

Министерство образования Российской Федерации
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

М.А. МИХАЛЕВ

ИНЖЕНЕРНАЯ ГИДРОЛОГИЯ

Санкт-Петербург
Издательство СПбГТУ

2002

УДК 532.543:627.131 (075.8)

Михаилев М.А. Инженерная гидрология.

© Санкт-Петербургский государственный
технический университет, 2002

1 Введение в гидрологию	3
1.1 Определение науки «Гидрология»	3
1.2 Мировой океан, его единство и подразделения	5
1.3 Воды суши	7
2 Теория стока	1
2.1 Физико-географические факторы, определяющие режим вод суши	1
2.2 Испарение	5
2.2.1 Испарение с поверхности воды	6
2.2.2 Испарение с поверхности почвы	10
2.3 Осадки	18
2.3.1 Дожди	18
2.3.2 Снежный покров	21
2.3.3 Таяние ледников	23
2.4 Графики Ольдекопа	24
2.5 Подземные воды	26
2.6 Уравнения водного баланса речных и озерных бассейнов	31
2.7 Классификация рек по условиям их питания	37
2.8 Основные числовые характеристики стока	40
3 Математические основы гидрологических расчетов	1
3.1 Использование методов теории вероятностей и математической статистики	1
для определения расчетных стоковых величин	
3.2 Законы распределения случайных величин	2
3.3 Обеспеченность. Характеристики положения кривых распределения случайных величин	4
3.4 Характеристики формы кривых распределения случайных величин	6
3.5 Законы распределения случайных величин, отвечающие гидрологическим явлениям	10
3.6 Определение эмпирической обеспеченности	15
3.7 Подбор аналитических функций распределения, соответствующих эмпирическим данным гидрологических наблюдений	16
3.8 Критерии оценки однородности гидрологических рядов. Построение кривой	18
обеспеченности для неоднородных статистических совокупностей	
3.9 Методы построения кривых обеспеченности для однородных совокупностей	21
данных гидрологических наблюдений	
3.9.1 Метод моментов	21
3.9.2 Построение кривых обеспеченности с использованием клетчаток вероятностей	25
3.9.3 Метод квантилей	26
3.9.4 Метод наибольшего правдоподобия	28
3.10 Использование методов теории вероятностей для подбора эмпирических формул	30
3.10.1 Числовые характеристики системы случайных величин	32
3.10.2 Подбор эмпирических формул	35

3.10.3 Построение прямой регрессии двух случайных величин	42
4 Случайные процессы в гидрологии. Влияние внутрирядовой корреляции на оценки параметров кривых распределения	43
Примечание: нумерация страниц в пределах первой, второй и третьей глав (внутри соответствующих файлов)	

1.1. Определение науки "Гидрология"

Гидрология - одна из наук о Земле, дословно - наука о воде; подробнее - наука, изучающая природные воды, явления и процессы, в них протекающие. Предмет изучения гидрологии: водные объекты, снежный покров, ледники, почвенные и подземные воды. Гидрология подразделяется на океанологию, гидрологию суши, гидрогеологию и гляциологию. Все воды на Земле тесно связаны между собой, поэтому процессы влагооборота и фазовых превращений воды рассматриваются в других науках, например, в метеорологии, почвоведении, геоморфологии. Гидрология исследует круговорот воды в природе, водные скопления на поверхности Земли, многообразие происходящих в них физических процессов, количественные и качественные (загрязнение) изменения природных вод под влиянием деятельности человека (антропогенных факторов). Гидрология дает рекомендации для рационального их использования.

Гидрология суши занимается исследованием гидрологических процессов в пределах материков. Гидрология суши разделяется на итамологию (учение о реках), лимнологию (озероведение), болотоведение. Каждый раздел включает гидрометрию - науку об измерении гидрологических величин, и гидрографию - науку, описывающую водные объекты на материках. Основу методов познания закономерностей гидрологического режима составляют в гидрологии суши непрерывные в течение длительного времени наблюдения на сети гидрологических станций и постов, расположенных на реках, озерах, водохранилищах, болотах. На базе данных этих наблюдений разрабатываются гидрологические расчеты и делаются гидрологические прогнозы.

Инженерная гидрология изучает процессы, происходящие в природных водах в результате взаимодействия их с гидротехническими сооружениями. При анализе статистических данных, получаемых в результате наблюдений за гидрологическими явлениями и процессами, инженерная гидрология применяет аппарат математической статистики для систематизации и использования этих данных в научных и практических целях. В частности, методы математической статистики используются в рекомендациях по определению расчетных гидрологических характеристик при проектировании гидротехнических сооружений (например, средних годовых, максимальных, минимальных расходов и наивысших уровней воды в реках), а также при нахождении статистических связей между случайными гидрологическими величинами (между

расходами и уровнями в створе наблюдений, между стоком реки и осадками, выпадающими в пределах площади ее бассейна в зоне достаточного увлажнения и т. д.).

Инженерная гидрология разрабатывает специальные методы, основанные на анализе течения (протекания) стока, позволяющие определять расчетные гидрологические характеристики при отсутствии данных наблюдений или их недостаточной репрезентативности (несоответствии показателям, характеризующим всю генеральную совокупность).

Гидрологию считают одновременно и древней, и молодой наукой [1, 2]. Жизнь человека, начиная с древнейших времен, была тесно связана с водой. Люди, жившие на земле около 4 тыс. лет до новой эры, как свидетельствует археология, создавали крупные гидротехнические сооружения: ирригационные каналы, дамбы, водохранилища. Многоводные реки с плодородными речными долинами были центрами многих древнейших цивилизаций в Месопотамии, Египте, Индии, Китае, в Центральной и Южной Америке. Однако реки были источниками неисчислимых бедствий: в неравной борьбе со стихией люди накапливали знания о реках, производя наблюдения за их режимом. Считается, что зарождение гидрологической науки относится к 3,5 тыс. - 3,0 тыс. лет до н. э. и связано с организацией наблюдений за уровнями воды на одной из крупнейших рек мира - Ниле, на которой сохранились первые гидрометрические сооружения - водомерные посты ("ниломеры"); всего их насчитывалось около 30. В Америке и в Европе еще в XIX веке водомерные рейки и приборы для автоматической записи уровней воды называли ниломерами.

Но только в начале XX в. гидрология стала самостоятельной наукой, до этого времени она рассматривалась как часть физической географии, гидравлики, гидротехники; кроме того, ее основы излагались в курсах климатологии, почвоведения, мелиорации, внутренних водных путей. Содержание гидрологии как научной дисциплины определилось в начале нашего века в университетах и технических институтах Германии, Франции, США, России. Впервые в России в 1914 г. стал читать курс гидрологии суши в Петербургском политехническом институте проф. С.П.Макейков.

Изучение рек с целью использования их вод для нужд страны в России было начато при Петре I. По его указу в 1715 г. на Неве у Петропавловской крепости был устроен первый водомерный пост в России. К концу XVII в. такие посты уже функционировали на Ладожском озере, С.Двине, Волге. Петр правильно оценил значение водных путей для страны с ее огромными просторами и бездорожьем. Были предприняты большие работы по улучшению судоходных условий на реках, строительству шлюзов и каналов, соединяющих различные речные бассейны, например, была создана

Вышневолоцкая водная система, соединившая реки Балтийского и Каспийского бассейнов, сооружен шлюзовой канал между верховьями Оки и Дона. В XIX в. гидрологические исследования в России велись министерством путей сообщения на крупных судоходных реках и министерством земледелия на малых реках, сток которых не использовался для нужд сельского хозяйства. И только после Октябрьской революции в 1919 г. был создан центр гидрологических исследований в стране, которым стал Государственный Гидрологический институт (ГГИ), а в 1929 г. была организована гидрометеорологическая служба. Благодаря деятельности этих органов в настоящее время в странах содружества действует около 40 тысяч пунктов наблюдения за элементами гидрологического режима.

1.2. Мировой Океан, его единство и подразделения.

Водная оболочка Земли - ее Мировой океан. Из общей площади земного шара, равной 510 млн. км², Мировой океан занимает 361 млн. (71%), а Суша - 149 млн. (29%). Большая часть Суши расположена в Северном полушарии, где она занимает около 100 млн. км² (39%); на долю Южного полушария приходится оставшиеся 49 млн. км² Суши (19%). Средняя глубина Мирового океана 3,8 км., наибольшая - 11 км., объем воды $\approx 1,4$ млрд. км³. По геоморфологическим особенностям в Мировом океане различают: подводную окраину материков (шельф, материковый склон и материковое подножие), ложе океана и срединно-океанические хребты. Среднегодовая температура поверхностных вод океана равна 17,5°C (у экватора до 28°C, у полюсов - 1,9°C). Сезонные колебания температуры прослеживаются до глубины 100-150 м. На больших глубинах температура изменяется мало: в придонном слое 1,4-1,8°C, в полярных областях - ниже 0°C (морская вода из-за ее солености достигает наибольшей плотности и замерзает при более низких температурах, чем пресная, у которой эти температуры соответственно равны 4°C и 0°C). Средняя соленость вод Мирового океана 35‰ (‰ - означает промилле - тысячную часть; в данном случае 35 г. солей в 1000 г. морской воды), в тропических морях максимум до 42‰. Вся толща воды океана подвержена влиянию приливообразующих сил Солнца и Луны, в результате действия которых образуются приливно-отливные явления. Материки делят Океан на четыре части. Самая большая из них - Тихий (или Великий) Океан, площадь водной поверхности которого равна 180 млн. км². Второй по величине Атлантический океан, площадь 93 млн. км². Соленость вод Атлантики самая высокая в Мировом океане, около 37‰; это объясняется относительной близостью окружающей океан суши, куда морские ветры уносят влагу, испаряющуюся с его поверхности. Индийский океан имеет площадь 75 млн. км². Самый маленький по

площади Северный Ледовитый океан - около 13 млн. км² - имеет самую низкую среднюю соленость вод (менее 35‰) из-за большого количества впадающих в него крупных рек. Зимой 9/10 акватории Ледовитого океана покрыта дрейфующими льдами; температура вод ниже 0°C.

Океаны включают в себя моря, которые бывают окраинными и средиземными. Окраинные моря прилегают к материкам, располагаясь главным образом на шельфе (например, Баренцево море), и отделяются от океана грядой островов и полуостровов (Охотское, Японское и др.). Эти моря относительно глубокие, соленость их вод не отличается от солености вод океана.

Средиземные моря располагаются между материками или внутри материков и соединяются с океаном посредством проливов (например, Средиземное, Балтийское, Черное моря). Средиземные моря относительно мелкие из-за отложений в них речных наносов. Соленость вод этих морей зависит от климатических условий. В умеренном климате, где испарение невелико, а сток рек значителен, соленость морских вод меньше, чем в Океане. В жарком климате из-за большого испарения и малого речного стока соленость вод в средиземных морях больше, чем в Океане. Кроме того, на соленость вод этих морей существенное влияние могут оказывать местные условия. Так, в Балтийском море при устойчивых восточных ветрах соленость в среднем составляет около 1‰; при устойчивых западных ветрах соленость вод в западной части увеличивается до 20‰ из-за поступления через Датские проливы более соленых вод из Северного моря. Соленость вод в Невской губе не превышает 1-2‰, при восточных ветрах вода в губе практически не отличается от пресной невиской воды. В Черном море соленость поверхностных вод составляет 20‰, но на глубине более 150 м соленость вод увеличивается вследствие проникновения сюда через проливы Босфор и Дарданеллы более соленых, а потому более плотных вод из Средиземного моря. Из-за этого богатые кислородом поверхностные воды не могут проникнуть на глубину более 150 м (происходит это весной или осенью, когда при понижении температуры плотность воды в поверхностных слоях увеличивается, и поверхностная вода начинает опускаться вниз). Отсюда аэробная среда (богатая кислородом, в которой живут на Земле почти все животные, растения и микроорганизмы) существует в Черном море до глубины 150 м, выше этой глубины вода заражена сероводородом, поэтому среда анаэробная - не богатая кислородом.

Испарение в Средиземном море столь велико, что в летнее время уровень воды в нем понижается, поэтому наблюдается приток ее через пролив Гибралтар из Атлантического океана. Соленость вод моря свыше 39‰.

Средняя высота Суши над поверхностью Мирового океана 875 м. максимальная - 8848 м - гора Эверест (или Джомолунгма). Поверхность Суши имеет наклон по направлению к океанам и морям или к замкнутым бессточным областям. Область внешнего стока составляет около 78% от общего стока рек; область внутреннего стока, с которой вода поступает в замкнутые, находящиеся на Суше водоемы, не имеющие стока в океан, составляет 28%. Область внешнего стока делится на бассейны: Северного Ледовитого океана - 14% площади Суши, Атлантического - 35%, Тихого - 15% и Индийского - 14%. Из областей внутреннего стока наиболее значительными являются бассейны Каспийского и Аральского морей, озера Балхаш [3].

Общий объем Суши, расположенной выше уровня Океана, примерно в 13 раз меньше воды в нем. Если поверхность нашей планеты сделать плоской без выступов и впадин, то вода Мирового океана покроет ее слоем, глубина которого составит 2,6 км.

