Федеральное агентство по образованию
ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Аргучинцев В.К.

ДИНАМИКА АТМОСФЕРЫ

Учебное пособие

Иркутск 2006

Представлено по решению редакционно-издательского совета Иркутского государственного университета.

Рецензенты:

старший научный сотрудник Института солнечно-земной физики, доктор физ.-мат. наук П. Г. Ковадло,

доцент кафедры метеорологии и охраны атмосферы Иркутского госуниверситета, канд. геогр. наук А.А. Кречетов

Излагаются общие принципы теоретической метеорологии. Основное внимание уделяется первоначальному ознакомлению с количественным анализом атмосферных процессов и со специфическими преобразованиями уравнений гидромеханики и термодинамики применительно к атмосфере.

ВВЕДЕНИЕ

Динамическая метеорология является одной из метеорологических дисциплин, которая изучает атмосферные процессы на основе общих законов физики (гидромеханики и термодинамики).

Движение воздуха возникает под влиянием неравномерного распределения давления. Неравномерность же распределения давления обусловлена процессами теплообмена в атмосфере и на ее границе с землей. Возникающие при этом атмосферные движения оказывают обратное влияние на процессы тепло- и влагообмена. Таким образом, атмосферные движения в совокупности с тепло- и влагообменом представляют собой основные факторы, определяющие погоду и климат.

Динамическая метеорология, изучая атмосферные движения во взаимосвязи с термодинамическими процессами, вскрывает основные закономерности погоды и климата, а затем использует эти закономерности для решения различных практических задач, важнейшими среди которых являются разработка объективных методов прогноза погоды и развитие теории воздействий на погоду и климат.

Основным методом исследования в динамической метеорологии является преобразование и решение общих уравнений гидротермодинамики применительно к физическим условиям в атмосфере.

Исходные уравнения динамической метеорологии представляют собой выражение основных законов физики: закона сохранения импульса движения (второго закона Ньютона), закона сохранения энергии, закона сохранения массы.

Особенности атмосферных процессов, в соответствии с которыми осуществляется преобразование общих уравнений гидротермодинамики применительно к решению метеорологических задач, познаются путем обобщения фактических данных, полученных из наблюдений, а также на основании специальных экспериментальных исследований. При этом теоретические выводы проверяются путем сопоставления их с фактическими данными наблюдений и только после опытной проверки выводы теории используются для решения практических задач.

Таким образом, метеорологическая практика служит как источником, так и критерием правильности теории, которая указывает наиболее важные направления дальнейших экспериментальных исследований. Отсюда следует, что развитие динамической метеорологии тесно связано с синоптической метеорологией, климатологией, аэрологией и экспериментальной метеорологией.

Предлагаемое учебное пособие написано с целью первоначального ознакомления студентов-метеорологов с основами количественного анализа атмосферных процессов, исходя из законов гидротермодинамики.

1. ПОЛЯ МЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

1.1. Общие понятия

Атмосферные движения, процессы тепло- и влагообмена и связанные с ними изменения погоды определяются характером пространственного распределения в атмосфере метеорологических величин: давления, температуры, влажности воздуха, ветра и т.д.

Часть пространства, каждой точке которого соответствует определенное значение какой-либо метеорологической величины, называется полем этой величины.

Поля различных метеорологических величин, как и сами величины, подразделяются на скалярные и векторные. К скалярным полям относятся поля температуры, давления, влажности воздуха. К векторным полям относятся поле ветра, т.е. поле воздушных течений, поля силы тяжести, силы Кориолиса и других векторных величин.

Наряду с распределением метеорологических величин в трехмерном пространстве, при решении ряда задач анализируется распределение величин на горизонтальной поверхности или вертикальной плоскости, т.е. рассматриваются плоские и поверхностные поля метеорологических величин.

1.2. Скалярное поле и его градиент

Предположим, что в определенный момент времени нам дано поле некоторой скалярной величины φ, т.е. даны значения φ во всех точках пространства (или некоторой его части). Следовательно, в данный момент времени t, φ есть функция координат. В случае декартовых координат в общем виде

$$\varphi = f(x, y, z). \qquad (1.2.1)$$

Для наглядного представления о пространственном распределении величины φ поле этой величины изображают в виде семейства поверхностей, каждая из которых проходит через точки поля с одинаковым значением φ.

Поверхности равных значений величины φ называются изоповерхностями или эквискалярными поверхностями.

В зависимости от характера пространственного распределения данной величины φ изоповерхности $\varphi = const$ могут иметь различную форму, пересекаясь с горизонтальными и вертикальными плоскостями и с поверхностями уровня (рис.1). Линии пересечения изоповерхностей с какой-либо плоскостью или поверхностью являются линиями равных значений или изолиниями величины φ (изотермами, изобарами, изогипсами и т.д.), изображающими двумерное поле распределения величины φ на данной плоскости или поверхности.

На одной и той же изоповерхности или изолинии значение величины φ одинаково. Наибольшие разности скалярной величины φ, приходящиеся на единицу расстояния, получаются при переходе от одной поверхности к другой по кратчайшему расстоянию между ними, т.е. в направлениях нормалей n к изоповерхностям. Вектор, показывающий направление наибольшего роста φ и по величине равный производной по этому направлению, называется градиентом скалярной величины φ .

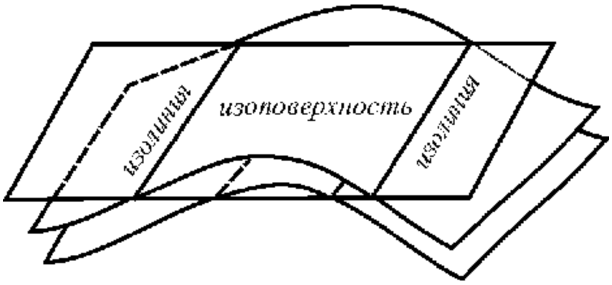


Рис.1

Обозначая единичный вектор нормали к изоповерхности, направленный в сторону роста φ, через $\vec{n}_{\circ}$, градиент величины φ выразится формулой

$$grad\ \varphi = \vec{G} = \vec{n}_{\circ}\,\frac{\partial\varphi}{\partial n}. \qquad (1.2.2)$$

Абсолютная величина этого вектора определяется выражением

$$|grad\ \varphi| = \lim_{\Delta n\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta n} = \frac{\partial\varphi}{\partial n},$$

Следовательно, градиент есть вектор, направленный по нормали к изоповерхности φ в сторону роста данной величины и численно равный производной от этой величины по нормали к изоповерхности. Градиент скалярной величины образует векторное поле.

Градиент φ как и любой другой вектор, можно спроектировать на оси координат и представить в виде векторной суммы его составляющих по осям координат. Проекции градиента $\vec{G}$ некоторой величины φ на оси координат определяют изменения величины φ в направлениях, соответствующих координатных осей и равняются частным производным от величины φ по координатам. Например, проекции градиента на оси декартовой системы координат равны:

$$G_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad G_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad G_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} . \qquad (1.2.3)$$

Обозначая единичные векторы координатных осей через $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ градиент φ можно представить в виде векторной суммы его составляющих (рис.2):

$$\vec{G} = \vec{n}_{\circ} \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \vec{i}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial \varphi}{\partial z} . \qquad (1.2.4)$$

Абсолютная величина градиента определяется как длина диагонали прямоугольного параллелепипеда, ребра которого равняются проекциям градиента на оси координат

$$\left|\vec{G}\right| = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2} . \qquad (1.2.5)$$

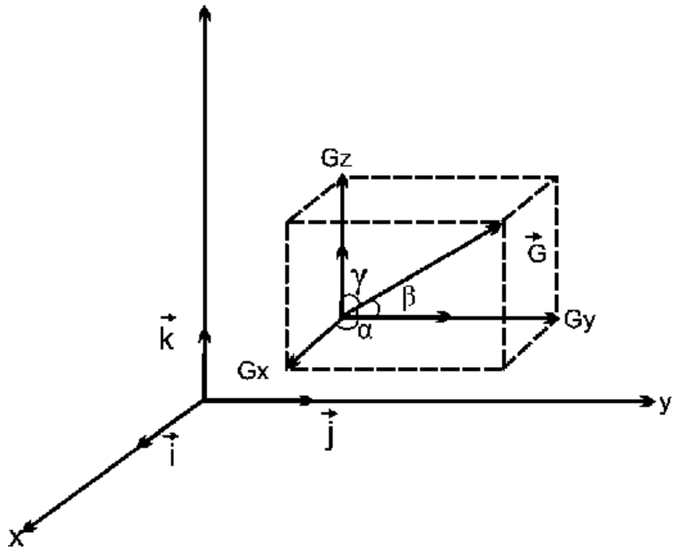


Рис.2

Направление градиента относительно осей координат определяется направляющими косинусами углов α, β, γ между градиентом и осями X, Y, Z (рис.2):

$$\cos\alpha = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial n}} \qquad \cos\beta = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\frac{\partial \varphi}{\partial n}} \qquad \cos\gamma = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial z}}{\frac{\partial \varphi}{\partial n}} . \qquad (1.2.6)$$

Для записи градиента в векторной форме пользуются символическим вектором "набла" ∇, или так называемым дифференциальным оператором Гамильтона, обозначающим векторную операцию образования градиента от какой-либо величины

$$\nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}. \tag{1.2.7}$$

Это выражение рассматривается как символический вектор ∇, проекции которого на оси координат равны:

$$\nabla_x = \frac{\partial}{\partial x}; \quad \nabla_y = \frac{\partial}{\partial y}; \quad \nabla_z = \frac{\partial}{\partial z}; \tag{1.2.8}$$

$$grad\varphi = \vec{n}_\circ \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \nabla \varphi. \tag{1.2.9}$$

В случае двумерного поля, например, при распределении скалярной величины φ в плоскости XOY символический вектор ∇ имеет вид

$$\nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y}.$$

Соответственно этому градиент плоского поля величины φ равен

$$grad\varphi = \vec{n}_\circ \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \nabla \varphi = \vec{i}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Модуль градиента φ в плоскости XOY выразится формулой

$$|grad\varphi| = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2}$$

1.3. Линии тока и траектории частиц воздуха

Поля различных векторов имеют ряд общих характеристик. Рассмотрим векторное поле ветра, т.е. поле воздушных течений в атмосфере. Векторное поле ветра наглядно представляется семейством линий тока, воспроизводящих общую картину воздушных течений в данный момент времени. Под линией тока понимается такая линия, касательная к которой в каждой точке совпадает с направлением скорости движения соответствующей частицы в данный момент времени (рис.3). Если движение является установившимся, т.е. в каждой точке поля скорость ветра не меняется с течением времени, то линии тока совпадают с траекториями движения частиц воздуха. В общем же случае, при неустановившемся движении, когда скорость ветра изменяется с течением времени, линии тока в различные моменты времени не совпадают с траекториями частиц.

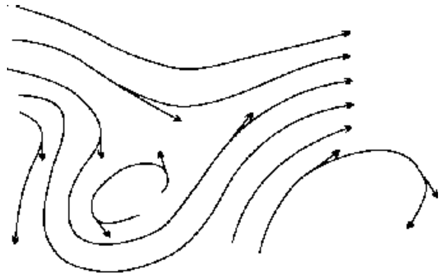


Рис.3

Дифференциальные уравнения линий тока в декартовых координатах, как известно из гидродинамики, выражаются равенствами

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} \tag{1.3.1}$$

где $u, \quad v, \quad w$ - составляющие скорости ветра по осям координат.

1.4. Поток вектора скорости через поверхность

Для количественной оценки мощности воздушных течений в заданном направлении $\vec{n}$ пользуются понятием потока вектора через поверхность. Потоком вектора скорости $\vec{V}$ через поверхность S называется скалярная величина P равная объему воздуха, протекающего через данную поверхность в единицу времени.

Элементарный поток вектора скорости через бесконечно малый элемент поверхности dS будет равен объему цилиндра с основанием dS и с образующей, равной модулю скорости V (рис.4).

$$dP = VdS\cos\alpha \tag{1.4.1}$$

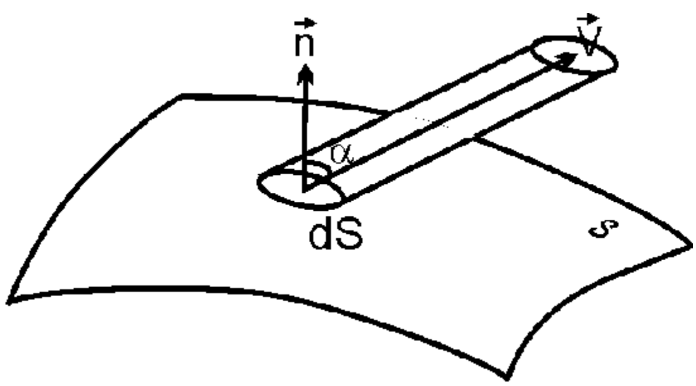


Рис.4

Элемент поверхности будем рассматривать как вектор $\vec{dS} = \vec{n}_{\circ}\, dS$, тогда элементарный поток вектора можно представить в виде скалярного произведения вектора скорости $\vec{V}$ на элемент поверхности $d\vec{S}$ как вектор

$$dP = (\vec{V}, \vec{dS}) = udS\cos(\widehat{nx}) + vdS\cos(\widehat{ny}) + wdS\cos(\widehat{nz}). \quad (1.4.2)$$

Поток вектора скорости через заданную поверхность S будет равен сумме потоков через все элементы dS и в пределе выразится поверхностным интегралом

$$P = \iint_{s} (\vec{V}, \vec{dS}) = \iint_{s} V_n\, dS, \quad (1.4.3)$$

где V_n - проекция $\vec{V}$ на нормаль $\vec{n}$ к поверхности dS.

Если S - замкнутая поверхность, то

$$P = \oiint_{s} (\vec{V}, \vec{dS}). \quad (1.4.4)$$

В случае замкнутой поверхности за положительное направление нормали к ней примем внешнюю нормаль. Поток вектора скорости через замкнутую поверхность будет положительным, если из объема, ограниченного данной поверхностью, вытекает воздуха больше, чем в него втекает.

1.5. Дивергенция вектора скорости

Рассмотрим общее понятие дивергенции какого-либо вектора на примере поля скорости.

Воздух, как сжимаемая среда, в процессе своего движения может расширяться или сжиматься, что сопровождается увеличением или уменьшением его удельного объема. Относительное изменение объема данной массы воздуха за единицу времени или изменение его плотности зависит от распределения в пространстве скорости движения, т.е. связано с потоком вектора скорости, и выражается скалярной величиной, называемой дивергенцией (расхождением) вектора скорости.

Дивергенцией вектора скорости в данной точке поля называется предел отношения потока вектора скорости через замкнутую поверхность, к величине объема, ограниченного этой поверхностью, при стягивании ее к точке.

$$div\vec{V} = \lim_{\tau \to 0} \frac{\oiint_s V_n \, dS}{\tau} \quad (1.5.1)$$

Понятие дивергенции векторного поля, как и потока, определено независимо от выбора системы координат. Однако формула (1.5.1) мало пригодна для вычисления дивергенции. Поэтому получим выражение дивергенции в декартовых координатах. На основании формулы (1.4.2)

$$div\vec{V} = \lim_{\tau \to 0} \frac{\oiint_s \left[u\cos(\vec{n},x) + v\cos(\vec{n},y) + w\cos(\vec{n},z) \right] dS}{\tau}. \quad (1.5.2)$$

Согласно теореме Остроградского-Гаусса о переходе от двойного интеграла по поверхности к тройному интегралам по объему, ограниченному этой поверхностью, имеем

$$\oiint_s \left[u\cos(\vec{n},x) + v\cos(\vec{n},y) + w\cos(\vec{n},z) \right] dS = \iiint_\tau \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right] d\tau. \quad (1.5.3)$$

На основании этой формулы, выражение для дивергенции (1.5.2) можно переписать в следующем виде:

$$div\vec{V} = \lim_{\tau \to 0} \frac{\iiint_\tau \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right] d\tau}{\tau}. \quad (1.5.4)$$

Пользуясь теоремой, о среднем и переходя к пределу, получим выражение дивергенции скорости в декартовых координатах

$$div\vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (1.5.5)$$

В соответствии с формулой (1.5.5) дивергенция скорости может быть представлена как скалярное произведение символического вектора "набла" на вектор скорости

$$div\vec{V} = (\vec{\nabla}, \vec{V}).$$

Пользуясь понятием потока и дивергенции векторного поля, формулу Остроградского-Гаусса (1.5.3) можно переписать в следующем виде:

$$\oint\!\!\!\oint_S (\vec{V}, d\vec{S}) = \iiint_\tau div\,\vec{V} d\tau\ .$$

Таким образом, теорема Остроградского-Гаусса показывает, что поток векторного поля скорости через замкнутую поверхность S равен тройному интегралу от дивергенции этого поля по объему τ, ограниченному поверхностью S.

1.6. Циркуляция вектора скорости

Циркуляция скорости является скалярной величиной, характеризующей общую тенденцию частиц воздуха, лежащих на произвольном замкнутом контуре, двигаться вдоль этого контура. Циркуляция скорости выражается криволинейным интегралом по замкнутому контуру, взятому в движущемся воздухе, от скалярного произведения вектора скорости $\vec{V}$ на направленный элемент контура $\vec{dl}$.

$$C = \oint_L (\vec{V}, \vec{dl}) = \oint_L V dl \cos(\widehat{\vec{V}, \vec{dl}}) = \oint_L V_l\, dl\ , \qquad (1.6.1)$$

где V_l - проекция вектора скорости $\vec{V}$ на направление касательной к контуру в данной точке.

Представляя скалярное произведение $(\vec{V}, \vec{dl})$ в координатной форме, получим

$$C = \oint_L (udx + vdy + wdz), \qquad (1.6.2)$$

где u, v, w - проекции вектора скорости; $dx,\ dy,\ dz$ проекции элемента контура $\vec{dl}$ на оси координат.

Если циркуляция скорости равна нулю, то подынтегральное выражение должно быть полным дифференциалом некоторой функции Φ, называемой потенциалом скорости, так что

$$udx + vdy + wdz = d\Phi\ .$$

Отсюда следует:

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \; ; \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \; ; \quad w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad .$$

В этом случае скорость движения имеет потенциал, производные от которого по координатам равняются проекциям вектора скорости на соответствующие оси координат.

1.7. Вихрь скорости

Характеристикой вращательной способности поля скорости в данной точке может служить плотность циркуляции, т.е. предел отношения циркуляции вектора скорости по замкнутому контуру к площади, ограниченной этим контуром при стягивании его в точку

$$\lim_{S\to 0}\frac{\oint_L(\vec{V},\vec{dl})}{S} = \lim_{S\to 0}\frac{\oint_L(udx+vdy+wdz)}{S} \qquad (1.7.1)$$

В различных плоскостях, проходящих через данную точку поля, плотность циркуляции скорости будет иметь различную величину. В связи с этим выражение (1.7.1) для плотности циркуляции в произвольно выбранной плоскости S, целесообразно преобразовать при помощи теоремы Стокса, выражающей криволинейный интеграл по замкнутому контуру через двойной интеграл по поверхности, ограниченной этим контуром

$$\oint_L udx+vdy+wdz=\iint_S\left[\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)\cos(\widehat{\vec{n}x})+\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)\cos(\widehat{\vec{n}y})+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cos(\widehat{\vec{n}z})\right]dS \quad , \qquad (1.7.2)$$

где n - нормаль к поверхности S в которой лежит контур L**.** Согласно этой формуле выражение для плотности циркуляции (1.7.1) можно переписать в следующем виде:

$$\lim_{S\to 0}\frac{1}{S}\oint_L(\vec{V},\vec{dl}) = \lim_{S\to 0}\frac{1}{S}\iint_S\left[\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)\cos(\vec{n},x)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)\cos(\vec{n},y)+\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cos(\vec{n},z)\right]dS \quad . \qquad (1.7.3)$$

Пользуясь теоремой о среднем, производя сокращения на S и переходя к пределу, получим

$$\lim_{S\to 0}\frac{1}{S}\oint_L(\vec{V},dl)=\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)\cos(\vec{n},x)+\left(\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)\cos(\vec{n},y)+ \\ +\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cos(\vec{n},z) \qquad (1.7.4)$$

Правая часть полученного выражения (1.7.4) является скалярным произведением некоторого вектора $\vec{\Omega}$, носящего название вихря скорости $(\vec{\Omega}=rot\,\vec{V})$, на единичный вектор нормали $\vec{n}_\circ$ к поверхности S

$$\vec{n}_\circ=\vec{i}\cos(\vec{n},x)+\vec{j}\cos(\vec{n},y)+\vec{k}\cos(\vec{n},z). \qquad (1.7.5)$$

Следовательно, проекции вихря скорости на оси координат будут равны:

$$\Omega_x=\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}; \qquad (1.7.6)$$

$$\Omega_y=\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}; \qquad (1.7.7)$$

$$\Omega_z=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}; \qquad (1.7.8)$$

а сам вихрь скорости, как вектор, выразится формулой

$$\vec{\Omega}=\vec{i}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\vec{j}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\vec{k}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right). \qquad (1.7.9)$$

В соответствии с формулой (1.7.9), вихрь скорости можно представить как векторное произведение символического вектора "набла" на вектор скорости

$$\vec{\Omega}=\left[\nabla,\vec{V}\right]. \qquad (1.7.9a)$$

Вводя вихрь скорости, формулу (1.7.4) для плотности циркуляции в заданной плоскости с нормалью $\vec{n}$ можно переписать в следующем виде:

$$\lim_{S\to 0}\frac{\oint_L(\vec{V},d\vec{l})}{S}=\Omega\cos(\vec{n},\vec{\Omega}). \tag{1.8.1}$$

Отсюда следует, что через данную точку проходит одна определенная плоскость, в которой плотность циркуляции в данный момент времени имеет наибольшее значение, равное модулю вихря скорости в этой точке. Во всех остальных плоскостях плотность циркуляции будет иметь меньшую величину.

Чтобы выяснить физический смысл вихря скорости, рассмотрим элементарный объем жидкости или газа. Радиус вектор $\vec{r}$ любой точки этого объема относительно начала координат будет иметь проекции на координатные оси, равные x, y, z. Предположим, что выделенный объем вращается как твердое тело относительно начала координат с постоянной угловой скоростью $\vec{\omega}$. Тогда линейная скорость движения какой-либо точки выделенного объема будет равна векторному произведению угловой скорости $\vec{\omega}$ на радиус вращения $\vec{r}$,

$$\vec{V}=\left[\vec{\omega},\vec{r}\right]. \tag{1.8.2}$$

Проектируя последнее равенство на оси координат, находим составляющие линейной скорости

$$\left.\begin{aligned} u&=\omega_y z-\omega_z y\\ v&=\omega_z x-\omega_x z\\ w&=\omega_x y-\omega_y x\end{aligned}\right\}, \tag{1.8.3}$$

В связи с этим составляющие вихря скорости по осям координат будут равны

$$\left.\begin{aligned} \Omega_x&=\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}=\omega_x+\omega_x=2\omega_x\\ \Omega_y&=\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}=\omega_y+\omega_y=2\omega_y\\ \Omega_z&=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=\omega_z+\omega_z=2\omega_z\end{aligned}\right\}, \tag{1.8.4}$$

следовательно, $\vec{\Omega}=2\vec{\omega}$.

Таким образом, вихрь скорости равняется удвоенной угловой скорости вращения частиц жидкости или газа и является характеристикой вращательной способности поля скорости в данной точке.

В метеорологии чаще всего рассматривается вертикальная составляющая вихря скорости, выражающая вихревые свойства горизонтального поля ветра и определяемая формулой (1.7.8)

$$\Omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Заметим также, что формулу (1.7.2) выражающую теорему Стокса, можно записать в виде

$$\oint_L (\vec{V}, \vec{dl}) = \iint_S (\vec{\Omega}, \vec{n}_\circ)\, dS.$$

Она показывает, что циркуляция скорости по какому-либо замкнутому контуру равна потоку вихря скорости через этот контур. Из этой же формулы вытекает, что, если движение воздуха является безвихревым, то циркуляция скорости равна нулю.

1.8. Натуральная система координат

Физический смысл дифференциальных характеристик двумерного поля скорости $\vec{V}\ (x, y,\ t)$ наиболее просто и наглядно выявляется, если рассматривать их в натуральных координатах.

Натуральной системой координат называется ортогональная, в общем случае криволинейная система отсчета, в которой координатными линиями являются линии тока S и нормали n к ним. В дальнейшем будем пользоваться правой системой координат, для которой кратчайший поворот от положительного направления S к положительному направлению n совершается влево.

Угол между осью x декартовой системы координат и касательной к линии тока S, отсчитываемый против вращения часовой стрелки, обозначим через β (рис.5).

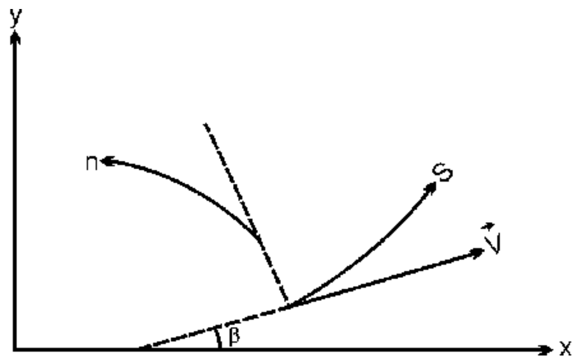


Рис.5

Этот угол характеризует направление ветра и меняется от точки к точке и с течением времени $\beta = \beta(s, n, t)$. Кривизна линии тока выражается частной производной от β по S

$$K_s = \frac{\partial \beta}{\partial S} \ . \tag{1.8.5}$$

Кривизна нормали к линии тока

$$K_n = \frac{\partial \beta}{\partial n} \ . \tag{1.8.6}$$

Если линии тока или нормали к ним поворачивают влево при положительных приращениях аргументов, то угол β увеличивается, и кривизна этих линий будет положительной или циклонической. Если же соответствующие кривые поворачивают вправо в направлении роста аргумента, то кривизна их будет отрицательной или антициклонической.

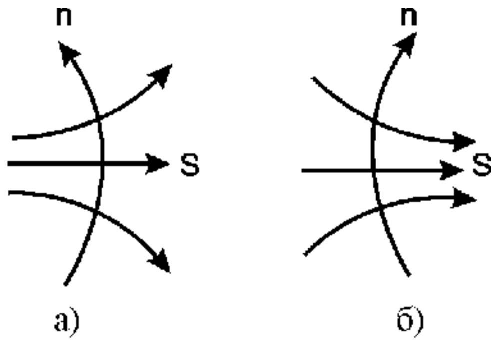


Рис.6

При положительной (циклонической) кривизне нормалей линии тока расходятся по течению (рис.6а), а при отрицательной (антициклонической) кривизне нормалей линии тока сходятся по течению (рис.6б).

Кривизна траектории K_T т.е. поворот пути частицы, рассчитанный на единицу пройденного расстояния, определяется из выражения полной производной от угла β по времени

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{d\beta}{dS} \cdot \frac{dS}{dt} = \frac{d\beta}{dS} V = K_T V,$$

откуда

$$K_T = \frac{1}{V} \cdot \frac{d\beta}{dt} \ . \tag{1.8.7}$$

Спроектируем вектор скорости $\vec{V}$ на оси декартовой системы координат:

$$u = V\cos\beta; \qquad v = V\sin\beta. \tag{1.8.8}$$

Дифференцируя соотношение (1.8.8) по x и y, находим:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial x}\cos\beta - V\sin\beta\frac{\partial\beta}{\partial x}; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial y}\cos\beta - V\sin\beta\frac{\partial\beta}{\partial y};$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial x}\sin\beta - V\cos\beta\frac{\partial\beta}{\partial x}; \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial y}\sin\beta - V\cos\beta\frac{\partial\beta}{\partial y}.$$

Направим ось x по касательной к линии тока S, тогда будем иметь: $\beta = 0,\ \sin\beta = 0,\ \cos\beta = 1$.

Учитывая, что $\frac{\partial\beta}{\partial x} = \frac{\partial\beta}{\partial S} = K_s$ и $\frac{\partial\beta}{\partial y} = \frac{\partial\beta}{\partial n} = K_n$, получим:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial S}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial n}; \tag{1.8.9}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = K_s V; \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = K_n V. \tag{1.8.10}$$

Пользуясь формулами (1.8.9) и (1.8.10), найдем выражение горизонтальной дивергенции скорости в натуральных координатах

$$div\vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial S} + K_n V$$

Итак,

$$div\vec{V} = \frac{\partial V}{\partial S} + K_n V. \tag{1.8.11}$$

Из формулы (1.8.11) следует, что горизонтальная дивергенция скорости определяется двумя факторами: изменением модуля скорости вдоль линий тока и сходимостью или расходимостью линий тока.

Величина $\frac{\partial V}{\partial S}$ положительна при увеличении модуля скорости в направлении потока, отрицательна при уменьшении скорости и равна нулю, если скорость в направлении потока не меняется.

Величина $K_n V$ положительна при расходимости линий тока, отрицательна при сходимости и равна нулю в случае параллельных линий тока.

Определим теперь выражение вертикальной составляющей вихря скорости Ω_z в натуральной системе координат. В декартовых координатах Ω_z выражается формулой

$$\Omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Заменяя производные $\partial v/\partial x$ и $\partial u/\partial y$ согласно формулам (1.8.9) и (1.8.10), получаем выражение для вертикальной составляющей вихря скорости в натуральных координатах

$$\Omega_z = K_s V - \frac{\partial V}{\partial n}. \tag{1.8.12}$$

Отсюда следует, что вертикальная составляющая вихря скорости, с кинематической точки зрения, определяется кривизной линий тока (завихренностью воздушных потоков) и изменением модуля скорости ветра в направлении, перпендикулярном движению (в направлении нормалей к линиям тока).

Величина $K_s V$ положительна при циклонической кривизне, отрицательна при антициклонической кривизне и обращается в нуль в случае прямолинейных линий тока.

Производная $\dfrac{\partial V}{\partial n}$ отрицательна, если скорость ветра растет вправо относительно направления потока, положительна при увеличении скорости ветра влево от направления движения и равна нулю, если скорость ветра поперек потока не меняется.

1.9. Вычисление дифференциальных характеристик полей метеорологических величин методом конечных разностей

Определение градиентов, лапласианов, дивергенции и вихря скорости сводится к вычислению производных по направлению координатных осей от данной скалярной величины или от составляющих вектора.

Так как измерения метеорологических величин производится в отдельных точках, то их аналитическая зависимость от координат неизвестна. Поэтому поля метеорологических величин обычно задаются графически при помощи карт распределения соответствующих величин или дискретно в узлах некоторой сетки. В связи с дискретным заданием метеорологических функций для нахождения производных используются методы численного дифференцирования. Искомая производная в данной точке поля, согласно теореме Лагранжа о конечных приращениях, заменяется отношением конечных разностей и вычисляется ее приближенное значение.

Рассмотрим метод центральных разностей, наиболее часто применяемый в практике приближенных вычислений.

Предположим, что задано двумерное поле величины φ в узлах некоторой регулярной сетки и требуется в некоторой точке 0 определить производные $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ и $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$.

Поместим в точку 0 начало системы координат и опишем около этой точки окружность радиуса r. Точки пересечения окружности с осью x обозначим цифрами 1 и 3, а с осью y - цифрами 2 и 4. (рис.7).

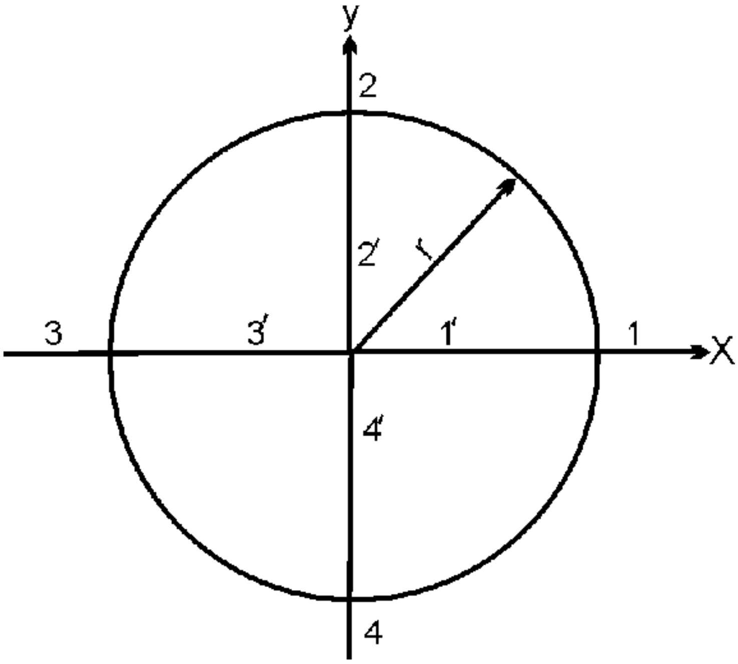


Рис.7

Тогда производные от φ по x и y в точке 0 приближенно можно определить как отношения конечных разностей вида:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_0 \approx \frac{\varphi_1 - \varphi_3}{2r}; \qquad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_0 \approx \frac{\varphi_2 - \varphi_4}{2r}. \tag{1.9.1}$$

Такие разности называются центральными в отличие от односторонних, выражаемых соотношениями вида $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_0 \approx \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{r}$.Нетрудно показать, что вычисление производных с помощью отношений центральных разностей является более точным, чем с помощью односторонних разностей. Действительно, заменим φ_1 и φ_3 их тейлоровскими разложениями:

$$\varphi_1 = \varphi_0 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_0 r + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)_0 \frac{r^2}{2} + \left(\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3}\right)_0 \frac{r^3}{6} + 0(r^4)\,;$$

$$\varphi_3 = \varphi_0 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_0 r + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)_0 \frac{r^2}{2} - \left(\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3}\right)_0 \frac{r^3}{6} + 0(r^4)\,.$$

Пользуясь этими разложениями, получим:

$$\frac{\varphi_1 - \varphi_3}{2r} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_0 + \left(\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3}\right)_0 \frac{r^2}{6} + 0(r^3)\,;$$

$$\frac{\varphi_1 - \varphi_0}{r} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)_0 \frac{r}{2} + 0(r^2)\,,$$

или:

$$\frac{\varphi_1 - \varphi_3}{2r} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_0 + 0(r^2)\,; \qquad \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{r} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_0 + 0(r)\,.$$

то есть в первом случае мы имеем аппроксимацию производных со вторым порядком точности, а во втором - лишь с первым порядком. Поэтому в дальнейшем пространственные производные будем заменять отношением центральных разностей.

