону с $m(t) = (0,25t - 0,03t^2) \frac{\%}{\text{мес}}$ и $\sigma(t) = \sigma(0)e^{0,01t} \%$. Определить $P_{\text{ин}}(t)$ и $P(t)$.

На рис. 25, а представлены графики зависимостей $G(t, -\Delta)$, $G(t, \Delta)$ и их экстремумов $A^*(t)$ и $B^*(t)$. Они отражают немонотонный характер дрейфа систематической погрешности СИ этого типа. Видно, что в интервале 0–5 мес. метрологические отказы происходят только путем пересечения верхней границы области допускаемых значений, в интервале 10–15 мес. — путем пересечения нижней границы, а в интервале 5–10 мес. метрологических отказов нет вообще. Соответственно ведут себя и графики $P_{\text{ин}}(t)$ и $P(t)$, показанные на рис. 25, б. В частности, видно, что $P_{\text{ин}}(t)$ возрастает на интервале 4–8 мес., что является убедительным свидетельством того, что по формуле (7.19) оценивать вероятность безотказной работы нельзя. Максимальная разность $P(t)$ и $P_{\text{ин}}(t)$ составляет 0,05 ($P(9 \text{ мес.}) = 0,95$, в то время как $P_{\text{ин}}(9 \text{ мес.}) = 1$).



а) Функции $G(t, -\Delta)$ и $G(t, \Delta)$ и их экстремальные значения $A^*(t)$ и $B^*(t)$



б) Графики $P_m(t)$ и $P(t)$

Рис. 25. Графическая иллюстрация зависимостей для определения $P_m(t)$ и $P(t)$

7.4. Обоснование первичных межповерочных и межкалибровочных интервалов

При назначении первичного МПИ новых типов СИ, выпущенных в обращение, возможны следующие виды источников информации о нестабильности СИ: испытания СИ или его отдельных блоков; данные о нестабильности элементов СИ; показатели надежности СИ; данные о МПИ СИ — аналогов, подтвержденные опытом их эксплуатации.

Наиболее предпочтительными, с точки зрения точности обоснования МПИ, являются испытания партии СИ с целью оценки их нестабильности. Эти испытания могут быть проведены специально (в нормальном или форсированном режиме эксплуатации), совмещены с контрольными испытаниями на надежность либо проведены путем подконтрольной эксплуатации установочной партии. Методика проведения этих испытаний, регламентированная [49, 50], приведена ниже.

Формируют партию СИ для проведения испытаний. Объем N партии должен быть не менее 30. Отобранную партию подвергают испытаниям в обычном или ускоренном (с известным коэффициентом ускорения) режиме. Через равные промежутки времени эксплуатации или наработки Δt проводят измерения контролируемых параметров.

Величина Δt должна быть такой, чтобы изменение $y_j(i\Delta t) = x_j(i\Delta t) - x_j[(i-1)\Delta t]$ МХ могло быть измерено с приемлемой точностью. Это означает, что $y_j(\Delta t)$ должны быть значимы на фоне случайной погрешности измерений. При самой простой, линейной модели прогнозирования метод наименьших квадратов требует не менее трех групп многократных измерений. Поэтому длительность испытаний должна быть не менее $2\Delta t$.

По результатам измерений нестабильности $y_j(i\Delta t)$, $j = 1, \dots, N$ за интервалы Δt , $2\Delta t$, $3\Delta t$, ..., $n\Delta t$ оценивают выборочные характеристики распределения нестабильности СИ в следующем порядке.

1. Находят параметры F_i , $i = 1, 2, \dots$ обобщенного нормального закона распределения МХ $x_j(i\Delta t)$ (или нестабильности МХ $y_j(i\Delta t)$), которым с наивысшим уровнем значимости соответствует информация о результатах испытаний СИ данного типа. Алгоритм статистического определения этого параметра:

1.1. Задают матрицу значений F от 0 до +4 с шагом 0,1. Для каждого значения этой матрицы и каждого $i\Delta t$ находят:

- значения $x_j^F = \text{sign} x_j \cdot |x_j|^F$, $j = 1, \dots, N$;

- выборочное среднее $m_F = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j^F$;

- выборочное стандартное отклонение $\sigma_F = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^N (x_j^F - m_F)^2}{N-1}}$;

- значение квантиля χ^2 -распределения

$$\chi_F^2 = \sum_{j=1}^N \frac{(1 - 6\sigma_F \cdot f(x_j^F))^2}{6\sigma_F \cdot f(x_j^F)}.$$

1.2. Находят $\min_F \chi_F^2$. В качестве $F_i = F(i\Delta t)$ принимают значение, соответствующее этому минимуму.

В соответствии с методом наименьших квадратов, это будет наилучшее приближение выборочного распределения МХ (нестабильности МХ) в момент $i\Delta t$ обобщенным нормальным распределением.

2. Находят выборочные характеристики обобщенного нормального распределения:

- среднее значение параметра F

$$F = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F_i,$$

- среднее значений x^F

$$m_F(i\Delta t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \text{sign}(x_j) \cdot (|x_j(i\Delta t)|)^F, \quad i = 1, 2, \dots$$

- стандартное отклонение

$$\sigma_F(i\Delta t) = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N [\text{sign}(x_j) \cdot (|x_j(i\Delta t)|)^F - m_F(i\Delta t)]^2}.$$

3. По этим значениям методом наименьших квадратов подбираются аппроксимирующие полиномы для функций

$$m_F(t) = m_a + m_b \cdot t, \quad \sigma_F^2(t) = \sigma_a^2 + \sigma_b^2 \cdot t. \quad (7.21)$$

4. Проводят расчет МПИ методом последовательных приближений из членов ряда (0,25; 0,5; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 15; 18; 21; 24; 30) мес. и т. д. через 6 месяцев. Порядок расчета состоит в следующем:

- выбирают значение МПИ T_1 , равное действующему значению МПИ T ;
- вычисляют значение критерия $R(T_1)$, установленного для данного СИ, в соответствии с формулами, приведенными в п. 7.3 (например, вероятность метрологической исправности $P_{\text{ин}}(T_1)$);
- сравнивают $R(T_1)$ с нормируемым значением критерия R^* . Метрологическая надежность СИ окажется выше требуемой, если $R(T_1) > R^*$. В этом случае выбирают из членов ряда, приведенного выше, значение МПИ $T_2 > T_1$, ближайшее к T_1 сверху. Если метрологическая надежность СИ окажется ниже требуемой ($R(T_1) < R^*$), то выбирают значение $T_2 < T_1$, ближайшее к T_1 снизу;
- вычисляют $R(T_2)$ и сравнивают $R(T_2)$ и $R(T_1)$ с R^* . Если R^* находится между значениями $R(T_2)$ и $R(T_1)$, то приближения заканчивают и принимают МПИ $T = \min(T_1, T_2)$;
- если это условие не выполняется, выбирают значение T_3 , ближайшее к T_2 , и повторяют операции, указанные выше. Если окажется, что R^* находится между значениями $R(T_2)$ и $R(T_3)$, то принимают МПИ равным $T = \min(T_2, T_3)$. В противном случае выбирают T_4 , ближайшее к T_3 , и т. д.;
- приближения продолжают до тех пор, пока R^* не окажется между $R(T_{i-1})$ и $R(T_i)$. Тогда принимают $T = \min(T_{i-1}, T_i)$.

7.5. Корректировка межповерочных и межкалибровочных интервалов в процессе эксплуатации средств измерений

Режимы и условия эксплуатации (интенсивность использования, преобладающие диапазоны измеряемых величин, частоты и других неинформативных параметров измерительного сигнала, условия измерений, качество технического и метрологического обслуживания и т. д.) СИ одного типа, эксплуатируемых на различных объектах, могут существенно отличаться друг от друга. В связи с этим будет существенно различаться и их метрологическая надежность, объективную информацию о которой предоставляют результаты проведенных поверок и калибровок. Поэтому основополагающие нормативные документы, регламентирующие порядок назначения МПИ [49, 50], предусматривают возможность корректировки МПИ конкретных экземпляров или групп СИ в процессе эксплуатации с учетом результатов их предыдущих поверок и калибровок.

Методика корректировки определяется видом информации о результатах поверки.

7.5.1. Корректировка МПИ группы СИ, при проведении поверок которых регистрируют значения погрешности каждого экземпляра

Сначала группируют результаты поверок по порядковым номерам поверок, прошедшим после выпуска СИ из производства или ремонта: 1-я группа — СИ, поступившие на 1-ю поверку после изготовления или ремонта, 2-я группа — СИ, поступившие на 2-ю поверку, и т. д. В каждой i -й группе окажется N_i результатов измерений погрешности СИ (или ее нестабильности за предыдущий МПИ) x_j , $j = 1, \dots, N_i$. Если известны результаты всех поверок, $N_i = N$, хотя в общем случае $N_i \neq const$.

Далее проводят статистическую обработку сгруппированных результатов поверок и определение МПИ в соответствии с методикой, изложенной в п. 7.3.