В пределах внешних и внутренних склонов сток воды осуществляется в направлении уклона местности в форме речных потоков. Другой формой, в которой воды существуют на поверхности Суши, являются озера. Общие запасы воды на Суше, включая воды в озерах, реках, ледниках, подземном бассейне, оцениваются в 48 мил. км³ [3], что составляет около 3,5% от общего объема воды на Земле. Запасы пресных вод оцениваются в 35 мил. км³, из этого количества 10 мил. составляют подземные воды, 24 мил. - воды ледников. В руслах рек находится 2 тыс. км³ воды, в пресноводных озерах - 91 тыс. км³. Таким образом, запасы воды на Суше по сравнению с объемом вод Мирового океана невелики, но роль в жизни человека огромна.

Озера - природные водоемы в углублениях Суши (котловинах, впадинах), заполненные в пределах озерной чаши водой и не имеющие прямого соединения с морем. Водоемами называются водные скопления с замедленным стоком или с замедленным водообменом. По определению к озерам можно отнести Каспийское и Аральское моря. По происхождению озера делятся на тектонические, ледниковые, речные (старичьи), приморские (лагуны и лиманы), провальные (карстовые и термокарстовые), вулканические (в кратерах вулканов), завально-запрудные (образующиеся в результате оползней, селевых потоков), искусственные (водохранилища, пруды, каналы). По химическому составу воды озера делятся на пресные (соленость менее 1‰) и минеральные (с солоноватой водой - соленость до 25‰ и соленой - свыше 25‰). Граница между солеными и солоноватыми водами выбрана в связи с тем, что при солёности воды 25‰ температура замерзания воды и достижения водой наибольшей плотности

совпадают (-1.3°C). При меньшей солености солоноватая вода в этом отношении ведет себя как пресная: вначале достигает наибольшей плотности, а потом замерзает; при большей солености соленая вода замерзает раньше, чем достигает наибольшей плотности.

В гидрологическом отношении по условиям формирования водного баланса озера делятся на сточные и бессточные. В бессточных озерах поступающая вода полностью расходуется на испарение. Если приток воды в озеро превышает испарение, то рано или поздно котловина переполняется, а излишек воды, вытекая из нее, образует реку. В бессточных озерах идет процесс накопления солей, поэтому вода в них соленая или солоноватая; в некоторых озерах содержание солей достигает столь высоких концентраций, что вода превращается в рассол (рапу) - раствор, близкий к насыщению, из-за чего возможна его кристаллизация и осаждение солей на дно (самосадочные озера, например, Эльтон и Баскунчак на севере Прикаспийской низменности).

В жизни озер различают четыре периода. Для молодого озера характерна форма котловины, которую она имела до заполнения водой (рис.1.1).

Однако первоначальная форма изменяется под действием волнений; вследствие отложений наносов в устьях рек (конусов выноса), впадающих в озеро 1 (рис.1.2); собственных озерных отложений 2, постепенно накапливающихся повсеместно на дне котловины. Таким образом, имеет место изменение береговой линии и дна котловины, что характерно для зрелого озера.

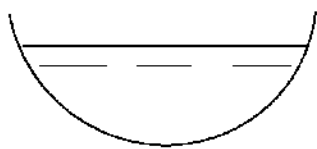


Рис. 1.1 Молодое озеро

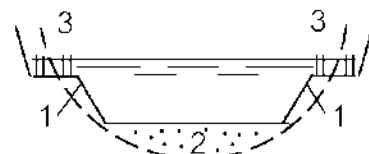


Рис. 1.2 Зрелое озеро

Разрушение береговой линии происходит под действием волн, продукты разрушения откладываются в озере вдоль берегов, образуя мелководья, а выше уровня воды в озере - побережье (или пляж). На мелководье начинает развиваться прибрежная растительность 3: осока, тростник, камыш, которые окаймляют зеркало воды зеленым кольцом. Озерные отложения представляют собой ил органического происхождения. Он образуется в результате отмирания и осаждения на дно микроорганизмов, мельчайших животных и растений (планктона), а также прибрежной растительности [4, 5]. По мере роста озерных отложений они уплотняются, образуя в анаэробной среде сапропель (гниющий ил). Одновременно с обмелением водоема растительность начинает распространяться по всему озеру, которое становится старым (рис.1.3). Старое озеро сменяется болотом (рис.1.4.) с характерной для него растительностью.

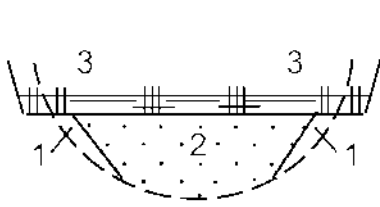


Рис. 1.3. Старое озеро

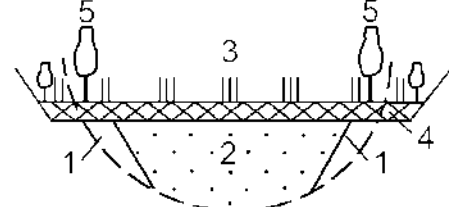


Рис.1.4. Болото на месте озера
(пунктир – контур дна молодого озера)

Развивающаяся влаголюбивая растительность является причиной образования особого вида озерных отложений - торфа 4, который представляет собой скопление остатков растений, подвергшихся неполному разложению. В травяном болоте отмирающие травы увеличивают мощность торфяных отложений, которые растут в высоту, достигая уровня, не затопляемого весенними водами. После этого на болоте появляется древесная и кустарниковая растительность 5, и травяное болото переходит в лесное.

Общий объем воды в озерах СНГ (кроме озер-морей Каспийского и Аральского) равен 28 тыс. км³, из этого количества 23 тыс. км³ (82%) воды находится в озере Байкал. Байкал - самое глубокое из всех пресноводных озер мира (1620 м) тектонического происхождения. Сюда же входят такие крупные озера, как Ладожское (объем воды 908 км³), Онежское (295 км³), Балхаш (112 км³).

Реки – водотоки, текущие в углублениях земной коры и питающиеся за счет поверхностного и подземного стока с их бассейнов. Углубления называются речными долинами, для них характерна извилистая в плане форма и общий наклон ложа к устью (тангенс угла наклона называется уклоном). Встречаясь, речные долины никогда не пересекаются, а объединяются, образуя речные системы (рис.1.5).

Речная система включает в себя главную реку 1, которая выносит воду в Океан или в бессточную область, ее притоки 2, притоки этих притоков 3 и т.д. Водосбором или речным бассейном называется территория, с которой в речную систему (или в данную реку до определенного выделенного в ней створа) стекает вода при выпадении атмосферных осадков.

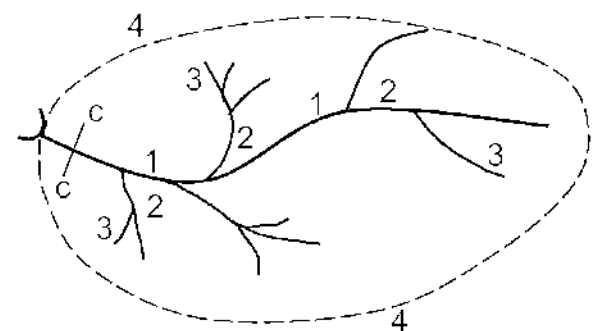


Рис. 1.5. Речная система

Кроме поверхностного, существует еще и подземный водосбор, с которого в реку поступают подземные воды (процесс отвода подземных вод называют дренаж); площади этих водосборов часто не совпадают. Водосборы двух соседних речных систем отделяются друг от друга линией водораздела 4, которая проходит по наиболее возвышенным точкам местности, причем поверхностный и подземный водоразделы не всегда совпадают. Существует главный

водораздел Земли, отделяющий реки Тихоокеанско-Индийского от рек Атлантико-Ледовитого склонов.

В поперечном сечении в речной долине (рис.1.6) выделяют следующие части: наиболее низкая ее часть называется дном; часть дна, занятая речной водой, - руслом реки 1, высокие участки суши, ограничивающие с боков дно долины, - склонами 2; площадки, поверхность которых близка к горизонтальной, расположенные в пределах склонов долины, - террасами 3. Дно речной долины и ее террасы, заливаемые речными водами в половодье, называются поймой. Глубины речных долин колеблются в широких пределах: на равнинах они составляют 200-300 м, в горной местности - на порядок больше.

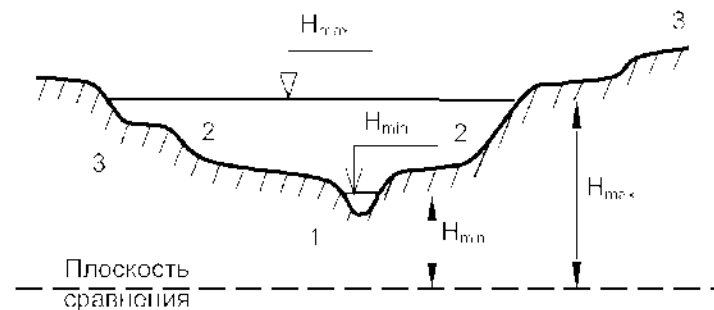


Рис. 1.6. Речная долина
(С - С см. на рис. 1.5.)

В образовании речных долин главную роль играет речная вода. Река, разрабатывая профиль своей долины, постепенно врезается в ее дно и создает террасообразное поперечное сечение долины.

То место, где река начинается, называется ее истоком. Это может быть ключ, ледник, озеро, болото. Есть реки, которые получают свое название в месте слияния двух рек, например, началом р.С.Двины является место слияния рек Сухоны и Юга; Амура - Шилки и Аргуни; Оби - Бии и Катунь.

Устье реки - место ее впадения в другую реку, озеро или море. В жарком климате есть реки, которые никуда не впадают из-за испарения или использования воды на орошение (реки в Средней Азии: Теджен и Мургаб). В устьях рек происходят процессы, связанные с отложением здесь транспортируемых рекой наносов, а если река впадает в море, - с взаимодействием пресных речных и соленых морских вод. Если река несет большое количество наносов, то в устье создается многорукавное русло, называемое дельтой. При малом содержании в речной воде наносов река часто вливается в море одним широким руслом, которое называется эстуарием (или губой). Наносы, которые откладываются в море за пределами устья, образуют мелководное взморье-бар. Более плотные соленые морские воды в придонных слоях распространяются на большое расстояние вверх по течению рек, образуя в них соленый клин. В реку проникают приливно-отливные явления. С другой стороны, влияние речных вод прослеживается в море вдали от устьев, например, здесь наблюдается уменьшение солености морской воды,

Водность реки определяют два фактора: площадь бассейна и географическое положение (климат). В табл.1.1 приведены данные о площадях крупнейших рек мира и России в порядке убывания, а также о средних расходах воды в них. При равных величинах площади бассейна средний расход воды в реке убывает по направлению от средних широт до зоны пустынь и полупустынь, а затем вновь существенно возрастает по направлению к тропическим широтам, в первую очередь, в зоне влияния муссонов.

Таблица 1.1

Река	Площадь бассейна, 10^6 км^2	Расход $10^3 \text{ м}^3/\text{с}$
Амазонка	7,18	220,00
Конго	3,70	46,00
Миссисипи	3,26	19,00
Обь	3,00	12,70
Нил	2,87	2,60
Енисей	2,58	19,80
Лена	2,49	17,00
Нигер	2,09	9,30
Амур	1,86	10,90
Янцзы (Голубая)	1,81	34,00
Волга	1,36	7,70
Дунай	0,82	6,43
Хуанхэ (Желтая)	0,77	2,00
Днепр	0,50	1,67
Дон	0,42	0,94
Сев.Двина	0,36	3,50
Нева	0,28	2,53
Рейн	0,25	2,50

Важной характеристикой речного стока является зависимость расхода воды в реке от времени года, или гидрограф реки. Изменение расхода воды от времени определяется режимом поступления воды в реку (режимом «питания» реки). На рис.1.7 приведен типичный гидрограф равнинной реки Европейской территории России (типа р.Волги). Колебания расхода воды в реке носят ярко выраженный сезонный характер и связаны с изменением вида питания реки. Это позволяет выделить на графике характерные периоды, обозначенные на рисунке двумя буквами.

Два периода малых расходов называются меженью. В зимнюю межень (на рисунке она обозначена буквами ЗМ) река полностью питается подземными водами. в летнюю межень (ЛМ) подземными и дождевыми водами. Два периода больших расходов называются: весеннее половодье (ВП) и осенний паводок (ОП). Половодье характеризуется высокой водностью и вызывается источником питания, от которого поступает наибольшее количество воды в реку. На равнинных реках – это весеннее снеготаяние, на горных – таяние ледников, на реках влажных субтропиков – муссонные ливни и т.д. Паводки возникают в результате выпадения дождей, ливней. На равнинных реках их влияние заметно в осеннюю пору (осенний паводок).