Горизонтальный градиент скалярной величины определится соотношением

$$\nabla\varphi = \frac{1}{2r}[\vec{i}(\varphi_1 - \varphi_3) + \vec{j}(\varphi_2 - \varphi_4)]. \tag{1.9.2}$$

Если спроектировать вектор скорости $\vec{V}$ на оси координат и найти его проекции u и v в точках 1, 2, 3 и 4, то горизонтальная дивергенция скорости и вертикальная составляющая вихря скорости определятся при помощи соотношений:

$$div\vec{V} = \frac{1}{2r}(u_1 - u_3 + v_2 - v_4); \tag{1.9.3}$$

$$\Omega_z = \frac{1}{2r}(v_1 - v_3 - u_2 + u_4). \tag{1.9.4}$$

Чтобы определить вторые производные, возьмем на осях координат промежуточные точки 1', 2', 3', 4', отстоящие от начала координат на расстояние $r/2$ (рис.7). Применяя последовательно метод центральных разностей, вначале вычислим первые производные от величины φ в этих точках, а затем вторые производные в точке 0:

$$\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)_0 = \frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{1'} - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{3'}}{r}.$$

Окончательно, для вторых производных получим следующие выражения:

$$\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)_0 = \frac{\varphi_1 + \varphi_3 - 2\varphi_0}{r^2}; \quad \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)_0 = \frac{\varphi_2 + \varphi_4 - 2\varphi_0}{r^2}. \tag{1.9.5}$$

При решении ряда задач часто приходится вычислять сумму вторых пространственных производных от какой-либо величины. Оператор Лапласа или лапласиан символически обозначается

$$\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{1.9.6}$$

Очень часто используется двумерный оператор Лапласа

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \tag{1.9.7}$$

На основании выражений (1.9.5) для двумерного лапласиана (1.9.7) получим

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{r^2}(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 - 4\varphi_0). \tag{1.9.8}$$

Формулу (1.9.8) удобно записать в несколько ином виде, введя величину, представляющую среднее арифметическое из значений в четырех точках окружности радиуса r:

$$\overline{\varphi} = \frac{1}{4}(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4). \tag{1.9.9}$$

Тогда формула (1.9.8) примет вид

$$\nabla^2\varphi = \frac{4}{r^2}(\overline{\varphi} - \varphi_0).$$

Можно легко показать, что эта формула справедлива, если под $\overline{\varphi}$ понимать среднее из значений не в четырех точках, а в любом числе точек, равномерно расположенных на окружности.

1.10. Изменение метеорологических величин во времени. Связь между полной и частной производными по времени

Изменение метеорологической величины φ с течением времени можно рассматривать с двух точек зрения.

Во-первых, можно определять, как изменяется значение величины φ в одной и той же частице движущегося воздуха. Такое изменение называется индивидуальным изменением.

Во-вторых, можно определять как изменяется значение величины φ в неподвижной относительно выбранной системы отсчета точке пространства при прохождении через нее различных частиц воздуха. Такое изменение величины φ с течением времени в одной и той же фиксированной точке поля называется локальным или местным изменением.

В общем случае значение какой-либо метеорологической величины φ зависит от времени и координат

$$\varphi = \varphi(t, x, y, z) \qquad (1.10.1)$$

Если рассматривать одну и ту же частицу воздуха, движущуюся в пространстве, то ее координаты с течением времени изменяются.

Следовательно, значение величины в движущейся воздушной частице является сложной функцией независимой переменной t. Поэтому индивидуальное изменение во времени величины φ в движущейся частице воздуха будет равно полной производной по времени от φ как от сложной функции. В связи с этим полная производная по времени называется индивидуальной производной. Итак,

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}. \qquad (1.10.2)$$

Производные по времени от координат частицы являются составляющими скорости движения ее в направлении соответствующих осей:

$$\frac{dx}{dt} = u; \quad \frac{dy}{dt} = v; \quad \frac{dz}{dt} = w. \qquad (1.10.3)$$

Следовательно, индивидуальное изменение во времени метеорологической величины φ выразится формулой

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + u\frac{\partial\varphi}{\partial x} + v\frac{\partial\varphi}{\partial y} + w\frac{\partial\varphi}{\partial z}. \qquad (1.10.4)$$

Частная производная по времени $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ выражает изменение величины φ во времени при постоянных значениях координат x, y, z, то есть в данной точке поля. Следовательно, локальное изменение величины φ во времени определяется частной производной по времени, которая также называется локальной производной.

В метеорологии большое практическое значение имеет локальное изменение метеорологических величин, например, изменение температуры воздуха на одной и той же станции. Из выражения (1.10.4) получаем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{d\varphi}{dt} - \left(u\frac{\partial\varphi}{\partial x} + v\frac{\partial\varphi}{\partial y} + w\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right). \qquad (1.10.5)$$

Произведения компонентов скорости движения частицы воздуха на соответствующие составляющие градиента φ, стоящие в скобках правой части формулы (1.10.5), определяют изменение во времени величины φ в данной фиксированной точке поля, вызванное перемещением в нее частиц воздуха из других точек с другими значениями φ. Сумма этих произведений равна скалярному произведению вектора скорости $\vec{V}$ на градиент φ

$$u\frac{\partial\varphi}{\partial x} + v\frac{\partial\varphi}{\partial y} + w\frac{\partial\varphi}{\partial z} = (\vec{V}, grad\varphi) = (\vec{V}, \nabla\varphi) = V|\nabla\varphi|\cos\delta,$$

где δ - угол между вектором скорости и градиентом φ.

В метеорологии локальное изменение величины в данной точке, обусловленное перемещением частиц воздуха, подразделяется на адвективное, вызванное горизонтальным переносом воздуха, и на конвективное, связанное с вертикальными движениями воздуха:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{адв} = -V_r|\nabla_r\varphi|\cos\varepsilon$$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{конв} = -w\frac{\partial\varphi}{\partial z}, \qquad (1.10.6)$$

где V_r - модуль горизонтальной скорости воздушных течений; $\nabla_r\varphi$ - горизонтальный градиент φ, ε - угол между этими векторами. В связи с этим, индивидуальное изменение величины φ, выражаемое формулой (1.10.4), можно переписать в следующем виде:

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{\partial\varphi}{\partial t}+V_r\left|\nabla_r\varphi\right|\cos\varepsilon+w\frac{\partial\varphi}{\partial z}. \qquad (1.10.7)$$

Таким образом, индивидуальное изменение величины внутри движущейся частицы воздуха равно сумме локального, адвективного и конвективного изменений.

Если в каждой движущейся частице воздуха значение φ течением времени не меняется $\frac{d\varphi}{dt}=0$, то в любой точке поля локальное изменение величины будет обусловлено только перемещением частиц воздуха и выразится формулой

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=-\left(u\frac{\partial\varphi}{\partial x}+v\frac{\partial\varphi}{\partial y}+w\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) \qquad (1.10.8)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=-V_r\,\nabla_r\varphi\cos\varepsilon-w\frac{\partial\varphi}{\partial z}. \qquad (1.10.9)$$

Знак минус в правых частях этих выражений указывает на то, что при увеличении φ в направлении движения в каждой точке поля значение данной величины уменьшается с течением времени.

1.11. Деформация воздушной частицы и теорема Коши – Гельмгольца о разложении скорости

Расстояния между отдельными точками одной и той же частицы жидкости или газа не остаются постоянными. Отдельные точки внутри частицы перемещаются относительно друг друга, что сопровождается деформацией частицы, т.е. изменением ее формы и объема. В связи с этим, в отличие от абсолютно твердого тела, скорость движения любой точки воздушной частицы зависит не только от поступательного и вращательного движений данной частицы, но еще и от ее деформации, т.е. от относительного перемещения самих точек внутри частицы воздуха, к которой они относятся.

Отвлекаясь от молекулярного строения воздуха и рассматривая его как сплошную среду, под частицей воздуха понимают очень малый объем по сравнению с общей протяженностью изучаемого движения, но достаточно большой по сравнению с длиной свободного пробега газовых молекул.

Рассмотрим внутри одной и той же движущейся частицы воздуха две бесконечно близкие друг к другу точки M и M' (рис.8). Пусть координаты точки M будут x, y, z, а координаты точки M' $x+dx,\ y+dy,\ z+dz$.

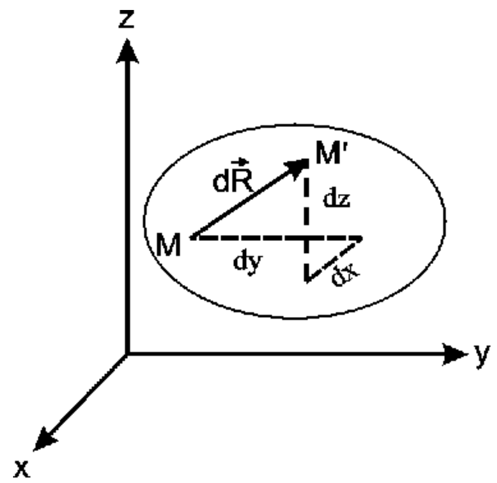


Рис.8

Скорости движения точек M и M' являются функциями времени и координат. Предположим, что составляющие скорости точки M известны и заданы уравнениями

$$\left.\begin{aligned} u &= u(t,x,y,z) \\ v &= v(t,x,y,z) \\ w &= w(t,x,y,z) \end{aligned}\right\}. \tag{1.11.1}$$

Требуется определить составляющие скорости точки M', для которых выполняются выражения общего вида

$$\left.\begin{aligned} u' &= u(t, x+dx, y+dy, z+dz) \\ v' &= v(t, x+dx, y+dy, z+dz) \\ w' &= w(t, x+dx, y+dy, z+dz) \end{aligned}\right\}. \tag{1.11.2}$$

Если в некоторый момент времени t скорость точки M известна, то, разлагая скорость в окрестности точки M в ряд Тейлора для данного момента времени, получим с точностью до бесконечно малых первого порядка следующие выражения для составляющих скорости точки M'

$$\left.\begin{aligned} u' &= u + \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz \\ v' &= v + \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz \\ w' &= w + \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz \end{aligned}\right\}. \tag{1.11.3}$$

Прибавляя и вычитая в правой части первого уравнения величины $\frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial x}dy$ и $\frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial x}dz$ и группируя члены в полученном равенстве, имеем:

$$u' = u + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)dz - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)dy + \frac{\partial u}{\partial x}dx +$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)dy + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)dz\ .$$

Второй и третий члены правой части полученного выражения равняются половине проекции на ось x векторного произведения вихря скорости на радиус-вектор $d\vec{R}$ точки M' относительно точки M

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)dz - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)dy = \frac{1}{2}(\Omega_y dz - \Omega_z dy) = \frac{1}{2}[\vec{\Omega}, d\vec{R}]_x$$

Аналогично, преобразуя два других равенства (1.11.3), получаем выражения для составляющих скорости любой точки воздушной частицы

$$\left.\begin{aligned} u' &= u + \frac{1}{2}[\vec{\Omega}, d\vec{R}]_x + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)dy + \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)dz \\ v' &= v + \frac{1}{2}[\vec{\Omega}, d\vec{R}]_y + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)dz \\ w' &= w + \frac{1}{2}[\vec{\Omega}, d\vec{R}]_z + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)dx + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz \end{aligned}\right\}. \qquad (1.11.4)$$

Первые слагаемые u, v, w, стоящие в правых частях полученных равенств, являются компонентами скорости переносного поступательного движения частицы, одинаковой для всех ее точек. Вторые слагаемые, являющиеся компонентами половины векторного произведения вихря скорости на радиус-вектор $d\vec{R}$ между точками M и M', определяют составляющие линейной скорости точки M', возникающей в результате вращения ее вокруг точки M с угловой скоростью, равной половине вихря скорости в точке M. Остальные три слагаемые определяют составляющие линейной скорости точки M', возникающей в результате сжатия или расширения воздушной частицы и изменения ее формы. Эти слагаемые называются скоростями деформации частицы воздуха.

Соотношения (1.11.4) выражают теорему Коши-Гельмгольца о разложении скорости частицы жидкости или газа и могут быть записаны в следующей векторной форме

$$\vec{V}' = \vec{V} + \frac{1}{2}[\vec{\Omega}, d\,\vec{R}] + \vec{V}_D\,. \tag{1.11.5}$$

Теорему Коши-Гельмгольца, в соответствии с формулой (1.11.5), можно сформулировать следующим образом: во всякий данный момент времени скорость $\vec{V}'$ любой точки M' бесконечно малой частицы воздуха равняется векторной сумме трех скоростей: 1) скорости $\vec{V}$ одной какой-либо точки M (полюс), характеризующей поступательное движение частицы; 2) линейной скорости, обусловленной вращением этой частицы около оси, проходящей через точку M, с угловой скоростью, равной половине вихря скорости $\vec{V}$ точки M; 3) скорости деформации $\vec{V}_D$ в точке M, возникающей в результате изменения формы и объема частицы воздуха.

Деформация частицы жидкости или газа выражается более сложной величиной, чем обычный трехмерный вектор. Из соотношений (1.11.4) следует, что скорость деформации $\vec{V}_D$ зависит от девяти величин, стоящих множителями при дифференциалах $dx,\ dy,\ dz$. Эти девять величин в совокупности образуют так называемый тензор скоростей деформации, который записывается в виде матрицы

$$D = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x}, & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right), & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\right), & \dfrac{\partial v}{\partial y}, & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\right), & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z}\right), & \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{Bmatrix}. \tag{1.11. 6}$$

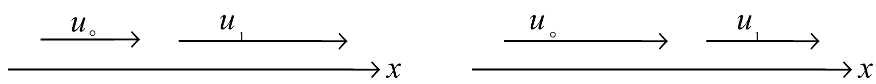
Введя обозначения:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x} = D_{xx};\ \frac{\partial v}{\partial y} = D_{yy};\ \frac{\partial w}{\partial z} = D_{zz};\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = D_{xy} = D_{yx}; \\ &\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = D_{xz} = D_{zx}; \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) = D_{yz} = D_{zy} \end{aligned}\right\}, \tag{1.11.7}$$

тензор скоростей деформации можно записать в виде

$$D = \begin{Bmatrix} D_{xx} & D_{xy} & D_{xz} \\ D_{yx} & D_{yy} & D_{yz} \\ D_{zx} & D_{zy} & D_{zz} \end{Bmatrix}. \tag{1.11.8}$$

Составляющие тензора деформации: $D_{xx} = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, $D_{yy} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$, $D_{zz} = \dfrac{\partial w}{\partial z}$ называются скоростями сжатия или растяжения. Они определяют скорости сжатия или растяжения линий в направлении осей координат и, связанное с этим, относительное изменение объема частицы воздуха. Если составляющие скорости движения точек увеличиваются в направлениях соответствующих осей координат: $D_{xx} > 0,\ D_{yy} > 0,\ D_{zz} > 0$ (рис.9а), то расстояние между точками увеличивается с течением времени, происходит растяжение линий и увеличение объема частицы. Если составляющие скорости движения точек уменьшаются в направлениях соответствующих осей координат (рис.9б), то происходит сжатие и уменьшение объема частицы.



а) $D_{xx} = \dfrac{\partial u}{\partial x} > 0$ — Растяжение в направлении оси x

б) $D_{xx} = \dfrac{\partial u}{\partial x} < 0$ — Сжатие в направлении оси x

Рис. 9

Составляющие тензора деформации:

$$D_{xy} = D_{yx},\ D_{xz} = D_{zx},\ D_{yx} = D_{xy}$$

называются скоростями скашивания прямых углов. Они характеризуют изменение формы воздушной частицы, обусловленное неравномерным распределением скоростей точек, расположенных в двух взаимно перпендикулярных направлениях.

Если в начальный момент времени четыре линии образуют в плоскости XOY квадрат, то в результате скоса прямых углов квадрат преобразуется в ромб, стороны которого сохраняют первоначальную длину сторон квадрата, но длина диагоналей изменяется. Путем несложных преобразований можно показать, что изменение прямого угла за единицу времени определяется суммой производных $\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}$. Поэтому полученные формулы (1.11.7) для скоростей деформации скашивания прямых углов имеют вид:

$$D_{xy} = D_{yx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right); \quad D_{xz} = D_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right);$$

$$D_{yz} = D_{zy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right).$$

На рисунке 10 приведены простейшие примеры деформации скоса прямого угла в зависимости от распределения составляющих скорости в плоскости XOY .

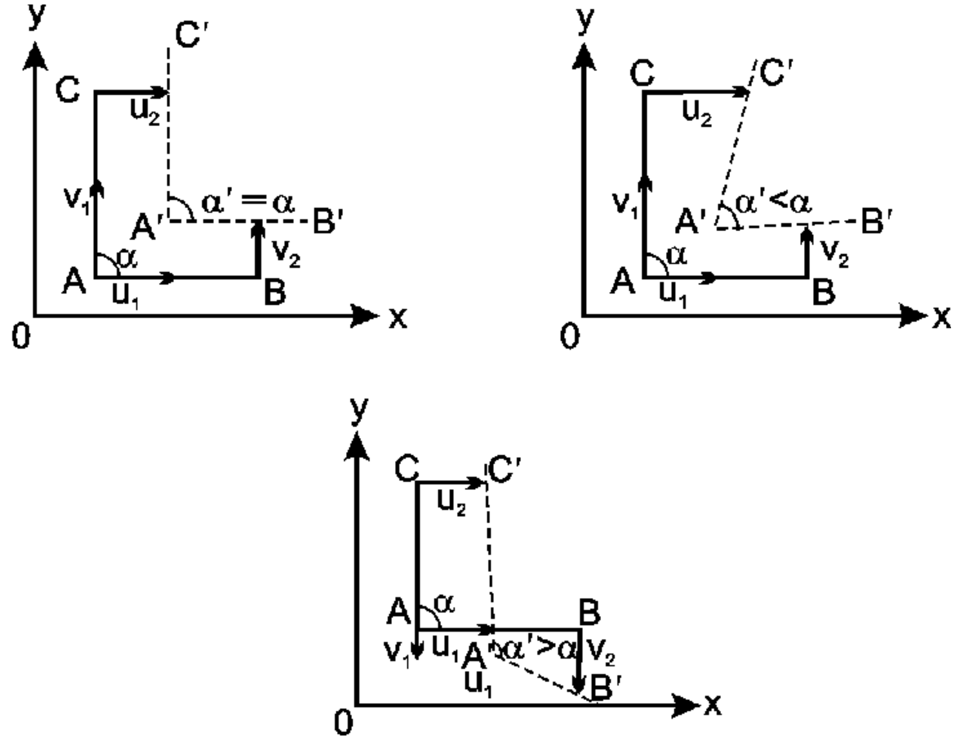


Рис. 10

2. ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ ДИНАМИКИ АТМОСФРЫ

2.1. Силы, действующие в атмосфере

Применение общих законов гидродинамики к изучению атмосферных движений основано на представлении атмосферы как сплошной среды.

Силы, действующие в атмосфере делятся на массовые и поверхностные.

2.1.1. Массовые силы

Массовые силы приложены ко всем точкам сплошной среды, независимо от того, лежат ли эти точки на поверхности, ограничивающей сплошную среду, или находятся внутри этой поверхности. Величина массовой силы, действующей на какую-либо частицу, пропорциональна её массе (объему) и обычно рассчитывается на единицу массы.

Сила тяжести. Одной из массовых сил является сила тяжести действующая на любую как неподвижную, так и на движущуюся относительно Земли частицу воздуха.

Сила тяжести $\vec{g}$ представляет собой векторную сумму двух сил: силы земного притяжения $\vec{g}_{\circ}$, направленной к центру Земли, и центробежной силы $\vec{c}$, возникающей от вращения Земли вокруг своей оси и направленной по радиусу широтного круга, проходящего через рассматриваемую точку (рис.11). Величина центробежной силы вращения Земли выражается формулой

$$c = \omega^2 r = \omega^2 R \cos\varphi , \qquad (2.1.1)$$

где $\omega = 7{,}297 \cdot 10^{-5}$ 1/с - угловая скорость вращения Земли; R - радиус Земли; r - радиус широтного круга; φ - географическая широта.

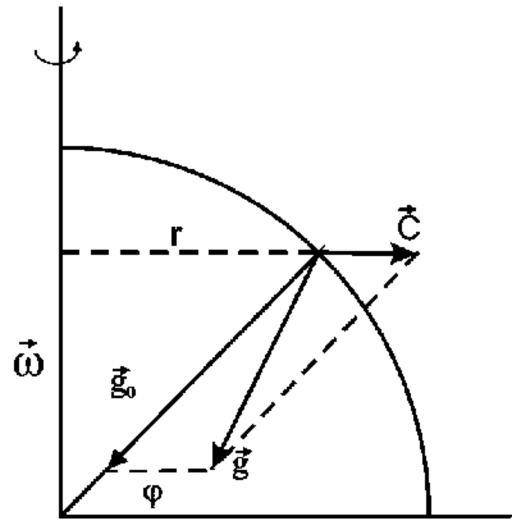


Рис. 11

Центробежная сила $\vec{c}$ очень мала по сравнению с силой земного притяжения $\vec{g}_{\circ}$, и по мере приближения к полюсу она уменьшается до нуля, а сила тяжести $\vec{g}$ с увеличением широты увеличивается.

Относя силу тяжести к единице массы, т.е. пользуясь ускорением силы тяжести $\vec{g}$ и учитывая уменьшение силы земного притяжения с высотой z, зависимость силы тяжести от широты φ и высоты z над уровнем моря с достаточной степенью точности выражается эмпирической формулой

$$g_{z,\varphi} = g_{0,45}(1 - a_1 \cos 2\varphi)(1 - a_2 z), \qquad (2.1.2)$$

где $g_{z,\varphi}$ - ускорение силы тяжести на широте φ и на высоте z над уровнем моря, $g_{0,45} \approx 9{,}81$ $м/с^2$ - ускорение силы тяжести на широте 45° и на уровне моря; постоянные a_1 и a_2 имеют следующие значения: $a_1 = 0{,}0026$, $a_2 = 3{,}14 \cdot 10^{-7}$ $1/м$.

Значения a_1 и a_2 показывают, что ускорение силы тяжести очень мало изменяется в зависимости от широты и высоты и, в первом приближении, его можно считать постоянным.

Отклоняющая сила вращения Земли (сила Кориолиса). Другой массовой силой является отклоняющее действие вращения Земли или так называемая сила Кориолиса, которая действует на движущиеся относительно Земли частицы воздуха, т.е. на воздушные течения в атмосфере.

Сила Кориолиса возникает в результате переносного вращательного движения Земли вокруг своей оси и одновременного движения частиц воздуха относительно земной поверхности.

Вследствие суточного вращения Земли направление воздушных течений в атмосфере по отношению к земной поверхности изменяется, движущиеся частицы воздуха получают относительно Земли дополнительное поворотное, так называемое, кориолисово ускорение.

Ускорение силы Кориолиса, испытываемое движущейся частицей воздуха, определяется двумя факторами: разностью абсолютных величин и разностью направлений линейной скорости вращательного движения различных точек земной поверхности, над которыми проходит данная частица воздуха.

Линейная скорость вращения точек земной поверхности, направленная с запада на восток, уменьшается от экватора к полюсу и на полюсе обращается в нуль. Поэтому в северном полушарии частица воздуха, сохраняя по инерции первоначальную составляющую скорости своего движения вместе с Землей к востоку, при перемещении с юга на север отклоняется на восток от меридиана, на котором она была в начальный момент времени, а при перемещении с севера на юг, она будет отставать от более южных точек данного меридиана и отклонится от него к западу (рис.12).

Следовательно, за счет разности линейных скоростей переносного вращательного движения точек земной поверхности воздушные течения в северном полушарии отклоняются в правую сторону.

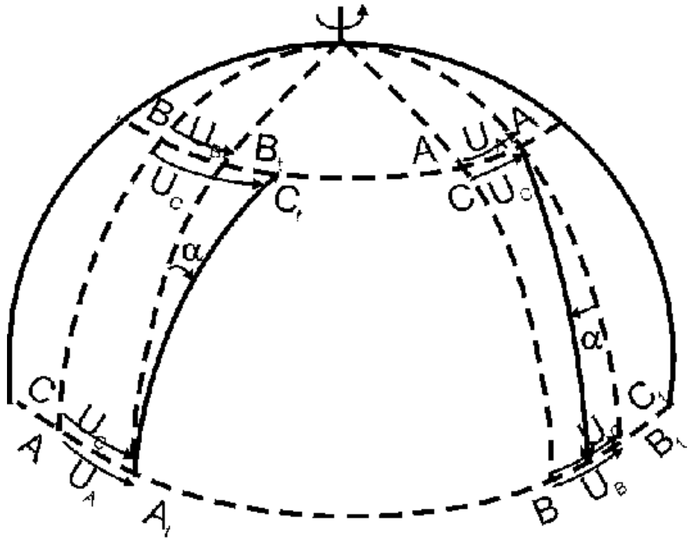


Рис. 12

На рисунке 12 приняты следующие обозначения: A, A_t и B, B_t - положение точек земной поверхности A и B в моменты времени соответственно $t=0$ и t; C и C_t - положение движущейся частицы воздуха в начальный момент времени ($t=0$) и в момент времени t; U_A и U_B - скорости переносного движения точек земной поверхности A и B; U_C - начальная составляющая абсолютной скорости частицы, направленная с запада на восток и равная скорости переносного движения исходной точки земной поверхности A.

На одной и той же широте линейная скорость переносного вращательного движения точек земной поверхности по абсолютной величине одинакова, но направление её меняется в плоскости широтного круга в левую сторону, при наблюдении со стороны северного полюса. Поэтому частица воздуха, движущаяся относительно Земли с запада на восток или с востока на запад, сохраняя по инерции первоначальное направление своего движения, получает относительное ускорение и, в северном полушарии, отклоняется в правую сторону от широтного круга, на котором она находилась в начальный момент времени (рис.13). A и A_t - начальное и конечное положение некоторой точки земной поверхности; C и C_t - соответствующие положения движущейся частицы воздуха.

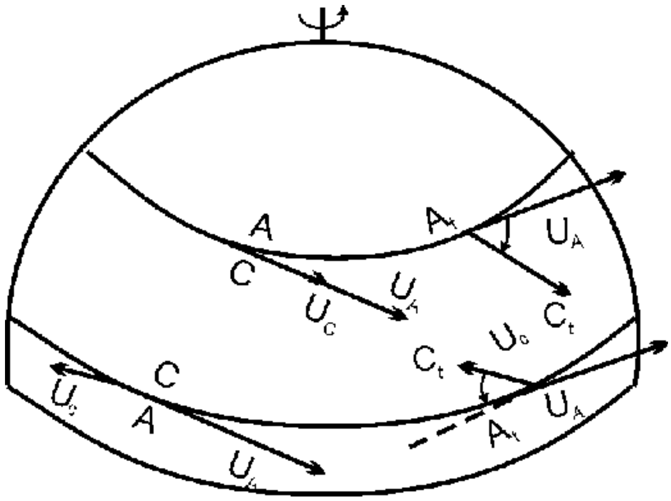


Рис.13

Таким образом, сила Кориолиса изменяет лишь направление воздушных течений, отклоняя их в северном полушарии вправо, а в южном полушарии влево, не меняя абсолютной величины скорости движения и, следовательно, не совершая никакой работы.

Величина силы Кориолиса зависит от угловой скорости вращения Земли и относительной скорости движения частицы воздуха. Чтобы определить эту зависимость проанализируем векторные соотношения между скоростями и ускорениями в сложном движении, учитывая, что переносное движение является вращательным.

Возьмем две декартовые прямоугольные системы координат с началом в центре Земли. Пусть одна система x, y, z будет неподвижна, а вторая система x', y', z' вращается вместе с Землей вокруг общей оси аппликат с постоянной угловой скоростью $\vec{\omega}$ (рис.14).

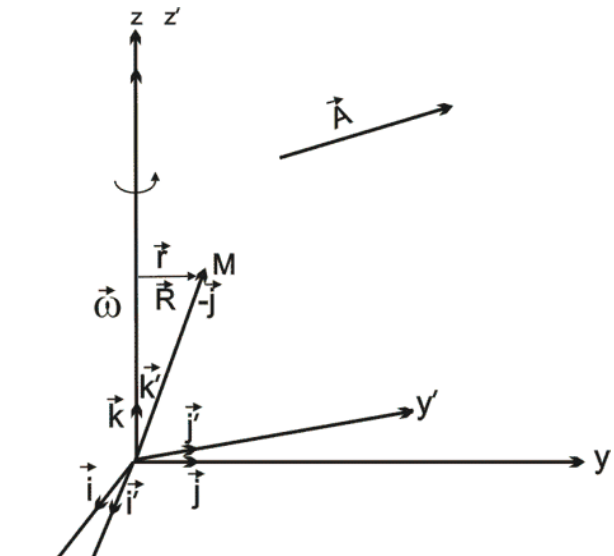


Рис.14

Рассмотрим какой-нибудь переменный вектор $\vec{A}$, проекции которого на неподвижные оси координат обозначим через A_x, A_y, A_z, а на вращающиеся оси - через $A_{x'}, A_{y'}, A_{z'}$. В неподвижной системе координат

$$\vec{A} = \vec{i}\,A_x + \vec{j}\,A_y + \vec{k}\,A_z \tag{2.1.3}$$

Тот же самый вектор $\vec{A}$ во вращающейся системе координат будет иметь вид

$$\vec{A} = \vec{i}'\,A_{x'} + \vec{j}'\,A_{y'} + \vec{k}'\,A_{z'}\,. \tag{2.1.4}$$

Определим полную производную по времени от вектора $\vec{A}$, выражая ее во вращающейся системе координат. Дифференцируя выражение (2.1.4) и учитывая, что единичные векторы $\vec{i}'$, $\vec{j}'$, $\vec{k}'$, вращаясь, меняют свое направление с течением времени, будем иметь

$$\begin{gathered}\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{i}'\frac{dA_{x'}}{dt} + \vec{j}'\frac{dA_{y'}}{dt} + \vec{k}'\frac{dA_{z'}}{dt} + \\ + A_{x'}\frac{d\vec{i}'}{dt} + A_{y'}\frac{d\vec{j}'}{dt} + A_{z}\frac{d\vec{k}'}{dt}.\end{gathered} \tag{2.1.5}$$

Первые три слагаемые правой части равенства (2.1.5) выражают полную производную по времени от вектора $\vec{A}$, взятую относительно вращающейся системы координат

$$\vec{i}'\frac{dA_{x'}}{dt} + \vec{j}'\frac{dA_{y'}}{dt} + \vec{k}'\frac{dA_{z'}}{dt} = \frac{d'\vec{A}}{dt}\,. \tag{2.1.6}$$

Производные по времени от единичных векторов $\vec{i}'$, $\vec{j}'$, $\vec{k}'$ равны линейным скоростям, с которыми движутся концы этих векторов, вращаясь с постоянной угловой скоростью $\vec{\omega}$. Линейная скорость вращательного движения выражается векторным произведением угловой скорости на радиус вращения. В данном случае радиусами вращения являются сами единичные векторы, так что

$$\frac{d\vec{i}'}{dt} = \left[\vec{\omega}, \vec{i}'\right], \quad \frac{d\vec{j}'}{dt} = \left[\vec{\omega}, \vec{j}'\right], \quad \frac{d\vec{k}'}{dt} = \left[\vec{\omega}, \vec{k}'\right].$$

Следовательно, сумма последних трех членов правой части формулы (2.1.5) будет равна векторному произведению угловой скорости вращения системы координат на вектор $\vec{A}$

$$A_{x'} \frac{d\vec{i}'}{dt} + A_{y'} \frac{d\vec{j}'}{dt} + A_{z} \frac{d\vec{k}'}{dt} = [\vec{\omega}, \vec{A}\,]. \tag{2.1.7}$$

На основании формул (2.1.5), (2.1.6), (2.1.7) полная производная по времени от вектора $\vec{A}$ в неподвижной системе координат выразится через производную во вращающейся системе при помощи соотношения

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d'\vec{A}}{dt} + [\vec{\omega}, \vec{A}\,], \tag{2.1.8}$$

которое справедливо для любого переменного вектора $\vec{A}$. Возьмем радиус-вектор $\vec{R}$ движущейся точки M (рис.14), определяемый равенствами $\vec{R} = \vec{i}\,x + \vec{j}\,y + \vec{k}\,z = \vec{i}'\,x' + \vec{j}'\,y' + \vec{k}'\,z'$, и подставим его вместо вектора $\vec{A}$ в соотношение (2.1.8), тогда будем иметь $\frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{d'\vec{R}}{dt} + [\vec{\omega}, \vec{R}\,]$. Так как $\frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{\mathrm{V}}$ есть абсолютная скорость движения точки M в неподвижной системе координат, $\frac{d'\vec{R}}{dt} = \vec{\mathrm{V}}'$ есть относительная скорость движения точки M во вращающейся системе координат, то соотношение между абсолютной и относительной скоростями точки M выразится формулой

$$\vec{V} = \vec{V}' + [\vec{\omega}, \vec{R}\,]. \tag{2.1.9}$$

Если в формуле (2.1.8) вместо вектора $\vec{A}$ взять вектор скорости абсолютного движения точки M, то получим

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d'\vec{V}}{dt} + [\vec{\omega}, \vec{V}\,]\,. \tag{2.1.10}$$

Заменяя в правой части уравнения (2.1.10) скорость абсолютного движения $\vec{V}$ в неподвижной системе относительной скоростью $\vec{V}'$ во вращающейся системе координат при помощи формулы (2.1.9) будем иметь

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d'}{dt}\left(\vec{V}' + [\vec{\omega}, \vec{R}\,]\right) + \left[\vec{\omega}, (\vec{V}' + [\vec{\omega}, \vec{R}\,])\right]. \tag{2.1.11}$$

Выполняя дифференцирование и раскрывая скобки, получим

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d'\vec{V}'}{dt} + [\vec{\omega}, \vec{V}'] + [\vec{\omega}, \vec{V}'] + \left[\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{R}\,]\right].$$

или

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d'\vec{V}'}{dt} + 2[\vec{\omega}, \vec{V}'] + \left[\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{R}\,]\right]. \tag{2.1.12}$$

В векторной алгебре двойное векторное произведение выражается формулой $[\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{R}\,]] = \vec{\omega}(\vec{R}, \vec{\omega})\text{ - }\vec{R}(\vec{\omega}, \vec{\omega})$, правую часть которой, учитывая, что в данном случае вектор угловой скорости направлен по оси z, можно преобразовать следующим образом:

$$\vec{\omega}(\vec{R}, \vec{\omega})\text{ - }\vec{R}(\vec{\omega}, \vec{\omega}) = \vec{k}\,\omega\, z\omega - (\vec{i}\,x + \vec{j}\,y + \vec{k}\,z)\omega^2 =$$

$$-\,\omega^2(\vec{i}\,x + \vec{j}\,y) = -\,\omega^2\,\vec{r}\ ,$$

где $\vec{r}$ - составляющая радиус-вектора $\vec{R}$, перпендикулярная оси z, т.е. радиус вращения точки М вокруг оси z (см. рис.14), следовательно,

$$[\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{R}\,]] = \text{-}\omega^2\,\vec{r}\,. \tag{2.1.13}$$

На основании формулы (2.1.13) полученное равенство (2.1.12) для абсолютного ускорения частицы в сложном движении принимает следующий вид:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d'\vec{V}'}{dt} + 2[\vec{\omega}, \vec{V}'] - \omega^2 \vec{r}. \qquad (2.1.14)$$

В метеорологии основное значение имеет относительное ускорение частиц $d'\vec{V}'/dt$, возникающее по отношению к земной поверхности. Из соотношения (2.1.14) следует, что

$$\frac{d'\vec{V}'}{dt} = \frac{d\vec{V}}{dt} - 2(\vec{\omega}, \vec{V}') + \omega^2 \vec{r}. \qquad (2.1.15)$$

Первое слагаемое правой части формулы (2.1.15) $d\vec{V}/dt$ является ускорением абсолютного движения частиц воздуха относительно инерциальной системы отсчета. Второе слагаемое зависит от скорости движения частиц воздуха $\vec{V}'$ относительно вращающейся Земли и является кориолисовым ускорением. Наконец, третье слагаемое представляет центробежное ускорение вращения Земли, оно не зависит от скорости движения частицы воздуха и является составляющей ускорения силы тяжести.