7.5.2. Корректировка МПИ группы СИ, при проведении поверок которых регистрируют альтернативный признак (годным или негодным признано СИ) и знак погрешности СИ, признанных негодными

В этом случае ограниченность исходных данных не позволяет получить оценку МПИ на основе обобщенного нормального распределения. Поэтому предполагается нормальное распределение погрешности СИ. Расчеты проводят в следующем порядке.

Сначала группируют результаты поверок так же, как в 7.5.1. Затем проводят статистическую обработку сгруппированных результатов поверок следующим образом.

1. Подсчитывают статистические вероятности

$$\bar{p}_{1i} = \bar{P}\{x(iT) \leq -\Delta\}, \quad \bar{p}_{2i} = \bar{P}\{x(iT) > \Delta\}, \quad (7.22)$$

где Δ — предел допускаемой погрешности СИ, и соответствующие им квантили нормального распределения $\bar{\lambda}_{1i}$ и $\bar{\lambda}_{2i}$, определяемые уравнением $\bar{\lambda} = \Phi^{-1}(\bar{p})$, где $\Phi(\bar{\lambda}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\bar{\lambda}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \bar{p}$ —

функция стандартизованного нормального распределения.

2. Находят статистические оценки погрешности: среднее значение $\bar{m}(iT)$ и стандартное отклонение $\bar{\sigma}(iT)$

$$\bar{m}(iT) = \Delta \frac{\bar{\lambda}_{1i} + \bar{\lambda}_{2i}}{\bar{\lambda}_{1i} - \bar{\lambda}_{2i}}, \quad \bar{\sigma}(iT) = \frac{2\Delta}{\bar{\lambda}_{2i} - \bar{\lambda}_{1i}}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (7.23)$$

3. По значениям $\bar{m}(iT)$ и $\bar{\sigma}(iT)$ аналогично (7.21) подбирают аппроксимирующий полином для функций $m(t)$ и $\sigma^2(t)$ нормального распределения (принимается $F = 1$).

Далее проводят расчет МПИ в соответствии с методикой, изложенной в п. 7.4.

7.5.3. Коррелировка МПИ группы СИ, при проведении поверок которых регистрируют только альтернативный признак годности СИ

В этом случае также предполагается нормальное распределение погрешности СИ. Расчеты проводят в следующем порядке.

Группируют результаты поверок так же, как в п. 7.5.1.

Затем подсчитывают статистические вероятности $\bar{p}_i$ признания СИ годным по результатам i -й поверки.

Принимают допущение о «всерном» случайном процессе изменения погрешности СИ во времени, характеризуемом параметрами

$$m(t) = 0, \sigma^2(t) = \sigma_a^2 + \sigma_b^2 \cdot t. \quad (7.24)$$

Определяют первую оценку МПИ T_1 следующим образом.

1. Находят статистические оценки параметров дрейфа погрешности при этом допущении

$$\bar{m}(iT) = 0, \bar{\sigma}(iT) = \frac{\Delta}{\bar{\lambda}_{0,5(1+\bar{p}_i)}}, \quad i = 1, 2, \dots,$$

где $\bar{\lambda}_{0,5(1+\bar{p}_i)}$ — квантиль нормального распределения, соответствующий вероятности $0,5(1+\bar{p}_i)$.

2. По значениям $\bar{\sigma}(iT)$ методом наименьших квадратов подбирают аппроксимирующий полином (7.24) для функции $\sigma^2(t)$.

3. Определяют значение МПИ T_1 .

Затем принимают допущение о линейном случайном процессе изменения погрешности СИ во времени, характеризуемом параметрами

$$m(t) = m_a + m_b \cdot t, \sigma(t) = \sigma_0. \quad (7.25)$$

Определяют вторую оценку МПИ T_2 следующим образом.

1. Находят статистические оценки параметров дрейфа погрешности при этом допущении

$$\bar{m}(iT) = \Delta - \bar{\lambda}_{\bar{p}_i} \sigma_0, \quad \bar{\sigma}(iT) = \sigma_0,$$

где σ_0 — СКО распределения погрешности калибровки СИ (если оно неизвестно, принимают $\sigma_0 = \frac{\Delta}{3}$).

2. По значениям $\bar{m}(iT)$ методом наименьших квадратов подбирают аппроксимирующий полином (7.25) для функции $m(t)$.

3. Определяют значение МПИ T_2 .

В качестве МПИ принимают минимальное значение из полученных оценок:

$$T = \min[T_1, T_2]. \quad (7.26)$$

Пример 7.2. Поверка приборов «Сапфир 22ДА» заключается в контроле соответствия их погрешности пределу допускаемой погрешности $\Delta = \pm 0,5\%$. Срок службы приборов $T_{\text{сл}} = 20$ г. Эксплуатация 60 экземпляров СИ этого типа на объекте при МПИ $T = 1,5$ г. показала следующее: было забраковано при первой, второй и пятой поверках по одному прибору, при третьей и четвертой поверках — по два. Найти МПИ, соответствующий $R_{\text{жм}}^* = 0,95$.

Сначала оценим статистические вероятности $\bar{p}_i$ признания годными СИ при i -й поверке $\bar{p}_i = \frac{n_i}{n_0}$, где $n_0 = 60$ — общее число СИ, поставленных на эксплуатацию, n_i — число СИ, признанных годными на i -й поверке. При этом СИ, введенные в эксплуатацию взамен забракованных, не учитываются. Затем находим квантили $\bar{\lambda}_{0,5(1+\bar{p}_i)}$ и $\bar{\lambda}_{\bar{p}_i}$ и параметры всерного и линейного моделей дрейфа. Результаты этих расчетов приведены в таблице 25.

Таблица 25

Выборочные оценки параметров моделей дрейфа
измерительного прибора «Сапфир 22ДА»

Номер i поверки	Число и год- ных СИ	$\bar{p}_i$	$0,5(1 + \bar{p}_i)$	Всерный случайный процесс			Линейный случай- ный процесс	
				$\bar{p}_{n,5(1+\bar{p}_i)}$	$\bar{\sigma}(iT)$	$\bar{\sigma}^2(iT)$	$\bar{p}_i$	$\bar{m}(iT)$
0	60	1	1	3	0,167	0,028	3	0
1	59	0,983	0,992	2,394	0,209	0,044	2,128	0,101
2	58	0,967	0,983	2,128	0,235	0,055	1,834	0,145
3	56	0,933	0,967	1,834	0,273	0,074	1,501	0,194
4	54	0,900	0,950	1,645	0,304	0,092	1,282	0,226
5	53	0,883	0,942	1,569	0,319	0,102	1,192	0,239

Для гипотезы о всерном случайном процессе полагают $\bar{m}(iT) = 0$. Для гипотезы о линейном случайном процессе полагают $\sigma(iT) = \frac{\Delta}{3}$.

Методом наименьших квадратов найдем параметры моделей дрейфа. Для линейной модели $m(t) = m_0 + m_1 t$ система нормальных уравнений имеет вид

$$\begin{cases} 5m_0 + T \sum_{i=1}^5 i \cdot m_1 = \sum_{i=1}^5 \bar{m}(iT), \\ T \sum_{i=1}^5 i \cdot m_0 + T^2 \sum_{i=1}^5 i^2 \cdot m_1 = T \sum_{i=1}^5 i \bar{m}(iT), \end{cases}$$

где $T = 1,5$ г. — действующий МПИ, $T \sum_{i=1}^5 i = 1,5 \cdot 15 = 22,5$,

$$T^2 \sum_{i=1}^5 i^2 = 1,5^2 \cdot 55 = 123,75, \quad \sum_{i=1}^5 \bar{m}(iT) = 0,905, \quad T \sum_{i=1}^5 i \bar{m}(iT) = 4,606.$$

Таким образом, система нормальных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} 5m_0 + 22,5m_1 = 0,905, \\ 22,5m_0 + 123,75m_1 = 4,606. \end{cases}$$

Ее решение: $m_0 = 0,074$ %, $m_1 = 0,024$ %/год.

Для всерной модели $\sigma^2(t) = \sigma_a^2 + \sigma_b^2 t$ имеем аналогичную систему нормальных уравнений:

$$\begin{cases} 5\sigma_a^2 + 22,5\sigma_b^2 = 0,367, \\ 22,5\sigma_a^2 + 123,75\sigma_b^2 = 1,882. \end{cases}$$

Ее решение: $\sigma_a^2 = 0,0275$ (%)², $\sigma_b^2 = 0,0102$ (%)²/год.