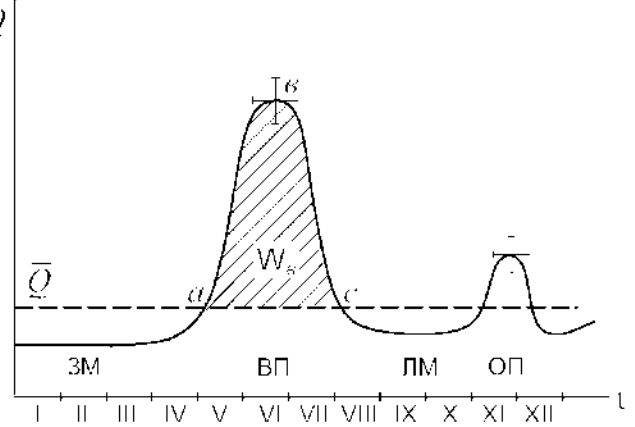


Рис.1.7. Гидрограф реки

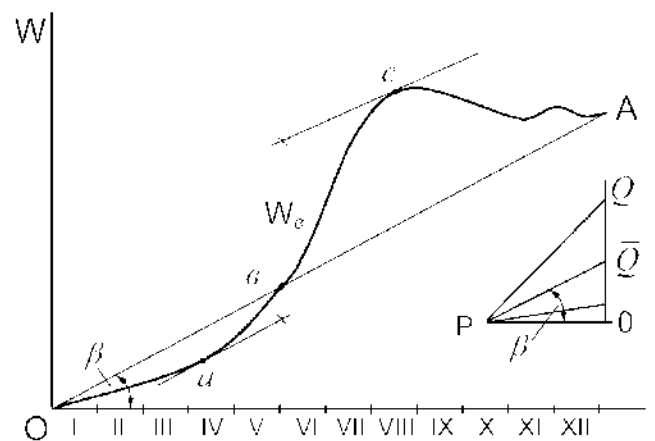


Рис. 1.8. Кривая стока

Гидрограф реки позволяет получить интегральную кривую, используя зависимость

$$W = \int_t Q \, dt .$$

которую также называют кривой стока. В связи с тем, что операция интегрирования заменяется суммированием элементарных стоков ΔW за промежуток времени Δt , кривую стока называют еще суммарной [6]. Кривая стока не убывающая, поскольку $Q > 0$. На рис.1.8 представлена кривая стока, соответствующая гидрографу реки (рис.1.7). Поскольку $dW/dt=Q$, то тангенс угла наклона касательной в любой точке кривой стока к оси t пропорционален (с учетом масштабов W и t) расходу воды в выбранный момент времени t . Тангенс угла наклона к оси времени прямой, соединяющей любые две точки на кривой стока, пропорционален среднему расходу воды $\bar{Q}$ за время, истекшее между двумя событиями, соответствующими выбранными точками. Так, если соединить на рис.1.8

начало кривой и ее конец прямой OA , то тангенс угла β наклона этой прямой к оси абсцисс пропорционален среднему расходу воды $\bar{Q}$ за рассматриваемый год (рис.1.7). В точках a и c гидрографа расходы воды в реке были равны среднему, поэтому касательные к соответствующим точкам на кривой стока (рис.1.8) будут параллельны прямой OA . Расстояние между касательными по вертикали W_b численно равно на гидрографе площади фигуры выше пунктирной прямой, покрытой штриховкой (рис.1.7). Если поставить задачу полностью зарегулировать реку и сделать расход воды в ней постоянным и равным среднему, то необходимо с помощью плотины создать на реке водохранилище, полезный объем воды в котором должен быть W_b . До точки a расходы воды в реке Q меньше среднего, поэтому полезный объем воды в водохранилище будет уменьшаться (уровень воды в нем будет понижаться, говорят, что водохранилище будет «срабатываться»). В точке a полезный объем будет полностью израсходован («сработан»), уровень воды в водохранилище достигнет минимальной отметки. Между точками a и c выполняется условие $Q > \bar{Q}$, поэтому водохранилище будет наполняться водой, в точке c уровень воды в нем достигнет максимальной отметки, затем он начнет снижаться, так как вновь наступит время малых расходов воды в реке, когда $Q < \bar{Q}$ и т.д. Подробнее о методах ретроспективного регулирования речного стока с использованием суммарных кривых можно найти в [6 - 8].

Заметим, что точке b на гидрографе, в которой выполняется условие $Q = Q_{\text{грав.}}$, на кривой стока соответствует точка перегиба. До точки b кривая стока выпуклостью направлена вниз, так как $dQ/dt = d^2W/dt^2 > 0$, после этой точки выпуклость кривой направлена вверх, ибо $dQ/dt = d^2W/dt^2 < 0$.

Обычно суммарные кривые снабжаются лучевым масштабом (на рис.1.8 справа), с помощью которого можно определить расходы воды в реке в заданные моменты или промежутки времени. Масштаб снабжается вертикальной осью расходов, при этом полное расстояние P_0 выбирается таким, чтобы осью расходов было удобно пользоваться [6].

Гидрограф, изображенный на рис.1.7, называется типовым [3], он соответствует средней линии, которую проводят среди кривых изменения расходов воды в реке в течение года, наложенных друг на друга. Точки, через которые проводят эти осредняющие кривые, соответствуют центрам амплитуд колебания характерных расходов по их величине и по времени наступления. На рис.1.7 в качестве примера в виде двух отрезков прямых, расположенных крестообразно, показаны пределы колебания

(вертикальный отрезок по величине расхода, горизонтальный по времени) максимальных расходов весеннего половодья и осеннего паводка.

Годовой сток реки, определенный по типовому гидрографу, должен быть равен среднему годовому стоку за период наблюдения, который известен, так как по условию известны гидрографы реки за этот период. При несоответствии в кривую гидрографа типового стока вносят соответствующие изменения.

Кривую стока для удобства практического использования строят в косоугольной системе координат, поворачивая ось времени t и прямую OA на угол β [6, 9]. В математическом отношении эта операция означает вычитание из стока реки W на момент времени t , аналогичного $\overline{W}$, определенного по среднему расходу воды $\overline{Q}$.

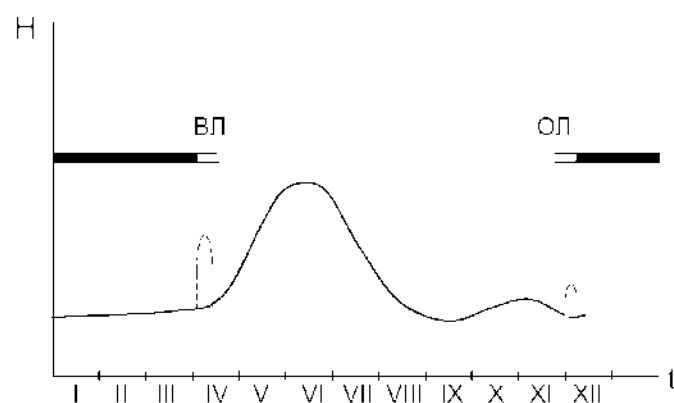


Рис. 1.9. Графики изменения уровней воды в реке от времени

Уровни воды в реке в основном изменяются в зависимости от расходов воды, поэтому ход изменения уровней в общих чертах соответствует гидрографу реки (рис.1.9). Обычно на этих графиках условными обозначениями отмечают периоды ледохода (две параллельные линии) и ледостава в реке (светлый промежуток между этими линиями затемняется). Рассматривая два периода ледохода – весенний (на рисунке ВЛ) и осенний (ОЛ), следует подчеркнуть, что в эти периоды могут наблюдаться кратковременные повышения уровней воды в реках, не связанные с изменением расходов воды в реке (на рис.1.9 они отмечены двумя пунктирными пиками). Первый подъем уровней, связанный с весенним ледоходом, особенно часто наблюдается на реках, текущих с юга на север, или в меридиональном направлении. Первые реки раньше вскрываются на юге, здесь начинается весенний ледоход, однако плывущий по реке лед наталкивается на ледяной покров, который севернее вниз по течению реки еще остается неподвижным. Плывущий лед останавливается, льдины нагромождаются друг на друга, образуя ледяную плотину (ледовый затор), отчего уровни воды в реке выше по течению начинают повышаться. На реках Европейской части России подъем уровней при заторе может достигать 4-6 м [9], на

реках Сибири – 13 и более метров [10]. В реках, текущих в меридиональном направлении, которые практически вскрываются сразу на большом протяжении, ледовые заторы образуются в сужениях русла, на мелководьях и т.п.

Второй пик в осеннее время связан с образованием внутриводного льда (шуги) и его свойствами. Известно, что вода способна переохлаждаться – принимать температуру ниже 0°C . В условиях, когда температура воздуха в осеннее время начинает опускаться ниже 0°C , а река еще не замерзла, поверхностные слои, соприкасаясь с холодным воздухом, переохлаждаются и вследствие турбулентного движения водных масс в реке оказываются вовлеченными в толщу потока. Здесь, встречая центры кристаллизации (песчинки, мелкие частицы уже образовавшегося льда), они кристаллизуются, образуя внутриводный лед. Кристаллики льда, встречаясь друг с другом, укрупняются, всплывают на водную поверхность, наплаиваются на выступы и неровности дна реки и нижнюю поверхность льда, если он образовался в реке. Особенно интенсивно наплаивается внутриводный лед на металлические предметы, образуя на их поверхности аморфную массу, которая по виду напоминает мокрый сахар, отсюда и название – шуга – по-английски – сахар. В осеннее время на шугоносных реках внутриводный лед забивает решетки электростанций и водозаборных сооружений, препятствуя поступлению воды на энергетические, промышленные и коммунальные объекты. В местах, где образовался лед, шуга скапливается под ледяным покровом, стесняя живое сечение реки, что приводит к повышению уровней воды в речке выше по течению. Это явление называется шуговым забором; подъем уровней воды может достигать 4-6 м [9].

После образования ледяного покрова шуга исчезает. Однако при скорости течения 0,6-0,8 м/с поверхностный лед не образуется. На порожистых участках рек, в пределах теснины река в начале зимы не замерзает, здесь возникает полынья – «фабрика шуги». В пределах полыньи идет интенсивное образование донного льда, ниже по течению, там, где река покрывается льдом, наблюдаются заборы. При подъемах уровней воды образуются наледи, скорость течения уменьшается, и полынья в конце концов тоже покрывается льдом.

В истоках рек, вытекающих из озер, наблюдается «термическая» полынья, которая в течение зимы не замерзает. Объясняется это тем, что вода в озере подо льдом имеет положительную температуру, достигая на больших глубинах $+4^{\circ}\text{C}$ – это температура, при которой вода имеет наибольшую плотность. По мере удаления от истока вода постепенно охлаждается, а там, где ее температура становится близкой к 0°C , образуется внутриводный лед, и наблюдаются все соответствующие ему явления. Аналогичная полынья образуется в нижнем бьефе гидроэлектростанций [9].

В практическом отношении важна зависимость расходов воды в реке в конкретном створе от уровней, или кривая связи расходов и уровней, при графическом начертании которой обычно ось уровней принимается вертикальной (рис.1.10). С увеличением расхода уровень воды, естественно, повышается, однако связь не получается жесткой, однозначной, так как на нее оказывают влияние и другие неопределяющие факторы, действующие в разном направлении: развитие и отмирание водной растительности, размывы и намывы русла в створе измерений и т.п. Но среди других факторов можно назвать такие, действие которых вполне однозначно. Например, в связи с ледоставом смоченный периметр потока увеличивается за счет появления

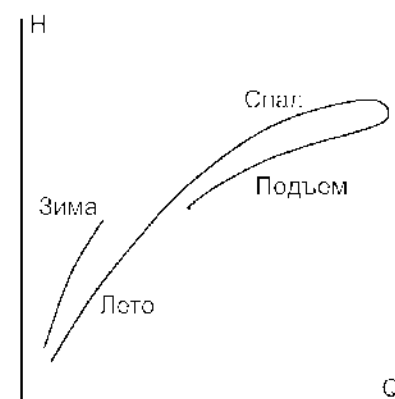


Рис. 1.10. Кривая связи расходов и уровней воды в реке

дополнительной шероховатой поверхности – ледяного покрова. Сопротивление движению также увеличивается [11], поэтому при одинаковых расходах воды в реке уровни в зимнее время стоят выше летних, что находит отражение в кривых связи расходов и уровней (рис.1.10). Особенно велика шероховатость нижней поверхности ледяного покрова в начале зимы [12] из-за того, что смерзание отдельных плывущих по реке льдин сопровождается торшением льда. К концу зимы под влиянием текущей воды, имеющей положительную температуру, торосы сглаживаются, этому способствует и нарастание толщины льда, так что шероховатость поверхности русла и льда сравниваются.

Среди других факторов, оказывающих противоположное влияние на кривую зависимости расходов от уровней воды в реке, особо выделяют те, которые связаны с прохождением в реке волны наводка. Известно, что в фазе подъема волна наводка имеет уклоны водной поверхности больше, чем в фазе спада, поэтому скорости течения на подъеме волны наводка больше, чем на спаде. Следовательно, уровни воды в реке при одном и том же расходе будут на подъеме ниже, чем на спаде волны наводка (рис.1.10).

1.4. Общий круговорот воды в природе. Внутриматериковый влагооборот.

Круговорот воды в природе реализуется и постоянно поддерживается за счет солнечной энергии (рис.1.11). Под действием солнечного тепла с поверхности океанов и морей испаряется влага 1, большая часть которой возвращается в океаны и моря в виде осадков 2, совершая малый круговорот воды. Часть водяного пара воздушными течениями переносится на континенты, где, конденсируясь, выпадает атмосферными осадками 3. Осадки, впитываясь в грунт, идут на пополнение запасов грунтовых вод 5; стекая по поверхности суши, образуют ручьи и реки 6; оставшаяся часть испаряется с поверхности

суши 4. Подземные воды питают реки, создавая вместе с поверхностными водами речной сток. Последний возвращается в океаны и моря, завершая большой круговорот воды на земле.