Переходя к рассмотрению сил и относя их к единице массы, т.е. пользуясь при этом значениями ускорений, на основании формулы (2.1.15) приходим к выводу о том, что сила Кориолиса равняется взятому со знаком минус, удвоенному векторному произведению вектора угловой скорости вращения Земли $\vec{\omega}$ на вектор скорости относительного движения $\vec{V}'$, т.е. на вектор скорости ветра.

В метеорологии преимущественно рассматривается скорость относительного движения $\vec{V}'$, т.е. скорость ветра, которую в дальнейшем будем обозначать просто через $\vec{V}$ без штриха, поэтому для силы Кориолиса, действующей на единицу массы воздуха, будем иметь выражение

$$\vec{K} = -2[\vec{\omega}, \vec{V}]. \qquad (2.1.16)$$

Проектируя векторное произведение на оси декартовой системы координат, находим составляющие силы Кориолиса по осям координат:

$$K_x = -2(\omega_y w - \omega_z v);\ K_y = -2(\omega_z u - \omega_x w);\ K_z = -2(\omega_x v - \omega_y u). \qquad (2.1.17)$$

Если начало системы координат взять на поверхности Земли, ось x направить на восток, ось y - на север, ось z - вертикально вверх, то проекции угловой скорости вращения Земли будут равны: $\omega_x = 0$; $\omega_y = \omega \cos \varphi$; $\omega_z = \omega \sin \varphi$.

2.1.2. Поверхностные силы

Поверхностные силы представляют собой результат взаимодействия соседних слоев и частиц воздуха друг с другом и приложены к любой поверхности, ограничивающей рассматриваемый объем воздуха в атмосфере или отделяющий один слой от другого.

В идеальной атмосфере, при отсутствии вязкости или внутреннего трения, когда частицы и слои воздуха могут беспрепятственно скользить относительно друг друга, поверхностные силы действуют перпендикулярно к поверхностям, ограничивающим частицы воздуха, проявляясь в форме сил давления. При этом величина давления в данной точке не зависит от ориентировки площадки, на которую это давление действует.

В реальной атмосфере, при наличии вязкости воздуха, поверхностные силы, действующие на любую площадку, уже не совпадают с направлением нормали к этой площадке и разлагаются на нормальные составляющие, направленные перпендикулярно к площадке, и касательные составляющие, препятствующие скольжению отдельных слоев и частиц воздуха относительно друг друга.

Величина поверхностной силы, действующей на какую-либо поверхность, пропорциональна ее площади, поэтому напряжения поверхностных сил рассчитывается на единицу площади.

В отличие от массовых сил, имеющих в каждой точке вполне определенное направление, поверхностные силы в одной и той же точке на различные площадки действуют в различных направлениях. Так как через каждую точку в атмосфере можно провести сколько угодно площадок, то и поверхностные силы в любой точке действуют по всевозможным направлениям, характеризуя силовое взаимодействие между различными частицами воздуха в окрестности данной точки. Следовательно, действие поверхностных сил в какой-либо точке нельзя однозначно выразить при помощи одного определенного вектора.

Для характеристики поверхностных сил необходимо найти минимальное число независимых векторов, через которые можно было бы выразить поверхностную силу $\vec{P}_n$, действующую на любую площадку с нормалью $\vec{n}$. В связи с этим рассмотрим элементарный объем воздуха, имеющий форму пирамиды, одна грань которой имеет внешнюю нормаль $\vec{n}$, а три другие грани параллельны координатным плоскостям и ориентированы ортами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ (рис.15).

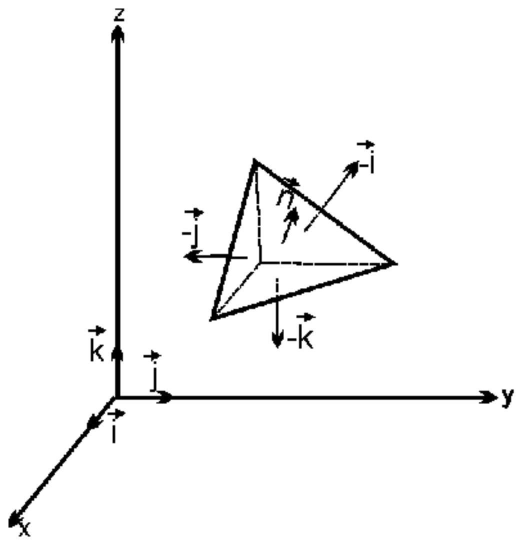


Рис. 15

Обозначим площади граней, перпендикулярных к векторам $\vec{n}, -\vec{i}, -\vec{j}, -\vec{k}$ соответственно через $dS,\ dS_x,\ dS_y,\ dS_z$.

Вектор поверхностной силы, действующей на единицу площади, обозначим через $\vec{P}$ с соответствующим индексом, указывающим направление нормали к поверхности, ограничивающей выделенный объем. Тогда поверхностные силы, действующие на грани пирамиды со стороны окружающих частиц воздуха, будут равны:

$$\vec{P}_n\,dS;\ \vec{P}_{-x}\,dS_x;\ \vec{P}_y\,dS_y;\quad \vec{P}_{-z}\,dS_z.$$

Напряжения поверхностных сил, с которыми частицы воздуха, заключенные внутри пирамиды, действуют на внешние частицы воздуха, прилегающие к граням пирамиды, можно обозначить через $\vec{P}_{-n},\ \vec{P}_x,\ P_y,\ \vec{P}_z$.

Тогда, в силу закона равенства действия и противодействия, будем иметь:

$$\vec{P}_n = \vec{P}_{-n};\ \vec{P}_x = -\vec{P}_{-x};\ \vec{P}_y = -\vec{P}_{-y};\ \vec{P}_z = -\vec{P}_{-z} \tag{2.1.19}$$

Площади dS_x, dS_y, dS_z являются проекциями грани dS на соответствующие координатные плоскости, т.е.:

$$dS_x = dS\cos(\vec{n}\hat{,}x);\ dS_y = dS\cos(\vec{n}\hat{,}y);\ dS_z = dS\cos(\vec{n}\hat{,}z).$$

Поэтому поверхностные силы, действующие на грани пирамиды со стороны внешних частиц воздуха, будут равны:

$$\vec{P}_n dS; \;\; \vec{P}_{-x}\, dS\cos(\vec{n}\hat{,}x),\; \vec{P}_{-y} = dS\cos(\vec{n}\hat{,}y),\;\; \vec{P}_{-z} = dS\cos\,(\vec{n}\hat{,}z). \tag{2.1.20}$$

Обозначим массу пирамиды через dm, массовую силу, отнесенную к единице массы воздуха – через $\vec{F}$, а ускорение с которым движется пирамида, - через $\vec{W}$, тогда, согласно принципу Даламбера, будем иметь

$$(\vec{F}-\vec{W})dm+\vec{P}_n dS+\vec{P}_{-x} dS\cos(\vec{n}\hat{,}x)+\vec{P}_{-y}\, dS\cos(\vec{n}\hat{,}y)+\vec{P}_{-z}\, dS\cos(\vec{n}\hat{,}z)=0 \tag{2.1.21}$$

Если пирамида имеет бесконечно малые линейные размеры, то площади её граней, а следовательно, и поверхностные силы, действующие на грани, будут бесконечно малыми второго порядка; при этом объем и масса пирамиды, а вместе с ними сила инерции и массовая сила будут уже бесконечно малыми третьего порядка. Поэтому массовой силой и силой инерции, по сравнению с поверхностными силами, можно пренебречь, и полученное равенство (2.1.21), после сокращения на dS, можно переписать в следующем виде:

$$\vec{P}_n + \vec{P}_{-x}\cos(\vec{n}\hat{,}x) + \vec{P}_{-y}\cos(\vec{n}\hat{,}y) + \vec{P}_{-z}\cos(\vec{n}\hat{,}z) = 0$$

Заменяя $\vec{P}_{-x}$, $\vec{P}_{-y}$, $\vec{P}_{-z}$ согласно соотношениям (2.1.19), получим, что для любого направления $\vec{n}$ вектор $\vec{P}_n$ может быть выражен через три вектора $\vec{P}_x$, $\vec{P}_y$, $\vec{P}_z$ формулой

$$\vec{P}_n = \vec{P}_x\cos(\vec{n}\hat{,}x) + \vec{P}_y\cos(\vec{n}\hat{,}y) + \vec{P}_z\cos(\vec{n}\hat{,}z). \tag{2.1.22}$$

Следовательно, для того чтобы полностью охарактеризовать поверхностные силы в некоторой точке, достаточно определить силы, действующие на три взаимно перпендикулярные площадки, лежащие в координатных плоскостях.

Проектируя полученное векторное равенство (2.1.22) на оси координат, находим

$$
\left.\begin{aligned}
P_{nx} &= P_{xx}\cos(\vec{n},\hat{x}) + P_{yx}\cos(\vec{n},\hat{y}) + P_{zz}\cos(\vec{n},\hat{z}) \\
P_{ny} &= P_{xy}\cos(\vec{n},\hat{x}) + P_{yy}\cos(\vec{n},\hat{y}) + P_{zy}\cos(\vec{n},\hat{z}) \\
P_{nz} &= P_{xz}\cos(\vec{n},\hat{x}) + P_{yz}\cos(\vec{n},\hat{y}) + P_{zz}\cos(\vec{n},\hat{z})
\end{aligned}\right\} \qquad (2.1.23)
$$

Первый индекс обозначает ось, перпендикулярно которой ориентирована площадка, а второй индекс обозначает ось, на которую спроектировано само напряжение.

Величины с одинаковыми индексами являются нормальными напряжениями, а величины с различными индексами являются касательными напряжениями.

Таким образом, поверхностные силы, действующие в данной точке, однозначно выражаются через три вектора напряжений, приложенных к трем взаимно перпендикулярным площадкам, лежащим в координатных плоскостях, т.е. через совокупность девяти величин, являющихся компонентами трех указанных векторов и образующих симметричный тензор второго ранга.

$$
\mathrm{H} = \begin{Bmatrix} P_{xx} & P_{yx} & P_{zx} \\ P_{xy} & P_{yy} & P_{zy} \\ P_{xz} & P_{yz} & P_{zz} \end{Bmatrix}. \qquad (2.1.24)
$$

Если нормальные напряжения одинаковы и постоянны, а касательные напряжения отсутствуют, то объем воздуха, не деформируясь, испытывает равномерное давление со всех сторон, равное нормальным составляющим сил $\vec{P}_{-x}$, $\vec{P}_{-y}$, $\vec{P}_{-z}$, действующим со стороны окружающего воздуха, или нормальным напряжениям P_{xx}, P_{yy}, P_{zz}, взятым с противоположным знаком. Обобщая понятие давления для различных нормальных напряжений, допустим, что взятое с противоположным знаком среднее арифметическое трех нормальных напряжений, приложенных к взаимно перпендикулярным площадкам в данной точке, представляет давление в этой точке

$$
P = -\frac{P_{xx} + P_{yy} + P_{zz}}{3}\ . \qquad (2.1.25)
$$

Касательные напряжения P_{yz}, P_{yx}, P_{zx} и т.д. проявляются в форме сил вязкости и внутреннего трения, препятствующего скольжению частицы и слоев воздуха между собой.

Если из компонентов поверхностной силы исключить давление, обозначая

$$\left.\begin{array}{lll} P_{xx}+P=б_{xx}, & P_{yx}=б_{yx}, & P_{zx}=б_{zx} \\ P_{xy}=б_{xy}, & P_{yy}+P=б_{yy}, & P_{zy}=б_{zy} \\ P_{xz}=б_{xz}, & P_{yz}=б_{yz}, & P_{zz}+P=б_{zz} \end{array}\right\}, \qquad (2.1.26)$$

то получим тензор вязких напряжений

$$П=\left\{\begin{array}{l} б_{xx}, б_{yx}, б_{zx} \\ б_{xy}, б_{yy}, б_{zy} \\ б_{xz}, б_{yz}, б_{zz} \end{array}\right\}. \qquad (2.1.27)$$

Эти вязкие напряжения вызывают деформацию объема воздуха, которая сводится к изменению расстояния между точками объема и к изменению углов между линиями, состоящими из одних и тех же частиц. Деформация объема воздуха определяется тензором скоростей деформации (1.12.6).

Из сопоставления тензора вязких напряжений $П$ с тензором скоростей деформации D следует, что скашивание прямых углов, и связанное с этим изменение формы объема воздуха, вызывается касательными напряжениями поверхностных сил в соответствующих плоскостях, а деформации сжатия или расширения, и связанное с ними относительное изменение величины объема, вызываются нормальными напряжениями поверхностных сил. Взаимосвязь между вязкими напряжениями и скоростями деформации можно определить, исходя из гипотезы Стокса, по которой между компонентами напряжения и компонентами скорости деформации имеет место линейная зависимость. Обозначим коэффициент пропорциональности между касательным напряжением и соответствующей деформацией через $2\rho\gamma$, где γ - кинематический коэффициент вязкости воздуха, ρ - плотность воздуха. Тогда касательные напряжения поверхностных сил будут равны

$$\left.\begin{array}{l} б_{xy}=б_{yx}=\rho\gamma\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}\right) \\ б_{yz}=б_{zy}=\rho\gamma\left(\dfrac{\partial v}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial y}\right) \\ б_{zx}=б_{xz}=\rho\gamma\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\right) \end{array}\right\}. \qquad (2.1.28)$$

Каждое нормальное напряжение вызывает не только линейное сжатие или растяжение, но и относительное изменение объема за единицу времени, равное дивергенции вектора скорости. Вводя еще один коэффициент пропорциональности λ, соотношения между нормальными напряжениями и соответствующими деформациями можно выразить формулами

$$\left.\begin{aligned} б_{xx} &= 2\rho\gamma\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda div\vec{V} \\ б_{yy} &= 2\rho\gamma\frac{\partial v}{\partial y} + \lambda div\vec{V} \\ б_{zz} &= 2\rho\gamma\frac{\partial w}{\partial z} + \lambda div\vec{V} \end{aligned}\right\}. \qquad (2.1.29)$$

Суммируя эти соотношения, находим

$$б_{xx} + б_{yy} + б_{zz} = 2\rho\gamma\, div\vec{V} + 3\lambda\, div\vec{V} . \qquad (2.1.30)$$

Учитывая соотношения (2.1.25) и (2.1.26), будем иметь

$$б_{xx}+б_{yy}+б_{zz}=P_{xx}+P+P_{yy}+P+P_{zz}+P=P_{xx}+P_{yy}+P_{zz}+3P=-3P+3P .$$

Итак,

$$б_{xx}+б_{yy}+б_{zz}=0 . \qquad (2.1.31)$$

В связи с этим, равенство (2.1.30) принимает вид

$$2\rho\gamma\, div\vec{V} + 3\lambda\, div = 0 . \qquad (2.1.32)$$

Откуда находим коэффициент пропорциональности λ

$$\lambda = -\frac{2}{3}\rho\gamma . \qquad (2.1.33)$$

Подставляя найденное выражение (2.1.33) для λ в соотношения (2.1.29), получаем окончательные выражения для нормальных напряжений вязкости

$$\left.\begin{aligned} б_{xx} &= 2\rho\gamma\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\rho\gamma div\vec{V} \\ б_{yy} &= 2\rho\gamma\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\rho\gamma div\vec{V} \\ б_{zz} &= 2\rho\gamma\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3}\rho\gamma div\vec{V} \end{aligned}\right\}. \quad (2.1.34)$$

Таким образом, для того, чтобы полностью определить все вязкие напряжения поверхностных сил, нужно знать из опыта только одну величину γ, являющуюся кинематическим коэффициентом вязкости воздуха.

2.2. Уравнения движения атмосферы

Уравнение движения является выражением закона изменения количества движения (второго закона Ньютона), утверждающего, что изменение количества движения какого-либо тела за единицу времени равняется равнодействующей сил, приложенных к данному телу, и происходит в направлении этой равнодействующей.

Выделим в движущейся атмосфере произвольный объем воздуха τ . Вектор скорости движения точек этого объема, зависящий от времени и координат, обозначим через $\vec{V}$, а плотность воздуха - через ρ. Силу тяжести и силу Кориолиса, действующие на единицу массы воздуха, обозначим через $\vec{g}$ и $\vec{K}$.

Изменение количества движения бесконечно малого элемента объема $d\tau$ за единицу времени будет равно $\frac{d\vec{V}}{dt}\rho\, d\tau$, а изменение количества движения за единицу времени всего объема τ выразится тройным интегралом $\iiint\limits_{\tau}\frac{d\vec{V}}{dt}\rho\, d\tau$.

Равнодействующая массовых сил, приложенных к элементам объема, также может быть представлена тройным интегралом по выделенному объему τ

$$\iiint\limits_{\tau}(\vec{g}+\vec{K})\rho\, d\tau .$$

Обозначим поверхностную силу, действующую на единицу площади, через $\vec{P}_n$. Тогда результирующая поверхностных сил, действующих на внешнюю поверхность S, ограничивающую объем τ, будет выражаться через поверхностный интеграл по замкнутой поверхности S $\oint\limits_{S}\vec{P}_n\, dS$.

Приравнивая изменение количества движения за единицу времени равнодействующей всех сил, как, массовых, действующих на объем τ, так и поверхностных, приложенных к его внешней поверхности со стороны окружающего воздуха, получим векторное уравнение, выражающее закон изменения количества движения применительно к условиям движения воздуха в атмосфере

$$\iiint\limits_{\tau}\frac{d\vec{V}}{dt}\rho\, d\tau=\iiint\limits_{\tau}(\vec{g}+\vec{K})\rho\,\mathrm{d}\tau+\oint\limits_{S}\vec{P}_n\, dS . \quad (2.2.1)$$

Выражая поверхностную силу $\vec{P}_n$, действующую на единицу площади, через три вектора поверхностных напряжений $\vec{P}_x$, $\vec{P}_y$, $\vec{P}_z$ при помощи формулы (2.1.22), уравнение (2.2.1) можно переписать в следующем виде:

$$\iiint_\tau \frac{d\vec{V}}{dt}\rho\, d\tau = \iiint_\tau (\vec{g}+\vec{K})\rho\, d\tau +$$

$$+\oiint_s [\vec{P}_x \cos(\vec{n},\hat{x}) + \vec{P}_y \cos(\vec{n},\hat{y}) + \vec{P}_z \cos(\vec{n},\hat{z})]\, dS\,. \qquad (2.2.2)$$

В соответствии с теоремой Остроградского - Гаусса, поверхностный интеграл, стоящий в правой части уравнения (2.2.2), выражается через тройной интеграл при помощи формулы

$$\oiint_s [\vec{P}_x \cos(\vec{n},\hat{x}) + \vec{P}_y \cos(\vec{n},\hat{y}) + \vec{P}_z \cos(\vec{n},\hat{z})]\, dS = \iiint_\tau \left(\frac{\partial \vec{P}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{P}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{P}_z}{\partial z}\right) d\tau\,.$$

Если заменить в уравнении (2.2.2) поверхностный интеграл через тройной, то уравнение принимает вид

$$\iiint_\tau \frac{d\vec{V}}{dt}\rho\, d\tau = \iiint_\tau [\rho\vec{g} + \rho\vec{K} + \frac{\partial \vec{P}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{P}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{P}_z}{\partial z}]\, d\tau\,,$$

Откуда, вследствие произвольности объема τ, имеем

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{g} + \vec{K} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \vec{P}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{P}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{P}_z}{\partial z}\right). \qquad (2.2.3)$$

Это есть векторное уравнение движения атмосферы в напряжениях. Проектируя его на оси координат, получим три скалярных уравнения движения атмосферы в напряжениях, называемых уравнениями Навье.

Направим оси X и Y в горизонтальной плоскости, ось Z вертикально вверх. Тогда проекции силы тяжести на оси координат будут равны: $g_x = 0;\ g_y = 0;\ g_z = -g$.

При проектировании напряжений поверхностных сил выделим из состава их давление P и перейдем к вязким напряжениям. Учитывая, что: $P_{xx} = б_{xx} - P;\ P_{yx} = б_{yx};\ P_{zx} = б_{zx};$ проекция поверхностной силы на ось X будет равна

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \vec{P}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{P}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{P}_z}{\partial z}\right)_x = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial б_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial б_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial б_{zx}}{\partial z}\right). \qquad (2.2.4)$$

Аналогично выразятся проекции поверхностных сил на оси Y и Z. Обозначая проекции вектора скорости $\vec{V}$ на оси X, Y, Z соответственно через $u,\ v,\ w$, проектируя силу Кориолиса на координатные оси и раскрывая индивидуальные производные по времени, получим три уравнения в напряжениях

$$
\left.
\begin{array}{c}
\dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}+w\dfrac{\partial u}{\partial z}= \\
=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x}-2\omega_y w+2\omega_z v+\dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{\partial б_{xx}}{\partial x}+\dfrac{\partial б_{yx}}{\partial y}+\dfrac{\partial б_{zx}}{\partial z}\right) \\
\dfrac{\partial v}{\partial t}+u\dfrac{\partial v}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}+w\dfrac{\partial v}{\partial z}= \\
=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial y}-2\omega_z u+2\omega_x w+\dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{\partial б_{xy}}{\partial x}+\dfrac{\partial б_{yy}}{\partial y}+\dfrac{\partial б_{yz}}{\partial z}\right) \\
\dfrac{\partial w}{\partial t}+u\dfrac{\partial w}{\partial x}+v\dfrac{\partial w}{\partial y}+w\dfrac{\partial w}{\partial z}= \\
=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial z}-2\omega_x v+2\omega_y u+\dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{\partial б_{xz}}{\partial x}+\dfrac{\partial б_{yz}}{\partial y}+\dfrac{\partial б_{zz}}{\partial z}\right)-g
\end{array}
\right\}
$$

Если в этих уравнениях заменить вязкие напряжения при помощи формул (2.1.28) и (2.1.29), то получим уравнения движения атмосферы в форме Навье - Стокса

$$
\left.
\begin{array}{l}
\dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}+w\dfrac{\partial u}{\partial z}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x}-2\omega_y w+ \\
+2\omega_z v+\gamma\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+\dfrac{1}{3}\gamma\dfrac{\partial}{\partial x}div\,\vec{V} \\
\\
\dfrac{\partial v}{\partial t}+u\dfrac{\partial v}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}+w\dfrac{\partial v}{\partial z}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial y}-2\omega_z u+ \\
+2\omega_x w+\gamma\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)+\dfrac{1}{3}\gamma\dfrac{\partial}{\partial y}div\,\vec{V} \\
\\
\dfrac{\partial w}{\partial t}+u\dfrac{\partial w}{\partial x}+v\dfrac{\partial w}{\partial y}+w\dfrac{\partial w}{\partial z}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial z}-2\omega_x v+ \\
+2\omega_y u+\gamma\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)+\dfrac{1}{3}\gamma\dfrac{\partial}{\partial z}div\,\vec{V}-g
\end{array}
\right\}
\tag{2.2.5}
$$

Совокупность трех уравнений движения в проекциях на оси координат эквивалентна одному векторному уравнению движения (2.2.3), которое теперь можно записать в виде

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho} grad\ P + \vec{K} + \vec{g} + \vec{N}, \qquad (2.2.6)$$

где $\vec{N}$ - сила вязкости.

При изучении атмосферных движений планетарного масштаба пользуются уравнениями движения атмосферы в сферической системе координат, за начало которой принимается центр Земли. Координатами точки в сферической системе являются: радиус-вектор $\vec{r}$, то есть расстояние от центра Земли, угол географической долготы λ, отсчитываемый от некоторого начального меридиана к востоку, и полярный угол θ или дополнение географической широты (рис.16).

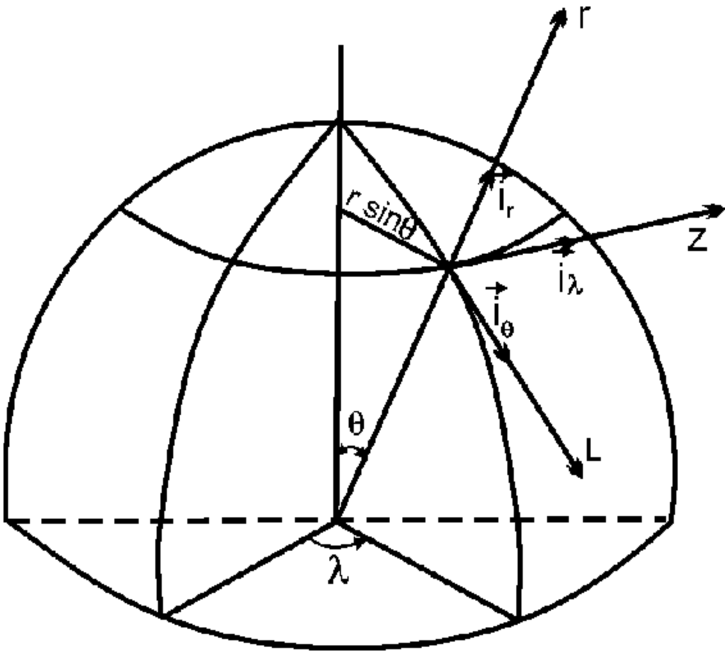


Рис. 16

В сферической системе координат сила тяжести в любой точке пространства направлена по радиусу-вектору $\vec{r}$.

Чтобы получить уравнения движения атмосферы в сферической системе координат, нужно векторное уравнение движения (2.2.6) спроектировать на оси сферической системы координат, т.е. на радиус-вектор $\vec{r}$, на касательную к параллели S и касательную к меридиану l.

Обозначим соответственно через $\vec{i}_r, \vec{i}_\lambda, \vec{i}_\theta$ единичные векторы радиуса-вектора $\vec{r}$, касательной к параллели и касательной к меридиану; тогда скорость частицы воздуха может быть представлена в виде

$$\vec{V} = \vec{i}_r V_r + \vec{i}_\lambda V_\lambda + \vec{i}_\theta V_\theta \ , \qquad (2.2.7)$$

где V_r, V_λ, V_θ есть проекции вектора скорости на оси сферической системы координат, выражаемые формулами:

$$V_r = \frac{dr}{dt}; \ V_\lambda = r\sin\theta\frac{d\lambda}{dt}; \ V_\theta = r\frac{d\theta}{dt} \ . \qquad (2.2.8)$$

Учитывая, что единичные векторы $\vec{i}_r, \vec{i}_\lambda, \vec{i}_\theta$ являются переменными по направлению, для производной по времени от вектора скорости, определяемого формулой (2.2.7), находим выражение

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{i}_r\frac{dV_r}{dt} + V_r\frac{d\vec{i}_r}{dt} + \vec{i}_\lambda\frac{dV_\lambda}{dt} + V_\lambda\frac{d\vec{i}_\lambda}{dt} + \vec{i}_\theta\frac{dV_\theta}{dt} + V_\theta\frac{d\vec{i}_\theta}{dt} \ . \qquad (2.2.9)$$

При увеличении угла θ единичный вектор $\vec{i}_\theta$ будет поворачиваться в плоскости меридиана в сторону, противоположную первоначальному направлению единичного вектора $\vec{i}_r$ с угловой скоростью, равной $d\theta/dt$, а при увеличении угла λ он будет поворачиваться в сторону первоначального направления единичного вектора $\vec{i}_\lambda$ с угловой скоростью, равной $d\lambda/dt\cos\theta$ (см.рис.16). Единичный вектор $\vec{i}_\lambda$ вращается в сторону, противоположную направлению единичного вектора внешней нормали $\vec{n}$ к широтному кругу с угловой скорость $d\lambda/dt$.