По формуле (7.16) с помощью системы «MathCAD» найдем вероятности метрологической исправности СИ при этих двух моделях дрейфа. При всерной модели

$$m_1(iT) = 0, \quad \sigma_1(iT) = \sqrt{0,0275 + 0,0102 \cdot i \cdot T},$$

$$Q_{s1}(T) = \Phi\left[\frac{0,5}{\sqrt{0,0275 + 0,0102 \cdot s \cdot T}}\right] - \Phi\left[-\frac{0,5}{\sqrt{0,0275 + 0,0102 \cdot s \cdot T}}\right].$$

При линейной модели

$$m_2(iT) = 0,074 + 0,024 \cdot i \cdot T, \quad \sigma_2(iT) = \frac{\Delta}{3} = 0,167,$$

$$Q_{s2}(T) = \Phi\left[\frac{0,5 - (0,074 + 0,024 \cdot i \cdot T)}{0,167}\right] - \Phi[-3] \approx \Phi[2,55 - 0,143 \cdot i \cdot T].$$

Далее выбираем в соответствии с п. 7.4 значения T и оцениваем по формуле (7.16) значения вероятностей метрологической исправности при всерной модели дрейфа $P_{s1}(T)$ и линейной модели $P_{s2}(T)$. Результаты расчета приведены в таблице 26. Они показывают, что оптимальным по критерию $P_{s2}^* = 0,95$ является МПИ $T = 3$ г.

Таблица 26
Расчет МПН измерительного прибора «Салфир 22ДА»

МПН T, r	$P_{\text{из1}}(T)$	$P_{\text{из2}}(T)$	$\min\{P_{\text{из1}}(T), P_{\text{из2}}(T)\}$
1,5	0,986	0,978	0,978
1,75	0,984	0,975	0,975
2,0	0,982	0,973	0,973
2,5	0,977	0,966	0,966
3	0,972	0,955	0,955
3,5	0,968	0,947	0,947

Глава 8

ОБЕСПЕЧЕНИЕ ТОЧНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ В СООТВЕТСТВИИ СО СТАНДАРТАМИ ИСО СЕРИИ 5725

8.1. Основные понятия

В этой главе излагается получающая все большее распространение в стране и мире методология обеспечения точности измерений, регламентированная международными стандартами ИСО серии 5725 (в России они внедрены государственными стандартами ГОСТ Р ИСО 5725-1—ГОСТ Р ИСО 5725-6 [54]).

В соответствии с классическим подходом, изложенным в главе 2, точность измерений определяется степенью близости результата измерения к истинному (действительному) значению измеряемой величины, причем за действительное значение величины принимается ее значение, определенное с помощью первичного эталона. Но этот подход неприменим ко многим измерительным задачам, для которых эталоны либо отсутствуют в настоящее время, либо их в принципе не может быть. К таким задачам относятся измерения многих элементов химического состава веществ, материалов и объектов окружающей природной среды, измерения показателей качества продукции (например, в нефтехимической и пищевой отраслях промышленности), измерения в биологии, медицине и многие другие. В этом случае в качестве действительного значения величины в международной и отечественной практике обычно условно принимают ее наиболее вероятное значение, определенное по итогам авторитетных научных или инженерных исследований. Это значение называется принятым опорным значением величины. Оно определяется следующим образом: *принятое опорное значение* — значение, согласованное для сравнения и полученное как:

а) теоретическое или установленное значение, базирующееся на научных принципах;

б) *присвоенное или аттестованное значение, базирующееся на экспериментальных работах какой-либо национальной или международной организации;*

в) *согласованное или аттестованное значение, базирующееся на совместных или экспериментальных работах под руководством научной или инженерной группы;*

г) *математическое ожидание, т. е. среднее значение заданной совокупности результатов измерений (лишь в том случае, когда а), б) и в) недоступны).*

Это определение показывает, что опорное значение ключевого сличения, рассмотренное в главе 6, сформулировано в полном соответствии с методологией стандартов ИСО 5725.

Вследствие этого определения несколько изменяется определение *точности измерений*, данное в главе 2: под ней понимается *степень близости результата измерений к истинному (или в его отсутствие принятому опорному значению).* В свою очередь, *точность измерений* обусловлена двумя различными свойствами измерений: *правильностью и прецизионностью.* *Правильность — степень близости среднего значения, полученного на основании большой серии результатов измерений, к принятому опорному значению.* Она характеризуется *систематической погрешностью*, которая определяется как *разность между математическим ожиданием результатов измерений и истинным (или в его отсутствие принятым опорным значением).* *Прецизионность — степень близости друг к другу независимых результатов измерений, полученных в конкретных регламентированных условиях.* Из этого определения следует, что *прецизионность* не имеет отношения к истинному или опорному значению измеряемой величины, она зависит только от случайных погрешностей измерений.

В основу рассматриваемой методологии оценки точности измерений положена следующая статистическая модель. В группе измерительных или испытательных лабораторий проводятся измерения какой-либо величины одним и тем же стандартизованным методом (например, по стандартизованной методике выполнения измерений (МВИ)). Результат каждого измерения y_i (здесь $i = 1, \dots, n$ — порядковый номер лаборатории) представляет собой следующую сумму:

$$y_i = m + B_i + e_i = \mu + \bar{\Delta} + B_i + e_i, \quad (8.1)$$

где $m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \mu + \bar{\Delta}$ — общее среднее значение результатов всех измерений, которое является суммой истинного (или принятого опорного) значения измеряемой величины μ и систематической погрешности $\bar{\Delta} = \Delta_m$, вычисленной по совокупности всех измерений этой величины;

B_i — систематическая погрешность измерения в i -й лаборатории вследствие систематических погрешностей СИ, отличия условий измерений от нормальных условий и других факторов, зависящих от технического состояния оборудования лаборатории и качества работы ее персонала;

e_i — случайная составляющая погрешности измерений в i -й лаборатории.

Сумма систематических погрешностей $\Delta_i = \Delta_m + B_i$ является систематической погрешностью измерений в i -й лаборатории. Поэтому она называется *систематической погрешностью лаборатории.* В соответствии с общим определением систематической погрешности, *систематическая погрешность лаборатории (при реализации конкретного метода) — разность между математическим ожиданием результатов измерений в отдельной лаборатории и истинным (или в его отсутствие принятым опорным) значением данной величины.*

Систематическая погрешность $\Delta_m = \bar{\Delta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta_i$ одна и та же

для всех лабораторий. Она обусловлена общими для всех недостатками выбранного метода измерений. Поэтому она называется *систематической погрешностью метода измерений.* По определению, *систематическая погрешность метода измерений — разность между математическим ожиданием результатов измерений, полученных во всех лабораториях, применяющих данный метод, и истинным (или в его отсутствие принятым опорным) значением данной величины.* В отличие от нее, значение систематической погрешности B_i зависит от выбора лаборатории. Поэтому она называется *лабораторной составляющей систематической погрешности измерений.* По определению, *лабораторная составляющая*

систематической погрешности — разность между систематической погрешностью лаборатории при реализации конкретного метода измерений и систематической погрешностью метода измерений.

Разброс погрешностей оценивают дисперсиями. Дисперсия σ_w^2 случайной составляющей e , носит название *внутрилабораторной дисперсии*. Она характеризует разброс результатов измерений при одинаковых условиях измерений. Такие измерения называются *измерениями в условиях повторяемости* (условия повторяемости — условия, при которых независимые результаты измерений получаются одним и тем же методом в одной и той же лаборатории, одним и тем же оператором, с использованием одного и того же оборудования, в пределах короткого промежутка времени). Дисперсия σ_L^2 систематической погрешности B , отражает различия между лабораториями. Поэтому она называется *межлабораторной дисперсией*. Дисперсия суммы погрешностей $B + e$, характеризует разброс результатов измерений во всех лабораториях относительно среднего результата измерений m . Такие измерения называются *измерениями в условиях воспроизводимости* (условия воспроизводимости — условия, при которых результаты измерений получают одним и тем же методом, в разных лабораториях, разными операторами, с использованием различного оборудования).

Условия повторяемости и воспроизводимости отражают две основные ситуации, рассмотренные в стандартах ИСО 5725. Они определяют два различных свойства, характеризующие прецизионность измерений: повторяемость и воспроизводимость. *Повторяемость* — прецизионность в условиях повторяемости, *воспроизводимость* — прецизионность в условиях воспроизводимости. Количественно эти свойства выражаются стандартными (средне-квадратичными) отклонениями и доверительными пределами. *Стандартное отклонение повторяемости* σ_p — стандартное отклонение результатов измерений, полученных в условиях повторяемости, *стандартное отклонение воспроизводимости* σ_R — стандартное отклонение результатов измерений, полученных в условиях воспроизводимости. Аналогично определяются и пределы: *предел повторяемости* r — значение, которое с доверительной вероятностью 0,95 не превышает абсолютным значением

разности двух результатов измерений, полученных в условиях повторяемости; *предел воспроизводимости* R — значение, которое с доверительной вероятностью 0,95 не превышает абсолютным значением разности двух результатов измерений, полученных в условиях воспроизводимости.