Вода, участвующая во влагообороте, измеряется в единицах объема, относящегося к определенной площади за выбранный промежуток времени.. Речь может идти о площади поверхности суши, континента, страны, области, речного бассейна и т.п.; В качестве единицы объема обычно выбирается км^3 , а промежутком времени может быть декада, месяц, год и т.п. На заданную площадь F в

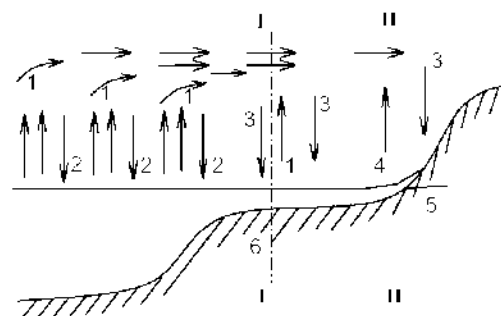


Рис. 1.11. Общий круговорот воды на Земле

течение выбранного промежутка времени могут выпадать осадки в объеме N , с ее поверхности может испаряться объем воды V и стекать в реки объем W , образуя в них речной сток. Объем воды, участвующий во влагообороте в пределах определенной площади за выбранный промежуток времени, отнесенный к этой площади, дает высоту слоя воды (осадков h_N , испарения h_V , стока h_W) на этой площади за выбранное время. Высота слоя воды обычно измеряется в мм. Таким образом,

$$N = h_N F; \quad V = h_V F; \quad h_W = W/F.$$

О последней величине говорят еще как о слое осадков, образовавшем сток.

Объемы воды, участвующие во влагообороте и соответствующие высоты ее слоя, не остаются постоянными, а непрерывно изменяются, что объясняется стохастическим характером природных явлений. Так, если говорить о годовых объемах (высотах слоя) воды, то они из года в год изменяются. В соответствующих сводных данных проводятся средние за период наблюдения величины, которые определяются для объемных величин по формулам среднего арифметического:

$$\bar{N} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n N_i; \quad \bar{V} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V_i; \quad \bar{W} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n W_i;$$

где черта сверху буквы обозначает среднюю величину за n -летний период наблюдений; i — соответствующий годовой объем i -го года. Аналогичным образом вычисляются средние величины слоев воды: $\bar{h}_N$, $\bar{h}_V$ и $\bar{h}_W$.

Получим основные зависимости для круговорота воды на земле, имея в виду средние годовые величины участвующих в процессе объемов воды. Объемы, относящиеся к мировому океану и суше, будем снабжать построчными индексами соответственно: «о» и «с». Принимаем условие сохранения воды на земле. На суше приходную часть водного баланса составляют осадки, расходную — испарение и сток рек. В мировом океане приходная часть — осадки и речной сток, расходная — испарение. Следовательно,

$$N_c = V_c + W, \quad (1.1)$$

$$\overline{N_o} + \overline{W} = \overline{V_o}. \quad (1.2)$$

Складывая, получим

$$\overline{N_c} - \overline{N_o} = \overline{V_c} - \overline{V_o}. \quad \overline{N_z} = \overline{V_z}. \quad (1.3)$$

где $\overline{N_z}$ – среднее годовое количество осадков, выпадающих на поверхность Земного шара; $\overline{V_z}$ – среднее годовое количество испарения воды с той же поверхности. Равенства (1.3) отражают условие сохранения воды на Земле, принятое выше. Для последующего важно равенство (1.1), которое перепишем так:

$$\overline{W} = \overline{N_c} - \overline{V_c}. \quad (1.4)$$

По осадки и испарение определяются климатическими факторами. Это дало основание известному климатологу А.И.Воейкову высказать такой постулат: «Реки продукт климата».

В табл. 1.2 приведены среднегодовые значения объемов воды, участвующих в мировом влагообороте [3].

Таблица 1.2.

Составляющие влагооборота	Объем, тыс.км ³ в год	Высота слоя, мм в год
<u>Испарение с поверхности:</u>		
Мирового Океана	505	1400
Суши	72	485
Суммарное	577	1130
<u>Осадки на поверхность:</u>		
Мирового Океана	458	1270
Суши	119	800
Суммарные	577	1130
Речной сток	47	315

В связи с этим интересны следующие данные. Вводится понятие о средней величине коэффициента стока η - это отношение среднего объема стока к среднему объему осадков (или соответствующее отношение высот слоев):

$$\eta = \frac{\overline{W}}{\overline{N_c}} = \frac{\overline{h_w}}{\overline{h_c}} = \frac{47}{119} = \frac{315}{800} \approx 0,39.$$

Известно, что основная масса воды на Земле сосредоточена в Мировом Океане и оценивается величиной $1,34 \cdot 10^9$ км³. С учетом всех видов вод на суше и в атмосфере общие запасы воды составляют $1,39 \cdot 10^9$ км³ [3]. Отсюда следует, что доля воды,

участвующая в мировом влагообороте, ничтожно мала по сравнению с общими запасами воды на земле: $[(577 \cdot 10^3) / (1.39 \cdot 10^9)] \cdot 100\% \approx 0,04\%$. Однако, на ее испарение согласно тому же источнику затрачивается около 42% солнечной энергии, достигающей поверхности земли, или около 18% всей энергии Солнца, приходящейся на нашу планету (с учетом отражения и нагревания атмосферы). Но так как сток рек составляет от количества воды, циркулирующей в мировом влагообороте $(47/577)100\% \approx 8\%$, то можно сказать, что в нем «законсервировано» около 3,2% солнечной энергии, достигающей поверхности земли, или 1,4% от всей энергии Солнца, приходящейся на Землю.

Количество воды в руслах рек оценивается в $2 \cdot 10^3 \text{ км}^3$; общие запасы пресных вод составляют $35 \cdot 10^6 \text{ км}^3$, из этого количества $10 \cdot 10^6 \text{ км}^3$ находится в пресных подземных водах, остальное – в основном в ледниках (в том числе только в Антарктиде – $22 \cdot 10^6 \text{ км}^3$).

Единовременно в атмосфере Земли может содержаться около $13 \cdot 10^3 \text{ км}^3$ воды в виде водяных паров, следовательно, в течение года в среднем совершается $577/13 \approx 44$ влагооборота, так что один влагооборот происходит в среднем приблизительно за $365/44 \approx 8$ суток.

В пределах континентов влага многократно испаряется и вновь выпадает на сушу в виде осадков. Чем оживленнее идут эти процессы, тем дальше влага продвигается вглубь континентов, тем самым реализуется внутриматериковый влагооборот.

Можно привести такие данные для Европейской территории бывшего Союза [3]: в течение года над ее поверхностью воздух переносит 8500 км^3 воды, выпадает на поверхность 3120 км^3 осадков, испаряется 2190 км^3 , следовательно, речной сток с этой территории составляет 930 км^3 . Можно найти ту часть влаги, которая выносится за пределы этой территории в восточном направлении: она равна – 7570 км^3 . По отношению к общей переносимой влаге осадки составляют 37%, сток – 11%, испарение – 26%. Отсюда следует, что регулирование стока с помощью водохранилищ не может существенно повлиять на режим влагооборота, а следовательно – и на климат этой территории.

Обобщенные данные о влагообороте по бывшему Союзу выглядят так: осадки – 12300 км^3 (слой 560 мм), испарение – 7880 км^3 (360 мм), сток рек – 4420 км^3 (200 мм). Сравнивая высоты слоев с данными, приведенными в табл.1,2, можно заметить, что они меньше, чем в среднем по Земле. Это объясняется в основном меньшим количеством осадков, выпадающих на территории Стран содружества. Известно, что для большинства сельскохозяйственных культур при нормальных условиях их развития необходим слой осадков не менее 800 мм в год. Следовательно, по этому показателю практически все

Страны, входящие в содружество, относятся к зоне земледелия, связанного с риском. В силу того, что отклонения от среднего в ту и в другую сторону значительны, наряду с годами, когда количество осадков достигает биологической нормы, могут быть засушливые годы, в которые количество выпавших осадков существенно меньше нормы.

В табл.1.3 приведены данные о распределении стока рек по морям и океанам, омывающих Страны содружества, в которые эти реки несут свои воды [3]. Из таблицы следует, что большая часть стока направлена по северному и восточному склонам, по сравнению с которым сток южного, западного склонов и бессточных районов составляет всего около 17% от общего стока. А ведь южные и западные Страны содружества, а также соответствующие регионы России являются наиболее населенными и развитыми в промышленном и сельскохозяйственном отношении. С другой стороны, по тем же причинам реки, несущие свои воды в западном и южном направлениях, а также находящиеся в бессточных районах, являются наиболее загрязненными.

Таблица 1.3

Океаны, моря	Сток, км ³
Тихий Океан	890
Северный Ледовитый Океан	2780
Балтийское море	170
Черное море	160
Каспийское море	300
Бессточные районы	120
Всего:	4420

2.1. Физико-географические факторы, определяющие режим вод суши

Режим стока определяется в результате сложного взаимодействия физико-географических факторов, среди которых обычно выделяют две главные группы. Первая – метеорологические (климатические) факторы: осадки, испарение, солнечная радиация, температура воздуха и почвы и направление ветра. Вторая группа – факторы подстилающей поверхности: геологическое строение водосборов, почвы, растительный покров, расчлененность рельефа, озера, болота, форма водосборной площади и т.п.

Климатические факторы определяют объем стока, его среднестатистическое значение в соответствии с зависимостью (1.4). Подстилающая поверхность, воздействуя на часть дождевых осадков, образующих на площади речных бассейнов сток, распределяет его во времени, трансформирует в ту или другую сторону. Так, осадки в виде ливней, выпадающие в горной местности, слабо впитываются горными породами, быстро стекают по крутым склонам вниз в долины, где вызывают в реках кратковременные дождевые паводки с большими расходами воды и высоким подъемом уровней. В равнинной местности формирование дождевого паводка растягивается во времени, так как скорость стекания воды мала. Движение воды сопровождается ее впитыванием в почвогрунты бассейна и отводом в грунтовые воды, часть воды задерживается в озерах, болотах, уровни ее в них повышаются. Известна регулирующая способность лесных массивов, которая наиболее ярко проявляется в весеннее время, так как снег в лесах медленнее тает, чем на полях, из-за чего половодья на реках, если их бассейны покрыты лесом, растягиваются во времени. Максимальные уровни воды и ее расходы снижаются по сравнению с реками, лежащими в одинаковых климатических районах, но с меньшей площадью речного бассейна, покрытой лесом. Таким образом, о подстилающей поверхности можно говорить как о стокораспределительном факторе. В неблагоприятных условиях, например, в горной местности, этот фактор способствует концентрации стока, кратковременному существенному увеличению расходов воды и уровней в реках. Наоборот, в благоприятных условиях, в равнинной местности, покрытой лесами, с большим количеством озер и болот подстилающая поверхность выступает как стокорегулирующий фактор, уменьшающий максимальные расходы и уровни воды в реках из-за растягивания паводков во времени. Эти процессы находят отражение и в другие периоды жизни реки. Например, в паводок наполняются водой озера и болота, поднимается уровень грунтовых вод, в межень эти объекты подстилающей поверхности

отдают воду, накопленную в многоводный период, рекам, повышая меженные расходы и уровни. В том же духе можно говорить о влиянии подстилающей поверхности на речной сток и в многолетнем отрезке времени: в многоводные годы часть воды задерживается в естественных регуляторах стока, в маловодные годы они отдают воду рекам, уменьшая амплитуду естественного колебания стока. Наиболее сильно регулирующая способность подстилающей поверхности проявляется в реках, вытекающих из озер.

В соответствии со сказанным выше можно утверждать, что для конкретного (i -го) года равенства (1.4) выполняться не должно. Вместо него нужно записать следующее :

$$W_i = N_i - V_i + \Delta W_i,$$

где ΔW_i – отклонение объема стока i -го года от разности между объемом осадков, выпавших на площади рассматриваемого речного бассейна в этот год, и объемом испарения с этой площади, которое объясняется влиянием подстилающей поверхности. Чем больше промежуток времени, за который рассматривается речной сток, тем меньше влияние подстилающей поверхности, тем точнее выполняется равенство (1.4).

На группу метеорологических факторов регулирующее влияние оказывает способность воздуха удерживать определенное количество водного пара; выраженное в $г/м^3$ оно называется абсолютной влажностью воздуха. В связи с тем, что каждый газ, находясь в смеси с другими, обладает собственной упругостью (парциальным давлением), можно говорить об упругости водяного пара, содержащегося в данный момент в воздухе, которая обычно измеряется в миллибарах и миллиметрах ртутного столба.

Количество водяного пара, находящегося при данной температуре в воздухе (его упругость), не может превосходить некоторого максимального значения, которое называется пределом насыщения (упругостью насыщения). Если абсолютная влажность превышает предел насыщения, что обычно наблюдается при резком понижении температуры воздуха, избыток водяного пара конденсируется, образуя в воздухе туман, а на земле росу (в зимнее время изморозь). В табл. 2.1. приведены данные о зависимости предела насыщения воздуха водяными парами e_0 от его температуры $t^{\circ}C$.