Следовательно, для производных по времени от единичных векторов $\vec{i}_\lambda$ и $\vec{i}_\theta$, учитывая формулы (2.2.8), будем иметь следующие выражения:

$$\frac{d\vec{i}_\theta}{dt} = -\vec{i}_r \frac{d\theta}{dt} + \vec{i}_\lambda \frac{d\lambda}{dt}\cos\theta = -\vec{i}_r \frac{V_\theta}{r} + \vec{i}_\lambda \frac{V_\lambda}{r} ctg\theta;$$

$$\frac{d\vec{i}_\lambda}{dt} = -\vec{n}\frac{d\lambda}{dt} = -\vec{n}\frac{V_\lambda}{r\sin\theta} = -(\vec{i}_\theta \cos\theta + \vec{i}_r \sin\theta)\frac{V_\lambda}{r\sin\theta} =$$
$$= -\vec{i}_\theta \frac{V_\lambda}{r} ctg\theta - \vec{i}_r \frac{V_\lambda}{r}.$$

Определим теперь производную $\frac{d\vec{i}_r}{dt}$, учитывая, что $\vec{i}_r = [\vec{i}_\theta, \vec{i}_\lambda]$

$$\frac{d\vec{i}_r}{dt} = \frac{d}{dt}[\vec{i}_\theta, \vec{i}_\lambda] = [\frac{d\vec{i}_\theta}{dt}, \vec{i}_\lambda] + [\vec{i}_\theta, \frac{d\vec{i}_\lambda}{dt}] =$$
$$= -\frac{V_\theta}{r}[\vec{i}_r, \vec{i}_\lambda] + \frac{V_\lambda}{r} ctg\theta[\vec{i}_\lambda, \vec{i}_\lambda] - \frac{V_\lambda}{r} ctg\theta[\vec{i}_\theta, \vec{i}_\theta] -$$
$$-\frac{V_\lambda}{r}[\vec{i}_\theta, \vec{i}_r] = \vec{i}_\theta \frac{V_\theta}{r} + \vec{i}_\lambda \frac{V_\lambda}{r}.$$

Используя полученные выражения для производных по времени от единичных векторов, ускорение частицы воздуха $d\vec{V}/dt$, определяемое в сферических координатах формулой (2.2.9), можно представить в следующем виде:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{i}_r \frac{dV_r}{dt} + \vec{i}_\theta \frac{V_r V_\theta}{r} + \vec{i}_\lambda \frac{V_r V_\lambda}{r} + \vec{i}_\lambda \frac{dV_\lambda}{dt} - \vec{i}_\theta \frac{V_\lambda^2}{r} ctg\theta -$$
$$-\vec{i}_r \frac{V_\lambda^2}{r} + \vec{i}_\theta \frac{dV_\theta}{dt} - \vec{i}_r \frac{V^2}{r} + \vec{i}_\lambda \frac{V_r V_\theta}{r} ctg\theta$$

или

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{i}_r \left(\frac{dV_r}{dt} - \frac{V_\lambda^2}{r} - \frac{V_\theta^2}{r} \right) + \vec{i}_\lambda \left(\frac{dV_\lambda}{dt} + \frac{V_r V_\lambda}{r} + \right.$$
$$\left. + \frac{V_\lambda V_\theta}{r} ctg\theta \right) + \vec{i}_\theta \left(\frac{dV_\theta}{dt} + \frac{V_r V_\theta}{r} + \frac{V_\lambda^2}{r} ctg\theta \right), \qquad (2.2.10)$$

откуда находим проекции ускорения на оси сферической системы координат

$$\left.\begin{aligned}
\left(\frac{d\vec{V}}{dt}\right)_r &= \frac{dV_r}{dt} - \frac{V_\lambda^2}{r} - \frac{V_\theta^2}{r} \\
\left(\frac{d\vec{V}}{dt}\right)_\lambda &= \frac{dV_\lambda}{dt} + \frac{V_r V_\lambda}{r} + \frac{V_\lambda V_\theta}{r} ctg\theta \\
\left(\frac{d\vec{V}}{dt}\right)_\theta &= \frac{dV_\theta}{dt} + \frac{V_r V_\theta}{r} + \frac{V_\lambda^2}{r} ctg\theta
\end{aligned}\right\} . \qquad (2.2.11)$$

Проекции градиента давления будут равны

$$\left.\begin{aligned}
(gradP)_r &= \frac{\partial P}{\partial r} \\
(gradP)_\lambda &= \frac{\partial P}{\partial S} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial P}{\partial \lambda} \\
(gradP)_\theta &= \frac{\partial P}{\partial l} = \frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta}
\end{aligned}\right\}. \qquad (2.2.12)$$

Проекция вектора $\vec{\omega}$ угловой скорости вращения Земли на оси $\vec{r}$, $\vec{S}$ и $\vec{l}$ равны:

$$\omega_r = \omega\cos\theta;\ \omega_\lambda = 0;\ \omega_\theta = -\omega\sin\theta. \qquad (2.2.13)$$

Единичные векторы $\vec{i}_r, \vec{i}_\theta, \vec{i}_\lambda$ образуют правую систему координат, в которой сила Кориолиса выразится удвоенным векторным произведением вектора угловой скорости вращения Земли на вектор относительной скорости, взятым с отрицательным знаком $\vec{K} = -2[\vec{\omega}, \vec{V}]$, а проекции силы Кориолиса на оси координат будут равны:

$$K_r = -2[\vec{\omega},\vec{V}]_r = 2(\omega_\lambda V_\theta - \omega_\theta V_\lambda) = 2\omega V_\lambda \sin\theta$$

$$K_\lambda = -2[\vec{\omega},\vec{V}]_\lambda = 2(\omega_\theta V_r - \omega_r V_\theta) = -2\omega V_r \sin\theta - 2\omega V_\theta \cos\theta \tag{2.2.14}$$

$$K_\theta = -2[\vec{\omega},\vec{V}]_\theta = 2(\omega_r V_\lambda - \omega_\lambda V_r) = 2\omega V_\lambda \cos\theta \ .$$

Проекции силы тяжести $\vec{g}$ на оси координат имеют вид

$$g_r = -g; \qquad g_\lambda = 0; \qquad g_\theta = 0 \, . \tag{2.2.15}$$

Проектируя на оси координат векторное уравнение движения атмосферы (2.2.6), пользуясь при этом полученными выражениями (2.2.11-2.2.14) и обозначая проекции силы вязкости на оси соответственно через N_r, N_λ, N_θ, будем иметь

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dV_r}{dt} - \frac{V_\lambda^2}{r} - \frac{V_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial P}{\partial r} + 2\omega V_\lambda \sin\theta - g + N_r \\
&\frac{dV_\lambda}{dt} + \frac{V_r V_\lambda}{r} + \frac{V_\lambda V_\theta}{r} ctg\theta = -\frac{1}{\rho r \sin\theta}\cdot\frac{\partial P}{\partial \lambda} - 2\omega V_r \sin\theta - \\
&\qquad\qquad -2\omega V_\theta \cos\theta + N_\lambda \\
&\frac{dV_\theta}{dt} + \frac{V_r V_\theta}{r} - \frac{V_\lambda^2}{r} ctg\theta = -\frac{1}{\rho r}\cdot\frac{\partial P}{\partial \theta} + 2\,\omega V_\lambda \cos\theta + N_\theta
\end{aligned}\right\} \tag{2.2.16}$$

Окончательно уравнения движения атмосферы в сферических координатах можно записать

$$\frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\lambda}{r\sin\theta}\frac{\partial V_r}{\partial \lambda} + \frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{V_\lambda^2}{r} - \frac{V_\theta^2}{r} =$$

$$= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r} + 2\omega V_\lambda \sin\theta - g + N_r$$

$$\frac{\partial V_\lambda}{\partial t} + V_r\frac{\partial V_\lambda}{\partial r} + \frac{V_\lambda}{r\sin\theta}\frac{\partial V_\lambda}{\partial \lambda} + \frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_\lambda}{\partial \theta} + \frac{V_r V_\lambda}{r} + \frac{V_\lambda V_\theta}{r} ctg\theta =$$

$$= -\frac{1}{\rho r\sin\theta}\cdot\frac{\partial P}{\partial \lambda} - \quad \mathit{(2.2.17)} \, 2\omega V_r \sin\theta - 2\,\omega V_\theta \cos\theta + N_\lambda$$

$$\frac{\partial V_\theta}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\lambda}{r\sin\theta}\frac{\partial V_\theta}{\partial \lambda} + \frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r V_\theta}{r} - \frac{V_\lambda^2}{r} ctg\theta = \\ = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial \theta} + 2\omega V_\lambda \cos\theta + N_\theta \; . \tag{2.2.17}$$

Заметим, что пятый и шестой квадратичные члены в левых частях уравнений определяют дополнительное ускорение, которое появляется относительно сферической системы координат. Оно обусловлено кривизной параллелей и меридианов, являющихся криволинейными координатными линиями.

2.3. Уравнение неразрывности

Три уравнения движения атмосферы в проекциях на оси координат содержат пять функций, зависящих от времени и координат: три проекции скорости на оси координат u, v, w, давление P и плотность воздуха ρ. Имея три уравнения движения, при решении какой-либо задачи, число искомых функций может оказаться больше числа уравнений, в этом случае задача становится неразрешимой. Для ее решения требуется привлекать какие-то другие соотношения в качестве недостающих уравнений.

Одним из соотношений, дополняющих систему дифференциальных уравнений динамики атмосферы, является уравнение неразрывности, выражающее закон сохранения массы и связывающее изменение плотности воздуха во времени с распределением скорости движения в пространстве.

Рассмотрим произвольный фиксированный объем τ в движущейся жидкости и обозначим через S поверхность, ограничивающую этот объем. Подсчитаем массу (количество жидкости), протекающую в единицу времени через поверхность S в направлении внешней нормали, то есть рассмотрим поток вектора $\rho\vec{V}$:

$$\oiint_s (\rho\vec{V}, d\vec{S}) = \oiint_s (\rho V_n, d\vec{S}), \tag{2.3.1}$$

где ρ - плотность воздуха, V_n - нормальная составляющая скорости, $d\vec{S}$ - элемент поверхности *S*.

С другой стороны, изменение количества жидкости внутри объема τ за единицу времени *t* выражается интегралом - $\iiint_\tau \frac{\partial \rho}{\partial t}\delta\tau$. Так как изменение количества жидкости внутри объема τ должно равняться количеству жидкости, протекающей за то же время через поверхность *S,* то

$$\oint\!\!\oint_s (\rho \vec{V}, d\vec{S}) = -\iiint_\tau \frac{\partial \rho}{\partial t} \delta\tau.$$

Применяя формулу Остроградского-Гаусса:

$$\oint\!\!\oint_s (\vec{V}, d\vec{S}) = \iiint_\tau div \vec{V} d\tau ,$$

приведем предыдущее уравнение к виду: $\iiint_\tau div(\rho \vec{V}) d\tau = - \iiint_\tau \frac{\partial \rho}{\partial t} \delta\tau,$ откуда

$$\iiint_\tau [\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \vec{V})] d\tau = 0 .$$

Так как объем τ произволен, то

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \vec{V}) = 0 \qquad (2.3.2)$$

Это соотношение и является уравнением неразрывности. Оно выражает закон сохранения массы и устанавливает связь между вектором скорости и плотностью воздуха.

Часто уравнение (2.3.2) представляют в другом виде. Запишем (2.3.2) в декартовых координатах

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 , \qquad (2.3.3)$$

или

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 ,$$

откуда окончательно получаем

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \, div \vec{V} = 0 . \qquad (2.3.4)$$

Формулы (2.3.2) и (2.3.4) – разные формы уравнения неразрывности с учетом сжимаемости воздуха.

Рассмотрим частные случаи уравнения неразрывности.

Если движение установившееся (стационарное), то $\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$ и уравнение неразрывности принимает вид

$$div\rho\vec{V}=0. \qquad (2.3.5)$$

В случае несжимаемой атмосферы, плотность которой является постоянной, уравнение неразрывности имеет вид

$$div\vec{V}=0, \qquad (2.3.6)$$

или в декартовых координатах

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0. \qquad (2.3.7)$$

При движении некоторого объема, состоящего из одних и тех же частиц воздуха, сам объем $\delta\tau$ может изменяться и деформироваться, но элементарная масса воздуха δm, содержащаяся в этом объеме, во все время движения остается постоянной, что выражается равенством

$$\frac{d(\delta m)}{dt}=0, \qquad (2.3.8)$$

но $\delta m=\rho\delta\tau$, следовательно,

$$\frac{d}{dt}(\rho\delta\tau)=\frac{d\rho}{dt}\delta\tau+\rho\frac{d(d\tau)}{dt}=0$$

или

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}+\frac{1}{\delta\tau}\frac{d(\delta\tau)}{dt}=0.$$

Относительное изменение величины элемента объема за единицу времени равно дивергенции скорости

$$\frac{1}{\delta\tau}\cdot\frac{d(\delta\tau)}{dt}=div\vec{V}. \qquad (2.3.9)$$

Формула (2.3.9) представляет еще один вид уравнения неразрывности для сжимаемой атмосферы.

В сферических координатах уравнение неразрывности имеет вид

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial(\rho r^2 V_r)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial(\rho V_\lambda)}{\partial\lambda}+\frac{1}{r\sin\theta\cdot}\frac{\partial(\rho V_\theta\sin\theta)}{\partial\theta}=0. \qquad (2.3.10)$$

2.4. Начальные и граничные условия

Уравнения движения атмосферы совместно с уравнением неразрывности представляет замкнутую систему с числом неизвестных функций, равных числу уравнений в том случае, если рассматривать атмосферу как идеальный газ, плотность которого зависит только от давления

$$\rho=\rho(P). \qquad (2.4.1)$$

Такая среда называется баротропной. Закономерности движения баротропной среды полностью определяются уравнениями движения и непрерывности (четыре скалярных уравнения для определения $u,\ v,\ w, P$).

Уравнения движения и неразрывности являются дифференциальными уравнениями в частных производных. Для их решения должны быть заданы начальные и граничные условия.

Задание начальных условий состоит в том, что для определенного исходного момента времени $t=0$ во всех точках рассматриваемой части пространства должны быть известны значения искомых функций:

$$u_{t=0}=u_\circ(x,y,z);\ v_{t=0}=v_\circ(x,y,z);\ w_{t=0}=w_\circ(x,y,z);\ P_{t=0}=P_\circ(x,y,z) \qquad (2.4.2)$$

Вследствие влияния вязкости составляющие скорости движения воздуха на поверхности Земли обращаются в нуль, что дает три скалярных граничных условия. Если поверхность Земли задана уравнением $z=F(x,y)$, то граничные условия для скорости на поверхности Земли выразятся равенствами:

$$u_{z=F}=0;\ v_{z=F}=0;\ w_{z=F}=0. \qquad (2.4.3)$$

При решении многих задач атмосфера рассматривается как идеальная жидкость, т.е. силами вязкости ввиду их малости, пренебрегают. Тогда граничные условия сводятся к одному

$$V_n = 0 \text{ при } z = F, \tag{2.4.4}$$

где V_n - составляющая скорости по нормали к земной поверхности.

Уменьшение числа граничных условий связано с тем, что система уравнений динамики идеальной атмосферы имеет более низкий порядок, чем уравнения динамики вязкой атмосферы.

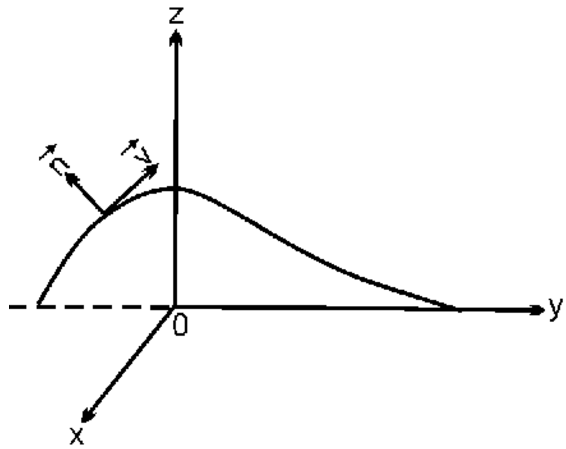


Рис.17

В соответствии с рисунком 17 граничное условие (2.4.4) можно переписать в следующем виде:

$$u\cos(n,x) + v\cos(n,y) + w\cos(n,z) = 0 \text{ при } z = F.$$

Так как:

$$\frac{\cos(n,x)}{\cos(n,z)} = -\frac{\partial F}{\partial x}; \quad \frac{\cos(n,y)}{\cos(n,z)} = -\frac{\partial F}{\partial y},$$

то граничное условие для скорости на поверхности Земли (2.4.4) принимает вид

$$w = u\frac{\partial F}{\partial x} + v\frac{\partial F}{\partial y} \text{ при } z = F. \tag{2.4.5}$$

Кроме граничных условий на поверхности Земли, задаются еще условия на верхней границе изучаемого слоя атмосферы или на очень большой высоте, имеющие характер условий на бесконечности.

2.5. Основные представления теории атмосферной турбулентности

Движения жидкостей и газов подразделяется на ламинарное и турбулентное.

Если движение жидкости происходит упорядоченно в виде не перемешивающихся между собой струй, то такое движение называется ламинарным. При сравнительно малых скоростях течения отдельные случайные возмущения потока под влиянием вязкости затухают и течение сохраняет ламинарный характер.

При скорости потока, превышающей некоторое критическое значение, зависящее от физических свойств данной жидкости, отдельные случайные возмущения потока не затухают, а развиваются, при этом струи жидкости перемешиваются, разбиваются на множество вихрей, совершающих беспорядочное движение на фоне общего переноса, в результате этого ламинарное течение теряет устойчивость и приобретает турбулентный характер.

Турбулентным движением жидкости или газа называется такое движение, при котором на основной перенос накладывается очень сложное запутанное движение множества отдельных частиц и вихрей, движущихся по всевозможным направлениям с различными скоростями. При этом лишь средняя скорость течения сохраняет определенную величину и направление, в то время как каждая частица жидкости приобретает свою собственную добавочную скорость.

Характерной чертой турбулентных процессов, происходящих в реальных жидкостях и газах, является турбулентный обмен масс данной жидкости или газа и связанное с ним перемешивание. В реальных жидкостях зарождающиеся элементы турбулентности, проникая из слоя в слой, с течением времени перемешиваются с окружающей средой, что сопровождается турбулентной вязкостью, диффузией и теплопроводностью.

Для турбулентного движения характерны резкие беспорядочные колебания скорости, давления и плотности, которые называются пульсациями или флуктуациями.

Атмосферные движения, как правило, носят турбулентный характер, что наиболее резко проявляется в порывистости ветра.

В турбулентной атмосфере мгновенные значения метеорологических величин в каждый данный момент времени можно рассматривать как случайные величины, пользоваться которыми практически невозможно. Поэтому турбулентное движение атмосферы характеризуют средними значениями метеорологических величин, пользуясь статистическими методами исследования. При этом чаще всего метеорологические величины усредняют за некоторый отрезок времени, который должен быть достаточно продолжительным, для того чтобы полученное среднее значение было репрезентативным, чтобы оно не изменялось слишком быстро. С другой стороны этот отрезок времени не должен быть и слишком большим для того, чтобы при усреднении не сгладились существенно важные изменения усредняемой величины. Среднее значение величины φ за отрезок времени Δt выражается интегралом от φ как от функции времени, взятым в соответствующих пределах и отнесенным к величине этого интервала времени Δt. Обозначая среднее значение величины горизонтальной чертой над символом этой величины, будем иметь

$$\overline{\varphi} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t-\frac{\Delta t}{2}}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \varphi(t) dt . \tag{2.5.1}$$

Определим среднее значение суммы двух функций φ_1 и φ_2

$$\overline{\varphi_1 + \varphi_2} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t-\frac{\Delta t}{2}}^{t+\frac{\Delta t}{2}} [\varphi_1(t) + \varphi_2(t)] dt = \frac{1}{\Delta t} \int_{t-\frac{\Delta t}{2}}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \varphi_1(t) dt + \frac{1}{\Delta t} \int_{t-\frac{\Delta t}{2}}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \varphi_2(t) dt$$

или

$$\overline{\varphi_1 + \varphi_2} = \overline{\varphi_1} + \overline{\varphi_2} .$$

В случае n функций, имеем

$$\overline{\sum_{i=1}^{n} \varphi_i} = \sum_{i=1}^{n} \overline{\varphi_i} . \tag{2.5.2}$$

Так как порядок операций усреднения и пространственного дифференцирования может быть изменен, то справедливы следующие соотношения

$$\left.\begin{array}{lll} \overline{\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}} = \dfrac{\partial \overline{\varphi}}{\partial x}; & \overline{\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}} = \dfrac{\partial \overline{\varphi}}{\partial y}; & \overline{\dfrac{\partial \varphi}{\partial z}} = \dfrac{\partial \overline{\varphi}}{\partial z} \\ \overline{\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}} = \dfrac{\partial^2 \overline{\varphi}}{\partial x^2}; & \overline{\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}} = \dfrac{\partial^2 \overline{\varphi}}{\partial y^2}; & \overline{\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}} = \dfrac{\partial^2 \overline{\varphi}}{\partial z^2} \end{array}\right\} . \tag{2.5.3}$$

Среднее значение производных по координатам, равняется соответствующим производным от средних значений дифференцируемой функции.

Из соотношений (2.5.2) и (2.5.3) следует, что средние значения градиента, дивергенции, вихря и лапласиана от какой-либо функции равняются соответственно градиенту, дивергенции, вихрю и лапласиану от среднего значения данной функции:

$$\overline{grad \varphi} = grad \overline{\varphi}; \quad \overline{div \vec{V}} = div \overline{\vec{V}}; \quad \overline{rot \vec{V}} = rot \overline{\vec{V}}; \quad \overline{\nabla^2 \varphi} = \nabla^2 \overline{\varphi}. \tag{2.5.4}$$

Рассмотрим теперь отклонение φ' от среднего значения функции

$$\varphi' = \varphi - \overline{\varphi} . \tag{2.5.5}$$

Применяя к этому выражению правило осреднения суммы или разности, находим

$$\overline{\varphi'} = \overline{\varphi - \overline{\varphi}} = \overline{\varphi} - \overline{\overline{\varphi}} = \overline{\varphi} - \overline{\varphi} = 0\,. \qquad (2.5.6)$$

Среднее значение отклонения случайной функции равно нулю. Определим теперь среднее произведение двух функций φ_1 и φ_2

$$\overline{\varphi_1 \varphi_2} = \overline{\varphi_1}\,\overline{\varphi_2} + \overline{\varphi'_1\,\varphi'_2} \qquad (2.5.7)$$

Среднее значение произведения двух функций равняется произведению их средних значений плюс среднее значение из произведений их отклонений.

2.6. Уравнения усредненного движения турбулентной атмосферы

Вследствие беспорядочного характера турбулентного движения практически невозможно пользоваться мгновенными значениями истинных скоростей воздуха. Поэтому при исследовании турбулентных движений атмосферы обращаются к усредненным уравнениям движения.

Произведем усреднение первого уравнения движения вязкой атмосферы в напряжениях

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} - 2\omega_y w + 2\omega_z v + \\ + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial б_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial б_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial б_{zx}}{\partial z}\right)\,.\end{gathered} \qquad (2.6.1)$$

Здесь проекции скорости, давление и плотность имеют мгновенные значения, складывающиеся из их средних значений и соответствующих пульсаций. Особенно большой величины достигают пульсации скорости ветра, в то время как пульсации давления ничтожно малы. По сравнению с давлением плотность воздуха имеет более значительные пульсации, но колебания плотности распространяются в пространстве со скоростью звука и почти не влияют на среднюю скорость основного движения турбулентной атмосферы. Поэтому, для упрощения выкладок при усреднении уравнений движения, будем рассматривать атмосферу как несжимаемую жидкость, для которой уравнение неразрывности имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0\,.$$

Умножим уравнение неразрывности на проекцию скорости ветра u и сложим его с уравнением движения (2.6.1), тогда получим

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial (uu)}{\partial x}+\frac{\partial (uv)}{\partial y}+\frac{\partial (uw)}{\partial z}=$$
$$=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}-2\omega_y w+2\omega_z v+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial б_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial б_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial б_{zx}}{\partial z}\right). \qquad (2.6.2)$$

Представим теперь проекции $u,\ v,\ w$, мгновенной скорости и давления в виде сумм средних значений и соответствующих пульсаций: $u=\overline{u}+u'$; $v=\overline{v}+v'$; $w=\overline{w}+w'$; $P=\overline{P}+P'$. Учитывая соотношения (2.5.3) и (2.5.7) и усредняя уравнение (2.6.2) будем иметь

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}+\frac{\partial (\overline{u}\,\overline{u})}{\partial x}+\frac{\partial (\overline{u'u'})}{\partial x}+\frac{\partial (\overline{u}\,\overline{v})}{\partial y}+\frac{\partial (\overline{u'v'})}{\partial y}+\frac{\partial (\overline{u}\,\overline{w})}{\partial z}+\frac{\partial (\overline{u'w'})}{\partial z}$$
$$=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{P}}{\partial x}-2\omega_y \overline{w}+2\omega_z \overline{v}+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \overline{б_{xx}}}{\partial x}+\frac{\partial \overline{б_{yx}}}{\partial y}+\frac{\partial \overline{б_{zx}}}{\partial z}\right). \qquad (2.6.3)$$

Перенося производные от средних значений из произведений составляющих пульсационной скорости $\overline{u'u'}$, $\overline{u'v'}$, $\overline{u'w'}$, в правую часть уравнения и объединяя их с соответствующими производными от вязких напряжений, получим

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}+\frac{\partial (\overline{u}\,\overline{u})}{\partial x}+\frac{\partial (\overline{u}\,\overline{v})}{\partial y}+\frac{\partial (\overline{u}\,\overline{w})}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{P}}{\partial x}-2\omega_y \overline{w}+2\omega_z \overline{v}+$$
$$+\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial (б_{xx}-\rho\overline{u'u'})}{\partial x}+\frac{\partial (б_{yx}-\rho\overline{u'v'})}{\partial y}+\frac{\partial (б_{xz}-\rho\overline{u'w'})}{\partial z}\right], \qquad (2.6.4)$$

но

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}+\frac{\partial(\overline{u}\overline{u})}{\partial x}+\frac{\partial(\overline{u}\overline{v})}{\partial y}+\frac{\partial(\overline{u}\overline{w})}{\partial z}=\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}+\bar{w}\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}+$$

$$+\bar{u}\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}+\frac{\partial\bar{v}}{\partial y}+\frac{\partial\bar{w}}{\partial z}\right)=\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}+\bar{w}\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}\ ,$$

так как согласно уравнению неразрывности $\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}+\frac{\partial\bar{v}}{\partial y}+\frac{\partial\bar{w}}{\partial z}=0$.

Аналогично, усредняя два других уравнения движения и обозначая через τ_{xx}, τ_{yx} и т.д. члены, содержащие средние значения из произведений пульсационных скоростей, называемые добавочными турбулентными напряжениями

$$\left.\begin{aligned}\tau_{xx}&=-\rho\overline{u'u'},\ \ \tau_{yx}=-\rho\overline{u'v'},\ \ \tau_{zx}=-\rho\overline{u'w'}\\\tau_{xy}&=-\rho\overline{v'u'},\ \ \tau_{yy}=-\rho\overline{v'v'},\ \ \tau_{zy}=-\rho\overline{v'w'}\\\tau_{xz}&=-\rho\overline{w'u'},\ \ \tau_{yz}=-\rho\overline{w'v'},\ \ \tau_{zz}=-\rho\overline{w'w'}\end{aligned}\right\},\tag{2.6.5}$$

получим уравнения Рейнольдса для усредненного движения турбулентной атмосферы

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}+\bar{w}\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\bar{P}}{\partial x}-2\omega_y\bar{w}\\&\quad+2\omega_z\bar{v}+\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(\bar{б}_{xx}+\tau_{xx})}{\partial x}+\frac{\partial(\bar{б}_{yx}+\tau_{yx})}{\partial y}+\frac{\partial(\bar{б}_{zx}+\tau_{zx})}{\partial z}\right]\\&\frac{\partial v}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial v}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial\bar{v}}{\partial y}+\bar{w}\frac{\partial\bar{v}}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\bar{P}}{\partial y}-2\omega_z\bar{u}+2\omega_x\bar{w}+\\&\quad+\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(\bar{б}_{xy}+\tau_{xy})}{\partial x}+\frac{\partial(\bar{б}_{yy}+\tau_{yy})}{\partial y}+\frac{\partial(\bar{б}_{zy}+\tau_{zy})}{\partial z}\right]\\&\frac{\partial\bar{w}}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial\bar{w}}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial\bar{w}}{\partial y}+\bar{w}\frac{\partial\bar{w}}{\partial z}=\\&\quad-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\bar{P}}{\partial z}-2\omega_x\bar{v}+2\omega_y\bar{u}+\\&\quad+\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(\bar{б}_{xz}+\tau_{xz})}{\partial x}+\frac{\partial(\bar{б}_{yz}+\tau_{yz})}{\partial y}+\frac{\partial(\bar{б}_{zz}+\tau_{zz})}{\partial z}\right]-g\end{aligned}\right\},\tag{2.6.6}$$

Уравнения (2.6.6) для усредненного движения турбулентной атмосферы отличаются от уравнений движения вязкой жидкости тем, что в уравнениях осредненного движения мгновенные составляющие скорости заменены их средними значениями, а к вязким напряжениям прибавлены дополнительные турбулентные напряжения. Чтобы выяснить физический смысл турбулентных напряжений, рассмотрим одно из них, например, турбулентное напряжение $\tau_{xx}=-\rho\overline{u'w'}$.

Произведение $\rho u'_i\, w'_i$ можно рассматривать как мгновенное значение количества движения $\rho u'_i$, переносимого одной частицей воздуха в направлении оси z через единичную площадку в единицу времени. Тогда среднее значение из произведений плотности на составляющие пульсационной скорости за некоторый период времени $\rho \overline{u' w'}$ будет равно горизонтальному количеству движения, переносимому по вертикали через единицу площади за единицу времени всеми частицами воздуха, которые в течение периода усреднения пересекали единичную площадку. Следовательно, турбулентное напряжение τ_{xz} численно равняется взятому с противоположным знаком вертикальному турбулентному потоку количества движения ϕ

$$\tau_{xz} = -\phi. \tag{2.6.7}$$

Таким образом, турбулентные напряжения выражают суммарный эффект воздействия беспорядочного движения множества частиц и вихрей воздуха на основное усредненное движение. Каждое турбулентное напряжение определяет турбулентные потоки составляющих количества движения переносимого пульсационными скоростями в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Перенос количества движения пульсационными скоростями сопровождается тенденцией к выравниванию в пространстве средней скорости основного движения и развитием силы внутреннего турбулентного трения.

2.7. Определение турбулентных напряжений

Для полного решения задачи о влиянии турбулентности на средние характеристики движения атмосферы нужно определить турбулентные напряжения.

Определение турбулентных напряжений представляет сложную задачу и требует знания некоторых закономерностей пульсационного движения, характеризующегося скоростями $u',\ v',\ w'$.

Приближенное определение турбулентных напряжений основывается на аналогии между молекулярным и турбулентным движениями, а также на статистической теории турбулентности.

Рассмотрим основное установившееся движение со средней скоростью $\bar{u}$, направленное параллельно оси x, и найдем приближенное выражение для турбулентного напряжения $\tau_{xz} = -\rho \overline{u' w'}$.

Через площадку S, перпендикулярную оси z, за единицу времени пройдет множество частиц воздуха, каждая из которых имеет дополнительные скорости $u'_i,\ w'_i$ и площадь поперечного сечения S_i.

Обозначим общее число частиц, пересекающих площадку S в единицу времени, через N, тогда среднее значение из произведений составляющих пульсационных скоростей этих частиц будет равно

$$\overline{u'w'} = \frac{1}{S}\sum_{i=1}^{N} u_i' w_i' S_i \ , \tag{2.7.1}$$

и турбулентное напряжение τ_{xz} выразится формулой

$$\tau_{xz} = -\frac{\rho}{S}\sum_{i=1}^{N} u_i' w_i' S_i \ . \tag{2.7.2}$$

Для любой частицы воздуха, движущейся с дополнительной скоростью w_i' вверх или вниз и пересекающей в данный момент времени t горизонтальную площадку на уровне z, всегда можно найти предшествующий момент времени t_i, в который вертикальная скорость ее w_i' последний раз обращалась в нуль, а сама частица в этот момент находилась на уровне z_i (рис.18). Частицы, движущиеся вверх в предшествующие моменты времени t_i, занимали более низкое положение $(z_i < z)$, а частицы, движущиеся вниз, в эти моменты времени занимали более высокое положение $(z_i > z)$.

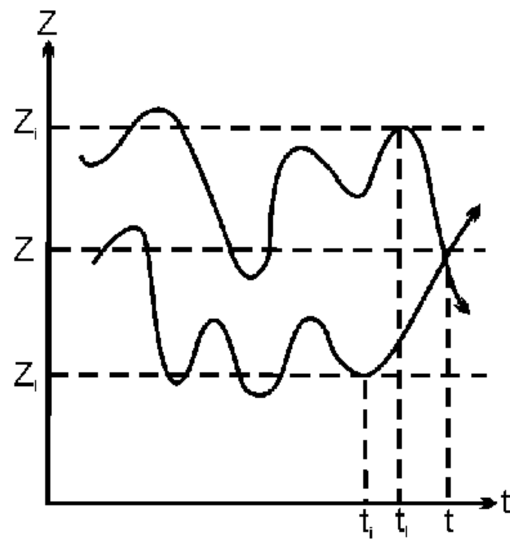


Рис. 18

В момент времени t горизонтальная скорость частицы на уровне z равняется

$$u_i(z,t) = \bar{u}(z) + u'_i\,, \qquad (2.7.3)$$

а перед этим на начальном уровне z_i горизонтальная скорость ее была равна

$$u_i(z_i,t_i) = \bar{u}(z_i) + u''_i\,, \qquad (2.7.4)$$

где u''_i - пульсационная скорость частицы на начальном уровне z_i.

Изменение горизонтальной скорости частицы δu_i за время $t-t_i$ будет равно $\delta u_i = u_i(z,t) - u_i(z_i t_i)$ или

$$\delta u_i = \bar{u}(z) + u'_i - \bar{u}(z_i) - u''_i\,, \qquad (2.7.5)$$

откуда получаем следующее выражение для пульсационной скорости u'_i на уровне z:

$$u'_i = \bar{u}(z_i) - \bar{u}(z) + \delta u_i + u''_i\,, \qquad (2.7.6)$$

Разлагая среднюю скорость $\bar{u}(z_i)$ в ряд Тейлора по степеням $z_i - z$, предположим, что разность $z_i - z$ настолько мала, что в разложении можно пренебречь членами второго и более высоких порядков малости, тогда $\bar{u}(z_i) - \bar{u}(z) \approx \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial z}(z_i - z)$.

В связи с этим пульсационная скорость u'_i, будет равна

$$u'_i \approx -\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}(z - z_i) + \delta u_i + u''_i\,. \qquad (2.7.7)$$

Подставляя теперь u'_i из этого равенства в формулу (2.7.2) получаем следующее выражение для турбулентного напряжения τ_{xz}:

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\frac{\rho}{S}\sum_{i=1}^{N}(z - z_i)w'_i S_i - \frac{\rho}{S}\sum_{i=1}^{N}\delta u_i w'_i S_i - \frac{\rho}{S}\sum_{i=1}^{N}u''_i\, w'_i S_i \qquad (2.7.8)$$

При беспорядочном движении частиц воздуха в турбулентном потоке отдельные произведения $u''_i\, w'_i S_i$ принимают случайные, как положительные, так и отрицательные значения и при суммировании взаимно компенсируют друг друга. Поэтому последней суммой правой части выражения (2.7.8) можно пренебречь $\sum_{i=1}^{N} u_i'' w_i' S_i$.

Предпоследняя сумма $\sum_{i=1}^{N} \delta u_i w_i' S_i$ зависит от изменения с высотой средней скорости $\bar{u}$ основного движения и также приближенно равна нулю. Первая же сумма $\sum_{i=1}^{N} (z - z_i) w_i' S_i$ при турбулентном движении не обращается в нуль, все слагаемые этой суммы имеют только положительное значение. Чтобы убедиться в этом, все частицы воздуха, пересекающие в момент времени t площадку S, разделим на две группы: одни из них движутся вверх, а другие вниз. Для частиц, движущихся вверх, как вертикальная скорость w_i', так и разность высот $z - z_i$ будут положительными, поэтому и произведение $(z - z_i) w_i'$ будет положительным. Для частиц, движущихся вниз, вертикальная скорость w_i' является отрицательной, но для этих частиц и разность высот $z - z_i$ будет отрицательной, а произведение $(z - z_i) w_i'$ имеет положительный знак. Следовательно, все слагаемые первой суммы в правой части уравнения (2.7.8) являются положительными.