Эти показатели характеризуют прецизионность измерений во всей рассматриваемой совокупности лабораторий. Поэтому они должны быть средними оценками. Вводятся они следующим образом. Стандартные отклонения повторяемости и воспроизводимости равны квадратному корню из соответствующих дисперсий σ_p^2 и σ_R^2 . Дисперсия повторяемости равна математическому ожиданию внутрилабораторной дисперсии по совокупности всех лабораторий: $\sigma_p^2 = M(\sigma_w^2)$ (здесь M — знак математического ожидания). Дисперсия воспроизводимости равна математическому ожиданию дисперсии, характеризующей разброс систематических погрешностей лаборатории в совокупности лабораторий. Поэтому она равна сумме дисперсии повторяемости и межлабораторной дисперсии:

$$\sigma_R^2 = M(\sigma_w^2 + \sigma_L^2) = \sigma_p^2 + \sigma_L^2. \quad (8.2)$$

Отсюда следует соотношение между стандартными отклонениями повторяемости и воспроизводимости:

$$\sigma_R = \sqrt{\sigma_p^2 + \sigma_L^2}. \quad (8.3)$$

Схема понятий, введенных в этом пункте, приведена в таблице 27.

Таблица 27
Взаимосвязь основных понятий стандартов ИСО серии 5725

Свойства измерений	Точность		
	Правильность	Прецизионность	
		Воспроизводимость	Повторяемость
Погрешности измерений	Систематическая погрешность лаборатории $\Delta_s = \Delta_L + B$	Случайная погрешность измерений e	

Свойства измерений	Точность		
	Правильность	Прецизионность	
		Воспроизводимость	Повторяемость
Погрешности измерений	Систематическая погрешность метода измерений $\Delta_{\text{с}}$	Лабораторная составляющая систематической погрешности B_i	
Оценки погрешности измерений	$\Delta_{\text{с}} = \bar{\Delta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta_i$	Межлабораторная дисперсия σ_L^2	1. Дисперсия повторяемости σ_r^2 (внутрилабораторная дисперсия). 2. Стандартное отклонение повторяемости σ_r . 3. Предел повторяемости r
		Дисперсия воспроизводимости $\sigma_R^2 = \sigma_r^2 + \sigma_L^2$. Стандартное отклонение воспроизводимости σ_R . Предел воспроизводимости R	

8.2. Основной метод оценки прецизионности метода измерений

Экспериментальное оценивание прецизионности метода измерений проводится следующим образом. Набор мер, представляющий q различных уровней величины (например, совокупность из q образцов одноименной смеси веществ, имеющих различную концентрацию основного компонента), посылается в p лабораторий. Каждая i -я лаборатория проводит в условиях повторяемости

n_{ij} измерений на каждом уровне j . К измерениям, проводимым в лабораториях, предъявляются следующие требования:

- каждая группа измерений должна проводиться с соблюдением условий повторяемости;
- должна быть обеспечена взаимная независимость результатов n_{ij} параллельных измерений;
- каждая серия из n_{ij} параллельных измерений должна быть проведена в течение короткого интервала времени;
- измерения на всех q уровнях величины должны проводиться одним и тем же оператором, а на одном уровне — с использованием одного и того же оборудования;
- должен быть задан временной интервал проведения всех измерений.

При планировании эксперимента большое значение имеет выбор числа параллельных измерений n и числа лабораторий p , которые определяют масштабы эксперимента и точность полученных оценок. Для обоснованного выбора этих показателей оценивают расширенную неопределенность результата оценивания стандартных отклонений повторяемости σ_r и воспроизводимости σ_R . Она определяется формулой

$$P\{-A\sigma < s - \sigma < A\sigma\} = P, \quad (8.4)$$

где s — стандартное отклонение результатов измерений в выборке.

Для вероятности $P = 0,95$ в стандарте приведены следующие оценки отклонений $s - \sigma$:

- для стандартного отклонения повторяемости

$$A_r \sigma_r = 1,96 \sigma_r \sqrt{\frac{1}{2p(n-1)}}, \quad (8.5)$$

- для стандартного отклонения воспроизводимости

$$A_R \sigma_R = 1,96 \sigma_R \sqrt{\frac{p[1 + n(\gamma^2 - 1)] + (n-1)(p-1)}{2\gamma^4 n^2 p(p-1)}}, \quad (8.6)$$

где $\gamma = \frac{\sigma_R}{\sigma_r}$.

После формирования массива результатов измерений y_{jk} ($k = 1, \dots, n_j$ — номер измерения) проводится его анализ с целью исключения выбросов. Метод проверки на наличие выбросов по критерию Граббса изложен в п. 4.1. Затем определяют средние значения результатов измерений в базовых элементах (базовым элементом называют сочетание уровня величины и лаборатории)

$$\bar{y}_j = \frac{1}{n_j} \sum_{k=1}^{n_j} y_{jk} \quad (8.7)$$

и стандартные отклонения выборки базового элемента

$$s_{ij} = \sqrt{\frac{1}{n_j - 1} \sum_{k=1}^{n_j} (y_{jk} - \bar{y}_j)^2}. \quad (8.8)$$

Если базовый элемент содержит только два результата измерений, то принимают

$$s_{ij} = \frac{y_{j1} - y_{j2}}{\sqrt{2}}. \quad (8.9)$$

Далее вычисляют выборочные оценки:

- общего среднего значения

$$\hat{m} = \bar{\bar{y}}_j = \frac{\sum_{j=1}^p n_j \bar{y}_j}{\sum_{j=1}^p n_j}, \quad (8.10)$$

- дисперсии повторяемости

$$s_{rj}^2 = \frac{\sum_{i=1}^p (n_j - 1) s_{ij}^2}{\sum_{j=1}^p (n_j - 1)}, \quad (8.11)$$

- межлабораторной дисперсии

$$s_{Lj}^2 = \frac{s_{dj}^2 - s_{rj}^2}{\bar{n}_j}, \quad (8.12)$$

где

$$s_{dj}^2 = \frac{1}{p-1} \sum_{i=1}^p n_j (\bar{y}_{ij} - \bar{\bar{y}}_j)^2, \quad (8.13)$$

$$\bar{n}_j = \frac{1}{p-1} \left[\sum_{i=1}^p n_j - \frac{\sum_{i=1}^p n_j^2}{\sum_{j=1}^p n_j} \right], \quad (8.14)$$

- дисперсии воспроизводимости

$$s_{Rj}^2 = s_{rj}^2 + s_{Lj}^2. \quad (8.15)$$

В частном случае, когда все $n_j = n$, формулы (8.10)–(8.15) упрощаются:

$$\hat{m} = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p \bar{y}_j, \quad s_{rj}^2 = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p s_{ij}^2, \quad \bar{n}_j = n, \quad s_{dj}^2 = \frac{n}{p-1} \sum_{i=1}^p (\bar{y}_{ij} - \bar{\bar{y}}_j)^2, \quad (8.16)$$

$$s_{Rj}^2 = \frac{1}{p-1} \sum_{i=1}^p (\bar{y}_{ij} - \bar{\bar{y}}_j)^2 + (1 - \frac{1}{n}) s_{rj}^2. \quad (8.17)$$

В качестве значений стандартных отклонений повторяемости σ_r и воспроизводимости σ_R принимают их выборочные оценки s_r и s_R .

8.3. Основной метод оценки правильности метода измерений

Стандарт ИСО 5725-4 описывает основные способы оценки правильности измерений. Оценка правильности измерений возможна только тогда, когда принятое опорное значение величины μ (см. модель погрешности (8.1)) может быть установлено экспериментально, как ее действительное значение, например, с применением эталонов или стандартных образцов. В качестве стандартных образцов могут применяться:

- аттестованные стандартные образцы,
- материалы с известными свойствами,
- материалы, свойства которых были определены путем измерений альтернативным методом, про который известно, что его систематическая погрешность пренебрежимо мала.

В соответствии с п. 8.1 характеристикой правильности измерений является систематическая погрешность. В стандарте рассматриваются два показателя правильности: систематическая погрешность метода измерений Δ_m и систематическая погрешность лаборатории Δ_L .

8.3.1. Оценка систематической погрешности метода измерений

Целью межлабораторного эксперимента является не только оценка систематической погрешности метода измерений, но и установление факта статистической значимости этой погрешности. Если установлено, что систематическая погрешность статистически не значима, необходимо найти максимальное значение систематической погрешности, при котором она с определенной вероятностью может остаться необнаруженной в этом эксперименте.

К измерениям предъявляются те же требования, что и при оценке прецизионности. Программа эксперимента отличается от программы эксперимента по оценке прецизионности только другими критериями выбора числа лабораторий p и числа параллельных измерений n^1 . Так как расширенная неопределенность

¹ В стандарте рассматривается метод оценки систематической погрешности измерений величины на одном уровне. Поэтому в приведенных формулах индекс j опущен.

оценки систематической погрешности метода измерений равна

$$1,96\sigma_R \sqrt{\frac{n(\gamma^2 - 1) + 1}{\gamma^2 pn}}, \text{ при доверительной вероятности результатов}$$

эксперимента $P = 0,95$ минимальные значения p и n должны удовлетворять неравенству

$$1,96 \sqrt{\frac{n(\gamma^2 - 1) + 1}{\gamma^2 pn}} \sigma_R \leq \frac{\Delta_m^*}{1,84}, \quad (8.18)$$

где Δ_m^* — заданное (критическое) значение систематической погрешности метода Δ_m , при котором она считается значимой.