Таблица 2.1

$t^{\circ}C$	- 30	- 20	- 10	0	10	20
e_0 , мб	0,37	1,27	2,85	6,10	12,26	23,38
e_0 , $г/м^3$	0,33	1,08	2,35	4,86	9,42	17,92

Вводятся также понятия: дефицит влажности d – разность между пределом насыщения и абсолютной влажностью e :

$$d = e_0 - e.$$

Относительная влажность (%) e/e_0 100%; «точка росы» – температура воздуха, при которой абсолютная влажность его при данной температуре становится пределом насыщения (например, если при $t = 20^\circ\text{C}$ $e = 12,26$ мб, то «точка росы» $t = 10^\circ\text{C}$, при которой $e = e_0$). Если дефицит влажности равен нулю (относительная влажность 100%), то испарение теоретически становится невозможным.

Испарение в земных условиях происходит под действием солнечного тепла. Из общего количества тепловой энергии, приходящегося на Землю и равного 250 ккал/см^2 год [3], на нагревание воздуха расходуется 14%, отражается в мировое пространство 42%, оставшиеся 44% (110 ккал/см^2 год) идут на нагревание земной поверхности, при этом 46 ккал/см^2 год затрачиваются на испарение воды, что составляет около 42% от количества солнечного тепла, достигшего земной поверхности, или около 18% - от общего количества, приходящегося на Землю.

В процессе испарения вода из жидкого или твердого состояния превращается в пар. Происходит это из-за того, что молекулы воды в своем непрерывном движении преодолевают силы взаимного молекулярного притяжения и вылетают в воздух. Если количество вылетевших молекул превышает их количество, возвратившееся в воду, то имеет место процесс испарения. Однако в идеальных условиях спустя некоторое время испарение должно было прекратиться, так как над поверхностью воды образуется слой воздуха, насыщенный молекулами воды до состояния предельного равновесия, при котором количество молекул, покидающих воду и возвращающихся в нее, одинаково. В реальных условиях это не происходит в силу целого ряда причин. Можно говорить о молекулярной диффузии в неподвижном воздухе, при которой молекулы воды перемещаются из насыщенного слоя в более высокие и менее насыщенные слои воздуха. Если температура воздуха, непосредственно прилегающего к водной поверхности, отличается от температуры выше расположенных слоев, то возникает конвекционное перемещение воздушных масс в вертикальном направлении.

При движении воздуха (ветер) насыщенные водяными парами слои воздуха над водной поверхностью уносятся, а на смену им приходят слои, менее насыщенные водяными парами. Но ветер представляет собой турбулентное движение, поэтому имеет место одновременное перемещение воздушных масс в вертикальном направлении (турбулентная диффузия). На основании изложенного становится понятным стремление многих исследователей, пытавшихся описать процесс испарения с водной поверхности, искать скорость испарения в зависимости от дефицита влажности и скорости ветра. При этом была обнаружена связь между скоростью испарения с безбрежной водной

поверхности (поверхность океана или моря) и скоростью ветра, что объясняется влиянием турбулентной диффузии, интенсивность которой зависит от скорости ветра.

Испарение может быть с поверхности снега и льда, минуя жидкую фазу, оно называется возгонкой, а конденсация на поверхности твердого тела – сублимацией. Возгонка происходит в условиях, когда упругость водяного пара в воздухе над снегом или льдом меньше, чем упругость пара, насыщающего пространство при температуре, которую имеют поверхность снега или льда.

Значительно сложнее идет испарение с поверхности почвы, не покрытой растительностью. Оно зависит не только от дефицита влажности воздуха и скорости ветра, но и от количества влаги, содержащейся в почве, и ее состояния, определяемого силами взаимодействия частиц грунта и воды.

Наиболее просто испарение реализуется в случае полного насыщения порового пространства почвогрунтов водой, которая перемещается в порах под действием силы тяжести и называется гравитационной. Процесс испарения в этом случае по сути не отличается от испарения с водной поверхности, но есть особенности, заключающиеся в том, что поверхность почвогрунтов при одной и той же температуре приземных слоев атмосферы нагревается иначе, чем водная поверхность; кроме того, площадь поверхности почвы из-за ее комковатой структуры больше водной поверхности при одних и тех же внешних размерах. Испарение при полном увлажнении почвы называется испаряемостью [3].

Более сложно протекает процесс испарения в случае неполного насыщения порового пространства почвогрунтов водой, которая перемещается под действием сорбционных (от лат. сорбесо - поглощаю) и капиллярных (от лат. капиллярис - волосной) сил и называется соответственно пленочной и капиллярной [3, 12]. Силы молекулярного взаимодействия между частицами воды и грунта, или сорбционные, удерживают воду на поверхности частиц; они велики, но радиус их влияния весьма мал. Под действием этих сил вода может адсорбироваться (адсорбция - поглощение поверхностью сорбента, абсорбция - поглощение всей массой сорбента) частицами грунта из воздуха, находящегося в состоянии полного насыщения в поровом пространстве; такая вода называется гигроскопичной, она недоступна растениям, отделить ее от грунта можно только нагреванием. Пленочная вода находится над гигроскопичной, она считается рыхло связанной с частицами грунта, но растениями усваивается с трудом. В капиллярах, в менисках, образующихся между частицами вследствие поверхностного натяжения, действуют капиллярные силы. Капиллярная вода, перемещающаяся под действием этих сил, доступна растениям. Она бывает подпертой, если снизу соединяется с уровнем

грунтовых вод; в таком случае говорят, что над уровнем грунтовых вод находится капиллярная кайма. Капиллярная вода называется подвешенной, если располагается над водоносным горизонтом, не соединяясь с ним.

2.2. Испарение

Кроме непосредственного наблюдения за испарением с помощью приборов в практике гидро- и метеорологических наблюдений используются расчетные методы, эмпирические формулы, специальные графики и карты. Для расчетов испарения применяются следующие методы: водного и теплового баланса, турбулентной диффузии.

Метод турбулентной диффузии основан на современном представлении о турбулентном движении и математическом описании его. В турбулентном (беспорядочном) течении частицы жидкости или газа совершают хаотическое движение по сложным траекториям, а скорость, давление и плотность среды испытывают флуктуации (пульсации). Так в турбулентном потоке вдоль горизонтальной поверхности возникают поперечные пульсационные скорости течения, благодаря которым происходит перенос масс жидкости или газа из нижних слоев в верхние и, наоборот, - из верхних в нижние. Турбулентное перемешивание (или обмен) приводит к перемещению (диффузии) содержащихся в потоке примесей, как растворенных, так и взвешенных, а также тех свойств, которыми поток обладает, например, теплоты.

Метод теплового баланса основан на учете потоков теплоты, поглощаемых рассматриваемым объектом и расходуемых им через выделяющие объект границы. Источником тепловой энергии является Солнце. Суммарный поток солнечного излучения, проходящий через единичную площадку, перпендикулярную направлению лучей и находящуюся вне земной атмосферы на расстоянии радиуса земной орбиты, называется солнечной постоянной. Солнечная постоянная S_0 равна 1373 Вт/м^2 . Поскольку в системе СИ $1 \text{ Вт} = 1 \text{ Дж/с}$, а $1 \text{ Дж} = 0,2388 \text{ кал}$, то $S_0 = 1,98 \text{ кал/см}^2 \text{ мин}$. Удельная теплота испарения воды зависит от ее температуры, и при 15°C приблизительно равна 590 кал/г . Если принять, что массе воды в 1 г соответствует объем 1 см^3 , то солнечную постоянную можно представить в виде эквивалентного слоя испарившейся воды, который равен $48,3 \text{ мм/сут}$.

Спектр солнечной радиации охватывает диапазоны длин волн от гамма-излучения до радиоволн; его делят на две части: коротковолновую радиацию с длинами волн от $0,28$ до $4,0$ микрон (мк) и длинноволновую - с длинами волн от $4,0$ до 40 мк. Видимая часть спектра, воспринимаемая человеческим глазом, находится в диапазоне длин волн от

0,40 мк (фиолетовый свет) до 0,74 мк (красный свет). Энергетический максимум солнечной радиации приходится на видимую часть спектра (с максимумом при 0,46 мк). Здесь же находится фотосинтетически активная радиация (ФАР), которая используется зелеными растениями и фотосинтезирующими микроорганизмами для превращения лучистой энергии Солнца в энергию химических связей органических веществ; она занимает диапазон 0,38...0,71 мк.

Таким образом, естественные тепловые процессы на Земле определяются коротковолновой солнечной радиацией. Однако, на пути к земной поверхности теряется значительная ее часть, поглощаясь озоновым слоем атмосферы и содержащимися в ней кислородом, водяным паром, диоксидом углерода и аэрозолями. Приходящая к поверхности радиация зависит от географической широты местности, времени года и суток, облачности, длины дня (в ночное время ее, естественно, нет). Помимо прямой радиации, к земной поверхности приходит еще и рассеянная (или диффузионная), которая имеется даже при безоблачном небе. При малых высотах солнца и сплошной облачности вся радиация становится рассеянной. Обычно, когда говорят о приходящей радиации, имеется в виду суммарная радиация (прямая плюс рассеянная).

Следует заметить, что метод теплового баланса требует полного учета всех источников поступления и расходования тепловой энергии рассматриваемым объектом на земной поверхности. Как отмечается в [3, 13], для расчета испарения с водной поверхности озера, кроме радиационного баланса и турбулентного обмена, необходимо еще учитывать теплообмен с ложем водоема, увеличение запасов теплоты в озере за расчетный период (для его оценки необходимо производить измерение температуры во многих точках озера на различных глубинах с большой точностью), разность между приходом и расходом теплоты за счет притока или оттока воды, тоже за счет всех видов поступления и оттока воды подземными путями, приход теплоты, обусловленный разностью температур осадков и воды в озере. В случае снежного и ледяного покрова составляющие, входящие в уравнение теплового баланса, обусловленные турбулентной диффузией, могут входить в него с разными знаками; кроме того, при образовании льда теплота выделяется, а при его таянии на месте - затрачивается. Как отмечается в [3], метод теплового баланса требует многочисленных тщательных измерений различных его составляющих, поэтому он больше пригоден для целей исследований, чем для непосредственного использования на практике.

2.2.1. Испарение с поверхности воды.

Для изучения испарения с водной поверхности применяются специальные приборы – плавучие испарители, состоящие из двух сосудов одинакового диаметра, один из которых является собственно испарителем, другой – дождемером для учета слоя осадков, выпавших во время наблюдения за испарением. Однако из-за волнений водной поверхности плавучие испарители используются редко. На практике испарители чаще устанавливаются на берегу в сочетании с дождемерами. Наблюдениями было обнаружено, что такие испарители дают погрешность, которая увеличивается с уменьшением диаметра испарителя в сторону преувеличения результатов. Погрешность приближается к нулю, если площадь испарительного бассейна равна не менее 20 м^2 .

В рассматриваемом случае применяются методы водного и теплового баланса и турбулентной диффузии. Метод водного баланса заключается в следующем: для конкретного водоема определяются за выбранный период наблюдения осадки, приток и сток поверхностных вод, расход воды на фильтрацию, приток подземных вод, изменение уровня воды в водоеме за время наблюдения, а также убыль воды на испарение, которая является искомой величиной. Недостатком метода является возможность получения больших погрешностей из-за трудностей учета объемов подземных вод. Кроме того, должны быть организованы достаточно точные наблюдения за остальными составляющими, входящими в уравнение водного баланса.

В практических расчетах находят применение эмпирические формулы, которые не противоречат здравому смыслу и основным положениям изложенных выше теоретических методов. В большинстве своем формулы имеют структуру, близкую к зависимости, впервые предложенной в США Майером :

$$h_v = A (1 + au) d,$$

в которой u – скорость ветра ; d – дефицит влажности воздуха ; параметры A и a зависят от высоты, на которой производятся измерения. Например, формула А.Д.Зайкова имеет вид

$$h_v = (0,15 - 0,12u_{100}) (e_n - e_{200}),$$

где e_n – упругость водяного пара, насыщающего пространство над водной поверхностью при температуре воды; e_{200} – абсолютная влажность водяного пара на высоте 200 см над водной поверхностью; u_{100} – скорость ветра на высоте 100 см. При этом входящие в формулу величины имеют размерности: e_n и e_{200} , в миллибарах; u_{100} , - в м/с; h_v , - в мм/сутки.

Формула С.П.Крицкого и М.Ф. Менкеля для среднемесячных величин имеет вид

$$h_v = 9(e_n - e_{200}) \sqrt{1 + 0,15u_{100}^2},$$

в которой u_{200} – скорость ветра, измеренная на высоте 200 см над водной поверхностью.