Если последние две суммы правой части уравнения (2.7.8) обращаются в нуль, то для турбулентного напряжения τ_{xz} получается выражение

$$\tau_{xz} \approx \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \frac{\rho}{S} \sum_{i=1}^{N} (z - z_i) w_i' S_i \,. \qquad (2.7.9)$$

Обозначим в правой части равенства (2.7.9) величину суммы, отнесенную к единице площади, через

$$K_z = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^{N} (z - z_i) w_i' S_i \,. \qquad (2.7.10)$$

Определяемая равенством (2.7.10) величина K_z характеризует перенос количества движения и различных свойств воздуха в направлении оси z в результате турбулентности. Она увеличивается с усилением беспорядочного движения частиц воздуха и называется вертикальным коэффициентом турбулентности.

Вводя коэффициент турбулентности, выражение (2.7.9) для турбулентного напряжения τ_{xz} можно переписать в следующем виде:

$$\tau_{xz} = K_z \rho \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}. \qquad (2.7.11)$$

Таким образом, турбулентное напряжение τ_{xz} определяется аналогично молекулярному вязкому напряжению δ_{xz}, которое в случае горизонтального движения при $w = 0$ выражается формулой $\delta_{xz} = \gamma\rho \frac{\partial u}{\partial z}$, и отличается от формулы (2.7.11) для турбулентного напряжения только тем, что в ней вместо коэффициента турбулентности K_z стоит кинематический коэффициент молекулярной вязкости воздуха γ. Следовательно, между турбулентным и молекулярным движением существует аналогия, но эта аналогия является лишь внешней. Молекулярное и турбулентное движения имеют различную физическую природу. Кинематический коэффициент молекулярной вязкости воздуха γ не зависит от скорости течения, тогда как коэффициент турбулентности K_z зависит от средней скорости основного движения и от расстояния до твердых тел, обтекаемых воздухом. При этом коэффициент турбулентности в десятки и сотни тысяч раз больше коэффициента молекулярной вязкости.

Формулу (2.7.10) для коэффициента турбулентности можно преобразовать следующим образом. Учитывая, что при $z = z_i$, $w'_i = 0$ можно считать, что на уровне z вертикальная скорость частицы w'_i пропорциональна разности высот и выразить ее при помощи соотношения

$$w'_i = \alpha_i (z - z_i) \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right|,$$

где α_i - коэффициент пропорциональности.

Тогда вертикальный коэффициент турбулентности будет равен

$$K_z = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^{N} \alpha_i (z - z_i)^2 S_i \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right|.$$

Введем новое обозначение

$$l^2 = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^{N} \alpha_i (z - z_i)^2 S_i . \qquad (2.7.12)$$

Величина l имеет размерность длины и носит название пути смешения, ее можно рассматривать как среднее расстояние, которое проходят по вертикали частицы и вихри воздуха до полного смешивания их с окружающим воздухом. Пользуясь понятием пути смешения l, коэффициент турбулентности можно выразить формулой

$$K_z = l^2\left|\frac{\partial u}{\partial z}\right|. \tag{2.7.13}$$

Приведенные в настоящем параграфе соотношения позволяют приближенно выразить турбулентные напряжения через среднюю скорость основного движения.

Полное определение всех турбулентных напряжений требует построения более сложной системы уравнений турбулентного движения, позволяющей определить те новые величины, которые входят в уравнения усредненного движения. Специальная статистическая теория структуры турбулентного движения была основана А.А. Фридманом и Л.В. Келлером. Некоторые весьма важные выводы в статистической теории турбулентности получены А.Н. Колмогоровым, А.М. Обуховым, А.С. Мониным и другими авторами.

2.8. Вертикальные турбулентные потоки в атмосфере

Из выражений (2.6.7) и (2.7.11) для турбулентного напряжения τ_{xz} следует, что вертикальный турбулентный поток количества движения ϕ определяется формулой

$$\phi = -K_z\rho\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\ , \tag{2.8.1}$$

где знак минус указывает на то, что количество движения $\bar{u}$ переносится в сторону уменьшения средней скорости основного движения.

Формула (2.8.1) лишь приближенно определяет вертикальный турбулентный поток количества движения, так как в соотношении (2.7.8) для турбулентного напряжения τ_{xz} вторая и третья суммы правой части в общем случае точно не равняются нулю.

Выражение вида (2.8.1) можно считать справедливым для вертикального турбулентного потока Ф какой-нибудь величины φ (например, примеси, содержащейся в воздухе или какого-либо свойства данной массы воздуха) при выполнении следующих условий.

Если величина φ обладает свойством консервативности, т.е. ее значение сохраняется в каждой движущейся воздушной частице, а при смешении двух воздушных частиц общее количество величины φ просто складывается.

Если величина φ обладает свойством пассивности, т.е. ее распределение не влияет на характер движения воздушных частиц. При выполнении этих условий можно по аналогии с выводами предыдущего параграфа определить вертикальный турбулентный поток величины φ. Заменяя в соотношении (2.7.8) δu_i и u''_i соответственно через $\delta\varphi_i$ и φ''_i, получим соотношение аналогичное (2.7.8), в котором вторая и третья суммы правой части обращаются в нуль. Тогда вертикальный турбулентный поток величины φ определится формулой

$$\Phi = -K_z \rho \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial z} \ . \tag{2.8.2}$$

Условия консервативности и пассивности с достаточной точностью соблюдаются для очень многих физических величин, в частности для удельной влажности и концентрации некоторых примесей, содержащихся в воздухе. Вертикальные потоки этих величин приближенно могут быть определены по формулам вида (2.8.2). Исключение составляет вертикальный турбулентный поток тепла, выражаемый через величину теплосодержания единичной массы воздуха $c_p T$, которая не удовлетворяет условиям консервативности и пассивности, так как температура при адиабатическом перемещении по вертикали изменяется, а ее распределение оказывает влияние на характер движения воздушных частиц: перегретые частицы всплывают вверх, а переохлажденные опускаются вниз.

Вертикальный турбулентный поток тепла, который мы обозначим через Q_T, по аналогии с выводами предыдущего параграфа можно выразить через теплосодержание единичной массы воздуха $c_p T$ при помощи соотношения

$$Q_T = -c_p \rho K_z \frac{\partial \overline{T}}{\partial z} + c_p \rho \left(\frac{1}{S} \sum_{i=1}^{N} \delta T_i w'_i S_i + \frac{1}{S} \sum_{i=1}^{N} T''_i w'_i S_i \right). \tag{2.8.3}$$

Если движение частиц происходит адиабатически и фазовые превращения воды отсутствуют, то изменение температуры при вертикальном перемещении частиц выражается формулой

$$\delta T_i = -\gamma_a \, (z - z_i) \tag{2.8.4}$$

где γ_a - адиабатический градиент температуры. Учитывая равенство (2.7.10), найдем

$$\frac{1}{S} \sum_{i=1}^{N} \delta T_i w'_i S_i = -\gamma_a K_z \ . \tag{2.8.5}$$

Под влиянием архимедовых ускорений частицы, пришедшие на уровень z снизу с положительной вертикальной скоростью w'_i, в среднем на начальных уровнях z_i были теплее окружающей среды, т.е. имели положительные отклонения температуры T''_i, а частицы, пришедшие на уровень z сверху с отрицательной вертикальной скоростью w_i, имели на начальных уровнях z_i

отрицательные отклонения температуры T_i''. Следовательно, вторая сумма в скобках правой части соотношения (2.8.3) является существенно положительной величиной. Разделим эту сумму на коэффициент турбулентности K_z. Для получившегося частного, имеющего размерность температурного градиента, введем обозначения

$$\frac{\frac{1}{S}\sum_{i=1}^{N} T_i'' w_i' S_i}{\frac{1}{S}\sum_{i=1}^{N}(z - z_i) w_i' S_i} = \gamma' = \gamma_a - \gamma_p \;, \tag{2.8.6}$$

откуда

$$\frac{1}{S}\sum_{i=1}^{N} T_i'' w_i' S_i = K_z(\gamma_a - \gamma_p)\,. \tag{2.8.7}$$

Заменяя члены, стоящие в скобках правой части соотношения (2.8.3) согласно равенств (2.8.5) и (2.8.7), находим выражение для вертикального турбулентного потока

$$Q_T = -c_p\,\rho K_z\left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial z} + \gamma_p\right). \tag{2.8.8}$$

Величина γ_p называется равновесным градиентом температуры. Формула (2.8.8) показывает, что в тех случаях, когда вертикальный градиент температуры равен равновесному, вертикальный турбулентный поток тепла равен нулю. Так как левая часть выражения (2.8.6) положительная, то равновесный градиент температуры меньше адиабатического градиента.

Значение равновесного градиента температуры было определено в 1946 году М.И. Будыко и М.И. Юдиным, разработавшими специальные способы расчета γ_p по опытным данным о распределении температуры с высотой при малых значениях турбулентного потока тепла. Найденное таким путем значение γ_p оказалось равным 6 град/км с возможной ошибкой ±1 град/км.

Таким образом, равновесный градиент температуры в пределах точности наблюдений совпадает со средним вертикальным градиентом температуры в свободной атмосфере.

2.9. Основы теории подобия и упрощение уравнений динамики атмосферы

Различные виды атмосферных движений отличаются друг от друга масштабами протяженности в пространстве и длительностью во времени. При этом отдельные члены в общих уравнениях движения атмосферы определяют факторы, оказывающие не одинаковое влияние на свойства различных видов движения.

Если рассматривать какой-либо конкретный вид атмосферных движений, то одни члены в уравнениях динамики играют основную определяющую роль, а другие члены выражают факторы, которые на данный вид движения не оказывают существенного влияния и могут не учитываться при решении поставленной задачи.

Выявляя главные факторы, определяющие свойства изучаемого вида движения, и пренебрегая теми, которые в данном случае не оказывают существенного влияния, можно значительно упрощать уравнения динамики и получать их решения, описывающие реальные закономерности, присущие конкретному виду движения.

Методы упрощения уравнения движения атмосферы основаны на оценке степени влияния различных факторов и сил, действующих в атмосфере.

Уравнения динамики атмосферы применительно к изучаемому виду движения упрощаются либо на основании учета порядка метеорологических величин, либо при помощи теории подобия.

А.А. Фридманом и Т. Гессельбергом по эмпирическим данным были составлены таблицы порядков метеорологических величин и их производных. С помощью этих таблиц оказалось возможным производить некоторые предварительные оценки.

Практически для упрощения уравнений значительно удобнее пользоваться таблицей среднеквадратических значений метеорологических величин и их производных, составленной М.И. Юдиным.

При определении порядка величин производных, последние заменялись отношениями конечных разностей. При этом существенное значение имеет выбор характерных масштабов длины и времени.

Достаточно точные оценки можно получить, рассматривая порядки величин для близких по физической природе явлений. Составление таблиц для ряда явлений затруднительно из-за недостаточности эмпирических данных, особенно это касается неизученных процессов.

Один из методов упрощения уравнений движения основан на теории подобия, согласно которой вместо одного движения рассматривается другое, отличающееся от первого пространственно-временными масштабами, но обладающее с ним общими свойствами. Это позволяет оценить влияние отдельных факторов на атмосферные процессы в зависимости от их характерных масштабов.

Два движения жидкости или газа подобны друг другу при следующих условиях:

1.Если поля скорости, ускорения, давления и плотности ограничены в пространстве геометрически подобными поверхностями.

2. Значения величин в сходственных точках полей отличаются друг от друга лишь постоянным коэффициентом, т.е. характерным значением или масштабом величины для данного поля. При этом также вводятся условия подобия и для промежутков времени.

Обозначим характерные значения или масштабы длины, времени, скорости, плотности и разности давления соответственно через $L, T, V, \Pi, \Delta P$.

Если все величины выражать не в абсолютных единицах измерения, а в виде отношений их к характерным для них значениям, то все эти величины будут безразмерными.

$$\left.\begin{aligned} &x_\delta = \frac{x}{L}, \quad y_\delta = \frac{y}{L}, \quad z_\delta = \frac{z}{L}, \quad t_\delta = \frac{t}{T} \\ &u_\delta = \frac{u}{V}, \quad v_\delta = \frac{v}{V}, \quad w_\delta = \frac{w}{V} \\ &\rho_\delta = \frac{\rho}{\Pi}, \quad \Delta P_\delta = \frac{\Delta p}{\Delta P} \end{aligned}\right\}. \tag{2.9.1}$$

Любая функция безразмерных координат и времени $f(x_\delta, y_\delta,\ z_\delta,\ t_\delta)$, составленная для подобных движений, должна быть совершенно одинакова.

Следовательно, дифференциальные уравнения и краевые условия, которым удовлетворяют функции от безразмерных величин, для подобных движений также должны совпадать между собой.

Рассмотрим одно из уравнений движения атмосферы, являющееся проекцией векторного уравнения движения на горизонтальную плоскость,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = g_x - 2\omega_y w + 2\omega_z v - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} +$$
$$+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + \frac{\nu}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) .$$

Переходя к безразмерным величинам, будем иметь

$$\frac{V}{T}\frac{\partial u_\delta}{\partial t_\delta} + \frac{V^2}{L}\left(u_\delta\frac{\partial u_\delta}{\partial x_\delta} + v_\delta\frac{\partial u_\delta}{\partial y_\delta} + w_\delta\frac{\partial u_\delta}{\partial z_\delta}\right) =$$
$$= g_x - 2\omega_y V w_\delta + 2\omega_z V v_\delta - \frac{\Delta P}{\Pi L}\frac{1}{\rho_\delta}\frac{\partial P_\delta}{\partial x_\delta} + \tag{2.9.2}$$
$$+\frac{\nu V}{L^2}\left(\frac{\partial^2 u_\delta}{\partial x_\delta^2} + \frac{\partial^2 u_\delta}{\partial y_\delta^2} + \frac{\partial^2 u_\delta}{\partial z_\delta^2}\right) + \frac{\nu V}{3L^2}\frac{\partial}{\partial x_\delta}\left(\frac{\partial u_\delta}{\partial x_\delta} + \frac{\partial v_\delta}{\partial y_\delta} + \frac{\partial w_\delta}{\partial z_\delta}\right) .$$

Все коэффициенты, полученные из характерных величин: $\frac{V}{T}$, $\frac{V^2}{L}$, ωV, $\frac{\Delta P}{\Pi L}$, $\frac{\nu V}{L^2}$ имеют размерность ускорения и называются "масштабами действующих сил".

Разделим все члены уравнения на один из размерных коэффициентов, состоящих из характерных величин, например, на $\frac{V^2}{L}$. Тогда получим безразмерное уравнение движения, все коэффициенты которого будут являться безразмерными и один из них будет равен единице

$$\frac{L}{TV}\frac{\partial u_\delta}{\partial t_\delta} + u_\delta\frac{\partial u_\delta}{\partial x_\delta} + v_\delta\frac{\partial u_\delta}{\partial y_\delta} + w_\delta\frac{\partial u_\delta}{\partial z_\delta} = \frac{g_x L}{V^2} - \frac{2\omega_y L}{V}w_\delta +$$
$$+\frac{2\omega_z L}{V}v_\delta - \frac{\Delta P}{\Pi V^2}\frac{1}{\rho_\delta}\frac{\partial P_\delta}{\partial x_\delta} + \frac{\nu}{VL}\left(\frac{\partial^2 u_\delta}{\partial x_\delta^2} + \frac{\partial^2 u_\delta}{\partial y_\delta^2} + \frac{\partial^2 u_\delta}{\partial z_\delta^2}\right) + \tag{2.9.3}$$
$$+\frac{\nu}{3LV}\frac{\partial}{\partial x_\delta}\left(\frac{\partial u_\delta}{\partial x_\delta} + \frac{\partial v_\delta}{\partial y_\delta} + \frac{\partial w_\delta}{\partial z_\delta}\right).$$

В соответствии с полученным безразмерными коэффициентами вводят специальные критерии подобия, полагая

$$\left.\begin{array}{l} \frac{VT}{L} = Ho; \quad \frac{V^2}{gL} = Fr; \\ \frac{\Delta P}{\Pi V^2} = Eu; \quad \frac{VL}{\nu} = \mathrm{Re}; \\ \frac{V}{2\omega L} = De \end{array}\right\} \tag{2.9.4}$$

Ho - число гомохронности, *Fr* - число Фруда, *Eu* - число Эйлера, *Re* – число Рейнольдса, *De* – безразмерная характеристика отклонения ветра от геострофического.

Чтобы два движения были подобны друг другу необходимо, чтобы они имели одинаковые числа *Ho, Fr* , *Eu Re*, *De*. . Эти числа являются критериями подобиями и делятся на две группы: на критерии определяющие и неопределяющие.

Критерии подобия, содержащие внешне обусловленные величины и константы, характеризующие физические свойства жидкости, являются определяющими критериями. К внешне обусловленным величинам относятся значения тех элементов движения, которые входят в выражение для безразмерных чисел, составленных преобразованием краевых условий. Физическими константами воздуха являются характерная плотность и кинематический коэффициент вязкости. Угловая скорость вращения Земли и ускорение силы тяжести также относятся к определяющим параметрам. Остальные величины являются внутренне обусловленными.

Критерии подобия, содержащие хотя бы одну из внутренне обусловленных величин, являются неопределяющими критериями, они могут служить лишь для пересчета результатов опыта на натуру. Пользуясь критериями подобия, безразмерное уравнение движения атмосферы (2.9.3) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{1}{H_{\circ}}\frac{\partial u_{\delta}}{\partial t_{\delta}} + u_{\delta}\frac{\partial u_{\delta}}{\partial x_{\delta}} + v_{\delta}\frac{\partial u_{\delta}}{\partial y_{\delta}} + w_{\delta}\frac{\partial u_{\delta}}{\partial z_{\delta}} = \frac{1}{F_r}\cos(\vec{g}\,\hat{,}\,\vec{i}) + $$
$$+\frac{1}{De}[v_{\delta}\cos(\vec{w}\,\hat{,}\,\vec{k}) - w_{\delta}\cos(\vec{w}\,\hat{,}\,\vec{j})] - \varepsilon_u \frac{1}{\rho_{\delta}}\frac{\partial P_{\delta}}{\partial x_{\delta}} + \tag{2.9.5}$$
$$\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 u_{\delta}}{\partial x_{\delta}^2} + \frac{\partial^2 u_{\delta}}{\partial y_{\delta}^2} + \frac{\partial^2 u_{\delta}}{\partial z_{\delta}^2}\right) + \frac{1}{3\mathrm{Re}}\frac{\partial}{\partial x_{\delta}}\left(\frac{\partial u_{\delta}}{\partial x_{\delta}} + \frac{\partial v_{\delta}}{\partial y_{\delta}} + \frac{\partial w_{\delta}}{\partial z_{\delta}}\right).$$

Тогда из анализа безразмерного уравнения движения (2.9.5) и двух других аналогичных ему уравнений для составляющих ускорения по осям y и z вытекают следующие выводы:

1.Чем больше число Fr, тем меньше влияние силы тяжести на свойства движения.

2.Чем больше число De, тем меньше влияет на движение отклоняющая сила вращения Земли.

3.При больших значениях числа De на свойства движения большое влияние оказывают силы инерции, определяемые конвективным членом в уравнениях движения.

4.Чем больше число Рейнольдса Re, тем меньше влияет на свойства движения сила вязкости.

Принимая порядок конвективного ускорения за единицу, порядки величин силы тяжести, отклоняющей силы вращения Земли и силы вязкости будут соответственно равны

$$\left.\begin{aligned} 0\left[\frac{1}{F_r}\right] &= \frac{gL}{V^2} \\ 0\left[\frac{1}{De}(v_{\delta} - w_{\delta})\right] &= \frac{2\omega L}{V}0[v_{\delta} - w_{\delta}] \\ 0\left[\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 u_{\delta}}{\partial x_{\delta}^2} + \frac{\partial^2 u_{\delta}}{\partial y_{\delta}^2} + \frac{\partial^2 u_{\delta}}{\partial z_{\delta}^2}\right)\right] &= \frac{v}{LV}0\left[\frac{\partial^2 u_{\delta}}{\partial x_{\delta}^2} + \frac{\partial^2 u_{\delta}}{\partial y_{\delta}^2} + \frac{\partial^2 u_{\delta}}{\partial z_{\delta}^2}\right] \end{aligned}\right\}. \tag{2.9.6}$$

Отсюда следует, что роль силы тяжести и силы Кориолиса возрастает вместе с увеличением масштаба протяженности движения в пространстве.

Влияние вязкости воздуха оказывается обратно пропорциональным масштабу движения. Чем больше масштаб протяженности движения и чем больше скорость, тем меньшую роль играет вязкость.

Аналогично в результате упрощения для крупномасштабных процессов уравнения движения, являющегося проекцией векторного уравнения движения на вертикаль, получается уравнением квазистатики $\partial P / \partial z = -g\,\rho$. Таким образом, уравнение статики, полностью справедливое для неподвижной атмосферы, с высокой степенью точности выполняется и в движущейся атмосфере. В крупномасштабных движениях нарушение статичности наблюдается лишь в отдельных случаях. Но, как показано И.А. Кибелем, в этих случаях происходит быстрое приспособление поля к статичности. Учитывая отдельные нарушения, принято говорить не о статичности атмосферных процессов, а об их квазистатичности. Интегралы основного уравнения статики, полученные при разных предположениях относительно изменения ρ и T, носят название барометрических формул.

Уравнение статики, а, следовательно, и барометрические формулы будут справедливы лишь для метеорологических процессов, определяющих изменение погоды над сравнительно большими районами порядка нескольких тысяч километров. Для процессов другого масштаба проделанные упрощения могут оказаться неверными. Например, в развивающемся в течении одного - двух часов кучевом облаке, размеры которого не превышают нескольких сотен метров скорость вертикальных движений может достигать 10 м/с. Поэтому уравнение статики и барометрические формулы для таких явлений оказываются неприменимыми.

Критерий подобия, характеризующий влияние сжимаемости воздуха на свойства атмосферных движений, может быть получен из уравнения неразрывности

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+u\frac{\partial\rho}{\partial x}+v\frac{\partial\rho}{\partial y}+w\frac{\partial\rho}{\partial z}+\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0 \qquad (2.9.7)$$

Введем характерную величину изменения плотности $\Delta\Pi$. Переходя к безразмерным величинам, уравнение неразрывности принимает вид

$$\frac{\Delta\Pi}{T}\frac{\partial\rho_\delta}{\partial t_\delta}+\frac{\Delta\Pi V}{L}\left(u_\delta\frac{\partial\rho_\delta}{\partial x_\delta}+v_\delta\frac{\partial\rho_\delta}{\partial y_\delta}+w_\delta\frac{\partial\rho_\delta}{\partial z_\delta}\right)+$$
$$+\frac{\Pi V}{L}\rho_\delta\left(\frac{\partial u_\delta}{\partial x_\delta}+\frac{\partial v_\delta}{\partial y_\delta}+\frac{\partial w_\delta}{\partial z_\delta}\right)=0\,. \qquad (2.9.8)$$

Умножим все члены этого уравнения на $L/\Pi V$, тогда получим безразмерное уравнение неразрывности

$$\frac{\Delta \Pi}{\Pi}\left(\frac{L}{TV}\frac{\partial \rho_\delta}{\partial t_\delta}+u_\delta\frac{\partial \rho_\delta}{\partial x_\delta}+v_\delta\frac{\partial \rho_\delta}{\partial y_\delta}+w_\delta\frac{\partial \rho_\delta}{\partial z_\delta}\right)+ \\ +\rho_\delta\left(\frac{\partial u_\delta}{\partial x_\delta}+\frac{\partial v_\delta}{\partial y_\delta}+\frac{\partial w_\delta}{\partial z_\delta}\right)=0. \tag{2.9.9}$$

Величина L/TV обратно пропорциональна числу гомохронности, которое является критерием подобия, вытекающим из уравнений движения. Следовательно, новым критерием подобия, характеризующим влияние сжимаемости воздуха и вытекающим из уравнения неразрывности, является относительное изменение плотности $\Delta\Pi/\Pi$.

Для подобных движений разности плотности $\Delta\Pi$ в сходственных точках полей должны составлять одинаковую долю от соответствующих характерных значений плотности.

Чем меньше отношение $\Delta\Pi/\Pi$, тем меньшую роль играет сжимаемость воздуха.

При адиабатических процессах между относительными изменениями плотности и давления существует соотношение $\frac{dP}{P}=\chi\frac{d\rho}{\rho}$, где $\chi=\frac{c_p}{c_v}$.

Переходя к безразмерным величинам, будем иметь

$$\frac{\Delta P}{\chi P}\cdot\frac{dP_\delta}{P_\delta}=\frac{\Delta \Pi}{\Pi}\cdot\frac{d\rho_\delta}{\rho_\delta} . \tag{2.9.10}$$

Отсюда следует, что вместо критерия подобия $\Delta\Pi/\Pi$, вытекающего из уравнения неразрывности, можно взять критерий подобия, равный $\Delta P/\chi P$.

Но такой критерий подобия содержит внутренне обусловленную величину ΔP и является неопределяющим критерием подобия.

Если разделить этот критерий подобия на число Эйлера, то внутренне обусловленная величина ΔP сокращается и получается новый уже определяющий критерий подобия, вытекающий из уравнения неразрывности

$$\frac{\Delta P}{\chi P}:\frac{\Delta P}{\Pi V^2}=\frac{\Pi V^2}{\chi P}. \tag{2.9.11}$$

Известно, что отношение давления к плотности воздуха связано со скоростью распространения звука соотношением

$$\frac{\chi P}{\Pi} = c^2 ,$$

где c - характерная скорость звука. Тогда

$$\frac{\Pi V^2}{\chi P} = \frac{V^2}{c^2} . \qquad (2.9.12)$$

Отсюда следует, что критерием подобия, вытекающим из уравнения неразрывности, может служить отношение скорости движения воздуха к скорости звука, которое называется числом Маха

$$Ma = \frac{V}{c}. \qquad (2.9.13)$$

При малых значениях числа Маха (менее 0,2) уравнение неразрывности для воздуха мало отличается от уравнения неразрывности для несжимаемой жидкости. При больших скоростях движения воздуха, близких к скорости звука, на свойства движения существенное влияние оказывает сжимаемость воздуха, и число Маха является важнейшим критерием подобия.

При медленных движениях можно пренебречь сжимаемостью воздуха и пользоваться уравнением неразрывности в более простой форме для несжимаемого движения, то есть такого, когда плотность каждой частицы не меняется в процессе ее движения $(d\rho/dt = 0)$. С увеличением характерных масштабов длины по вертикали, масштабы изменения плотности в вертикальном направлении становятся значительно больше, чем в горизонтальном. В этих случаях в уравнении неразрывности необходимо учитывать изменение плотности с высотой.

Чтобы учесть влияние сжимаемости воздуха на атмосферные процессы, уравнение неразрывности в общем случае берется без упрощения.

2.10. Классификация атмосферных движений

Атмосферные процессы по своим масштабам могут значительно отличаться друг от друга. Одни из них развиваются на весьма ограниченной территории в течение малого отрезка времени, а другие охватывают большие пространства и существуют длительное время. Горизонтальная протяженность бризов и горно-долинных ветров измеряется десятками километров. Развитие отдельного кучевого облака происходит в течение нескольких часов над территорией в несколько десятков километров, а развитие отдельного циклона - в течение нескольких дней над территорией протяженностью 1000 км и более. Наконец, характерная длина для воздушных течений в системе общей циркуляции атмосферы имеет порядок 2-3 тыс. км.

Таким образом, характерная длина L в задачах динамической метеорологии изменяется в очень широких пределах от 10^2 до $2 \cdot 10^6$ м.

Характерное значение скорости атмосферных движений ограничивается более узкими пределами и заключается в интервале от 1 до 50 м/с. Для движений типа общей циркуляции атмосферы характерная скорость имеет порядок величины 10 м/с.

По сравнению со скоростью звука в воздухе атмосферные движения являются относительно медленными и в первом приближении можно использовать уравнение неразрывности для несжимаемого движения.

Оценим теперь нижние и верхние пределы возможных значений основных критериев подобия, то есть чисел F_r, De, Re.

Учитывая интервалы изменения длины L ($10^2 - 2 \cdot 10^6$ м) и скорости V (10 - 50 м/с) и приближенно принимая $g \approx 10$ м/с^2, $\omega = 7 \cdot 10^{-5}$ 1/с и $\nu = 1{,}5 \cdot 10^{-5}$ м^2/с, для критериев подобия получаем следующие значения

$$F_r = \frac{V^2}{gL} \qquad \begin{aligned} &\textit{нижний предел} \approx \frac{10^2}{10 \cdot 2 \cdot 10^6} = 5 \cdot 10^{-6}; \\ &\textit{верхний предел} \approx \frac{50^2}{10 \cdot 10^2} = 2{,}5; \end{aligned}$$

$$De = \frac{V}{2\omega L} \qquad \begin{aligned} &\textit{нижний предел} \approx \frac{10}{2 \cdot 7 \cdot 10^{-5} \cdot 2 \cdot 10^6} = 4 \cdot 10^{-2}; \\ &\textit{верхний предел} \approx \frac{50}{2 \cdot 7 \cdot 10^{-5} \cdot 10^2} = 4 \cdot 10^3; \end{aligned}$$

$$\mathrm{Re} = \frac{VL}{\nu} \quad \begin{array}{l} \textit{нижний предел} \approx \dfrac{10 \cdot 10^{2}}{1{,}5 \cdot 10^{-5}} = 7 \cdot 10^{7}\ ; \\ \\ \textit{верхний предел} \approx \dfrac{10 \cdot 2 \cdot 10^{6}}{1{,}5 \cdot 10^{-5}} = 10^{12}\ . \end{array}$$

Таким образом, наименьшие значения имеет число Фруда, а наибольшие – число Рейнольдса.

Очень малые значения числа Фруда по сравнению с другими критериями подобия указывают на исключительно большое влияние сил тяжести на атмосферные движения. Ускорение силы тяжести во много раз превосходит все другие ускорения. Поэтому атмосферные движения в вертикальном направлении резко отличаются от движений в горизонтальной плоскости.

Отклоняющая сила вращения Земли в несколько тысяч раз меньше силы тяжести, так как $De \gg F_r$. Для мелкомасштабных движений, например, для бризов и горно-долинных ветров малой протяженности, отклоняющая сила вращения Земли очень мала по сравнению с силами инерции в относительном движении. Поэтому силой Кориолиса можно пренебречь и в уравнениях для горизонтальных мелкомасштабных движений. Наоборот, для движений большого масштаба, например, для устойчивых течений общей циркуляции атмосферы, сила Кориолиса больше сил инерции в относительном движении.

Числа Рейнольдса для атмосферных движений очень велики, следовательно, влиянием сил молекулярной вязкости воздуха на атмосферные движения можно пренебречь.

Таким образом, влияние силы тяжести всегда очень велико, а влияние молекулярной вязкости воздуха всегда очень мало. Поэтому особенности атмосферных движений определяются соотношением между силой Кориолиса и силой инерции в относительном движении, а это соотношение определяется главным образом масштабами движения, так как возможные изменения скорости сравнительно невелики.

Принимая во внимание соотношение между силой Кориолиса и силой инерции в относительном движении, все атмосферные движения можно разделить на три класса:

1.Крупномасштабные движения, в которых относительное ускорение мало по сравнению с ускорением Кориолиса. По определению М.И. Юдина к крупномасштабным относятся движения, для которых горизонтальный масштаб длины составляет несколько сотен километров и более.

2.Движения средних масштабов, характеризующиеся тем, что силы инерции, Кориолиса и барического градиента имеют одинаковый порядок. Для этих движений горизонтальный масштаб длины имеет порядок 100 км.

3.Мелкомасштабные движения, в которых ускорение Кориолиса мало по сравнению с относительным ускорением. К этой группе относятся движения, для которых горизонтальный масштаб длины имеет порядок 10 км и менее.

2.11. Влияние турбулентности воздуха на атмосферные движения и вертикальное расслоение атмосферы

Если молекулярной вязкостью воздуха во всех видах атмосферных движений вполне можно пренебречь ввиду ее малости, то турбулентным трением уже не всегда можно пренебречь. Особенно велико турбулентное трение вблизи земной поверхности, где наблюдаются большие вертикальные градиенты средней скорости ветра и, в связи с этим происходит интенсивный турбулентный перенос по вертикали количества движения.

Определим теперь слой, где нельзя пренебрегать силой вертикальной турбулентной вязкости, составляющие которой, при условии постоянства коэффициента турбулентности, определяются выражениями вида $K\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ и $K\dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}$. Вследствие трения, средняя скорость ветра у подстилающей поверхности равна нулю и в нижнем слое резко возрастает с высотой от нуля до некоторого значения V на высоте $z = \delta$, а выше изменение скорости ветра замедляется. Следовательно, внутри слоя высотой δ над подстилающей поверхностью порядок величин производных $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ и $\dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}$ будет равен:

$$0\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = \frac{V}{\delta^2}; \qquad 0\left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) = \frac{V}{\delta^2}.$$

В связи с этим, сила турбулентной вязкости, действующая в направлении оси x, будет иметь порядок

$$0\left(K\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = K\frac{V}{\delta^2}.$$

В крупномасштабных движениях силу турбулентной вязкости следует сравнить с силой Кориолиса $2\omega_z V$.

Если $0\left(K\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = 0(2\omega_z V)$, то $K\dfrac{V}{\delta^2} = 2\omega_z V$.

Отсюда следует, что $\delta = \sqrt{K / 2\omega_z}$.

Влияние сил турбулентной вязкости распространяется до высоты 1000-1500 м, выше которой их действие уменьшается и величина этих сил становится на порядок меньше силы Кориолиса.