Проверка прецизионности, проводимая на первом этапе эксперимента, осуществляется путем вычисления выборочных дисперсий повторяемости s_r^2 и воспроизводимости s_R^2 по формулам (8.16) и (8.17), в которых индекс j опускается, и сравнения этих оценок со значениями, ранее установленными и принятыми за истинные дисперсии повторяемости σ_r^2 и воспроизводимости σ_R^2 .

Если σ_r ранее не было определено, то s_r считается его наилучшей оценкой. В противном случае определяют статистику

$$C = \frac{s_r^2}{\sigma_r^2}, \quad (8.19)$$

которую сравнивают с критическим значением $C_{\text{крит}} = \frac{\chi_{(1-\alpha)}^2(v)}{v}$

(под $\chi_{(1-\alpha)}^2(v)$ понимается $(1 - \alpha)\%$ квантиль χ^2 -распределения с числом степеней свободы $v = p(n - 1)$). Обычно принимают $\alpha = 0,05$.

² Значение центрированной (с математическим ожиданием, равным 0) и нормированной (со стандартным отклонением, равным 1) случайной величины, соответствующее значению $(1 - \alpha)$ функции распределения.

Если $C \leq C_{\text{крит}}$, то превышение оценкой s_r^2 значения дисперсии повторяемости σ_r^2 статистически незначимо. Поэтому для оценки систематической погрешности метода используется стандартное отклонение повторяемости σ_r . Если $C > C_{\text{крит}}$, то событие $s_r^2 > \sigma_r^2$ является статистически значимым. В этом случае необходимо исследовать причины этого превышения. В результате может оказаться необходимым повторить эксперимент.

Аналогично поступают и с оценкой воспроизводимости. Если стандартное отклонение воспроизводимости σ_R ранее не было определено, то s_R будет считаться его наилучшей оценкой. Если σ_R и σ_r ранее были определены, вычисляют статистику

$$C' = \frac{s_R^2 - \frac{n-1}{n} s_r^2}{\sigma_R^2 - \frac{n-1}{n} \sigma_r^2}, \quad (8.20)$$

которую сравнивают с критическим значением $C'_{\text{крит}} = \frac{\chi^2_{1-\alpha}(v)}{v}$.

Если $C' \leq C'_{\text{крит}}$, превышение числителем дроби (8.20) ее знаменателя статистически незначимо. При этом для оценки правильности измерений могут быть использованы σ_R и σ_r . Если $C' > C'_{\text{крит}}$, это превышение статистически значимо. В этом случае перед оценкой систематической погрешности метода измерений должно быть проведено тщательное исследование рабочих условий измерений в каждой лаборатории с целью нахождения причин расхождений. В результате может оказаться необходимым повторение эксперимента.

Оценку систематической погрешности метода измерений находят по формуле

$$\hat{\Delta}_x = \hat{m} - \mu, \quad (8.21)$$

где $\hat{m} = \bar{y}$ — вычисляют по формуле (8.10),

μ — принятое опорное значение величины.

Неопределенность этой оценки выражается стандартным отклонением

$$\sigma_{\hat{\Delta}_x} = \begin{cases} \sqrt{\frac{\sigma_R^2 - (1-1/n)\sigma_r^2}{p}}, & \text{если } \sigma_R, \sigma_r \text{ известны,} \\ \sqrt{\frac{s_R^2 - (1-1/n)s_r^2}{p}}, & \text{если они неизвестны.} \end{cases} \quad (8.22)$$

Расширенную неопределенность систематической погрешности Δ_x при вероятности охвата 0,95 приближенно можно оценить по формуле

$$\hat{\Delta}_x - A\sigma_{\hat{\Delta}_x} \leq \Delta_x \leq \hat{\Delta}_x + A\sigma_{\hat{\Delta}_x}, \quad (8.23)$$

$$\text{где } A = 1,96 \sqrt{\frac{n(\gamma^2 - 1) + 1}{\gamma^2 pn}}.$$

Если этот интервал включает в себя нулевое значение, систематическая погрешность при уровне значимости $\alpha = 0,05$ статистически незначима. В противном случае делается вывод о существовании систематической погрешности со средним значением $\hat{\Delta}_x$.

8.3.2. Оценка систематической погрешности лаборатории

Внутрилабораторный эксперимент, проводимый с целью оценки систематической погрешности лаборатории Δ_x , должен строго соответствовать стандарту на методику измерений, а измерения должны выполняться в условиях повторяемости. Перед оценкой правильности нужно проверить прецизионность измерений путем сопоставления внутрилабораторного стандартного отклонения с установленным стандартным отклонением метода σ_r . Программа

эксперимента включает измерения, выполняемые в одной лаборатории в эксперименте по оценке прецизионности. Дополнительным требованием является использование принятого опорного значения μ .

Количество результатов измерений n должно удовлетворять неравенству

$$\frac{1,96\sigma_r}{\sqrt{n}} \leq \frac{\Delta_r^*}{1,84}, \quad (8.24)$$

где Δ_r^* — заданное (критическое) значение систематической погрешности лаборатории, при котором она считается значимой.

При обработке результатов измерений сначала рассчитывают среднее значение $\bar{y}_w$ и стандартное отклонение s_w по формулам (8.7) и (8.8), в которых опущены индексы i и j . Результаты измерений должны быть исследованы на наличие выбросов по критерию Граббса (см. п. 4.1). Затем вычисляют статистику

$$C'' = \frac{s_w^2}{\sigma_r^2} \quad (8.25)$$

и сравнивают ее с критическим значением $C''_{\text{крит}} = \frac{\chi^2_{1-\alpha/2}(v)}{v}$, где

$v = n - 1$. Если $C'' \leq C''_{\text{крит}}$, то превышение оценкой s_w^2 значения дисперсии повторяемости σ_r^2 статистически незначимо. Поэтому для оценки систематической погрешности лаборатории используется стандартное отклонение повторяемости σ_r . Если $C'' > C''_{\text{крит}}$, то событие $s_w^2 > \sigma_r^2$ является статистически значимым. В этом случае необходимо рассмотреть вопрос о повторении эксперимента с подтверждением на всех стадиях того, что метод измерений реализуется надлежащим способом.

Затем оценивают систематическую погрешность лаборатории по формуле

$$\hat{\Delta}_r = \bar{y}_w - \mu. \quad (8.26)$$

Неопределенность этой оценки выражается стандартным отклонением

$$\sigma_{\hat{\Delta}_r} = \begin{cases} \frac{\sigma_r}{\sqrt{n}}, & \text{если } \sigma_r \text{ известно,} \\ \frac{s_r}{\sqrt{n}}, & \text{если оно неизвестно.} \end{cases} \quad (8.27)$$

Расширенная неопределенность систематической погрешности лаборатории Δ_r при вероятности охвата 0,95 вычисляют по формуле

$$\hat{\Delta}_r - A_w \sigma_{\hat{\Delta}_r} \leq \Delta_r \leq \hat{\Delta}_r + A_w \sigma_{\hat{\Delta}_r}, \quad (8.28)$$

где $A_w = \frac{1,96}{\sqrt{n}}. \quad (8.29)$

Если этот интервал включает в себя нулевое значение, систематическая погрешность лаборатории при уровне значимости $\alpha = 0,05$ статистически незначима. В противном случае ее следует считать значимой.

8.4. Применение пределов повторяемости и воспроизводимости

В соответствии с п. 8.1 предел повторяемости r — значение, которое с доверительной вероятностью 0,95 не превышает абсолютным значением разности $|y_{ij} - y_{ik}|$ двух результатов измерений y_{ij}, y_{ik} , полученных в условиях повторяемости. Аналогично предел воспроизводимости R — значение, которое с доверительной вероятностью 0,95 не превышает абсолютным значением разности $|y_{ij} - y_{kl}|$ двух результатов измерений y_{ij}, y_{kl} , полученных в условиях воспроизводимости. Так как дисперсия разности двух случайных величин равна сумме их дисперсий, стандартное

отклонение разности двух измерений в условиях повторяемости равно $\sigma = \sqrt{2}\sigma_r$, где σ_r — стандартное отклонение повторяемости. При нормальном распределении, которому, как правило, подчиняются случайные погрешности измерений, доверительной вероятности 0,95 соответствует квантиль $\lambda = 1,96$. Поэтому предел повторяемости равен

$$r = \lambda\sigma = 1,96 \cdot \sqrt{2}\sigma_r = 2,77\sigma_r \approx 2,8\sigma_r. \quad (8.30)$$

Аналогично и предел воспроизводимости $R = 2,8\sigma_R$. Следовательно, критическое (т. е. максимальное) значение разности $|y_1 - y_2|$ двух результатов измерений, выполненных в одной лаборатории, равно

$$CD = r = 2,8\sigma_r, \quad (8.31)$$

а в разных лабораториях —

$$CD = R = 2,8\sigma_R. \quad (8.32)$$

Если в условиях повторяемости выполнены две группы измерений: n_1 измерений со средним значением $\bar{y}_1$ и n_2 измерений со средним значением $\bar{y}_2$, то дисперсия разности $(\bar{y}_1 - \bar{y}_2)$ составит $\sigma^2 = \sigma_r^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)$. Следовательно, критическая разность двух результатов многократных измерений $|\bar{y}_1 - \bar{y}_2|$ в условиях повторяемости будет равна

$$CD = 1,96 \cdot \sqrt{2}\sigma_r \sqrt{\frac{1}{2n_1} + \frac{1}{2n_2}} = 2,8\sigma_r \sqrt{\frac{1}{2n_1} + \frac{1}{2n_2}} = r \sqrt{\frac{1}{2n_1} + \frac{1}{2n_2}}. \quad (8.33)$$

Полагая в этой формуле $n_1 = n_2 = 1$, получим выражение (8.30).