Для определения испарения с водной поверхности разработаны специальные карты, на которые нанесены линии равных слоев годового испарения [3, с.149; 11, с.38], но рекомендуется их использовать для расчета испарения с поверхности малых водоемов. Методы определения испарения по данным наблюдений метеостанций, расположенных на берегу, не пригодны, так как и влажность воздуха, и температура его, и скорость ветра на больших удалениях от береговой линии отличаются от данных, полученных на берегу. В этих условиях рекомендуется пользоваться эмпирическими формулами, вводя в них соответствующие поправки [3], либо данными специальных (буйковых) метеостанций, которые располагаются непосредственно на воде. Следующие данные дают представление о годовом слое испарения с поверхности малых водоемов в восточной Европе: север – 200-350 мм; средняя полоса: лесная зона – 350-650 мм, зона степей – 650-1000 мм; юг – 1000-1500 мм.

По данным наблюдений или расчетов можно построить график изменения скорости испарения с водной поверхности в зависимости от среднемесячной температуры воздуха и времени года, предложенный Майером (рис.2.1). Разрыв при переходе температуры через 0°C (апрель) объясняется тем, что при одной и той же температуре поверхность льда и снега испаряют воды больше, чем водное зеркало при внешних одинаковых размерах из-за неровностей поверхностей снега и льда, поэтому фактическая площадь испарения у них больше. Подобные графики не используются для определения суммарного испарения с поверхности водохранилищ за определенный отрезок времени. Следует иметь в виду неблагоприятный характер зависимости изменения скорости испарения от времени: она велика в летние месяцы. Но именно в этот период и площадь зеркала водохранилища большая. Обычно к концу зимы уровень воды в водохранилище комплексного назначения снижается, достигая наименьшей отметки – уровня мертвого объема (УМО) (рис.2.2). Весной во время половодья водохранилище наполняется водой до нормально подпертого уровня (НПУ) (рис.2.2); площадь зеркала водохранилища увеличивается по сравнению с площадью при

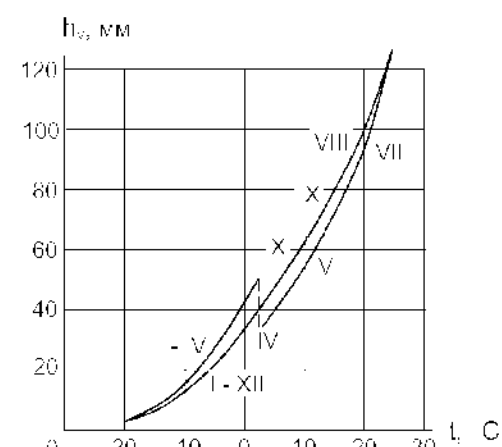


Рис. 2.1. Зависимость слоя месячного испарения с водной поверхности от температуры

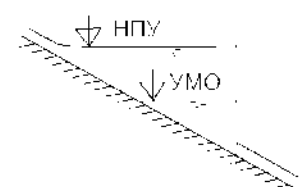


Рис. 2.2. Схема водохранилища с основными уровнями воды в нем

УМО. Затем в течение лета и осени уровень воды в водохранилище постепенно снижается. На рис.2.3 показан ход изменения площади водохранилища во времени от наименьшей $F_{\text{умо}}$ до наибольшей $F_{\text{выу}}$.

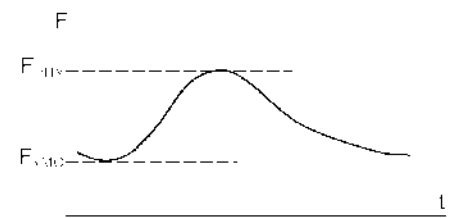


Рис. 2.3. График изменения площади водохранилища от времени

Зная среднемесячные значения площади зеркала водохранилища F_i и скорости испарения с водной поверхности $h_{\text{вв}i}$, определяют объем испарившейся влаги с учетом среднемесячного испарения с поверхности суши до создания водохранилища $h_{\text{вз}i}$:

$$V_i = F_i (h_{\text{вв}i} - h_{\text{вз}i})$$

и чертят график изменения его во времени (рис.2.4,а). Далее находят суммарную кривую испарения, последовательно складывая месячные испарения: $\sum_i V_i$, $i = 1, 2, 3, \dots, 12$.

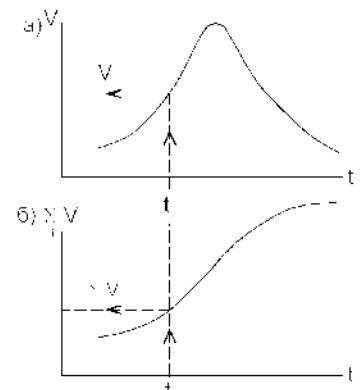


Рис. 2.4. Кривые испарения

(рис.2.4, б).

Имея суммарную кривую притока воды в водохранилище (рис.2.5, пунктир), а также кривую испарения, можно построить график изменения во времени притока воды в водохранилище с учетом потерь ее на испарение (рис.2.5, сплошная линия). Из графика можно видеть, что величина среднего годового расхода воды за счет испарения уменьшается: от Q_n в реке до строительства плотины, образовавшей водохранилище, до Q_u - при эксплуатации водохранилища. На рис.2.5 показаны на момент времени t_i (см. также рис. 2.4) объем притока воды в водохранилище W_n и фактический объем W_u , уменьшенный по сравнению с W_n на величину испарившейся влаги.

Потери воды на испарение с площади поверхности водохранилищ могут достигать больших значений, особенно в южных странах содружества и соответствующих регионах России. Так, по данным [9], при глубине сработки водохранилища 6-10 м потери на испарение воды могут достигнуть 10-20%, от полезной емкости водохранилища, расположенной между НПУ и УМО (разность между этими уровнями воды равна глубине сработки). Следовательно, если водохранилища многолетнего регулирования стока, то фактически потери воды на испарение могут составлять 10-20% от среднегодового стока рек, на которых они будут созданы. Но в связи

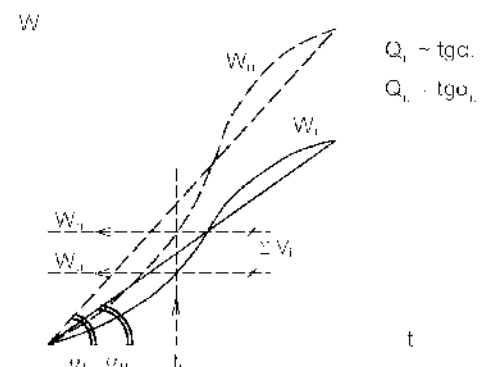


Рис. 2.5. Учет потерь воды на испарение в водохранилище

с тем, что объемы испарившейся воды невелики по сравнению с объемами влаги, переносимыми атмосферными потоками, и не могут вызвать заметного изменения в режиме внутриматерикового влагооборота, в частности, в режиме выпадения осадков, то можно утверждать, что эти потери для данных регионов будут практически безвозвратными.

Наибольшее испарение с водной поверхности наблюдается на Земле в ее тропических районах и может достигать больших значений (например, годовой слой испарения воды с поверхности африканского озера Чад составляет 2260 см).

2.2.2. Испарение с поверхности почвы. Транспирация.

Испарение с поверхности почвы измеряют с помощью почвенных монолитов по изменению массы монолита за период между наблюдениями с учетом количества выпавших за это время осадков и воды, просочившейся через монолит. Монолиты помещают в специальные устройства, называемые почвенными испарителями. Для свободного размещения в монолите корневой системы растений его высота достигает одного метра. Такой испаритель с находящимся в нем почвенным монолитом, в котором выращивают различные сельскохозяйственные культуры, устанавливают заподлицо с поверхностью почвы в поле, где эти культуры произрастают. Далее определяют путем периодического взвешивания монолита суммарное испарение в различные периоды вегетации растений. Испарение с почвы под растительным покровом измеряют с помощью испарителей со срезанными растениями, которые подвешивают над испарителем для создания затенения почвы. Разность между суммарным испарением и испарением с почвы дает величину транспирации. Весовой метод определения испарения с почвы, покрытой растительностью, достаточно прост, однако он имеет существенные недостатки, поскольку с ним связаны неизбежные ошибки измерений. Причина их в том, что почвенный монолит изолирован от окружающего его почвенного массива; кроме того, испаритель имеет металлические конструкции, теплопроводность которых отличается от теплопроводности почвы.

При изучении суммарного испарения в лесу в испарителе приходится выращивать целые деревья, поэтому размеры его становятся огромными. В этих условиях нашли применение стационарные испарители, размещаемые в земле в специальных углублениях, оборудованных весовым механизмом.

Как в случае испарения с водной поверхности, для расчета испарения с поверхности почв используются методы водного и теплового баланса и турбулентной

диффузии; однако трудности, связанные с применением этих методов на практике, возрастают. Так, в методе водного баланса необходимо определить изменение влагосодержания в почве за некоторый период времени, что реализуется путем бурения почвы с отбором проб через каждые 10 см по глубине. Содержание влаги в пробах находится с помощью высушивания, при этом обязательно устанавливается объемный вес почвы в каждой пробе. Кроме того, учитываются объем осадков, поверхностный сток и влагообмен с нижележащими слоями почвы за рассматриваемый период; ошибки в определении последнего особенно велики.

Трудности в использовании методов турбулентной диффузии и радиационного баланса в случае расчета испарения с почвы сохраняются. Особенно сложно добывать сведения о теплообменных процессах в почве.

В наиболее простом виде метод водного баланса реализуется в случае определения среднего многолетнего испарения с территории речных бассейнов. Для этой цели используется уравнение (1.4). Сведения о среднем многолетнем стоке с территорий различных бассейнов и выпадающих на них осадках известны. Разность между ними дает величину среднего многолетнего испарения, которое в виде линий равных значений наносится на географические карты. Такие карты приведены в [3, с.151; 9, с.44] и в другой гидрологической литературе. Б.В.Поляков предложил графики зависимости месячного слоя испарения от среднемесячной температуры воздуха и месячной суммы осадков [9, с.41]. Близким к этим представляется метод М.И.Будыко, который предложил уравнение связи между годовым испарением с площади бассейнов и стоком рек. В основу метода положена зависимость Э.М.Ольдекопа (подробнее о ней см. ниже, раздел 2.4) и аналогичная Шрейбера [3]. Соответствующие уравнения имеют вид:

$$h_v = h_{v_0} \operatorname{th}\left(\frac{h_N}{h_{v_0}}\right) \quad \text{и} \quad h_v = h_N \left[1 - \exp\left(-\frac{h_{v_0}}{h_N}\right)\right],$$

где h_v и h_N – нормы испарения и осадков, $\overline{h_{v_0}}$ – норма испаряемости, которую М.И.Будыко предложил определять через среднее годовое значение радиационного баланса. Среднее геометрическое из этих двух зависимостей и есть уравнение связи Будыко:

$$\overline{h_v} = \sqrt{\overline{h_{v_0}} \overline{h_N} \left[1 - \exp\left(-\frac{h_{v_0}}{h_N}\right)\right] \operatorname{th} \frac{h_N}{h_{v_0}}}$$

Для величины $\overline{h_{v_0}}$ – даны карты, по которым она может быть найдена в пределах СНГ.

Для определения многолетнего суммарного месячного испарения необходимо располагать данными о месячном слое осадков h_N , стока h_N , среднемесячной температуре

воздуха, его абсолютной влажности и влагозапасов в метровом слое почвы. Для теплого периода года в гумидной (достаточного увлажнения) зоне расчеты ведутся по формулам

$$h_v = h_{v_0} \frac{\theta_1 - \theta_2}{2\theta_k}, \quad \text{если } \theta_1 - \theta_2 < 2\theta_k \quad ; \quad h_v = h_{v_0}, \quad \text{если } \theta_1 + \theta_2 > 2\theta_k,$$

где θ_1 и θ_2 – влажность почвы в начале и в конце конкретного месяца в метровом слое, h_v и h_{v_0} – соответственно, скорость испарения и испаряемость в этом месяце (в мм/мес), величина θ_k есть рассмотренная выше критическая влажность почвогрунта. Таким образом, если среднемесячная влажность превышает критическую, испарение принимается равным испаряемости; в противном случае испарение уменьшается по сравнению с испаряемостью пропорционально отношению среднемесячной влажности к критической. Расчеты выполняются для метрового слоя почвогрунтов, начиная с первого месяца теплого периода; влагозапасы для этого месяца определяются приближенно по специальной карте.

Если обозначить слой воды в метровой толще почвогрунта на начало последующего месяца h_1 (ему соответствует влажность θ_1), а в конце месяца – h_2 , то h_2 определяется из формул:

$$h_2 = h_1 + h_N - h_W - h_{v_0}, \quad \text{если } h_1 - h_2 > 2h_k \quad ;$$

$$h_2 = h_1 - h_N - h_W - h_v, \quad \text{если } h_1 + h_2 < 2h_k.$$

где h_N и h_W – величины месячного слоя осадков и стока, соответственно, h_k – слой воды, содержащейся в метровой толще почвогрунта, соответствующий критической влажности. Величина месячного слоя испаряемости h_{v_0} определяется по специальным графикам в зависимости от дефицита влажности воздуха, который находится как разность между пределом насыщения и абсолютной влажностью, определяемой на высоте 2 м над поверхностью земли; предел насыщения ищется по температуре, измеряемой на той же высоте. Аналогичные таблицы даны для определения критических влагозапасов в зависимости от температуры воздуха и геоботанической зоны расположения рассматриваемого пункта (всего таких зон восемь: тундра, лесотундра, хвойные леса, смешанные леса, лиственные леса, лесостепи, полупустыни, пустыни).