Слой атмосферы толщиной 1000-1500 м., в котором сила трения и отклоняющая сила вращения Земли имеют одинаковый порядок, называется планетарным пограничным слоем. Выше пограничного слоя (в свободной атмосфере) силой турбулентного трения, по сравнению с отклоняющей силой вращения Земли, можно пренебречь. В противоположность этому в самом нижнем слое, непосредственно прилегающем к земной поверхности, отклоняющая сила вращения Земли очень мала по сравнению с силой турбулентной вязкости. Поэтому в пределах пограничного слоя выделяется еще нижний приземный подслой толщиной 30-50 м. Особенностью приземного подслоя является уменьшение коэффициента турбулентного обмена по мере приближения к земной поверхности.

3. НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕРМОДИНАМИКИ АТМОСФЕРЫ

Термодинамика атмосферы является частью динамической метеорологии, изучающей изменения параметров внутреннего состояния движущегося воздуха и, связанные с этими изменениями, процессы перехода тепловой энергии в механическую и обратно.

В термодинамике атмосферы наиболее широко используются выводы, вытекающие из первого и второго начал общей термодинамики, изучаемой в курсах физики.

Основными параметрами, характеризующими физическое состояние атмосферного воздуха как термодинамической системы, являются его плотность ρ, давление P и абсолютная температура T, определяемая соотношением $T = 273{,}2 + t^{\circ}$, где t° - температура, измеряемая по международной стоградусной шкале. При абсолютном нуле температуры, т.е. при – 273,2 $^{\circ}$С тепловое движение молекул идеального газа прекращается. Абсолютная температура T, как суммарная характеристика кинетической энергии движения молекул, всегда является положительной величиной.

3.1. Уравнение состояния атмосферного воздуха. Виртуальная температура

Атмосферный воздух в своем составе содержит различные компоненты. Из них наиболее сильно меняется количество водяного пара и различных взвешенных примесей - аэрозолей.

Основными постоянными составляющими воздуха являются азот, кислород, аргон и углекислый газ.

В нижних нескольких десятках километров в сухом чистом воздухе содержится:

азота	- 78,084 % всей массы воздуха,
кислорода	- 20,946 %
аргона	- 0,934 %
диоксида углерода	- 0,033 %.

При условиях, наблюдаемых в атмосфере, всю механическую смесь газов, образующих сухой чистый воздух, можно рассматривать как один идеальный газ. Как известно из общей термодинамики, давление, абсолютная температура и объем или плотность идеального газа связаны между собой уравнением состояния

$$P = \rho \frac{R_{\circ}}{\mu} T , \tag{3.1.1}$$

где μ - относительная молекулярная масса газа, $R_{\circ}$ - универсальная газовая постоянная, представляющая собой работу расширения одного моля газа при нагревании на 1 градус. Универсальная газовая постоянная для любого газа имеет одно и то же значение, в Международной системе единиц

$$R_{\circ} = 8.31 \cdot 10^{3} \quad \frac{Дж}{кмоль \cdot K}$$

Газовая постоянная, отнесенная к единице массы, называется удельной газовой постоянной

$$R = \frac{R_{\circ}}{\mu} \tag{3.1.2}$$

Для различных газов удельная газовая постоянная имеет уже различные значения и зависит от относительной молекулярной массы данного газа.

Относительная молекулярная масса сухого чистого воздуха μ_c равна среднему взвешенному из относительных молекулярных масс отдельных газов, входящих в состав сухого воздуха и имеет величину 28,97.

Соответственно относительной молекулярной массе удельная газовая постоянная сухого воздуха имеет следующее числовое значение:

$$R = \frac{8{,}31 \cdot 10^{3}}{28{,}97} = 287 \quad \frac{дж}{кг \cdot K}.$$

Пользуясь удельной газовой постоянной R, уравнение состояния (3.1.1) можно переписать в виде

$$P = R\rho T \tag{3.1.3}$$

В атмосфере всегда содержится то или иное количество водяного пара, находящегося в смеси с сухим воздухом. Для влажного воздуха также с достаточной степенью точности справедливо уравнение состояния (3.1.3), но удельная газовая постоянная влажного воздуха отличается от удельной газовой постоянной сухого воздуха и, в зависимости от количества водяного пара, содержащегося в воздухе, принимает различные значения. Поэтому для практических расчетов целесообразно преобразовать уравнение состояния влажного воздуха так, чтобы в него входила только удельная газовая постоянная сухого воздуха.

Согласно закону Дальтона всякий идеальный газ распространяется среди других газов, не действующих на него химически, как в пустоте, при этом общее давление смеси газов равно сумме парциальных давлений, создаваемых отдельными газами, а плотность смеси равна сумме значений плотности этих газов

Чтобы получить уравнение состояния влажного воздуха, введем следующие обозначения: P_c - парциальное давление сухого воздуха; e - парциальное давление водяного пара; ρ_c - плотность сухого воздуха; ρ_n - плотность водяного пара; P, ρ, T - соответственно общее давление, плотность и температура смеси. Удельную газовую постоянную сухого воздуха обозначим через R, а водяного пара - через R_n.

Запишем теперь уравнение состояния отдельно для сухого воздуха и для водяного пара $P_c = R\rho_c T$; $e = R_n \rho_n T$.

Складывая почленно эти два уравнения, получим уравнение состояния влажного воздуха

$$P_c + e = \left(R\rho_c + R_n\rho_n\right)T \tag{3.1.4}$$

но $R_n = \dfrac{R_o}{\mu_n}$ и $R = \dfrac{R_o}{\mu_c}$, из этих соотношений находим, что $R_n = \dfrac{\mu_c}{\mu_n}R$, где μ_c - молекулярный вес сухого воздуха, равный 28,97, а μ_n - молекулярный вес водяного пара, равный 18,02. Подставляя в последнее равенство значения μ_c и μ_n, получим

$$R_n = 1{,}608R. \tag{3.1.5}$$

Заменим теперь в уравнении состояния влажного воздуха (3.1.4) удельную газовую постоянную водяного пара R_n через удельную газовую постоянную сухого воздуха R при помощи равенства (3.1.5), тогда $P_c + e = (\rho_c + 1{,}608\rho_n)RT$. Учитывая, что $P_c + e = P$ и $\rho_c = \rho - \rho_n$, получим $P = (1 + 0{,}608\dfrac{\rho_n}{\rho})\rho RT$.

Отношение плотности водяного пара к плотности влажного воздуха есть удельная влажность $q = \dfrac{\rho_n}{\rho}$. В связи с этим уравнение состояния влажного воздуха принимает вид

$$P = R\rho(1 + 0{,}608q)T, \tag{3.1.6}$$

где удельная газовая постоянная R соответствует сухому воздуху стандартного состава.

Если действительную температуру T заменить на условную, так называемую виртуальную температуру T_v, определяемую выражением

$$T_v = (1 + 0{,}608q)T\ , \tag{3.1.7}$$

то уравнение состояния влажного воздуха можно записать в виде, аналогичном уравнению состояния сухого воздуха (3.1.3)

$$P = R\rho T_v\ . \tag{3.1.8}$$

Виртуальной температурой, определяемой для влажного воздуха по формуле (3.1.7), называется такая температура, которую имел бы при данном давлении сухой воздух, той же самой плотности, что и рассматриваемый влажный воздух.

Виртуальная температура влажного воздуха, определяемая формулой (3.1.7), выше действительной его температуры, поэтому из уравнения состояния (3.1.8), согласно которому $\rho = \dfrac{P}{RT_v}$ следует, что влажный воздух легче сухого, при том же давлении и температуре.

3.2. Первое начало термодинамики

Первое начало термодинамики является экспериментально установленным исходным положением, выражающим общий закон сохранения энергии применительно к термодинамическим процессам. Сущность закона сохранения энергии состоит в том, что при всех процессах, происходящих в природе, энергия не уничтожается и не возникает из ничего, а лишь переходит из одной формы в другую.

Если единица массы воздуха занимала удельный объем v и имела температуру T, обладая запасом внутренней тепловой энергии J, то после сообщения этой массе некоторого количества тепла dQ, температура ее повысится на dT и внутренняя энергия увеличится на величину dJ. Кроме того, при нагревании воздух расширяется, увеличивая свой объем на величину dv и совершая при этом работу dE.

Согласно первому началу термодинамики подведенное к единице массы воздуха тепло dQ будет израсходовано на увеличение внутренней тепловой энергии dJ и на работу dE, которую совершит воздух, преодолевая давление

$$dQ = dJ + dE\ .$$

Сухой и влажный ненасыщенный воздух можно рассматривать как идеальный газ, внутренняя энергия которого пропорциональна абсолютной температуре $J = c_v T + const$, поэтому $dJ = c_v dT$, где c_v - удельная теплоемкость при постоянном объеме. Для сухого воздуха c_v=718

Дж/(кг $\cdot K$). Работа расширения dE зависит от приращения удельного объема и от величины внешнего давления: $dE = Pdv$.

Таким образом, уравнение первого начала термодинамики для воздуха, рассматриваемого как идеальный газ, принимает вид

$$dQ = c_v dT + Pdv. \tag{3.2.1}$$

Для практических расчетов это уравнение целесообразно преобразовать так, чтобы в его правую часть входили только измеряемые величины. Для этого воспользуемся уравнением состояния (3.1.3), в котором плотность воздуха заменим через удельный объем $Pv = RT$. Дифференцируя это уравнение, получим $Pdv + vdP = RdT$. Исключая с помощью этого выражения Pdv из уравнения (3.2.1), находим

$$dQ = (c_v + R)dT - vdP \tag{3.2.2}$$

Если давление сохраняется постоянным, т.е. $dP = 0$, то $dQ = (c_v + R)dT$, но при изобарическом процессе, протекающем при постоянном давлении, затрату тепла dQ можно выразить формулой $dQ = c_p dT$, где c_p - удельная теплоемкость при постоянном давлении. Для сухого c_p=1005 Дж/(кг $\cdot K$).

Из сравнения последних двух формул следует:

$$c_v + R = c_p; \qquad c_p - c_v = R \tag{3.2.3}$$

Значения $c_v + R = c_p$ подставим в уравнение (3.2.2), а удельный объем в последнем члене правой части (3.2.2) заменим его выражением из уравнения состояния $v = \dfrac{RT}{P}$. Тогда получим уравнение первого начала термодинамики в том виде, в котором оно наиболее часто используется в метеорологии

$$dQ = c_p dT - RT\frac{dP}{P}. \tag{3.2.4}$$

Если из уравнения состояния в дифференциальной форме определить dT и подставить полученное выражение в уравнение первого начала термодинамики (3.2.4), тогда

$$dQ = \frac{c_p}{R} P dv + \frac{c_v}{R} v dP \tag{3.2.5}$$

Каждое из уравнений (3.2.1), (3.2.2), (3.2.4) и (3.2.5) является математическим выражением первого начала термодинамики.

3.3. Политропические изменения термодинамического состояния воздуха

Переход массы воздуха из одного термодинамического состояния в другое может осуществляться различными путями. При этом каждое изменение состояния может быть охарактеризовано соответствующим уравнением, связывающим давление P, удельный объем v и температуру воздуха T.

Простейшими процессами являются политропические процессы, которые протекают при постоянном значении теплоемкости c_π. Следовательно, при политропических процессах приток тепла пропорционален приращению температуры

$$dQ = c_\pi dT . \tag{3.3.1}$$

Исключая с помощью выражения (3.3.1) dQ из уравнения первого начала термодинамики (3.2.4), находим

$$c_p dT - RT\frac{dP}{P} = c_\pi dT .$$

Разделяя переменные, получим

$$\frac{dT}{T} = \frac{R}{c_p - c_\pi}\frac{dP}{P} .$$

Интегрируя в пределах от $T_\circ$ до T и от $P_\circ$ до P, находим

$$\ln\frac{T}{T_\circ} = \frac{R}{c_p - c_\pi}\ln\frac{P}{P_\circ} .$$

Потенцируя это выражение, получаем уравнение политропических процессов

$$\frac{T}{T_\circ} = \left(\frac{P}{P_\circ}\right)^{\frac{R}{c_p - c_\pi}}. \qquad (3.3.2)$$

Пользуясь уравнением состояния, температуру можно заменить через давление и удельный объем, тогда уравнение политропических процессов приводится к виду

$$\frac{v}{v_\circ} = \left(\frac{P}{P_\circ}\right)^{\frac{R}{c_p - c_\pi} - 1}.$$

Учитывая, что $R = c_p - c_v$, получим

$$\frac{v}{v_\circ} = \left(\frac{P}{P_\circ}\right)^{\frac{c_\pi - c_v}{c_p - c_\pi}}$$

Отсюда находим

$$\frac{P}{P_\circ} = \left(\frac{v_\circ}{v}\right)^{\frac{c_p - c_\pi}{c_v - c_\pi}}. \qquad (3.3.3)$$

Введем так называемый показатель политропы

$$n = \frac{c_p - c_\pi}{c_v - c_\pi} \qquad (3.3.4)$$

Тогда уравнение политропических процессов (3.3.3) можно записать в следующем виде:

$$Pv^n = P_\circ v_\circ^n \qquad (3.3.5)$$

Уравнение политропы (3.3.5) показывает, что простейшие процессы изменения термодинамического состояния воздуха являются частными случаями политропического процесса.

Если политропический процесс характеризуется показателем политропы, равным нулю, то из формулы (3.3.4) следует, что $c_p = c_\pi$, т.е. в данном случае имеет место изобарический процесс.

При изотермическом процессе, согласно формуле (3.3.1), теплоемкость воздуха будет бесконечно велика $c_\pi = \infty$, n=1. В этом случае вся энергия, получаемая в процессе теплопередачи, идет на работу расширения, а внутренняя энергия и температура остаются неизменными. Такой процесс определяется законом Бойля-Мариотта $Pv = P_{\circ} v_{\circ}$.

Если $n = \infty$, то $c_{\pi} = c_v$, т.е. происходит изостерический процесс, протекающий при постоянном объеме. При изостерическом процессе вся энергия, получаемая в форме теплоты, идет только на увеличение внутренней энергии воздуха $dQ = c_v dT$.

Если $n = \frac{c_p}{c_v}$, то теплоемкость воздуха будет равна нулю, $c_{\pi} = 0$, $dQ = 0$.

В этом случае изменение температуры воздуха происходит не в процессе теплопередачи, а за счет работы сжатия или расширения. Такой политропический процесс изменения термодинамического состояния некоторой массы воздуха, протекающей без притока и отдачи тепла, называется адиабатическим процессом.

3.4. Адиабатические процессы. Уравнение Пуассона. Потенциальная температура.

При вертикальных перемещениях воздуха в атмосфере, вследствие очень больших перепадов давления, работа расширения или сжатия намного превосходит приток тепла извне, которым можно пренебречь. Поэтому, в первом приближении, можно считать, что изменение термодинамического состояния движущегося воздуха происходит адиабатически, т.е. воздух в процессе своего движения не получает и не отдает тепло.

При адиабатических процессах приток тепла равен нулю и уравнение первого начала термодинамики принимает вид

$$c_p dT = RT \frac{dP}{P} \qquad (3.4.1)$$

Интегрируя от $T_{\circ}$ до T и от $P_{\circ}$ до P,

$$\ln \frac{T}{T_{\circ}} = \frac{R}{c_p} \ln \frac{P}{P_{\circ}} \ ,$$

потенцируя это выражение, получаем уравнение Пуассона для адиабатических процессов

$$\frac{T}{T_{\circ}} = \left(\frac{P}{P_{\circ}} \right)^{\frac{R}{c_p}}. \qquad (3.4.2)$$

Из уравнения адиабатических процессов (3.4.2) следует, что при вертикальных перемещениях, вследствие изменения давления, температура вертикально движущегося воздуха также изменяется.

Поэтому в метеорологии для сравнения теплового состояния различных масс воздуха пользуются понятием потенциальной температуры.

Потенциальной температурой называется температура, которую принимает сухой воздух, если привести его адиабатически к стандартному давлению, равному 1000 гПа. Если принять за стандартное давление $P_{\circ}$=1000 гПа, то соответствующая этому давлению температура $T_{\circ}$ будет являться потенциальной температурой θ. Тогда уравнение адиабатических процессов можно записать в виде

$$\frac{T}{\theta} = \left(\frac{P}{1000}\right)^{\frac{R}{c_p}},$$

откуда получается выражение для потенциальной температуры

$$\theta = T\left(\frac{1000}{P}\right)^{\frac{R}{c_p}} \tag{3.4.3}$$

Важнейшим свойством потенциальной температуры является то, что она не изменяется при сухоадиабатических процессах и при подъеме или опускании данной воздушной массы сохраняет постоянное значение. Для доказательства этого свойства прологарифмируем выражение (3.4.3), а затем продифференцируем и результат умножим на c_p, тогда найдем

$$c_p \frac{d\theta}{\theta} = c_p \frac{dT}{T} - R\frac{dP}{P}.$$

Сравнивая это уравнение с уравнением первого начала термодинамики (3.2.4), получим

$$\frac{dQ}{T} = c_p \frac{d\theta}{\theta} = d(c_p \ln\theta).$$

Таким образом, если процесс адиабатический $(dQ = 0)$ то потенциальная температура не изменяется

$$\theta = const\ . \tag{3.4.4}$$

Пользуясь уравнением первого начала термодинамики для адиабатических процессов в сухом воздухе можно определить сухоадиабатический вертикальный градиент температуры γ_a. Сухоадиабатическим вертикальным градиентом температуры называется величина, на которую изменяется температура порции сухого воздуха при адиабатическом перемещении ее по вертикали на единицу расстояния.

Обозначим температуру, давление и плотность вертикально движущейся порции воздуха соответственно через T_i, P_i, ρ_i, а окружающего воздуха - через T_e, P_e, ρ_e. Уравнение первого начала термодинамики для адиабатически движущейся порции воздуха будет иметь вид

$$c_p dT_i - RT_i \frac{dP_i}{P_i} = 0\ .$$

Движение воздуха в атмосфере происходит сравнительно медленно и давление в движущейся порции воздуха на любом уровне успевает выравниваться с давлением в окружающей атмосфере на этом уровне. Учитывая это условие квазистатичности процессов и пользуясь уравнениями статики и состояния, будем иметь

$$\frac{dP_i}{P_i} = \frac{dP_e}{P_e} = -\frac{gdz}{RT_e}\ . \tag{3.4.5}$$

Тогда уравнение первого начала термодинамики для адиабатических процессов можно переписать в виде

$$c_p dT_i + g\frac{T_i}{T_e}dz = 0 \tag{3.4.6}$$

При небольших вертикальных скоростях частиц воздуха можно положить $\frac{T_i}{T_e} \approx 1$; тогда

$$c_p dT_i + gdz = 0\ , \tag{3.4.7}$$

откуда находим сухоадиабатический вертикальный градиент температуры γ_a

$$\gamma_a = -\frac{dT_i}{dz} = \frac{g}{c_p} = 0{,}974\,\frac{град}{100м}\,. \qquad (3.4.8)$$

Таким образом, температура адиабатически перемещающейся порции воздуха при поднятии на каждые 100 м понижается на 1 $^{\circ}$С.

3.5. Уровень конденсации

Рассмотрим изменение термодинамического состояния влажного воздуха адиабатически поднимающегося по вертикали вверх.

Так как процесс адиабатического подъема сопровождается понижением температуры, то на некоторой высоте упругость водяного пара, содержащегося в поднимающемся воздухе, становится насыщающейся упругостью. Уровень, на котором поднимающийся воздух достигает состояния насыщения, называется уровнем конденсации и находится на высоте, близкой к нижней границе конвективных облаков.

На уровне конденсации h_k температура поднимающегося воздуха T_z оказывается равной температуре точки росы τ_z

$$\left| T(z) = \tau(z) \right|_{z=h_k} \qquad (1.5.1)$$

Точка росы τ_z также изменяется из-за изменения упругости водяного пара в поднимающемся воздухе, но удельная влажность и отношение смеси остаются постоянными до тех пор, пока воздух не достиг состояния насыщения и пока нет конденсации водяного пара.

Вводя средние вертикальные градиенты для температуры и точки росы, можно получить выражение для вычисления высоты уровня конденсации по наземным данным

$$\left| T(0) + \left(\frac{dT}{dz}\right)_{c_p} z = \tau(0) + \left(\frac{d\tau}{dz}\right)_{c_p} z \right|_{z=h_k},$$

откуда

$$h_k = \frac{T(0) - \tau(0)}{\left(\frac{d\tau}{dz}\right)_{c_p} - \left(\frac{dT}{dz}\right)_{c_p}} \qquad (3.5.2)$$

Если поднятие воздуха происходит адиабатически, то

$$\left(\frac{dT}{dz}\right)_{c_p} = \frac{dT}{dz} = -\gamma_a = -1\frac{\text{град}}{100\text{м}}$$

Специальные расчеты показывают, что точка росы поднимающегося в атмосфере воздуха в среднем понижается на 0,17 град. на каждые 100 м подъема $\left(\frac{d\tau}{dz}\right)_{c_p} = -0{,}17\frac{\text{град}}{100\text{м}}$.

Подставляя в выражение (3.5.2) численные значения средних вертикальных градиентов температуры и точки росы, получим

$$h_k = 122[T(0) - \tau(0)]. \tag{3.5.3}$$

Эта формула носит название формулы Ферреля.

3.6. Влажно-адиабатический градиент температуры

Рассмотрим теперь изменение термодинамического состояния поднимающегося воздуха выше уровня конденсации. В этом случае воздух уже является насыщенным водяным паром, подъем и охлаждение его сопровождается конденсацией водяного пара и выделением скрытой теплоты конденсации, замедляющей индивидуальное понижение температуры, обусловленное адиабатическим расширением поднимающегося воздуха. Величина, на которую изменяется температура порции влажного насыщенного воздуха при адиабатическом перемещении ее по вертикали на единицу расстояния, называется влажно-адиабатическим градиентом температуры.

Удельная влажность q выражается через максимальную упругость водяного пара E при помощи формулы

$$q = 0{,}623\frac{E}{P}. \tag{3.6.1}$$

Логарифмируя и дифференцируя выражение (3.6.1), получим

$$\frac{dq}{q} = \frac{dE}{E} - \frac{dP}{P}. \tag{3.6.2}$$

Но максимальная упругость E водяного пара зависит от температуры $E = E(T)$, следовательно, формулу (3.6.2) можно переписать в следующем виде:

$$dq = q\frac{dE}{dT}\frac{dT}{E} - q\frac{dP}{P}. \tag{3.6.3}$$

Выделение скрытой теплоты при конденсации водяного пара будет являться притоком тепла dQ к порции адиабатически поднимающегося воздуха, абсолютная величина этого притока будет равна $|dQ| = Ldq$, где L - скрытая теплота конденсации водяного пара. При этом dQ (приток тепла) и dT (изменение температуры) будут иметь противоположные знаки, так как при повышении температуры происходит испарение и скрытая теплота поглощается, а при понижении температуры водяной пар конденсируется и скрытая теплота выделяется. Поэтому уравнение первого начала термодинамики для вертикально движущейся порции влажного воздуха принимает вид

$$-Ldq = c_p dT - RT\frac{dP}{P}. \tag{3.6.4}$$

Подставляя в это уравнение количество сконденсировавшейся влаги, согласно формуле (3.6.3), находим

$$\left(c_p + \frac{Lq}{E}\frac{dE}{dT}\right)dT - (Lq + RT)\frac{dP}{P} = 0 \tag{3.6.5}$$

При квазистатических процессах отношение $\frac{dP}{P}$ можно определить из уравнения статики и уравнения состояния

$$\frac{dP}{P} = -\frac{g}{RT}dz$$

Подставляя это выражение в уравнение (3.6.5), находим

$$\left(c_p + \frac{Lq}{E}\frac{dE}{dT}\right)dT + \left(\frac{Lqg}{RT} + g\right)dz = 0. \tag{3.6.6}$$

Из этого уравнения получается выражение для влажно-адиабатического градиента температуры

$$\gamma_{ва} = -\frac{dT}{dz} = \frac{g}{c_p}\cdot\frac{1 + \frac{Lq}{RT}}{1 + \frac{Lq}{c_p E}\frac{dE}{dT}} \tag{3.6.7}$$

или, имея в виду формулу (3.4.8),

$$\gamma_{ва} = \gamma_a \cdot \frac{1 + \dfrac{Lq}{RT}}{1 + \dfrac{Lq}{c_p E}\dfrac{dE}{dT}} \tag{3.6.7a}$$

Величина влажно-адиабатического градиента зависит от упругости водяного пара в атмосфере, а, следовательно, и от температуры. При высокой температуре $\gamma_{ва}$ мал, а по мере понижения температуры $\gamma_{ва}$ возрастает и приближается к сухоадиабатическому градиенту.

3.7. Условия вертикальной устойчивости атмосферы

Вертикальные движения воздуха в атмосфере играют исключительно большую роль в процессах формирования погоды, в частности, с ними непосредственно связано образование облаков и осадков, являющихся важнейшими характеристиками погоды.

Одной из главных причин, вызывающих развитие вертикальных движений в атмосфере, является разность между температурой движущейся порции воздуха и температурой окружающей ее атмосферы. При наличии этой разности температур, возникают архимедовы силы, сообщающие движущейся порции воздуха положительное или отрицательное вертикальное ускорение.

Состояние атмосферы, при котором порция воздуха, начавшая движение по вертикали, получает ускорение в том же направлении, стремящееся удалить частицу от исходного уровня, называется неустойчивым состоянием, характеризующимся развитием конвекции. Если же порция воздуха, начавшая смещение по вертикали, получает ускорение в направлении противоположном ее движению, стремящееся вернуть частицу на исходный уровень, то состояние атмосферы называется устойчивым. Наконец, когда вертикальное движение массы воздуха зависит только от начальной скорости и вертикальное ускорение равно нулю, состояние атмосферы называется безразличным.

Ускорение частицы воздуха в атмосфере можно определить из уравнения вертикального движения, в котором силой Кориолиса можно пренебречь по сравнению с другими силами.

Обозначим вертикальную скорость частицы воздуха через w. Плотность и температуру движущейся частицы обозначим соответственно через ρ_i и T_i, а плотность и температуру окружающего воздуха - через ρ_e и T_e.

Согласно уравнению движения вертикальное ускорение частицы воздуха

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho_i}\frac{\partial P}{\partial z} - g \qquad (3.7.1)$$

При квазистатических процессах из уравнения статики и уравнения состояния находим $-\frac{1}{\rho_i}\frac{\partial P}{\partial z} = g\frac{T_i}{T_e}$.

В связи с этим для вертикального ускорения получаем

$$\frac{dw}{dt} = \frac{g}{T_e}(T_i - T_e) \qquad (3.7.2)$$

Из формулы (3.7.2) следует, что если поднимающаяся порция воздуха на всех уровнях оказывается теплее окружающей ее атмосферы $T_i > T_e$, то вертикальное ускорение будет положительным и стратификация атмосферы неустойчивой. Если поднимающаяся частица на вышележащих уровнях становится холоднее, чем окружающая атмосфера, $T_i < T_e$, то стратификация атмосферы будет устойчивой. Безразличная стратификация будет при $T_i = T_e$.

Если на исходном уровне температура движущейся частицы равнялась температуре окружающего воздуха, то после адиабатического перемещения частицы по вертикали на расстояние dz разность температур

$$T_i - T_e = -\left(\gamma_a + \frac{\partial T_e}{\partial z}\right)\delta z \qquad (3.7.3)$$

вызовет ускорение

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{g}{T_e}(\gamma_a + \frac{\partial T_e}{\partial z})\delta z\ . \qquad (3.7.4)$$

Учитывая, что $\delta z = w\delta t$, будем иметь

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{g}{T_e}(\gamma_a + \frac{\partial T_e}{\partial z})w\delta t \qquad (3.7.5)$$

Обозначим геометрический вертикальный градиент температуры

$$\frac{\partial T_e}{\partial z} = -\gamma . \tag{3.7.6}$$

Положительное значение соответствует понижению, а отрицательное - повышению температуры с высотой.

Пользуясь обозначением (3.7.6), формулу для вертикального ускорения можно записать в следующем виде:

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{g}{T_e}(\gamma_a - \gamma)w\delta t \tag{3.7.7}$$

Отсюда вытекают следующие критерии вертикальной устойчивости атмосферы:

1) $\gamma > \gamma_a$ - сухонеустойчивая стратификация;

2) $\gamma < \gamma_a$ - сухоустойчивая стратификация;

3) $\gamma = \gamma_a$ - сухобезразличная стратификация.

Если рассматривается движение частицы воздуха, насыщенной водяным паром, то в формулах вертикального ускорения вместо сухоадиабатического градиента γ_a нужно брать влажноадиабатический градиент $\gamma_{ва}$.

В общем случае, когда температура движущейся частицы на исходном уровне была равна T_{io} и отличалась от температуры T_{eo} окружающего воздуха на этом уровне, вертикальное ускорение, в соответствии с формулой (3.7.2), будет равно

$$\frac{dw}{dt} = \frac{g}{T_e}\left[(T_{io} - T_{eo}) - (\gamma_a - \gamma)\delta z\right]. \tag{3.7.8}$$

Высота, на которой вертикальное ускорение обращается в нуль и прекращается ускоренный подъем перегретых частиц воздуха, называется уровнем конвекции. Обычно уровень конвекции располагается вблизи верхней границы конвективных облаков.

Полагая в формуле (3.7.8) вертикальное ускорение равным нулю находим высоту уровня конвекции

$$\delta z = \frac{T_{io} - T_{eo}}{\gamma_a - \gamma}. \tag{3.7.9}$$

Для определения связи между устойчивостью атмосферы и изменением с высотой потенциальной температуры воспользуемся выражением $\theta = T\left(\frac{1000}{P}\right)^{\frac{R}{c_p}}$.

Вначале прологарифмируем, а затем продифференцируем его по z, тогда получим

$$\frac{1}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial z}=\frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial z}-\frac{R}{c_p}\cdot\frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial z}$$

Заменяя в этом уравнении значение $\frac{\partial P}{\partial z}$ из уравнения статики будем иметь

$$\frac{1}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial z}=\frac{1}{T}\left(\frac{g}{c_p}+\frac{\partial T}{\partial z}\right). \tag{3.7.10}$$

Так как $\frac{g}{c_p}=\gamma_a$, а $\frac{\partial T}{\partial z}=-\gamma$, то

$$\frac{\partial\theta}{\partial z}=\frac{\theta}{T}(\gamma_a-\gamma). \tag{3.7.11}$$

При устойчивом состоянии $\gamma<\gamma_a$, $\frac{\partial\theta}{\partial z}>0$; при неустойчивом состоянии $\gamma>\gamma_a$, $\frac{\partial\theta}{\partial z}<0$; при безразличном состоянии $\gamma=\gamma_a$, $\frac{\partial\theta}{\partial z}=0$.

Так как атмосфера в среднем своем состоянии стратифицирована устойчиво, то потенциальная температура и энтропия с высотой возрастают. В виду того, что сухие адиабаты на аэрологических диаграммах являются в то же время линиями равных потенциальных температур, изэнтропы совпадают с сухими адиабатами.

3.8. Энергия неустойчивости

Из предыдущего параграфа следует, что стратификация воздушной массы характеризуется вертикальным градиентом температуры в атмосфере. Но вертикальный градиент температуры в слоях атмосферы может существенно изменяться с высотой. Поэтому более удобной характеристикой состояния устойчивости расслоенного по вертикали воздуха служит общий запас энергии неустойчивости.

Энергией неустойчивости называется работа, которую может совершить архимедова сила, при вертикальном подъеме единицы массы воздуха.

Величина подъемной силы, действующей на единицу массы воздуха

$$f = \frac{dw}{dt} = \frac{g}{T_e}(T_i - T_e)\,.$$

Элементарная работа, которую совершит подъемная сила, действующая на единицу массы воздуха при перемещении ее по вертикали на бесконечно малое расстояние dz, будет

$$dЭ = \frac{g}{T_e}(T_i - T_e)dz\,. \qquad (3.8.1)$$

Воспользовавшись уравнениями статики атмосферы и состояния, формулу (3.8.1) можно записать в следующем виде:

$$dЭ = -R(T_i - T_e)d\ln P\,. \qquad (3.8.2)$$

Полная работа, которую совершит подъемная сила в слое от уровня с давлением $P_\circ$ до уровня с давлением P, будет равна

$$Э = R\int_{p_\circ}^{p}(T_e - T_i)d\ln P\,. \qquad (3.8.3)$$

Если поднимающаяся частица оказывается теплее окружающей среды ($T_i > T_e$), то энергия неустойчивости будет положительной, так как $P_\circ > P$. В этом случае состояние атмосферы будет неустойчивым. При отрицательном значении энергии неустойчивости, когда поднимающаяся частица становится холоднее окружающей среды ($T_i < T_e$), состояние атмосферы является устойчивым. Если рассматриваемый слой стратифицирован безразлично, то энергия неустойчивости равна нулю.

Возьмем прямоугольную систему координат, откладывая по оси абсцисс температуру T, а по оси ординат, в соответствии с формулой (3.8.3), - величину $\ln P$, которая уменьшается с высотой и определяет положение точки в атмосфере. Если в такой системе координат построить кривые изменения T_i и T_e в зависимости от величины $\ln P$, то, согласно формуле (3.8.3), энергия неустойчивости будет пропорциональна площади, заключенной между этими кривыми и изолиниями $\ln P_\circ$ и $\ln P$. Такой график называется аэрологической диаграммой или эмаграммой (рис.19).