Современные системы качества продукции и услуг предусматривают постоянный контроль стабильности технологического процесса (в том числе контроль точности выполняемых измерений) с целью своевременного выявления моментов ухудшения его качества и устранения причин этого ухудшения. Контроль стабильности проводится на основе зависимости (8.33): если при двух последовательных измерениях контролируемого показателя качества результаты $\bar{y}_i$ и $\bar{y}_{i+1}$ многократных измерений (с числом измерений n_i и n_{i+1}) удовлетворяют условию

$$|\bar{y}_{i+1} - \bar{y}_i| \leq r \sqrt{\frac{1}{2n_{i+1}} + \frac{1}{2n_i}}, \quad (8.34)$$

то такое расхождение между ними может быть обусловлено случайными погрешностями измерений. Поэтому считается, что контролируемый показатель качества не изменил свое значение. Если условие (8.34) не выполняется, необходимо провести новую настройку оборудования либо принять другие меры по корректировке технологического процесса.

Если группы измерений одной и той же величины выполнены в разных лабораториях, причем в каждой лаборатории в условиях повторяемости, то дисперсия разности $\bar{y}_1 - \bar{y}_2$ будет равна

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \left(\sigma_L^2 + \frac{\sigma_r^2}{n_1} \right) + \left(\sigma_L^2 + \frac{\sigma_r^2}{n_2} \right) = 2\sigma_L^2 + \sigma_r^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right) = \\ &= 2(\sigma_L^2 + \sigma_r^2) - 2\sigma_r^2 \left(1 - \frac{1}{2n_1} - \frac{1}{2n_2} \right). \end{aligned}$$

Учитывая формулу (8.30) и тождество $\sigma_L^2 + \sigma_r^2 = \sigma_R^2$, получим для критической разности двух результатов многократных измерений $|\bar{y}_1 - \bar{y}_2|$ в условиях воспроизводимости

$$CD = 1,96 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{\sigma_R^2 - \sigma_r^2 \left(1 - \frac{1}{2n_1} - \frac{1}{2n_2}\right)} =$$

$$= \sqrt{R^2 - r^2 \left(1 - \frac{1}{2n_1} - \frac{1}{2n_2}\right)}. \quad (8.35)$$

Видно, что формула (8.31) является частным случаем этой формулы при $n_1 = n_2 = 1$.

Эту зависимость применяют в практике разрешения споров поставщиков и получателей относительно качества поставляемой продукции. Если результат $\bar{y}_1$ измерения показателя качества у поставщиком и результат $\bar{y}_2$ его измерения получателем удовлетворяют неравенству

$$|\bar{y}_2 - \bar{y}_1| \leq \sqrt{R^2 - r^2 \left(1 - \frac{1}{2n_1} - \frac{1}{2n_2}\right)}, \quad (8.36)$$

то эти результаты измерений не противоречат друг другу. В этом случае в качестве показателя качества принимают их среднее арифметическое $y = \frac{\bar{y}_1 + \bar{y}_2}{2}$, и расчет за продукцию проводится, исходя из этого значения. Если же условие (8.36) не выполняется, то это свидетельствует о систематической погрешности измерений поставщиком или (и) получателем продукции. В этом случае обычно для разрешения спора привлекают арбитражную лабораторию. Арбитражная лаборатория проводит измерение показателя качества, результат которого $\bar{y}_3$ сравнивают с $\bar{y}_1$ и $\bar{y}_2$. Если, например, пара значений $\bar{y}_3$ и $\bar{y}_1$ удовлетворяет условию (8.36), а $\bar{y}_3$ и $\bar{y}_2$ не удовлетворяют, за действительное значение показателя y принимают среднее арифметическое $y = \frac{\bar{y}_1 + \bar{y}_3}{2}$.

Если известно принятое опорное значение величины μ_0 , можно оценить систематическую погрешность измерений. Ее определение заключается в сопоставлении результата многократных измерений $\bar{y}$ с принятым опорным значением величины μ_0 , которое по определению не имеет погрешности. Поэтому, если оценивают систематическую погрешность лаборатории, равную $(\bar{y} - \mu_0)$, то ее дисперсия равна

$$\sigma^2(\bar{y}) = \sigma_L^2 + \frac{\sigma_r^2}{n} = \frac{2(\sigma_L^2 + \sigma_r^2) - 2\sigma_r^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right)}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} (2\sigma_R^2 - 2\sigma_r^2 \frac{n-1}{n}).$$

Следовательно, критическая разность для этой оценки равна

$$CD = 1,96 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2\sigma_R^2 - 2\sigma_r^2 \frac{n-1}{n}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{R^2 - \frac{n-1}{n} r^2}. \quad (8.37)$$

Если выполняется условие

$$|\bar{y} - \mu_0| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{R^2 - \frac{n-1}{n} r^2}, \quad (8.38)$$

то это означает, что систематическая погрешность измерения статистически не значима, и можно считать, что ее нет. Если же (8.38) не выполняется, то это свидетельствует о статистической значимости разности $(\bar{y} - \mu_0)$. Тогда это значение принимают в качестве оценки систематической погрешности лаборатории.

Точно так же поступают и при оценке систематической погрешности метода. В этом случае с опорным значением сравнивают

общее среднее значение $\bar{\bar{y}} = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \bar{y}_i$, полученное в p лабора-

ториях (здесь $\bar{y}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}$ — результат многократных измерений величины в i -й лаборатории). Дисперсия значения $\bar{\bar{y}}$ составит

$$\begin{aligned}\sigma^2(\bar{y}) &= \frac{1}{p^2} \sum_{i=1}^p \sigma^2(\bar{y}_i) = \\ &= \frac{1}{p^2} (p\sigma_L^2 + \sigma_r^2 \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^n \frac{1}{n_j}) = \frac{1}{p} \sigma_L^2 + \frac{1}{p^2} \sigma_r^2 \sum_{i=1}^p \frac{1}{n_i} = \\ &= \frac{1}{2p} [2(\sigma_L^2 + \sigma_r^2) - 2\sigma_r^2 + \frac{2\sigma_r^2}{p} \sum_{i=1}^p \frac{1}{n_i}] = \\ &= \frac{1}{2p} [2\sigma_r^2 - 2\sigma_r^2(1 - \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \frac{1}{n_i})].\end{aligned}$$

Следовательно, критическая разность значения $\bar{y} - \mu_0$ равна

$$CD = 1,96 \cdot \sigma(\bar{y}) = \frac{1}{\sqrt{2p}} \sqrt{R^2 - r^2 (1 - \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \frac{1}{n_i})}. \quad (8.39)$$

Дальнейшая оценка проводится аналогично оценке систематической погрешности лаборатории.

8.5. Метод проверки приемлемости результатов измерений

Современные системы качества измерительных и испытательных лабораторий предписывают применение различных способов повышения достоверности получаемой измерительной информации. Одним из таких способов является проведение повторных измерений и сравнение полученных результатов. При этом результаты измерений считаются приемлемыми, если они не противоречат друг другу, т. е. расхождение между ними обусловлено только случайной погрешностью измерений. Расчетные зависимости для определения допустимых пределов этих расхождений CD , называемых критическими разностями, приведены в предыдущем пункте. В этом разделе излагаются типичные процедуры, применяемые при такой проверке, и правила определения окончательного результата измерений.

Предположим, что в одной лаборатории в условиях повторяемости получены два результата однократных измерений одной величины y_1 и y_2 . Если выполняется условие

$$|y_1 - y_2| \leq r, \quad (8.40)$$

оба результата признают приемлемыми, и в качестве окончательного результата измерений указывают их среднее арифметическое:

$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Если условие (8.40) не выполняется, поступают следующим образом.

1. Если получение результата измерений стоит недорого, выполняют еще два измерения y_3 и y_4 . Находят размах $D(4) = (y_{\max} - y_{\min})$ выборки из полученных 4 результатов измерений. Далее по таблице 28 находят значение $f(4) = 3,6$ коэффициента критического диапазона¹ $f(n)$ при числе измерений $n = 4$.