Распределение годового испарения по месяцам можно также определить с помощью специальных таблиц внутригодового хода испарения (в %) для указанных геоботанических зон [14, с.119]. Для зоны достаточного увлажнения Н.С.Кузин дал график (рис.2.6), позволяющий определить среднемесячное испарение в зависимости от среднемесячной температуры воздуха и времени года.

Методы теории турбулентной диффузии были использованы А.Р.Константиновым [3,13] для определения среднего многолетнего испарения в зоне достаточного и избыточного увлажнения по средним значениям температуры и влажности воздуха. Им разработаны рекомендации по расчету среднесуточного испарения в зависимости от указанных выше среднесуточных параметров.

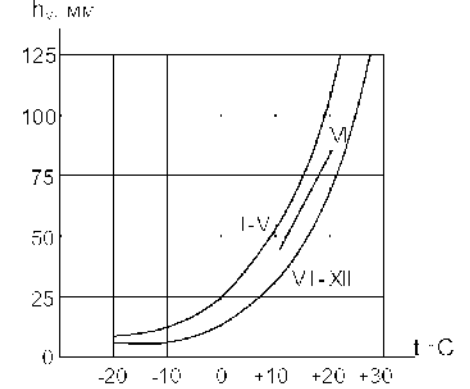


Рис. 2.6. График зависимости среднесуточного испарения от температуры и времени года

В наиболее полном виде метод теплового баланса для определения суммарного водопотребления (эвакотранспирации) с площади бассейна изложен в [15]. В частности, здесь речь идет об определении суммарного водопотребления влаги сельскохозяйственным полем, полагая, что существует тесная связь между испарением и энергетическими ресурсами атмосферы, которые оцениваются испаряемостью (потенциальной эвакотранспирацией). В связи с этим суммарное водопотребление принимается равным испаряемости, умноженной на корректирующие коэффициенты, учитывающие роль растений и климата.

В практике гидромелиоративных расчетов СНГ широко используется для расчета испарения с орошаемых земель биоклиматический метод, разработанный А.М. и С.М.Алпатьевыми, согласно которому расчет испарения ведется по формуле:

$$h_v = K'_8 \sum d_{200} \quad .$$

где $\sum d_{200}$ - сумма среднесуточных дефицитов влажности, определенных на высоте 2 м от земной поверхности. K'_8 - биологический коэффициент, зависящий от вида растений.

При неглубоком залегании уровня грунтовых вод Z_r интенсивность испарения почвенной влаги h_v определяется в зависимости от испаряемости h_{v_0} по формуле, предложенной С.Ф.Аверьяновым [3]:

$$h_v = h_{v_0} \left(1 - \frac{Z_r}{Z_{гк}} \right)^{n_1} \quad ,$$

где $Z_{гк}$ – критическая глубина залегания грунтовых вод, начиная с которой имеет место их расходование на испарение (пределы изменения этой глубины достаточно широки: от 1,4 до 4,0 м в зависимости от вида почв); показатель степени n_1 изменяется от 1 до 3. Испаряемость в случае хорошо увлажненной почвы (при полном насыщении порового пространства водой) принимается пропорциональной дефициту влажности [9]:

$$h_{v_0} = K_1 d \quad ,$$

где d – суточный дефицит влажности в мм; размерность h_{v0} мм/сут; K_1 – коэффициент.

При глубоком залегании грунтовых вод и наличии в почвогрунтах подвешенной влаги также имеются эмпирические зависимости. К ним относится формула А.И.Будаговского, связывающая интенсивность испарения с почвы с ее объемной влажностью θ (в %):

$$h_v = K_2(\theta - \theta_p) \quad ,$$

где θ_p – влажность почвы, при которой происходит разрыв капиллярных связей, вследствие чего нарушается капиллярное движение почвенной влаги к поверхности; K_2 – размерный коэффициент (мм/сут), изменяющийся от 0,7 до 1,5 в зависимости от вида почв.

В расхождении почвенной влаги на испарение важную роль играют процессы, связанные с перемещением (фильтрацией) влаги в поровом пространстве почвогрунтов. Согласно обобщенному закону Дарси скорость фильтрации v определяется градиентом напора H и коэффициентом влагопереноса K :

$$v = K \frac{dH}{dz}$$

При полном насыщении пор водой коэффициент влагопереноса K равен коэффициенту фильтрации K_f . Величина напора в соответствии с законом Бернулли определяется уравнением

$$H = \frac{p}{\rho g} - Z \quad ,$$

где Z – ордината точки над плоскостью сравнения; p – давление; ρ – плотность воды; g – ускорение силы тяжести. Следует отметить, что только для ряда простых случаев фильтрации давление может быть сравнительно просто определено. Например, при неравномерном движении подземных вод на большом удалении от естественного или искусственного дренирующего объекта давление ниже уровня грунтовых вод распределено по закону гидростатики и полностью определяется положением этого уровня. Такое движение реализуется в грунте при откачке вод из колодцев, отводе их с помощью дренажа, при сопряжении уровней воды в реке и подземном бассейне и др., (свободная поверхность воды на участке сопряжения уровней в дренах, колодцах и реке с уровнем подземного бассейна называется кривой депрессии) Иными словами, давление определяется заглублением точки по отношению уровня грунтовых вод. Значит, уровень воды в пьезометре, установленном в точках, расположенных ниже кривой депрессии, совпадает с кривой депрессии. На участках грунтового массива, расположенных вблизи

дренирующего устройства, фильтрующий поток сильно искривлен, поэтому давление не подчиняется закону гидростатики, живые сечения потока тоже сильно искривлены. Для решения фильтрационных задач в этой области используют методы гидродинамики, которые позволяют определить поле давления. На большом удалении от дренажа, где кривая депрессии близка к горизонтальной плоскости (медленно изменяющееся движение), живые сечения плоские, почти совпадающие с вертикальной плоскостью, а поле давлений заранее известно, решение фильтрационных задач упрощается, а сам метод решения называется гидравлическим.

При неполном насыщении почвогрунтов водой аналогом давления является давление всасывания P_v , удерживающее воду в грунте капиллярными силами, определяемыми кривизной поверхности раздела на границе воды и воздуха, заземленного в порах, и сорбционными силами взаимодействия воды и частиц грунта [16]. Соответствующая высота всасывания $H_v = P_v/\rho g$ часто выражается в особой системе единиц измерения, которая обозначается pF (очевидно, по аналогии с pH – водородным показателем, характеризующим концентрацию ионов водорода в растворах) и равна десятичному логарифму высоты всасывания, выраженной в сантиметрах водяного столба: $pF = \lg H_v$ (при этом единицы измерения H_v , – см). Для ненасыщенных почвогрунтов уравнение для H принимает вид

$$H = -H_v + Z \quad .$$

При полном насыщении высота всасывания равна нулю. По мере уменьшения влажности высота всасывания возрастает по абсолютной величине, достигая в сухих грунтах величины 100 м и более ($pF > 4,0$). Следовательно, высота всасывания зависит от влажности грунта, обычно эту связь находят экспериментально, аппроксимируя ее формулами логарифмического (В.М.Шестаков) или показательного вида (С.Ф.Аверьянов):

$$H_v = -H_k \ln \bar{\theta} \quad ;$$

$$H_v = -H_0 \frac{\theta_0}{\theta} \frac{\theta_m^3 - \theta^3}{\theta_m^3 - \theta_0^3} \quad ;$$

$$\bar{\theta} = \frac{\theta - \theta_0}{\theta_m - \theta_0} \quad .$$

В формулах H_k – высота капиллярного поднятия воды; θ_m – влажность, соответствующая максимальной молекулярной; H_0 – отвечающая ей высота всасывания.

Следует обратить внимание на неоднозначный характер зависимости $H_b(\theta)$: как показывают исследования, при одинаковой высоте всасывания влажность грунта оказывается больше при его осушении, чем при его увлажнении.

Коэффициент влагопереноса K тоже зависит в основном от влажности грунта, что подтверждает зависимость, полученная С.Ф.Аверьяновым:

$$K = K_{\phi} \theta^{n_3} ,$$

где $n_3 \approx 3,5$; формула справедлива только для однородных грунтов, в случае грунтов неоднородных показатель степени увеличивается.

На величину высоты всасывания оказывает существенное влияние минерализация воды, причем с ее повышением высота всасывания тоже увеличивается. Высота всасывания в деформируемых грунтах под влиянием нагрузки увеличивается. На зависимость $K(\theta)$ и коэффициент фильтрации K_{ϕ} большое влияние оказывает наличие в породе макропор, которых особенно много в зоне аэрации, где они обязаны своим возникновением корневой системе растений и жизнедеятельности землероев и насекомых. В процессе фильтрации происходит тампонаж макропор, отчего коэффициент фильтрации может уменьшиться на целый порядок. Наблюдениями обнаружено увеличение коэффициента фильтрации после устройства дренажа, причем непосредственно у дрена он увеличивается больше, чем в междренном пространстве. Осушение торфяных почв приводит к тому, что через несколько лет после строительства дренажа коэффициент фильтрации уменьшается в 2-3 раза; это объясняется уплотнением торфа. Отмечено также увеличение коэффициента фильтрации в зоне аэрации с течением времени после начала работы дренажа, что объясняется улучшением аэрации почвы и изменением ее теплового режима, которые приводят к улучшению условий обитания растений, насекомых и землероев в биологически активном слое почвы.

Исследования, выполненные С.В.Нершным и др., показали, что существует такое значение высоты всасывания pF_K , до которого транспирация h_v практически не отличается от испаряемости h_{v_0} . Вместе с тем существует предельная величина высоты всасывания pF_0 , при которой транспирация становится равной нулю.

При условии $pF_K < pF < pF_0$ для определения транспирации рекомендуется формула

$$h_v = h_{v_0} \frac{pF_0 - pF}{pF_0 - pF_K} .$$

Относительно входящих в формулу параметров можно сказать следующее: параметр pF_k зависит от h_{v_0} , график зависимости приведен на рис.2.7; параметр pF_0 принимается равным 4.4. Вместе с тем в гидромелиоративной практике, как сказано ранее, существует понятие влажности завядания θ_d ; при условии $\theta = \theta_d$ принимается $h_v = 0$.

Расходование воды на транспирацию также зависит от условий в зоне аэрации. Однако методы определения транспирации, описанные выше, несовершенны, поэтому связаны с большими погрешностями. Вот некоторые осредненные данные [9,

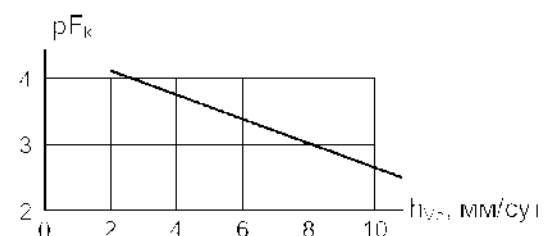


Рис. 2.7. График зависимости параметра pF_k от испаряемости

[16]: за вегетационный период (135 суток) луговая растительность расходует на транспирацию слой воды, равный 400-430 мм; злаки – около 350, лиственный лес 250-270, хвойный лес (за год) – 300-325 мм. Пределы колебания толщины слоя воды, расходуемой на транспирацию за период вегетации, колеблются от 250 до 600 мм или от 2 до 5 мм/сут.

В [17] для разных пунктов Стран содружества даны величины испаряемости h_{v_0} и значения коэффициента испарения K_v , позволяющие определить суммарное испарение h_v из зависимости:

$$h_v = K_v h_{v_0}.$$

Значения K_v изменяются от 0,8-0,9 для пунктов, расположенных в умеренном поясе, до 0,3-0,4 – на юге СНГ. В табл.2.2 приведены значения испаряемости для некоторых пунктов СНГ, находящихся в Европе [17].

В заключение следует остановиться на особом виде испарения, который называется перехватом, – это часть ливневых осадков, задерживающаяся на листьях, стеблях, стволах и ветках растений вследствие их смачивания водой, а затем испаряющаяся в атмосферу. Количество перехваченной воды зависит от характера выпадения осадков, вида растительности и фазы ее развития. По данным [18] перехватывается и испаряется от 10 до 20% осадков, выпадающих в течение сезона вегетации растений.

Таблица 2.2

Пункт	Испаряемость, мм/год
Минск	490
Москва	677
Киев	732
Воронеж	829
Саратов	890
Харьков	959
Ростов-на-Дону	1120
Астрахань	1240

2.3. Осадки

Для измерения атмосферных осадков в России применяется осадкомер Третьякова с приемной площадью 200 см^2 и лепестковой защитой, которая защищает в основном твердые осадки от выдувания ветром. Осадки, выпадающие на сушу, делятся на жидкие (дожди, роса) и твердые (снег, иней, изморозь, град). Количество воды, выделяющееся из воздуха в виде инея, изморози и росы, невелико по сравнению с дождями и снегом. В питании рек, находящихся в южных странах, огромную роль играют осадки, выпадающие в горах выше снеговой линии, образующие здесь ледники.