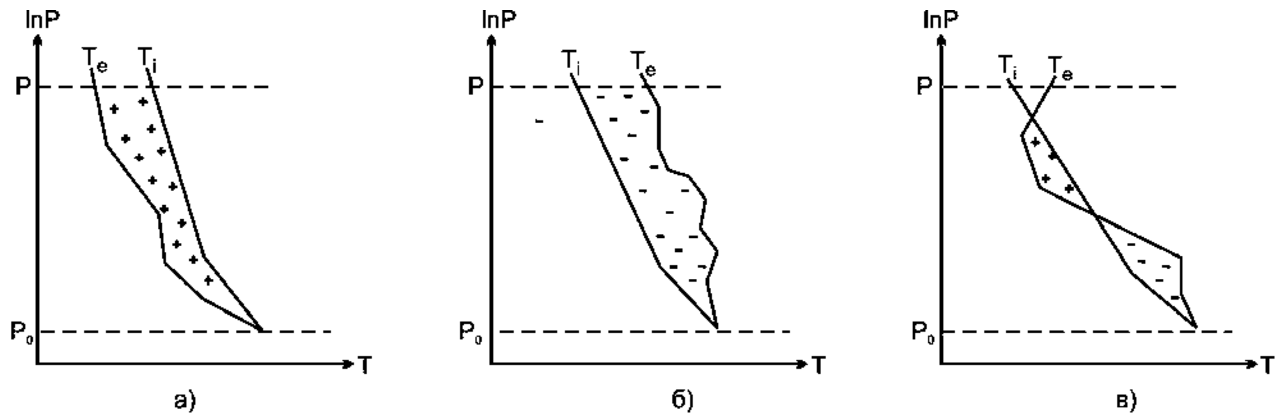


Рис. 19

Кривая T_i, характеризующая адиабатическое изменение температуры с высотой в поднимающейся порции воздуха, называется кривой состояния. Кривая T_e, характеризующая вертикальное распределение температуры в атмосфере, называется кривой стратификации.

Знак энергии неустойчивости определяется при помощи эмаграммы по взаимному расположению кривых состояния и стратификации. Если кривая состояния лежит справа от кривой стратификации (рис.19а), то энергия неустойчивости будет положительной. Когда кривая состояния лежит слева от кривой стратификации (рис.19б), энергия неустойчивости является отрицательной.

Для удобства графических построений на бланках эмаграммы нанесены семейства следующих изолиний: изобар, изотерм, сухих и влажных адиабат и изограмм, т.е. изолиний максимальной удельной влажности.

По результатам аэрологического зондирования атмосферы на бланке эмаграммы проводят кривую стратификации и кривую точек росы (депеграмму), последняя одновременно характеризует изменение с высотой удельной влажности.

Кривая состояния проводится от начальной точки на кривой стратификации до уровня конденсации по сухой адиабате, а выше - по влажной адиабате. Если имеется в приземном слое воздуха инверсия температуры или изотермия, то за начальную точку на кривой стратификации, от которой проводится кривая состояния, принимается верхняя граница приземной инверсии или изотермии. Величина давления на уровне конденсации определяется по положению точки пересечения сухой адиабаты, проходящей через начальную точку на кривой стратификации, с изограммой, проходящей через соответствующую ей начальную точку на депеграмме.

Энергия неустойчивости является величиной, пропорциональной площади, заключенной между кривыми состояния и стратификации не только на эмаграмме, но и на ряде других термодинамических графиков, удовлетворяющих определенным условиям.

Так как $T_e - T_i = \int\limits_{T_i}^{T_e} dt$, то энергию неустойчивости, определяемую формулой (3.8.3), можно выразить двойным интегралом по площади S между кривыми состояния и стратификации, построенными в координатах $T, \ln P$

$$Э = R\iint\limits_S dTd\ln P\,. \tag{3.8.4}$$

При вычислении энергии неустойчивости предполагается, что единица массы воздуха перемещается в неподвижном окружающем ее воздухе. Такой способ оценки вертикальной устойчивости атмосферы называется методом частицы.

В действительности при развитии конвекции подъем одних частиц воздуха сопровождается компенсирующим опусканием других частиц и изменением их термодинамического состояния. Примером может служить развитие кучевого облака, в котором мощные восходящие движения воздуха в центральной части сопровождаются нисходящими движениями на его периферии.

3.9. Уравнение притока тепла

Притоком тепла называется изменение количества тепловой энергии, содержащейся в единице объема воздуха при его движении за единицу времени. Уравнение притока тепла, как и первое начало термодинамики, является выражением закона сохранения энергии.

Выведем уравнение притока тепла в более общей форме, исходя из закона сохранения энергии, состоящего в том, что изменение суммы кинетической и внутренней энергии воздуха равно работе всех массовых и поверхностных сил, приложенных к воздуху, сложенной с притоком тепла.

Рассмотрим некоторый конечный объем воздуха τ. Относя все изменения к единице времени, закон сохранения энергии можно выразить уравнением

$$\frac{dE}{dt} + \frac{dJ_\tau}{dt} = Q_\tau + \iiint\limits_\tau \rho(\vec{F},\vec{V})d\tau + \iint\limits_s (\vec{P}_n,\vec{V})dS \ , \tag{3.9.1}$$

где Q_τ - приток тепла, отнесенный ко всему объему воздуха τ; J_τ - внутренняя энергия объема τ; E - кинетическая энергия объема τ; $\iiint\limits_\tau \rho(\vec{F},\vec{V})d\tau$ - работа всех массовых в единицу времени; $\iint\limits_s (\vec{P}_n,\vec{V})dS$ - работа всех поверхностных сил в единицу времени.

Возьмем теперь уравнения движения вязкой среды в напряжениях:

$$\frac{du}{dt} = F_x + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zx}}{\partial z}\right),$$
$$\frac{dv}{dt} = F_y + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial P_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zy}}{\partial z}\right), \tag{3.9.2}$$
$$\frac{dw}{dt} = F_z + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial P_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zz}}{\partial z}\right).$$

Умножая уравнения (3.9.2) соответственно на ρu, ρv, ρw, складывая их и интегрируя по всей массе, занимающей объем τ, приходим к уравнению для кинетической энергии

$$\frac{dE}{dt} = \iiint_\tau \rho(\vec{F},\vec{V})d\tau + \iiint_\tau \left[\left(\frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zx}}{\partial z}\right)u + \right.$$
$$\left.\left(\frac{\partial P_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zy}}{\partial z}\right)v + \left(\frac{\partial P_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zz}}{\partial z}\right)w\right]d\tau.$$

Замечая, что

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(P_{xx}u + P_{yx}v + P_{zx}w\right) = \frac{\partial P_{xx}}{\partial x}u + \frac{\partial P_{xy}}{\partial x}v + \frac{\partial P_{xz}}{\partial x}w +$$
$$+ P_{xx}\frac{\partial u}{\partial x} + P_{yx}\frac{\partial v}{\partial x} + P_{zx}\frac{\partial w}{\partial x}$$

и беря аналогичные соотношения для осей y и z, уравнение для кинетической энергии можем переписать в виде

$$\frac{dE}{dt} = \iiint_\tau \rho(\vec{F},\vec{V})d\tau + \iiint_\tau \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(P_{xx}u + P_{yx}v + P_{zx}w\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial y}\left(P_{xy}u + P_{yy}v + P_{zy}w\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(P_{xz}u + P_{yz}v + P_{zz}w\right)\right]d\tau -$$
$$- \iiint_\tau \left[P_{xx}\frac{\partial u}{\partial x} + P_{yy}\frac{\partial v}{\partial y} + P_{zz}\frac{\partial w}{\partial z} + P_{yz}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) + \right. \tag{3.9.3}$$
$$\left. + P_{zx}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) + P_{xy}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]d\tau.$$

Второй интеграл правой части уравнения (3.9.3) заменим через поверхностный. По теореме Остроградского-Гаусса:

Обозначим через D' подынтегральную функцию в последнем интеграле формулы (3.9.3); тогда эта формула примет вид

$$\frac{dE}{dt} = \iiint_\tau \rho(\vec{F},\vec{V})d\tau + \iint_s (\vec{P}_n,\vec{V})dS - \iiint_\tau D'd\tau\,. \qquad (3.9.4)$$

Вычитая выражение (3.9.4) из формулы (3.9.1), получим уравнение притока тепла в следующей форме:

$$\frac{dJ_\tau}{dt} = Q_\tau + \iiint_\tau D'd\tau\,. \qquad (3.9.5)$$

Это уравнение показывает, что изменение внутренней энергии воздуха происходит, во-первых, за счет притока тепла извне и, во-вторых, за счет преобразования части механической энергии в тепловую.

Обозначая через J внутреннюю энергию, отнесенную к единице массы, а через Q - количества тепла, сообщаемое извне единице массы в единицу времени, $J_\tau = \iiint_\tau \rho J d\tau$, $Q_\tau = \iiint_\tau \rho Q d\tau$ приведем уравнение (3.9.5) к виду

$$\frac{d}{dt}\iiint_\tau \rho J d\tau = \iiint_\tau \rho Q d\tau + \iiint_\tau D'd\tau\,. \qquad (3.9.6)$$

Если изменить порядок операций в левой части (что возможно, так как масса $\rho d\tau$ остается неизменной) и перенести все члены в левую часть, то будем иметь

$$\iiint_\tau \left(\rho\frac{dJ}{dt} - \rho Q - D'\right)d\tau = 0\,.$$

Так как объем τ произволен, то

$$\rho\frac{dJ}{dt} = \rho Q + D' \qquad (3.9.7)$$

или в развернутом виде

$$\rho Q = \rho\frac{dJ}{dt} - \left[P_{xx}\frac{\partial u}{\partial x} + P_{yy}\frac{\partial v}{\partial y} + P_{zz}\frac{\partial w}{\partial z} + \right.$$
$$\left. + P_{yz}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) + P_{zx}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) + P_{xy}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]. \tag{3.9.8}$$

Это есть наиболее общая форма уравнения притока тепла. Если в уравнении (3.9.8) напряжения поверхностных сил заменить через скорости деформации, то после соответствующих преобразований, уравнение притока тепла приводится к виду

$$\rho Q = \rho\frac{dJ}{dt} + P div\vec{V} + \frac{2}{3}\rho\gamma(div\vec{V})^2 -$$
$$- \rho\gamma\left\{2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right] + \right. \tag{3.9.9}$$
$$\left. + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right]\right\}.$$

Такова окончательная форма уравнения притока тепла. Выясним физический смысл членов, входящих в уравнение (3.9.9). Предполагая, что атмосфера является идеальной средой, лишенной вязкости, то есть считая, что $\gamma = 0$, уравнение притока тепла принимает вид

$$\rho Q = \rho\frac{dJ}{dt} + P div\vec{V}.$$

Согласно уравнению неразрывности $div\vec{V} = -\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}$, следовательно $\rho Q = \rho\frac{dJ}{dt} - \frac{P}{\rho}\frac{d\rho}{dt}$. Или, если принять во внимание, что для идеального газа $J = C_v T$, то

$$Q = C_v\frac{dT}{dt} + P\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right). \tag{3.9.10}$$

Второй член правой части уравнения притока тепла (3.9.10) отличен от нуля только в случае сжимаемой среды. Следовательно, член $P div\vec{V}$ выражает тепло, идущее на работу расширения, или выделяющееся в результате сжатия. Все остальные члены в уравнении (3.9.9) связаны с вязкостью. Эти члены выражают количество тепла, возникающее в единицу времени в единице объема воздуха за счет превращения механической энергии в тепловую, обусловленное влиянием вязкости. Эта совокупность членов выражает диссипацию или рассеяние механической энергии

$$D = -\frac{2}{3}\rho\gamma(div\vec{V})^2 + \rho\gamma\left\{2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right] + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right]\right\}. \quad (3.9.11)$$

Диссипация механической энергии состоит из двух частей. Первая часть связана со сжимаемостью вязкого воздуха, а вторая с его деформацией. Обычно влиянием сжимаемости воздуха пренебрегают и диссипацию механической энергии определяют формулой

$$D = \rho\gamma\left\{2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right] + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right]\right\}. \quad (3.9.12)$$

Уравнение (3.9.12) показывает, что диссипация механической энергии является величиной положительной. Это значит, что за счет диссипации не может происходить потери тепла, а всегда происходит приток тепла, т.е. превращение механической энергии в теплоту.

Учитывая диссипацию механической энергии, уравнение притока тепла можно записать в виде

$$\rho Q + D = C_v \rho \frac{dT}{dt} + P\rho \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right) = 0. \quad (3.9.13)$$

Диссипация механической энергии в тепловую, обусловленная вязкостью воздуха, мала и ей обычно пренебрегают.

Если пренебречь диссипацией механической энергии и заменить плотность воздуха при помощи уравнения состояния, то

$$Q = C_p \frac{dT}{dt} - \frac{RT}{P}\frac{dP}{dt}. \quad (3.9.14)$$

Если ввести потенциальную температуру $\theta = T\left(\frac{P_0}{P}\right)^{R/C_p}$, то для идеальной атмосферы уравнение притока тепла будет иметь вид:

$$Q = \frac{C_p T}{\theta}\frac{d\theta}{dt} \tag{3.9.15}$$

или в развернутой форме

$$Q = \frac{C_p T}{\theta}\left(\frac{\partial\theta}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial\theta}{\partial y} + w\frac{\partial\theta}{\partial z}\right). \tag{3.9.16}$$

Напомним, что здесь Q - количество тепла, сообщаемое извне единице массы воздуха за единицу времени, которое связано с внешним притоком тепла ε к единичному объему воздуха в единицу времени формулой

$$Q = \frac{\varepsilon}{\rho} \tag{3.9.17}$$

Приток тепла ε к элементарной воздушной частице складывается из лучистого притока $\varepsilon_л$, обусловленного процессами излучения и поглощения лучистой энергии, из фазового притока $\varepsilon_ф$, обусловленного выделением или поглощением скрытой теплоты в результате фазовых превращений воды, и из притока тепла $\varepsilon_м$, вызванного молекулярной теплопроводностью воздуха

$$\varepsilon = \varepsilon_л + \varepsilon_ф + \varepsilon_м \tag{3.9.18}$$

Молекулярная теплопроводность воздуха очень мала, поэтому величиной $\varepsilon_м$ можно пренебречь. Тогда уравнение притока тепла принимает следующий вид:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} + u\frac{\partial\theta}{\partial x} + v\frac{\partial\theta}{\partial y} + w\frac{\partial\theta}{\partial z} = \frac{\theta}{\rho C_p T}(\varepsilon_л + \varepsilon_ф). \tag{3.9.19}$$

Во всех приведенных здесь формах уравнения притока тепла входящие в них величины имеют мгновенные значения.

Следствием турбулентности воздуха является неупорядоченный характер изменения всех метеорологических величин во времени и пространстве так, что при исследовании атмосферных процессов пользоваться мгновенными значениями практически невозможно.

Переходя от мгновенных значений скорости, температуры, плотности и давления к средним "сглаженным" значениям, как к характеристикам усредненного движения турбулентной атмосферы, необходимо усреднить и уравнение притока тепла.

Полагая $\theta/T \approx 1$, уравнение притока тепла (3.9.19) для мгновенного неусредненного движения можно записать в виде

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} + u\frac{\partial\theta}{\partial x} + v\frac{\partial\theta}{\partial y} + w\frac{\partial\theta}{\partial z} = \frac{1}{\rho C_p}(\varepsilon_л + \varepsilon_ф). \tag{3.9.20}$$

Для усреднения воспользуемся уравнением неразрывности

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho u}{\partial x} + \frac{\partial\rho v}{\partial y} + \frac{\partial\rho w}{\partial z} = 0. \tag{3.9.21}$$

Если уравнение притока тепла (3.9.20) умножим на ρ, а уравнение неразрывности (3.9.21) - на θ и результаты сложим, то получим

$$\frac{\partial(\rho\theta)}{\partial t} + \frac{\partial u(\rho\theta)}{\partial x} + \frac{\partial v(\rho\theta)}{\partial y} + \frac{\partial w(\rho\theta)}{\partial z} = \frac{1}{C_p}\left(\varepsilon_л + \varepsilon_ф\right). \tag{3.9.22}$$

Представим мгновенные значения каждой величины, входящей в левую часть уравнения (3.9.22), в виде суммы:

$$u = \overline{u} + u';\ v = \overline{v} + v';\ w = \overline{w} + w';\ \theta = \overline{\theta} + \theta', \tag{3.9.23}$$

где $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$, $\overline{\theta}$ - средние значения соответствующих величин; u', v', w', θ' - отклонения (пульсации) от средних значений.

Подставляя в уравнение (3.9.22) проекции скорости и функцию θ по формулам (3.13.23) и усредняя его, придем к уравнению притока тепла в турбулентной атмосфере.

Если пренебречь пульсациями плотности воздуха, полагая $\rho = \overline{\rho}$, то уравнение притока тепла принимает вид

$$\begin{aligned} C_p\rho\left(\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial t} + \overline{u}\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial x} + \overline{v}\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial y} + \overline{w}\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial z}\right) = \\ = -C_p\left(\frac{\partial\rho\overline{u'\theta'}}{\partial x} + \frac{\partial\rho\overline{v'\theta'}}{\partial y} + \frac{\partial\rho\overline{w'\theta'}}{\partial z}\right) + \varepsilon_л + \varepsilon_ф. \end{aligned} \tag{3.9.24}$$

Первый член правой части уравнения (3.9.24), состоящий из трех слагаемых, также как и последние два члена, должен представлять собой приток тепла к единичному объему воздуха за единицу времени, но вызванный уже турбулентным переносом тепла, возникающим в результате беспорядочного движения множества отдельных частиц и вихрей воздуха.

В самом деле, величина $C_p\rho\theta'$ представляет собой отклонение потенциального теплосодержания частицы единичного объема от среднего значения этой величины в окрестности данной точки. В связи с этим, произведения $C_p\rho u'\theta'$, $C_p\rho v'\theta'$ и $C_p\rho w'\theta'$ определяют перенос (поток) теплосодержания за единицу времени в направлении осей координат, обусловленный движением одной частицы, составляющие дополнительной скорости которой относительно основного движения равны u', v', w'. Усреднив эти произведения по многим частицам, получим составляющие турбулентного потока тепла P:

$$P_x = C_p\rho\overline{u'\theta'}\,;\, P_y = C_p\rho\overline{v'\theta'}\,;\, P_z = C_p\rho\overline{w'\theta'}\,. \tag{3.9.25}$$

Вводя горизонтальные и вертикальный коэффициенты турбулентного обмена для переноса тепла k_x, k_y и k_z составляющие турбулентного потока тепла могут быть выражены через градиент среднего значения потенциальной температуры при помощи формул:

$$P_x = -C_p\rho k_x \frac{\partial\bar{\theta}}{\partial x}\,;\, P_y = -C_p\rho k_y \frac{\partial\bar{\theta}}{\partial y}\,;\, P_z = -C_p\rho k_z \frac{\partial\bar{\theta}}{\partial z}\,. \tag{3.9.26}$$

На основании выражений (3.13.26) турбулентный приток тепла можно определить как дивергенцию (с противоположным знаком) турбулентного потока тепла.

$$\varepsilon_T = -C_p\left(\frac{\partial\rho\overline{u'\theta'}}{\partial x} + \frac{\partial\rho\overline{v'\theta'}}{\partial y} + \frac{\partial\rho\overline{w'\theta'}}{\partial z}\right) =$$
$$= -\left(\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z}\right) = \text{-}div\,\vec{P}\ ,$$

или, воспользовавшись формулами (3.9.26), получим

$$\varepsilon_T = C_p\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho k_x\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho k_y\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho k_z\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial z}\right)\right].$$

Таким образом, в уравнении притока тепла для усредненного движения появляется дополнительный приток тепла ε_T как результат воздействия турбулентного перемешивания воздуха на его среднее термодинамическое состояние. Усредненное уравнение притока тепла в турбулентной атмосфере можно записать в виде

$$\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial t}+\overline{u}\,\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial x}+\overline{v}\,\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial y}+\overline{w}\,\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial z}=\frac{1}{C_p\rho}(\varepsilon_T+\varepsilon_л+\varepsilon_ф)\ .$$

3.10. Уравнение переноса водяного пара

Для замыкания системы уравнений в общем случае необходимо привлекать уравнение переноса водяного пара q, которое выводится аналогично уравнению неразрывности. Пренебрегая пульсациями плотности воздуха, осредненное уравнение переноса водяного пара в турбулентной атмосфере можно записать в следующем виде:

$$\begin{gathered}\frac{\partial\overline{q}}{\partial t}+\overline{u}\,\frac{\partial\overline{q}}{\partial x}+\overline{v}\,\frac{\partial\overline{q}}{\partial y}+\overline{w}\,\frac{\partial\overline{q}}{\partial z}=a^2\overline{\rho}\left(\frac{\partial^2\overline{q}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\overline{q}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\overline{q}}{\partial z^2}\right)+\\+\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x\,\frac{\partial\overline{q}}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_y\,\frac{\partial\overline{q}}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_z\,\frac{\partial\overline{q}}{\partial z}\right)+W\,,\end{gathered} \qquad (3.10.1)$$

где a^2 - коэффициент молекулярной диффузии водяного пара; W - скорость испарения, то есть количество водяного пара, появившееся в единицу времени в единице массы влажного воздуха; k_x, k_y k_z - соответственно горизонтальные и вертикальный коэффициенты турбулентного обмена.

Если пренебречь молекулярной диффузией, которая мала по сравнению с турбулентной диффузией, то уравнение переноса водяного пара для турбулентной атмосферы примет вид

$$\begin{gathered}\frac{\partial\overline{q}}{\partial t}+\overline{u}\,\frac{\partial\overline{q}}{\partial x}+\overline{v}\,\frac{\partial\overline{q}}{\partial y}+\overline{w}\,\frac{\partial\overline{q}}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x\,\frac{\partial\overline{q}}{\partial x}\right)+\\+\frac{\partial}{\partial x}\left(k_y\,\frac{\partial\overline{q}}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(k_z\,\frac{\partial\overline{q}}{\partial z}\right)+W\,,\end{gathered} \qquad (3.10.2)$$

4. ЛУЧИСТЫЙ ТЕПЛООБМЕН В АТМОСФЕРЕ

4.1. Лучистая энергия

Лучистая энергия представляет собой энергию, переносимую электромагнитными волнами различной длины.

Основными источниками лучистой энергии для атмосферы являются излучение Солнца, излучение Земли и самой атмосферы.

Проходя через атмосферу, лучистая энергия частично поглощается водяным паром, углекислым газом и некоторыми другими составными частями воздуха, превращаясь в тепловую энергию. Наряду с поглощением, каждый слой воздуха излучает в окружающее пространство лучистую энергию, теряя при этом часть своей внутренней тепловой энергии. Таким образом, лучистый теплообмен в атмосфере складывается в результате поглощения и излучения электромагнитных волн слоями воздуха.

Среди электромагнитных колебаний, распространяющихся в пространстве, известны радиоволны, тепловое излучение тел, свет, ультрафиолетовые, рентгеновские лучи и лучи, испускаемые радиоактивными веществами.

Наибольшую длину, достигающую нескольких километров, имеют радиоволны. Наиболее короткие электромагнитные волны измеряются в нанометрах и ангстремах (1мм=10^3 мкм = 10^6 нм=10^7 A^o). К ним относятся радиоактивные лучи.

Непосредственное значение в метеорологии имеют инфракрасные лучи, т.е. тепловое излучение с длиной волны от 100 до 0,76 мкм, видимые световые лучи с длиной волны от 0,76 до 0,4 мкм и ультрафиолетовые лучи, имеющие длину волны от 0,4 до 0,1 мкм.

Направление лучей можно определить в сферической системе координат полярным углом ϑ и азимутальным углом φ (рис. 20).

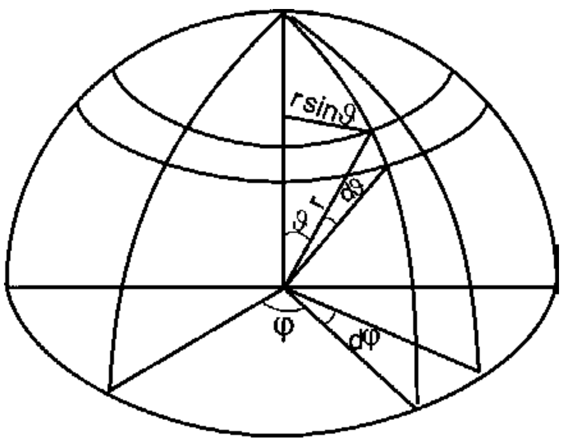


Рис.20

Количество лучистой энергии в интервале длин волн от λ до $\lambda+1$, поступающей на единичную площадку, нормальную к лучу, за единицу времени из единичного телесного угла, называется интенсивностью монохроматической радиации $j_{\lambda}(\vartheta,\varphi)$, распространяющейся в данном направлении (ϑ,φ).

Общее количество лучистой энергии δE_{λ} с длиной волны от λ до $\lambda+d\lambda$, поступающей из телесного угла $d\omega$ за время dt на площадку $d\delta_n$, нормальную к направлению лучей, очевидно будет равно интенсивности монохроматической радиации, умноженной на

$$\delta E_{\lambda} = j_{\lambda}(\vartheta,\varphi)\cdot d\delta_n d\omega d\lambda dt. \qquad (4.1.1)$$

Если направление лучей составляет некоторый угол с нормалью к произвольно выбранной площадке $d\delta$, то такое же количество лучистой энергии, падающей на нормальную к лучу площадку $d\delta_n$ (рис.21), распространится на большую площадку $d\delta$. Из рисунка 21 следует $d\delta_n = d\delta\cos\vartheta$.

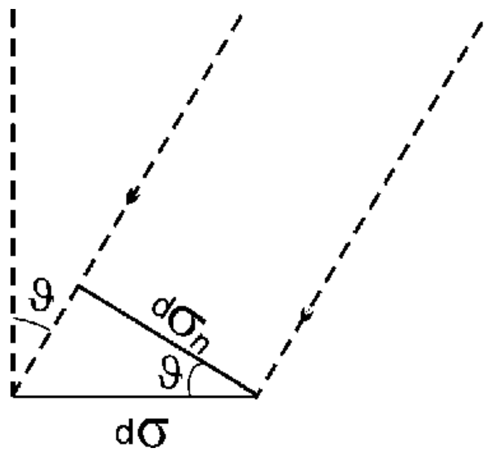


Рис. 21

В связи с этим количество лучистой энергии, поступающей на произвольно выбранную площадку $d\delta$, расположенную под некоторым углом к направлению лучей, в общем случае выразится формулой

$$\delta E_{\lambda} = j_{\lambda}(\vartheta,\varphi)\cos\vartheta d\delta d\omega d\lambda dt. \qquad (4.1.2)$$

Количество радиации с длинами волн от λ до $\lambda+1$, поступающей из телесного угла $d\omega$ за единицу времени на единицу площади, на которую лучи падают под углом ϑ к ее нормали, называется монохроматическим потоком радиации из телесного угла $d\omega$ (рис.22).

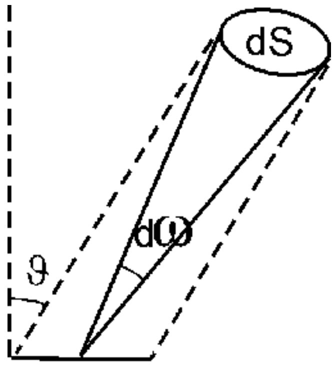


Рис. 22

Чтобы определить монохроматический поток радиации из телесного угла $d\omega$, нужно количество лучистой энергии, поступающей из телесного угла $d\omega$ на произвольную площадку за время *dt*, отнести к единицам площади, длины волны и времени, т.е. выражение (4.1.2) нужно разделить на $d\delta$, $d\lambda$, *dt*. Следовательно, поток радиации с длиной волны λ равен

$$\delta E_\lambda = j_\lambda(\vartheta, \varphi)\cos\vartheta d\omega. \qquad (4.1.3)$$

Телесный угол $d\omega$ в сферических координатах выражается формулой

$$d\omega = \frac{dS}{r^2} = \frac{r^2 \sin\vartheta d\vartheta d\varphi}{r^2} = \sin\vartheta d\vartheta d\varphi$$

В связи с этим монохроматический поток из телесного угла примет вид

$$\delta E_\lambda = j_\lambda(\vartheta, \varphi)\cos\vartheta \sin\vartheta d\vartheta d\varphi. \qquad (4.1.4)$$

Интегрируя выражение (4.1.4) по φ от 0 до 2π и по ϑ от 0 до $\pi/2$, получаем выражение для монохроматического потока радиации из полупространства

$$E_\lambda = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} j_\lambda(\vartheta, \varphi)\cos\vartheta \sin\vartheta d\vartheta d\varphi. \qquad (4.1.5)$$

В случае изотропного излучения интенсивность его j_λ не зависит от направления, тогда можно выполнить интегрирование и получить окончательное выражение для потока радиации с длиной волны λ

$$E_\lambda = 2\pi j_\lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\vartheta \sin\vartheta d\vartheta = 2\pi \frac{j_\lambda}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\vartheta d\vartheta = \pi j_\lambda .$$

Таким образом, монохроматический поток изотропной радиации связан с ее интенсивностью формулой

$$E_\lambda = \pi j_\lambda . \qquad (4.1.6)$$

Полный поток радиации из полупространства получается путем интегрирования монохроматического потока по всем длинам волн

$$E = \int_0^\infty E_\lambda d\lambda = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} j_\lambda(\vartheta, \varphi) \cos\vartheta \sin\vartheta d\vartheta d\varphi d\lambda . \qquad (4.1.7)$$

Лучистая энергия, распространяясь в какой-либо среде, частично поглощается и превращается в тепловую энергию.

В свою очередь, тела обладают способностью излучать в окружающее пространство радиацию, теряя при этом запас внутренней тепловой энергии.

Тела, полностью поглощающие всю падающую на них радиацию, называются абсолютно черными. Из реальных тел близкими к абсолютно черному телу в области коротковолновой видимой радиации является сажа и платиновая чернь, а в области инфракрасного излучения - снег. Излучение абсолютно черного тела является верхним пределом излучения всех тел при данной температуре.

Законы излучения имеют наиболее простой характер в случае равновесного теплового излучения, когда тело излучает за единицу времени столько же энергии, сколько и поглощает. В этом случае тепловое состояние тела не изменяется. В реальных условиях излучение является неравновесным. Но, если изменение температуры происходит медленно, то законы неравновесного излучения будут близки к законам равновесного излучения.

Из второго начала термодинамики следует, что для любого участка спектра интенсивность излучения абсолютно черных тел, образующих замкнутую систему, находящуюся в термодинамическом равновесии, не зависит от природы этих тел и от направления распространения излучения, т.е. черное излучение является изотропным.

$$j_\lambda(\vartheta, \varphi, T) = J(\lambda, T) \qquad (4.1.8)$$

4.2. Законы Кирхгофа

Рассмотрим внутри черного тела элементарный слой dz, который поглощает и излучает радиацию, находясь в термодинамическом равновесии. Плотность поглощающего вещества обозначим через ρ_n, массовый коэффициент излучения обозначим через l_λ, а массовый коэффициент поглощения - через a_λ.

Излучение этого слоя за единицу времени из телесного угла $d\omega$ в направлении нормали будет равно $l_\lambda d\lambda d\delta_n \rho_n dz d\omega$.

Поглощение в этом слое радиации из того же телесного угла равно $a_\lambda J(\lambda,T) d\lambda d\delta_n \rho_n dz d\omega$.

Для того, чтобы соблюдалось условие термодинамического равновесия, излучение должно быть равно поглощению, т.е. $l_\lambda = a_\lambda J(\lambda,T)$ или

$$\frac{l_\lambda}{a_\lambda} = J(\lambda,T)\,. \tag{4.2.1}$$

Это соотношение является выражением закона Кирхгофа.

При термодинамическом равновесии отношение коэффициента излучения некоторого вещества к его коэффициенту поглощения не зависит от индивидуальных свойств вещества, а является универсальной функцией температуры и длины волны. Эта универсальная функция есть интенсивность черного излучения при данной температуре в соответствующем участке спектра.

Законы Кирхгофа также можно установить и для процесса излучения и поглощения на поверхности тела, не пропускающего радиацию и находящегося внутри полости в состоянии термодинамического равновесия. Обозначим коэффициенты излучения и поглощения поверхности соответственно через $\bar{l}_\lambda$ и $\bar{a}_\lambda$, тогда будем иметь

$$\frac{\bar{l}_\lambda}{\bar{a}_\lambda} = J(\lambda,T) \tag{4.2.2}$$

Отношение излучательной способности поверхности к ее поглощательной способности равно интенсивности черного излучения и зависит только от температуры и длины волны.

4.3. Формула Стефана-Больцмана

Зависимость полного потока излучения абсолютно черного тела от его абсолютной температуры была впервые найдена Стефаном и Больцманом. Позднее Планк теоретически вывел выражение для интенсивности черного излучения в зависимости от длины волны и абсолютной температуры. В окончательном виде формула Планка имеет вид

$$J(\lambda,T)=\frac{2hc^2}{\lambda^5}\cdot\frac{1}{l^{hc/(k\lambda T)}-1}, \tag{4.3.1}$$

где $h=6{,}6262\cdot10^{-34}$ Дж $\cdot$ с - постоянная Планка, с - скорость света, $k=1{,}3807\cdot10^{-23}$ *Дж / К* - постоянная Больцмана.

На основании формулы (4.1.7) поток монохроматической радиации выражается через ее интенсивность соотношением

$$E_\lambda=\pi J(\lambda,T).$$

Пользуясь формулой Планка, полный поток черного излучения при температуре *T* можно представить в следующем виде:

$$E=2\pi hc^2\int_0^\infty\frac{d\lambda}{\lambda^5(e^{hc/(k\lambda T)}-1)}.$$

Обозначим $hc/(k\lambda T)=x$. Тогда длина волны, $\lambda=hc/(kxT)$, $d\lambda=-\frac{hc}{kTx^2}dx$, а полный поток черного излучения

$$E=-2\pi hc^2T^4\left(\frac{k}{hc}\right)^4\int_\infty^0\frac{x^3dx}{e^x-1}.$$

Подставляя значение определенного интеграла $\int_\infty^0\frac{x^3dx}{e^x-1}=\frac{\pi^4}{15}$, получаем формулу Стефана-Больцмана $E=\frac{2k^4\pi^5T^4}{15c^2h^3}$ или, обозначая $\frac{2k^4\pi^5}{15c^2h^3}=\sigma$,

$$E=\sigma T^4. \tag{4.3.2}$$

Согласно формуле Стефана-Больцмана (4.3.2), полный поток черного излучения пропорционален четвертой степени абсолютной температуры.