Результаты измерений считаются приемлемыми, если выполняется условие

$$D(n) \leq CR_{0,95}(n), \quad (8.41)$$

которое говорит о том, что расхождения между ними обусловлены случайной погрешностью измерений, подчиняющейся нормальному распределению с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ_r^2 . Следовательно, если $D(4) \leq 3,6\sigma_r$, результаты 4 измерений считаются приемлемыми. В этом случае в качестве окончательного результата измерений принимается их среднее арифметическое

$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4}.$$

Если это условие не выполняется, результаты измерений не согласуются с этой гипотезой. В этом случае в качестве окончательного результата измерений принимается медиана

$$Me = \frac{y_{(2)} + y_{(3)}}{2} \quad (y_{(2)} \text{ и } y_{(3)} - \text{второй и третий}$$

результаты этого вариационного ряда), т. е. при законах распределения, отличных от нормального закона, наилучшей оценкой является медиана.

¹ Коэффициент критического диапазона $f(n)$ — 95% квантиль распределения размаха выборки n значений, подчиняющихся нормальному распределению с математическим ожиданием, равным 0, и стандартным отклонением, равным 1.

Таблица 28

Коэффициенты критического диапазона $f(n)$

n	$f(n)$	n	$f(n)$	n	$f(n)$
2	2,8	17	4,9	32	5,3
3	3,3	18	4,9	33	5,4
4	3,6	19	5,0	34	5,4
5	3,9	20	5,0	35	5,4
6	4,0	21	5,0	36	5,4
7	4,2	22	5,1	37	5,4
8	4,3	23	5,1	38	5,5
9	4,4	24	5,1	39	5,5
10	4,5	25	5,2	40	5,5
11	4,6	26	5,2	45	5,6
12	4,6	27	5,2	50	5,6
13	4,7	28	5,3	60	5,8
14	4,7	29	5,3	70	5,9
15	4,8	30	5,3	85	6,0
16	4,8	31	5,3	100	6,1

Значения критического диапазона при доверительной вероятности 0,95 и размере выборки n определяют по формуле

$$CR_{0,95}(n) = f(n)\sigma_r. \quad (8.42)$$

Поэтому значение критического диапазона $CR_{0,95}(4) = 3,6\sigma_r$.

2. Если получение результата измерений стоит дорого (например, занимает несколько дней, связано с применением дорогостоящей аппаратуры и расходом дорогих стандартных образцов и реактивов), выполняют еще одно измерение y_3 и находят размах $D(3) = (y_{\max} - y_{\min})$ выборки из полученных 3 результатов измерений. Далее находят по таблице 28 значение $f(3) = 3,3$ и значение критического диапазона $CR_{0,95}(3) = 3,3\sigma_r$. Если $D(3) \leq 3,3\sigma_r$, результаты 3 измерений считаются приемлемыми,

и в качестве окончательного результата измерений принимается их среднее арифметическое $\bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$. При $D(3) > 3,3\sigma_r$,

и невозможности провести еще одно измерение, в качестве окончательного результата измерений принимают медиану $Me = y_{(2)}$ (здесь $y_{(2)}$ — второй результат вариационного ряда); если имеется возможность проведения еще одного измерения, получают окончательный результат измерения в соответствии с 1.

Пример 8.1. Определение содержания золота в медном концентрате посредством пробирной плавки [54].

Стандартное отклонение повторяемости составляет $\sigma_r = 0,12$ г/т, предел повторяемости $r = 2,8 \cdot 0,12 = 0,34$ г/т. Были получены результаты измерений $y_1 = 11,0$ г/т, $y_2 = 10,5$ г/т. Так как $|y_1 - y_2| = 11,0 - 10,5 = 0,5$ г/т $> r = 0,34$ г/т, проводят третье измерение. Получен результат $y_3 = 11,0$ г/т. Поскольку $D(3) = (y_{\max} - y_{\min}) = 0,5$ г/т $> CR_{0,95}(3) = 3,3 \cdot 0,12 = 0,40$ г/т, результаты измерений считаются неприемлемыми. В связи с тем, что имеется возможность проведения еще одного измерения, получен результат $y_4 = 10,8$ г/т. В вариационном ряду (10,5; 10,8; 11,0; 11,0) г/т $y_{\max} = 11,0$ г/т, $y_{\min} = 10,5$ г/т, среднее арифметическое $\bar{y} = \frac{10,5 + 10,8 + 11,0 + 11,0}{4} = 10,8$ г/т,

медиана $Me = \frac{10,8 + 11,0}{2} = 10,9$ г/т. Так как $D(4) = (y_{\max} - y_{\min}) = 0,5$ г/т $> CR_{0,95}(4) = 3,6 \cdot 0,12 = 0,43$ г/т, результаты измерений считаются неприемлемыми. Поэтому в качестве окончательного результата измерений принимается $Me = 10,9$ г/т.

8.6. Применение показателей повторяемости при аттестации методик выполнения измерений

Одним из проявлений научно-технического прогресса является разработка новых измерительных технологий, основанных на ранее не применявшихся для этой цели физических принципах. В результате создаются новые методы измерений, более совершенные по сравнению с широко применяемыми методами, которые

регламентированы утвержденными ранее (стандартизованными) методиками выполнения измерений (МВИ). При этом, для того чтобы внедрение в практику нового метода измерений не нарушило единство этого вида измерений, необходимо согласовать его шкалу со шкалой измерений стандартизованного МВИ. Другими словами, для внедрения нового метода измерений в измерительную практику необходимо передать ему размер единицы или шкалу, применяемые в данном виде измерений. Если измерения этого вида являются относительными, т. е. осуществляются с помощью СИ, калиброванных в определенной единице, эта задача решается просто — путем включения СИ, реализующего разработанный метод измерений, в систему передачи размера этой единицы. Если же, как это часто бывает в аналитических измерениях, такая система не сформирована или вообще отсутствуют СИ, а измерения осуществляются посредством выполнения процедур, описанных в МВИ, наиболее простым и обоснованным способом передачи размера единицы или шкалы новому методу измерений является его аттестация с использованием стандартизованной МВИ. Эта аттестация проводится в следующем порядке.

В одной лаборатории в условиях повторяемости выполняют по n измерений в соответствии с аттестуемой и стандартизованной МВИ в нескольких точках диапазона измерений. Обычно в качестве этих точек принимают 20, 50 и 80 % от верхнего предела измерений. Получают два ряда результатов n -кратных измерений:

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{1j}, \dots, \bar{x}_l = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{lj} \text{ для аттестуемой МВИ и аналогично } \bar{x}_{01}, \dots, \bar{x}_{0l} \text{ для стандартизованной МВИ.}$$

Вычисляют разности результатов измерений $\Delta_i = \bar{x}_i - \bar{x}_{0i}$ и анализируют их значимость по сравнению со случайными погрешностями аттестуемой и стандартизованной МВИ. Для этих целей применяют показатели повторяемости.

Если $|\Delta_i| \leq \sqrt{\frac{r^2 + r_0^2}{2n}}$, где r, r_0 — пределы повторяемости аттестуемой и стандартизованной МВИ, то систематические расхождения в результатах измерений, полученных по сравниваемым методикам, незначимы, и их можно не учитывать при оценивании неопределенности аттестуемой МВИ.

Если $|\Delta_i| > \sqrt{\frac{r^2 + r_0^2}{2n}}$, эти расхождения статистически значимы.

В этом случае оценивают систематическую погрешность аттестуемой МВИ. С этой целью анализируют зависимость от измеряемой величины значений абсолютной погрешности измерений Δ_i или относительной погрешности $\delta_i = \frac{\Delta_i}{x_{0i}}$. Если одна из этих зависимостей приблизительно постоянна, на всем диапазоне изме-

рений вводят соответствующую поправку $\Delta x = \frac{\sum_{i=1}^l \Delta_i}{l}$ или

$\delta x = \frac{\sum_{i=1}^l \delta_i}{l}$. Если наблюдается монотонное изменение Δ_i или δ_i в диапазоне измерений, то эту поправку определяют с помощью линейной или кусочно-линейной аппроксимации. Эти поправки вносят в результаты измерений, проведенные с помощью аттестуемой МВИ. Исправленные разности результатов измерений равны $\tilde{\Delta}_i = \bar{x}_i - \bar{x}_{0i} - \Delta x$ (или $\tilde{\Delta}_i = \bar{x}_i - \bar{x}_{0i} (1 + \delta x)$).

3. Оценивают стандартные неопределенности типа А разностей $\tilde{\Delta}_i$:

$$u_A = \frac{1}{l-1} \sum_{i=1}^l (\tilde{\Delta}_i - \bar{\Delta})^2, \quad (8.43)$$

где $\bar{\Delta} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \tilde{\Delta}_i$.

4. Расширенную неопределенность результата измерений по аттестуемой МВИ оценивают по формуле

$$U = ku, \quad (8.44)$$

где $u = \sqrt{u_A^2 + u_0^2}$ — стандартная неопределенность результата измерений по аттестуемой МВИ.

$u_0 = \frac{U_0}{k_0}$ — стандартная неопределенность результата измерений по стандартизованной МВИ,

ний по стандартизованной МВИ,

U_0 и k_0 — расширенная неопределенность результата измерений по стандартизованной МВИ и ее коэффициент охвата,

k — коэффициент охвата расширенной неопределенности результата измерений по аттестуемой МВИ при вероятности охвата 0,95.

Литература

1. Маликов М.Ф. Основы метрологии. М.: Коммерцприбор, 1949. 477 с.
2. Бурдун Г.Д., Марков Б.Н. Основы метрологии. М.: Изд-во стандартов, 1972.
3. Тюрин Н.И. Введение в метрологию. М.: Изд-во стандартов, 1973. 279 с.
4. Селиванов М.Н., Фридман А.Э., Кудряшова Ж.Ф. Качество измерений. Метрологическая справочная книга. Л., Лениздат, 1987. 295 с.
5. Шишкин И.Ф. Теоретическая метрология. М.: Изд-во стандартов, 1991. 471 с.
6. Козлов М.Г. Метрология. С-Пб., Изд-во МГУП Мир книги, 1998. 107 с.
7. Сергеев А.Г., Крохин В.В. Метрология: Учеб. пособие. М.: Логос, 2000. 408 с.
8. Брянский Л.Н., Дойников А.С., Крупин Б.Н. Метрология. Шкалы, эталоны, практика. М.: ВНИИФТРИ, 2004. 222 с.
9. ГОСТ 16263-70. Государственная система обеспечения единства измерений. Метрология. Термины и определения. М.: Изд-во стандартов, 1972. 52 с.
10. Камке Д., Кремер К. Физические основы единиц измерения. М.: Мир, 1980. 208 с.
11. International Vocabulary of Metrology — Basic and General Concepts and Associated Terms VIM, 3 ed., Final 2007-05-18, Joint Committee for Guides in Metrology CIPM, 2007. 146 p.
12. Горелик Д.О., Конопелько Л.А., Панков Э.Д. Экологический мониторинг. Опто-электронные приборы и системы. Т. 2. СПб.: «Крисмас+», 1998. 592 с.
13. Гаусс К.Ф. Избранные геодезические сочинения, пер. с латинского и немецкого. Т. 1. М., 1957. С. 89-109.
14. Фридендер И.Г. Закон распределения случайных ошибок измерений / Тр. Запорожского института сельскохозяйственного машиностроения, выпуск 2. Киев: Машгиз, 1955. С. 13-20.
15. Fridman A.E. Generalized normal distribution law of errors. Metrologia, 39, 2002. P. 241-247.
16. Крамер Г. Математические методы статистики. М.: Мир, 1975. 648 с.
17. ГОСТ 8.009-84. Государственная система обеспечения единства измерений. Нормируемые метрологические характеристики средств измерений.

18. РД-453-84. Методические указания. Характеристики погрешности средств измерений в реальных условиях эксплуатации. Методы расчета.
19. Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement, 2nd ed., Geneva, ISO, 1995, 101 p. (Руководство по выражению неопределенности измерения / Пер. с англ. СПб.: ВНИИМ им. Д.И. Менделеева, 1999. 134 с.).
20. Руководство ЕВРАХИМ/СИТАК Количественное описание неопределенности в аналитических измерениях, 2-е изд. / Пер. с англ. под редакцией Л.А. Конопелько. СПб.: ВНИИМ им. Д.И. Менделеева, 2002. 141 с.
21. ГОСТ 8.207-76. Государственная система обеспечения единства измерений. Прямые измерения с многократными наблюдениями. Методы обработки результатов наблюдений. Основные положения.
22. ГОСТ 8.381-80. Государственная система обеспечения единства измерений. Эталоны. Способы выражения погрешностей.
23. Publication Reference EA-4/02. Expression of the Uncertainty of Measurement in Calibration. European cooperation for Accreditation, 1999, 79 p.
24. Голубев Э.А., Исаев Л.К. Измерения. Контроль. Качество. ГОСТ Р 5725. Основные положения. Вопросы освоения и внедрения / М.: Стандартинформ, 2005. 136 с.
25. ГОСТ Р ИСО 5725-2. Точность (правильность и прецизионность) методов и результатов измерений. Часть 2. Основной метод определения повторяемости и воспроизводимости стандартного метода измерений.
26. Фридман А.Э. Новая методология обработки результатов многократных измерений / Измерительная техника. 2001. № 11. С. 54-59.
27. Международный стандарт ИСО 31-2000. Величины и единицы.
28. ГОСТ 8.417-02. Государственная система обеспечения единства измерений. Единицы величин.
29. Recommendation № 1 (CI-2005). Preparative steps towards new definitions of the kilogram, the ampere, the kelvin and the mole in terms of fundamental constants. Recommendations of the International committee for weights and measures.
30. Сена Л.А. Единицы физических величин и их размерности. М.: Наука, 1977, 336 с.
31. Стоцкий Л.Р. Физические величины и их единицы: Справ. М.: Просвещение, 1984, 239 с.

32. Александров Ю.И. Спорные вопросы современной метрологии в химическом анализе. СПб.: Изд. ВНИИГ им. Б.Е. Веденеева, 2003. 304 с.
33. Институт русского языка АН СССР. Словарь русского языка, т. 1. М.: Изд-во «Русский язык», 1981. 696 с.
34. РМГ 29-99. Государственная система обеспечения единства измерений. Метрология. Основные термины и определения. Минск: Изд-во стандартов, 2000. 47 с.
35. ГОСТ Р 8.558-08. Государственная система обеспечения единства измерений. Государственная поверочная схема для средств измерений температуры.
36. МКМВ. Национальные и международные потребности в области метрологии: международное сотрудничество и роль МБМВ. Препринт к заседанию директоров НМИ 23-25 февраля 1998 г.
37. ГОСТ 8.061-07. Государственная система обеспечения единства измерений. Содержание и построение поверочных схем.
38. ГОСТ 8.578-08. Государственная система обеспечения единства измерений. Государственная поверочная схема для СИ содержания компонентов в газовых средах.
39. Окрепилов В.В. Управление качеством. СПб.: Наука, 2000. 911 с.
40. Мир метрологии на службе человечества. Послание Директора МБМВ Э.Дж. Волларда к Всемирному Дню Метрологии 20 мая 2006 г.
41. CIPM. Mutual Recognition Arrangement (MRA). МКМВ. Взаимное признание национальных метрологических эталонов и сертификатов калибровки и измерений, выдаваемых национальными метрологическими институтами (НМИ). Договоренность, составленная МБМВ и подписываемая директорами НМИ.
42. Guidelines for CIPM Key Comparisons. 1 March 1999. With Modifications by the CIPM in October 2003, 9 p.
43. Chunovkina. A.G., Kharitonov I.A. Evaluation of regional key comparison data: two approaches for data processing, Metrologia, 43, 2006.
44. КООМЕТ R/GM/14:2006. Руководство по оцениванию данных ключевых сличений КООМЕТ.
45. <http://kcdb.bipm.org>
46. Фридман А.Э. Теория метрологической надежности средств измерений / Измерительная техника. 1991. № 11. С. 3-11.

47. Фридман А.Э. Теория метрологической надежности средств измерений. Коллективная монография «Фундаментальные проблемы теории точности». СПб.: Наука, 2001. С. 382–413.
48. Фридман А.Э. Метрологическая надежность средств измерений и определение межповерочных интервалов / Метрология. 1991. № 9. С. 52–61.
49. ГОСТ 8.565–99. Государственная система обеспечения единства измерений. Порядок установления и корректировки межповерочных интервалов эталонов.
50. РМГ 74–2004. Руководство по межгосударственной стандартизации. Государственная система обеспечения единства измерений. Методы определения межповерочных и межкалибровочных интервалов средств измерений.
51. Фридман А.Э. Оценка метрологической надежности измерительных приборов и многозначных мер / Измерительная техника. 1993. № 5. С. 7–10.
52. Справочник «Надежность и эффективность в технике», т. 10, М., Изд-во Машиностроение, 1990. С. 254–257.
53. Фридман А.Э. Связь между показателями надежности и точности совокупности средств измерений. Труды метрологических институтов СССР, вып. 200 (260). Общие вопросы метрологии. Л.: Энергия, 1977. С. 51–60.
54. ГОСТ Р ИСО 5725-1–ГОСТ Р ИСО 5725-6. Точность (правильность и прецизионность) методов и результатов измерений.

А.Э. Фридман

ОСНОВЫ МЕТРОЛОГИИ

Современный курс

Книга выпущена в авторской редакции

Ответственный за издание *А.А. Полуца*
 Ответственный за выпуск *Н.В. Емельянова*
 Ответственный за подготовку *Л.В. Белканова*
 Корректор *С.Е. Парфенова*
 Компьютерная верстка *Н.В. Коробова, Е.М. Криворучко*
 Техническое сопровождение *Т.И. Жадобина*
 Оператор цифровой печати *М.А. Бухтарова*

Издание подготовлено в НПО «Профессионал»
 197341, Санкт-Петербург, ул. Горная, д. 1, корп. 1, оф. 22-Н.
 Тел.(факс): (812) 601-30-70, 601-32-49, 715-14-35

mail@naukaspb.ru
<http://www.naukaspb.ru>

Подписано в печать 31.03.08.
 Формат 60×90/16. Бумага офсетная.
 Объем 17,75 печ. л. Тираж 1000 экз.

Отпечатано в центре цифровой печати НПО «Профессионал»