Постоянная Стефана-Больцмана в формуле (4.3.2) $\sigma=5{,}67\cdot10^{-8}$ *Вт/(м^2 $\cdot$ К^4)*.

4.4. Закон смещения Вина

Из формулы Планка (4.3.1) следует, что интенсивность монохроматического излучения $J(\lambda,T)$ обращается в нуль при $\lambda=0$ и при $\lambda=\infty$. Так как интенсивность излучения не может быть отрицательной величиной, то в промежутке длин волн от 0 до ∞ должен существовать по крайней мере один максимум интенсивности излучения. Чтобы найти длину волны, соответствующую максимуму излучения при данной температуре, исследуем функцию $J(\lambda, T)$ на максимум. Дифференцируя формулу Планка (4.3.1) по λ, находим

$$\frac{dJ}{d\lambda} = \frac{2hc^2}{\lambda^6 (e^{hc/(k\lambda T)} - 1)^2} \left[\frac{hce^{hc/(k\lambda T)}}{k\lambda T} + 5 - 5e^{hc/(k\lambda T)} \right].$$

Отсюда следует, что в точке экстремума должно быть

$$\frac{hce^{hc/(k\lambda T)}}{5k\lambda T} + 1 - e^{hc/(k\lambda T)} = 0 .$$

Это трансцендентное уравнение для величины $\frac{hc}{k\lambda T}$ имеет один корень, соответствующий максимуму излучения $\frac{hc}{k\lambda T} = 4{,}9651$, отсюда $\lambda_m T = \frac{hc}{4{,}9651k}$. Подставляя численные значения постоянных h, c и k, получаем

$$\lambda_m T = 2{,}8978 \cdot 10^{-3}\, м \cdot K \tag{4.4.1}$$

Исследуя знак второй производной, можно показать, что в указанной точке $J(\lambda, T)$ имеет максимум.

Формула (4.4.1) выражает закон смещения Вина: произведение длины волны, при которой черное излучение достигает максимального значения, на абсолютную температуру излучающего тела есть величина постоянная. С повышением температуры тела максимум энергии излучения его смещается в область более коротких волн.

4.5. Уравнения переноса длинноволновой радиации и их интегрирование

Потоки длинноволновой радиации в атмосфере в основном складываются из инфракрасного излучения Земли и атмосферы. Интенсивность солнечной радиации во всех частях спектра больше интенсивности излучения Земли и атмосферы, особенно велика интенсивность излучения Солнца в области коротких волн. Но солнечная радиация поступает в атмосферу из очень малого телесного угла, поэтому потоками длинноволнового излучения Солнца, по сравнению с излучением Земли и атмосферы, можно пренебречь.

Рассмотрим процесс распространения радиации через тонкий горизонтальный слой *dz* с плотностью поглощающего вещества $\rho_n(z)$.

Радиация, распространяющаяся вниз в направлении (ϑ, φ), в слое *dz* проходит путь, равный $\dfrac{dz}{\cos\vartheta}$ (рис.23).

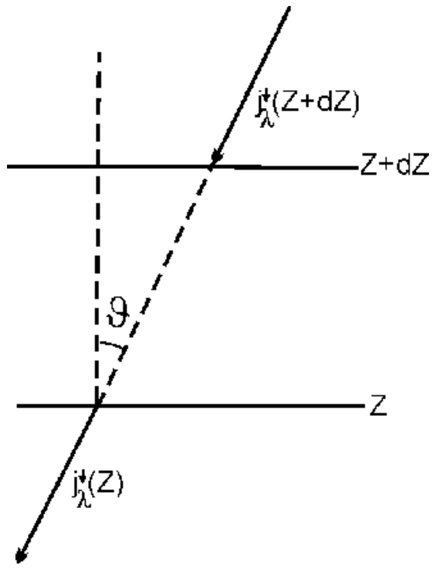


Рис. 23

На этом пути за счет поглощения слоем *dz* радиации интенсивность ее уменьшится на величину $a_\lambda \dfrac{\rho_n dz}{\cos\vartheta} j_\lambda(z)$, а за счет излучения данного слоя она увеличится на величину $l_\lambda \dfrac{\rho_n dz}{\cos\vartheta}$.

Для длинноволновой радиации эффект рассеяния очень мал и им можно пренебречь. Следовательно, интенсивность радиации, распространяющейся вниз в направлении (ϑ, φ),будет удовлетворять уравнению

$$j_\lambda^\downarrow(z) = j_\lambda^\downarrow(z+dz) - a_\lambda \frac{\rho_n dz}{\cos\vartheta} j_\lambda^\downarrow(z) + l_\lambda \frac{\rho_n dz}{\cos\vartheta},$$

которое иначе может быть записано в следующем виде:

$$\frac{dj_\lambda^\downarrow}{dz} = \frac{\rho_n}{\cos\vartheta}(a_\lambda j_\lambda^\downarrow - l_\lambda). \qquad (4.5.1)$$

Аналогично получается уравнение для интенсивности радиации, распространяющейся вверх

$$\frac{dj_\lambda^\uparrow}{dz} = \frac{\rho_n}{\cos\vartheta}(l_\lambda - a_\lambda j_\lambda^\uparrow). \qquad (4.5.2)$$

В тропосфере и нижней части стратосферы можно с достаточной степенью точности применять закон Кирхгофа. Это соответствует предположению о локальном термодинамическом равновесии, т.е. условиям, при которых в системе, не находящейся в состоянии равновесия, излучение в каждом отдельном участке спектра близко к равновесному излучению при температуре, соответствующей рассматриваемой части системы. На основании закона Кирхгофа (4.2.1) имеем $l_\lambda = a_\lambda J_\lambda$. Тогда уравнения переноса длинноволновой радиации (4.5.1) и (4.5.2) примут более простой вид:

$$\begin{aligned} \frac{dj_\lambda^\uparrow}{dz} &= \frac{\rho_n a_\lambda}{\cos\vartheta}(J_\lambda - j_\lambda^\uparrow); \\ \frac{dj_\lambda^\downarrow}{dz} &= \frac{\rho_n a_\lambda}{\cos\vartheta}(j_\lambda^\downarrow - J_\lambda). \end{aligned} \qquad (4.5.3)$$

Решение полученной системы уравнений (4.5.3) будем искать при следующих краевых условиях:

1. На очень большой высоте $(z = \infty)$ плотность поглощающего вещества (водяного пара) мала, так что интенсивностью длинноволновой радиации можно пренебречь:

$$j_\lambda^\downarrow\Big|_{z=\infty} = 0, \qquad (4.5.4)$$

т.е. длинноволновая радиация не поступает извне.

2. На уровне z=0, за который принимается деятельная поверхность с коэффициентами поглощения $\bar{a}_\lambda$ и излучения $\bar{l}_\lambda$, интенсивность радиации, распространяющейся вверх, должна быть равна сумме интенсивностей излучения деятельной поверхности и не поглощенной радиации, распространяющейся сверху $\Big| j_\lambda^\uparrow = \bar{l}_\lambda + (1-\bar{a}_\lambda) j_\lambda^\downarrow \Big|_{z=0}$. Так как $\bar{l}_\lambda = \bar{a}_\lambda J(\lambda, T)$

$$\Big| j_\lambda^\uparrow = \bar{a}_\lambda J(\lambda,T) + (1-\bar{a}_\lambda) j_\lambda^\downarrow \Big|_{z=0}. \qquad (4.5.5)$$

Для решения задачи удобнее вместо переменной величины z пользоваться величиной u, полагая $du = \rho_n dz$. Здесь du представляет собой массу поглощающего вещества в слое dz с единичным основанием. Тогда уравнения переноса длинноволновой радиации (4.5.3) принимают вид

$$\left.\begin{aligned}\frac{dj_\lambda^\uparrow}{du} &= \frac{a_\lambda}{\cos\vartheta}(J_\lambda - j_\lambda^\uparrow)\\ \frac{dj_\lambda^\downarrow}{du} &= \frac{a_\lambda}{\cos\vartheta}(j_\lambda^\downarrow - J_\lambda)\end{aligned}\right\}. \qquad (4.5.6)$$

Эти уравнения являются обыкновенными линейными дифференциальными уравнениями 1-го порядка, их общие решения, как известно, можно записать в следующем виде:

$$j_\lambda^\uparrow = e^{-\frac{a_\lambda m}{\cos\vartheta}}\left[C_1 + \frac{a_\lambda}{\cos\vartheta}\int_0^m e^{\frac{a_\lambda u}{\cos\vartheta}} J_\lambda(T)du\right]; \qquad (4.5.7)$$

$$j_\lambda^\downarrow = e^{\frac{a_\lambda m}{\cos\vartheta}}\left[C_2 - \frac{a_\lambda}{\cos\vartheta}\int_M^m e^{-\frac{a_\lambda u}{\cos\vartheta}} J_\lambda(T)du\right]. \qquad (4.5.8)$$

где $m = \int_0^z \rho_n dz$; $M = \int_0^\infty \rho_n dz$.

Для определения произвольных постоянных интегрирования C_1 и C_2 используем краевые условия (4.5.4) и (4.5.5).

При $z = \infty$, m=M. Тогда, согласно решению (4.5.8), имеем $j_\lambda^\downarrow\Big|_{m=M} = C_2 e^{\frac{a_\lambda M}{\cos\vartheta}}$, но на основании краевого условия (4.5.4) $C_2 = 0$.

При z=0, m=0. Тогда, согласно решению (4.5.7), $j_\lambda^\uparrow\Big|_{m=0} = C_1$, а на основании краевого условия (4.5.5) и полученного решения (4.5.8) имеем

$$C_1 = \bar{a}_\lambda J_\lambda(T_\circ) + (1 - \bar{a}_\lambda)\frac{a_\lambda}{\cos\vartheta}\int_0^M e^{-\frac{a_\lambda u}{\cos\vartheta}} J_\lambda(T)du.$$

Подставляя найденные значения для произвольных постоянных C_1 и C_2 в формулы (4.5.7) и (4.5.8), получаем окончательные выражения для интенсивности нисходящей и восходящей радиации с длиной волны λ и распространяющейся в направлении (ϑ, φ), соответственно вниз и вверх:

$$j_\lambda^\downarrow = \frac{a_\lambda}{\cos\vartheta}\int_m^M e^{-\frac{a_\lambda}{\cos\vartheta}(u-m)} J_\lambda(T)du; \qquad (4.5.9)$$

$$j_\lambda^\uparrow = \bar{a}_\lambda J_\lambda(T_\circ)\, e^{-\frac{a_\lambda m}{\cos\vartheta}} + \frac{a_\lambda}{\cos\vartheta}\int_0^m e^{\frac{a_\lambda}{\cos\vartheta}(u-m)} J_\lambda(T)du \; + $$
$$+ (1-\bar{a}_\lambda)\frac{a_\lambda}{\cos\vartheta}\int_0^M e^{-\frac{a_\lambda}{\cos\vartheta}(u+m)} J_\lambda(T)du \; . \tag{4.5.10}$$

Интегрируя полученные выражения для интенсивности монохроматической радиации по всем длинам волн λ, по ϑ и φ в пределах полупространства, в соответствии с формулой (4.1.5) получим полный поток длинноволновой радиации $A = E^\downarrow$, направленный вниз, и полный поток длинноволновой радиации $B = E^\uparrow$, направленный вверх:

$$A = E^\downarrow = \int_0^\infty d\lambda \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[a_\lambda \int_m^M e^{-\frac{a_\lambda}{\cos\vartheta}(u-m)} J_\lambda(T)du \right] \sin\vartheta d\vartheta, \tag{4.5.11}$$

$$B = E^\uparrow = \int_0^\infty d\lambda \left\{ \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\bar{a}_\lambda J_\lambda(T_\circ) e^{\frac{-a_\lambda m}{\cos\vartheta}} \right] \cos\vartheta \sin\vartheta d\vartheta + \right.$$
$$+ \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[a_\lambda \int_0^m e^{-\frac{a_\lambda}{\cos\vartheta}(u-m)} J_\lambda(T)du \right] \sin\vartheta d\vartheta + \tag{4.5.12}$$
$$\left. \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[(1-\bar{a}_\lambda) a_\lambda \int_0^M e^{-\frac{a_\lambda}{\cos\vartheta}(u+m)} J_\lambda(T)du \right] \sin\vartheta d\vartheta \right\}.$$

Если считать, что деятельная поверхность почвы излучает как серое тело, то среднее значение коэффициента поглощения почвы $\bar{a}_\lambda$ не зависит от переменных интегрирования и может быть вынесено из под интегралов. Тогда, обозначая оптический путь длинноволновой радиации в атмосфере через ξ, все формулы для расчета потоков радиации могут быть выражены через следующий определенный интеграл:

$$\phi(\xi) = \int_0^\infty d\lambda \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} a_\lambda e^{-\frac{a_\lambda \xi}{\cos\vartheta}} J_\lambda(T) \sin\vartheta d\vartheta . \tag{4.5.13}$$

Спектр поглощения водяного пара имеет линейчатую структуру, и его зависимость от длины волны не может быть представлена аналитически. Поэтому вместо коэффициента поглощения водяного пара a_λ удобнее пользоваться так называемой функцией пропускания радиации. В выражении определенного интеграла (4.5.13) допустима перемена последовательности интегрирования, и его можно переписать в следующем виде:

$$\phi(\xi) = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta d\vartheta \int\limits_0^{\infty} a_\lambda e^{-\frac{a_\lambda \xi}{\cos\vartheta}} J_\lambda(T) d\lambda\,. \tag{4.5.14}$$

Разделим весь промежуток интегрирования по длине волны λ на некоторые дискретные интервалы так, чтобы в каждой серии дискретных интервалов удовлетворялось условие $a \le a_\lambda \le a + \Delta a$.

Тогда для какой-либо определенной серии можно записать равенство

$$\left| \int a_\lambda e^{-\frac{a_\lambda \xi}{\cos\vartheta}} J_\lambda(T) d\lambda \right|_{a \le a_\lambda \le a+\Delta a} = a e^{-\frac{a_\lambda \xi}{\cos\vartheta}} \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{\lambda_j(a)}^{\lambda_j(a+\Delta a)} J_\lambda(T) d\lambda \tag{4.5.15}$$

Сумма, стоящая в формуле (4.5.15), представляет собой определенную долю от полной интенсивности черного излучения, возрастающую с ростом Δa,

$$\sum_{j=1}^{n} \int\limits_{\lambda_j(a)}^{\lambda_j(a+\Delta a)} J_\lambda(T) d\lambda = f(a,T)\Delta a J(T)$$

где $f(a,T)\Delta a < 1$.

В связи с этим

$$\left| \int a_\lambda e^{-\frac{a_\lambda \xi}{\cos\vartheta}} J_\lambda(T) d\lambda \right|_{a \le a_\lambda \le a+\Delta a} = a\, e^{-\frac{a_\lambda \xi}{\cos\vartheta}} f(a,T)\Delta a J(T) \tag{4.5.16}$$

Если просуммировать выражение (4.5.16) по всевозможным значениям коэффициента поглощения a от 0 до ∞, то получится внутренний интеграл, стоящий в формуле (4.5.14), который примет вид

$$\phi(\xi) = J(T) \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta d\vartheta \int\limits_0^{\infty} a e^{-\frac{a_\lambda \xi}{\cos\vartheta}} f(a) da\,. \tag{4.5.17}$$

Здесь вместо $f(a,T)$ берется $f(a)$ на том основании, что температура Земли и атмосферы изменяется в сравнительно небольших пределах и можно считать, что f зависит от a.

Заменим члены, содержащие коэффициент поглощения a, функцией $D(\xi)$, зависящей от оптического пути ξ, проходимого радиацией в атмосфере. Учитывая, что поток радиации связан с ее интенсивностью зависимостью (4.1.6), введем в формуле (4.5.17) следующее обозначение

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta d\vartheta \int_0^{\infty} a e^{-\frac{a_\lambda \xi}{\cos\vartheta}} f(a)da = -\pi \frac{dD(\xi)}{d\xi}, \tag{4.5.18}$$

тогда определенный интеграл (4.5.13) для расчета потоков радиации может быть представлен в следующем виде:

$$\phi(\xi) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta d\vartheta \int_0^{\infty} a_\lambda \; e^{-\frac{a_\lambda \xi}{\cos\vartheta}} J_\lambda(T)d\lambda = -\pi \frac{dD(\xi)}{d\xi} J(T) \tag{4.5.19}$$

Чтобы выяснить физический смысл функции $D(\xi)$, проинтегрируем уравнение (4.5.19) по ξ, полагая, что температура T не зависит от ξ,

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta \cos\vartheta d\vartheta \int_0^{\infty} e^{-\frac{a_\lambda \xi}{\cos\vartheta}} J_\lambda(T)d\lambda = \pi J(T)D(\xi) + C_1 \tag{4.5.19a}$$

Выберем постоянную интегрирования C_1, равной нулю. Учитывая, что $\pi J(T) = E(T)$ есть полный поток черной радиации, при C_1=0 будем иметь

$$D(\xi) = \frac{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta \cos\vartheta d\vartheta \int_0^{\infty} e^{-\frac{a_\lambda \xi}{\cos\vartheta}} J_\lambda(T)d\lambda}{E(T)}. \tag{4.5.20}$$

Интенсивность радиации, которая проходит поглощающий, но не излучающий слой толщиной ξ, на основании уравнений переноса длинноволновой радиации (4.5.3), оказывается равной $j_\lambda^{\uparrow}(\xi) = j_\lambda^{\uparrow}(0)e^{-\frac{a_\lambda \xi}{\cos\vartheta}}$, а поток радиации, прошедший слой оптической толщины ξ, выразится

$$B(\xi) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta \cos\vartheta d\vartheta \int_0^{\infty} J_\lambda(0)e^{-\frac{a_\lambda \xi}{\cos\vartheta}} d\lambda.$$

В связи с этим выражение (4.5.20) для $D(\xi)$ принимает вид $D(\xi) = \frac{B(\xi)}{E(T)}$. Откуда следует, что функция пропускания $D(\xi)$, связанная с коэффициентом поглощения a_λ формулой (4.5.20), представляет собой отношение потока черной радиации $B(\xi)$, прошедшей слой оптической толщины ξ, к падающему на этот слой потоку радиации $E(T)$. В отличие от коэффициента поглощения a_λ, функция пропускания $D(\xi)$ имеет более простую структуру и хорошо аппроксимируется аналитически. Ф.Н. Шехтер, на основании анализа данных, получила следующее выражение для $D(\xi)$:

$$D(\xi) = 0{,}471 e^{-0{,}696\sqrt{\xi}} + 0{,}529\, \mathrm{e}^{-8{,}94\sqrt{\xi}}, \tag{4.5.21}$$

где

$$\xi = \int_0^z \rho_n \sqrt{\frac{P}{1000}} dz . \tag{4.5.22}$$

Здесь ρ_n - плотность водяного пара, P - давление в гектопаскалях. Коэффициенты в формуле (4.5.21) выбраны с учетом поглощения не только водяным паром, но и углекислотой.

На основании выражения (4.5.20):

$$D(0) = 1; \qquad D(\infty) = 0; \qquad 0 \le D(\xi) \le 1 . \tag{4.5.23}$$

Заменим теперь в формулах для расчета потоков длинноволновой радиации в атмосфере коэффициент поглощения функцией пропускания.

Меняя последовательность интегрирования в выражениях для нисходящего и восходящего потоков длинноволновой радиации и вынося из под интегралов среднее значение коэффициента поглощения деятельной поверхности почвы, формулы (4.5.11) и (4.5.12) можно переписать в следующем виде:

$$A = \int_m^M \left[\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta d\vartheta \int_0^\infty a_\lambda J_\lambda(T) e^{-\frac{a_\lambda (u-m)}{\cos\vartheta}} d\lambda \right] du ;$$

$$B = \overline{a} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\vartheta \sin\vartheta d\vartheta \int_0^\infty e^{\frac{-a_\lambda m}{\cos\vartheta}} J_\lambda(T_\circ) d\lambda +$$

$$+ \int_0^m \left[\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta d\vartheta \int_0^\infty a_\lambda e^{-\frac{a_\lambda (u-m)}{\cos\vartheta}} J_\lambda(T) d\lambda \right] du +$$

$$+ (1-\overline{a}) \int_0^M \left[\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta d\vartheta \int_0^\infty a_\lambda e^{-\frac{a_\lambda (u+m)}{\cos\vartheta}} J_\lambda(T) d\lambda \right] du.$$

Подставляя выражения (4.5.19) и (4.5.19а) в эти уравнения и учитывая, что $\pi J(T) = E(T)$, получаем расчетные формулы для вычисления потоков радиации:

$$A(m) = -\int_{m}^{M} E(T)dD(u-m) \tag{4.5.24}$$

$$\begin{aligned} B(m) = \overline{a}E(T_{\circ})D(m) + \int_{0}^{m} E(T)dD(m-u) - \\ -(1-\overline{a})\int_{0}^{M} E(T)dD(u+m) \end{aligned} \tag{4.5.25}$$

где T=T(u), а $\left|T_{\circ} = T(u)\right|_{u=0}$.

Согласно формуле (4.5.24), поток длинноволновой радиации на уровне u=m, направленный вниз, определяется излучением и поглощением вышележащих слоев атмосферы.

Из формулы (4.5.25) следует, что поток радиации на уровне u=m, направленный вверх, складывается из излучения земной поверхности, достигшего уровня m (первое слагаемое), из потока радиации, обусловленного излучением и поглощением в слое атмосферы между Землей и уровнем m (второе слагаемое) и доли атмосферного излучения, отраженного земной поверхностью и достигшего уровня m (последнее слагаемое).

Полагая в формулах (4.5.24) и (4.5.25) коэффициент $\overline{a} = 1$, что соответствует излучению земной поверхности как абсолютно черного тела, получаем приближенные формулы для вычисления потоков длинноволновой радиации:

$$A(m) = -\int_{m}^{M} E(T)dD(u-m), \tag{4.5.26}$$

$$B(m) = E(T_{\circ})D(m) + \int_{0}^{m} E(T)dD(m-u). \tag{4.5.27}$$

На основании этих формул разработаны графические методы определения потоков радиации при помощи радиационных диаграмм.

5. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ГИДРОТЕРМОДИНАМИКИ АТМОСФЕРЫ

5.1. Постановка задач динамической метеорологии

Решение большинства вопросов и задач динамической метеорологии связано либо с определением пространственного распределения метеорологических величин в данный момент времени, либо с прогнозом погоды. Следовательно, основные задачи сводятся к нахождению функциональной зависимости метеорологических величин от координат и времени и к вычислению их значений в различных точках пространства в определенные моменты времени. Для этого должна быть составлена и решена замкнутая система уравнений, описывающая процессы, происходящие в атмосфере.

Ввиду исключительной сложности атмосферных процессов и множества различных факторов, определяющих закономерности их развития, составление замкнутой системы уравнений представляет значительные трудности.

Вследствие турбулентности воздуха приходится пользоваться усредненными уравнениями, а при усреднении появляются новые неизвестные величины.

Распределение радиации в атмосфере зависит от облачности, а также от излучения и поглощения радиации атмосферными газами, имеющими очень сложный спектр. Точный учет этих факторов связан со значительными трудностями.

Однако при некоторых достаточно корректных допущениях все же может быть составлена замкнутая система уравнений и сформулированы начальные и краевые условия, которым должны удовлетворять ее решения.

5.2. Общая система уравнений гидротермодинамики атмосферы

При решении основных задач динамической метеорологии учитываются процессы, происходящие в тропосфере и нижней стратосфере до высоты примерно 35 км, где содержится около 95% всей массы атмосферы. Для описания закономерностей движения в этих слоях, атмосферу можно рассматривать как сплошную сжимаемую среду, находящуюся под действием силы земного притяжения и вращающуюся вместе с Землей вокруг ее оси.

Если не учитывать влияние турбулентности, например, предполагая, что движение является ламинарным, и пренебречь притоком тепла, а воздух рассматривать как баротропную среду, то при таких условиях закономерности движения атмосферы полностью могут быть определены уравнениями движения и неразрывности, а также начальными и краевыми условиями. В этом простейшем случае три скалярных уравнения движения в проекциях на оси координат и уравнение неразрывности образуют замкнутую систему, состоящую из четырех уравнений и содержащую четыре неизвестных функции $u, \; v, \; w, \; P$.

С учетом бароклинности атмосферы, плотность которой зависит не только от давления, но и от температуры, появляется новая неизвестная функция - температура воздуха, которая связана с давлением и плотностью уравнением состояния $P = \rho RT$, являющимся алгебраическим соотношением, входящим в общую систему уравнений гидротермодинамики.

При учете притока тепла к движущемуся воздуху, число неизвестных функций еще увеличивается, а к системе уравнений гидротермодинамики атмосферы добавляются уравнение притока тепла и, связанные с ним, уравнения переноса водяного пара и лучистой энергии.

Основным источником тепла, обусловливающим атмосферные движения, является лучистый приток тепла.

Суммарный поток лучистой энергии в атмосфере складывается: из потока длинноволнового излучения атмосферы $A(m)$, направленного вниз, из потока длинноволнового излучения Земли и атмосферы $B(m)$, направленного вверх, и из коротковолнового солнечного излучения $S(m)$, направленного вниз.

Компоненты суммарного лучистого потока в атмосфере $A(m)$, $B(m)$, $S(m)$ определяются уравнениями:

$$A(m) = -\int_{m}^{M} E(T) dD(u-m); \qquad (5.2.1)$$

$$B(m) = E(T_{\circ}) D(m) + \int_{0}^{m} E(T) dD(m-u); \qquad (5.2.2)$$

$$S(m) = S_{\circ} \frac{L_{\circ}^{2}}{L^{2}} \cos\vartheta (1-\Gamma) \left[1 - 0{,}090 \left(\frac{M-m}{\cos\vartheta} \right)^{0{,}303} \right], \qquad (5.2.3)$$

где $m = \int_{0}^{z} \rho_{\omega} q(z) \sqrt{\frac{P}{P_{\circ}}} dz$ - среднее количество водяного пара, содержащегося в столбе единичного сечения, взятое с весом $\sqrt{\frac{P}{P_{\circ}}}$; u - переменное значение величины m; $E(T) = \sigma T^{4}$ - излучение абсолютно черного тела (поток черной радиации); q(z) - удельная влажность воздуха на уровне z; $M = m(\infty)$ - масса водяного пара в столбе атмосферы с единичным поперечным сечением; ϑ - зенитный угол Солнца; Г - коэффициент, характеризующий отражение радиации на верхней границе атмосферы; $T_\circ$ и $P_\circ$ - температура и давление у подстилающей поверхности; $S_\circ$ - солнечная постоянная; L - расстояние от Земли до Солнца ; $D(u)$ - функция пропускания для водяного пара.

Учитывая, что движение воздуха в атмосфере является турбулентным и что процессы, происходящие в турбулентной атмосфере, могут быть определены усредненными значениями метеорологических величин, необходимо усреднить и уравнения гидротермодинамики. При усреднении же уравнений появляются новые неизвестные величины и система уравнений оказывается незамкнутой, то есть число неизвестных функций становится больше числа уравнений. Если в усредненных уравнениях статистические характеристики пульсаций метеорологических величин выразить через соответствующие сглаженные (усредненные) величины и коэффициенты горизонтальной и вертикальной турбулентности k_x, k_y и k_z, то при известных их значениях система уравнений гидротермодинамики турбулентной атмосферы замыкается при отсутствии конденсации и испарения. Таким образом, получается десять уравнений, связывающих десять неизвестных функций $\overline{u}$, $\overline{v}, \overline{w}$, $\overline{P}$, $\overline{\rho}$, $\overline{\theta}$, $\overline{q}$, $A(m)$, $B(m)$, $S(m)$, зависящих от координат и времени.

Пренебрегая пульсациями плотности, а также молекулярной вязкостью и теплопроводностью воздуха, систему уравнений гидротермодинамики атмосферы можно представить в следующем виде:

$$\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}+\overline{u}\,\frac{\partial\overline{u}}{\partial x}+\overline{v}\,\frac{\partial\overline{u}}{\partial y}+\overline{w}\,\frac{\partial\overline{u}}{\partial z}=-\frac{1}{\overline{\rho}}\frac{\partial\overline{P}}{\partial x}-2\omega_y\overline{w}+2\omega_z\overline{v}+$$
$$+\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x\,\frac{\partial\overline{u}}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_y\,\frac{\partial\overline{u}}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_z\,\frac{\partial\overline{u}}{\partial z}\right);$$

$$\frac{\partial\overline{v}}{\partial t}+\overline{u}\,\frac{\partial\overline{v}}{\partial x}+\overline{v}\,\frac{\partial\overline{v}}{\partial y}+\overline{w}\,\frac{\partial\overline{v}}{\partial z}=-\frac{1}{\overline{\rho}}\frac{\partial\overline{P}}{\partial y}-2\omega_z\overline{u}+2\omega_x\overline{w}+$$
$$+\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x\,\frac{\partial\overline{v}}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_y\,\frac{\partial\overline{v}}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_z\,\frac{\partial\overline{v}}{\partial z}\right);$$

$$\frac{\partial\overline{w}}{\partial t}+\overline{u}\,\frac{\partial\overline{w}}{\partial x}+\overline{v}\,\frac{\partial\overline{w}}{\partial y}+\overline{w}\,\frac{\partial\overline{w}}{\partial z}=-\frac{1}{\overline{\rho}}\frac{\partial\overline{P}}{\partial z}-2\omega_x\overline{v}+2\omega_y\overline{u}+$$
$$+\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x\,\frac{\partial\overline{w}}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_y\,\frac{\partial\overline{w}}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_z\,\frac{\partial\overline{w}}{\partial z}\right)-\mathrm{g};$$

$$\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial t}+\frac{\partial\overline{\rho}\,\overline{u}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{\rho}\,\overline{v}}{\partial y}+\frac{\partial\overline{\rho}\,\overline{w}}{\partial z}=0\,;$$

$$\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial t}+\overline{u}\,\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial x}+\overline{v}\,\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial y}+\overline{w}\,\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial z}=-\frac{1}{C_p\overline{\rho}}\left(E_л+E_ф\right)+$$
$$+\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x\,\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_y\,\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_z\,\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial z}\right);$$

$$\frac{\partial\overline{q}}{\partial t}+\overline{u}\,\frac{\partial\overline{q}}{\partial x}+\overline{v}\,\frac{\partial\overline{q}}{\partial y}+\overline{w}\,\frac{\partial\overline{q}}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x\,\frac{\partial\overline{q}}{\partial x}\right)+$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_y\,\frac{\partial\overline{q}}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_z\,\frac{\partial\overline{q}}{\partial z}\right)+\mathrm{W}\,;$$

$$\overline{\mathrm{P}}=\overline{\rho}\overline{\mathrm{RT}};$$

Составление полной системы уравнений, описывающей одновременно все процессы, происходящие в атмосфере, еще более усложняется. Однако, для приближенного решения ряда задач предпринятая схематизация процессов является допустимой и, более того, в зависимости от конкретных свойств изучаемого процесса она может быть значительно упрощена.

Система уравнений гидротермодинамики наиболее значительно упрощается применительно к процессам, происходящим в свободной атмосфере, где в первом приближении можно пренебречь турбулентностью, а за сравнительно короткие периоды времени, порядка одних суток, можно пренебречь и влиянием притока тепла, считая, что воздух в свободной атмосфере движется адиабатически. При этом для крупномасштабных движений используется в качестве уравнения движения, спроектированного на вертикальную ось, уравнение квазистатики.

В пограничном слое атмосферы для определения коэффициентов турбулентного обмена привлекаются динамические уравнения турбулентности.

Исходная метеорологическая информация обычно задается дискретно, в отдельных точках. Кроме того, уравнения гидротермодинамики нестационарных процессов являются нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных, для которых найти точное аналитическое решение оказывается невозможно. По этим причинам эти уравнения решаются численными методами на высокопроизводительных компьютерах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белов П.Н. Численные методы прогноза погоды / П.Н. Белов, Е.П. Борисенков, Б.Д. Панин. - Л.: Гидрометеоиздат, 1989. 376 с.
4. Гандин Л.С. Основы динамической метеорологии/ Л.С. Гандин, Д.Л. Лайхтман, Л.Т. Матвеев, М.И. Юдин - Л.: Гидрометеоиздат, 1955. 647 с.
5. Гилл А. Динамика атмосферы и океана / А. Гилл - М.: Мир, 1986, Т.1-397 с., Т.2-415 с.
6. Динамическая метеорология/ Под ред. Д.Л. Лайхтмана. - Л.: Гидрометеоиздат, 1976. 607 с.
7. Задачник по динамической метеорологии/Гаврилов А.С. и др.- Л.: Гидрометеоиздат, 1984. 165 с.
8. Кочин Н.Е. Собрание сочинений /Н.Е. Кочин - М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1949. Т.1, 613 с.
9. Матвеев Л.Т. Физика атмосферы / Л.Т. Матвеев - Л.: Гидрометеоиздат, 2000. 777 с.
10. Мельникова И.И. Динамическая метеорология / И.И. Мельникова, Радикевич В.М. - Л.: ЛГМИ, 1974. 170 с.
11. Монин А.С. Теоретические основы геофизической гидродинамики /А.С. Монин - Л.: Гидрометеоиздат, 1988. 424 с. 1969.
12. Радикевич В.М. Динамическая метеорология для океанологов /В.М. Радикевич - Л.: ЛПИ, 1985. 195 с.
13. Семенченко Б.А. Физическая метеорология / Б.А. Семенченко – М. 415 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