2.3.1. Дожди

Жидкие осадки характеризуются продолжительностью t (обычно в часах) и интенсивностью i – высотой слоя, выпадающим на горизонтальную поверхность в единицу времени (обычно в мм/мин). Для условий СНГ существуют следующие категории дождей, которые определяются этими двумя параметрами и временем года. К первой относятся ливни умеренного пояса – дожди большой интенсивности и малой продолжительности, выпадающие в летнее время.

В табл.2.3 приведены (по Бергу) такие значения интенсивности дождей в зависимости от их продолжительности, при превышении которых дождь считается ливнем.

Таблица 2.3

Продолжительность, мин	5	10	20	40	60	360	720	1440
Интенсивность, мм/мин	0,50	0,38	0,30	0,24	0,20	0,09	0,06	0,04

Обычно продолжительность ливней не превышает двух часов [9]. За такой ливень может выпасть слой осадков около 20 мм. Максимальная продолжительность ливня на территории СНГ превысила 21 ч; за такой ливень высота слоя выпавших осадков может достигать 40-60 мм.

Ко второй категории относятся обложные дожди, которые характеризуются большой продолжительностью, но малой интенсивностью и выпадают осенью. Хотя интенсивность обложных дождей не превышает 0,03-0,05 мм/мин, за время выпадения такого дождя высота слоя осадков может составить 50-70 мм.

Наконец, третью категорию представляют муссонные ливни – дожди большой интенсивности и продолжительности, выпадающие в зоне влияния муссонов в "мокрый" период (в северном полушарии от мая до октября, в России – на Дальнем Востоке и Юго-Восточной Сибири). Муссонные ливни могут продолжаться несколько суток, количество выпавших осадков достигает 150-200 мм.

Прслеживается хорошо выраженное убывание количества выпадающих осадков при удалении от берегов Мирового океана вглубь материков. Так, на северо-западе России в год в среднем выпадает около 600 мм осадков, в то время как на юго-востоке – 200-250 мм, в государствах Средней Азии – около 100-150 мм. Наблюдается заметное увеличение осадков на склонах гор, обращенных к ближайшему океану. Например, на западных склонах Уральских гор осадков выпадает приблизительно на 100 мм больше, чем на прилегающей к ним равнине, где годовой слой осадков оценивается в 600 мм.

Чем выше расположена местность в горах над уровнем океана, тем больше выпадает осадков. Так, по данным [3] на высоте 2000 м над уровнем океана количество осадков увеличивается в 2-3 раза по сравнению с количеством, выпадающим на прилегающих к горной местности равнинах. Объясняется это тем, что поднимающийся по склонам гор воздух охлаждается, тем самым создаются благоприятные условия для конденсации водяных паров и выпадения осадков. Однако восходящий поток воздуха на своем пути расходует большую часть своих запасов влаги, поэтому на отметках выше 3000-3500 м наблюдается уменьшение количества выпадающих осадков.

По данным наблюдений за осадками вычисляют средние многолетние слои, которые наносятся на карты, и строятся линии равных высот (изогеты, в [9, с.25]. Максимум годовых осадков выпадает в России на Дальнем Востоке: 900-1000 мм; максимум в странах содружества равен 2500 мм и находится в Грузии (район Потн-Батуми). Самое дождливое место на Земле – район поселка Чаранунджи (Восточная Индия), в котором среднее годовое количество осадков составляет около 12000 мм. Абсолютный максимум за один ливень был зафиксирован на Филиппинах – 1200 мм, в СНГ – в Батуми 230 мм.

Следует обратить внимание на некоторую условность, имеющую место при определении средних значений высот слоя осадков, их продолжительности при построении изогет. Прежде всего, осадки фиксируются сравнительно редкой сетью метеорологических станций. Тучи, из которых они выпадают, неоднородны, поэтому при прохождении над метеостанцией периферийной части тучи в дождемер попадает меньшее количество осадков, чем их выпадает в ее центре. Далее, осадки выпадают из движущихся туч, откуда их продолжительность, фиксируемая на метеостанции, зависит от скорости ветра. Следовательно, как отмечается в [11], речь идет о пространственно-временном осреднении, для реализации которого необходим достаточно длительный период времени наблюдений. Как было отмечено выше (см.(2.1)), интенсивность ливней из-за особенностей строения ливневых туч уменьшается с увеличением их продолжительности и величины орошаемой площади.

В частности, такой характер зависимости интенсивности ливней от продолжительности был обнаружен при специальном методе обработки плувиограмм кривых зависимости высоты слоя осадков от времени, получаемых в специальных приборах-самонисцах-плувиографах. Метод был разработан в ГГИ Г.А.Алексеевым; он заключался в том, что на плувиограммах выделяем только ту часть, которая относилась к ливням в соответствии с таблицей Берга. Следовательно, при заданной продолжительности принимались во внимание осадки максимальной интенсивности. Полученные данные обрабатывались по единой программе, в результате Г.А.Алексеевым была получена следующая зависимость интенсивности ливня от продолжительности:

$$i = \frac{a + b \cdot \lg n}{(1 + t)^{3/2}},$$

где n – число лет, приходящихся на один ливень (величина, обратная n , называется повторяемостью ливня данной интенсивности); a и b – параметры, которые были нанесены на карту бывшего Союза, при этом оказалось возможным провести плавные

линии равных значений этих параметров (фрагмент карты для Европейской территории Союза приведен в [11, с.88]). В формуле i имеет размерность мм/мин; t , – мин.

Эмпирическая формула, отражающая зависимость высоты слоя осадков от орошаемой ими площади F , имеет вид

$$h_N = \frac{h_{N_0}}{(1 + 0,001 \cdot F^{0,5})},$$

где h_{N_0} – высота слоя осадков в центре дождя (на метеорологической станции); F измеряется в км². Формула справедлива при $F \leq 4000$ км².

Данные наблюдений свидетельствуют о том, что с увеличением орошаемой площади уменьшается число ливней, полностью покрывающих эту площадь. Так, по данным метеостанций, расположенных в районе Велико-Анадоля на Украине, площадь 100 км² полностью покрывается ливнями, число которых не превышает 60% от их общего наблюдаемого количества, площадь 200 км² – примерно 50%, 500 км² – 35%, 1000 км² – 20%, 4000 км² – 15% [3]. Таким образом, малые площади орошаются ливнями большей интенсивности и большим количеством их, покрывающих эту площадь полностью, по сравнению с ливнями, выпадающими на больших площадях.

2.3.2. Снежный покров и снеготаяние

В холодное время года на большей части России осадки выпадают в виде снега. Снежный покров распределяется по площади речных бассейнов неравномерно; она тем заметнее, чем сложнее рельеф местности, больше его расчлененность. Часть снега сносится ветром с открытой равнинной местности в овраги, пониженные части бассейна; накапливается на опушках леса, в кустарниках, где он тает медленнее, чем на равнине. Снеготаяние в лесу продолжается дольше, чем на полях. Высота снежного покрова зависит от количества выпадающих осадков и продолжительности зимы. Запасы воды в снеге определяются высотой покрова h_c и плотностью снега ρ_c , которая равняется отношению массы снега к его объему, измеряется в г/см³. Тогда запас воды в снежном покрове равен $h_N = h_c \rho_c / \rho_b$, где ρ_b – плотность воды.

Для определения h_N на площади речного водосбора делается ландшафтно-маршрутная снегомерная съемка, которая заключается в измерении высоты и плотности снежного покрова через определенные расстояния вдоль заранее намеченных маршрутов.

Средние многолетние значения снеговых запасов в пределах России в пересчете на воду убывают по направлению от центра к северу, но особенно заметно к югу и юго-

востоку: в Нижнем Новгороде величина h_x составляет 220 мм в год, в Петрозаводске, Уфе – 190, в Москве – 150, в Ростове – 65, в Астрахани – 34.

На равнинных территориях различают снег трех типов [11]. Пушистый снег образуется после снегопада в тихую морозную погоду. Снег обладает малой относительной плотностью: ρ/ρ_b изменяется от 0,03 до 0,12; снежинки – ледяные кристаллы разной формы в виде шестигольных пластинок и шестилучевых звездочек – имеют диаметр 5-6 мм. Под влиянием ветров, силы тяжести, оттепелей пушистый снег быстро уплотняется и переходит в следующий вид снега – метелевый. Этот снег состоит из обломков снежинок и представлен частицами размером 1-2 мм. Относительная плотность его равна 0,15-0,20. Если пушистый снег начинает перемещаться при скорости ветра 3-4 м/с, то для перемещения метелевого снега скорость ветра должна быть 8-10 м/с. Из-за этих перемещений происходит приращение снежного покрова на опушках леса, в оврагах, на участках равнинной местности, покрытой кустарником, вследствие сдувания снега с открытых пространств. При зимних оттепелях и весной метелевый снег переходит в зернистый. Зерна этого снега имеют разнообразную форму и размеры 3-4 мм. Относительная плотность зернистого снега превышает 0,25. После оттепелей с наступлением морозов на поверхности снега образуется ледяная корка – тепловой наст. Плотность снега увеличивается каждый месяц на 10-12%, так что к концу зимы снег обладает относительной плотностью порядка 0,35-0,45 и более (максимально – 0,7 для мокрого, а затем замерзшего снега).

Как показывают исследования [11], часто при подсчете суммарного количества снега, определяемого по снегомерным съемкам и осадкомерам, первая цифра оказывается больше второй, что объясняется выдуванием снега из осадкомеров. Отсюда считается, что снегомерные съемки перед началом весеннего снеготаяния являются наиболее надежным методом определения объема воды, который будет участвовать в весеннем половодье.

Начало таяния и полное освобождение речных бассейнов от снега происходит не одновременно из-за различия климатических условий. в первую очередь, в бассейнах, простирающихся в направлении север-юг. Область снеготаяния ограничена фронтом и тылом. Фронтом снеготаяния называют линию, ограничивающую площадь, на которой идет снеготаяние, от площади, где этот процесс еще не наступил. Тыл снеготаяния – линия, отделяющая площадь снеготаяния от территорий, где оно уже закончилось. Скорость продвижения тыла снеготаяния в среднем составляет 50-60 км в сутки (минимум 30, максимум до 200 км в сутки).

В настоящее время существует немало методов, в которых ставится задача определить продолжительность снеготаяния. Как правило, основу этих методов составляют уравнения теплового баланса и турбулентного обмена [3, 11, 15].

Есть некоторые особенности использования метода теплового баланса в решении задачи снеготаяния. Прежде всего, при переходе от тепловых единиц к слою воды, образовавшейся из снега, необходимо учитывать не только удельную теплоту парообразования при 0°C (597 кал/г), но и теплоту плавления льда, равную 79,9 кал/г; в сумме получается ~ 677 кал/г.

Так же, как уже было отмечено ранее, в случае расчета снеготаяния по методу турбулентной диффузии и теплового баланса требуются данные довольно точных измерений большого числа параметров, притом через малые промежутки времени. В практических расчетах чаще всего находят применение менее строгие решения, основанные на использовании доступной метеорологической информации, дающие результаты, которые вполне устраивают практику. Например, для расчета слоя талой воды (в мм) за дневные и ночные часы Е.Г.Попов предложил формулу [3]:

$$h = 7,1 \cdot \left[(1 - \alpha)(t_{\max} - t_{\text{сут}} - 0,2) + 0,1 \cdot u(t - 0,5) - 0,2(t_{\text{сут}} - t_{\min}) \right] ,$$

где α - альбедо снега, поэтому первое слагаемое в квадратных скобках учитывает таяние снега за счет солнечной радиации в дневное время, в ночное время оно отсутствует; $t_{\max}$, $t_{\text{сут}}$, $t_{\min}$ - соответственно, максимальная, среднесуточная и минимальная температура воздуха в °C; u и t - соответственно, средняя скорость ветра (в м/с) на высоте флюгера и средняя температура воздуха в дневное (при расчете по полной формуле) и в ночное время (в расчете участвуют только второе и третье слагаемое в квадратных скобках).

Приведенная зависимость справедлива для ровной открытой местности, для определения хода снеготаяния в лесу и на пересеченной местности необходимо в нее вводить поправочные коэффициенты. Так, под пологом леса изменяется скорость ветра; интенсивность снеготаяния зависит от состава пород деревьев и густоты их расположения; как известно, в хвойном лесу снег лежит дольше.

Существуют приближенные, основанные на данных наблюдений, методы определения высоты слоя снеготаяния (в пересчете на воду), предполагающие наличие прямолинейной связи между толщиной слоя растаявшего снега h_N (фактически количеством тепла, которое получил снег) и суммой положительных среднесуточных температур:

$$h_N = a \cdot \sum_{i=1}^n t_c + b ,$$

где a и b – константы; t_c – среднесуточная положительная температура воздуха; n – число суток, за которое рассчитывается слой снеготаяния (t_c в $^{\circ}\text{C}$; h_x в мм/сут). Например, для Московской области $a = 1,8$, $b = -14$.

2.3.3. Таяние ледников

В горах лед и снег накапливаются выше снеговой линии. Положение снеговой линии зависит от широты местности: в тропиках и вблизи экватора она находится на высоте от 4500 до 6000 м над уровнем моря; в средних широтах опускается до 500 м, а на островах Северного Ледовитого океана и в Антарктиде – до уровня моря.

На Кавказе снеговая линия располагается между 2700 и 3600 м, площадь оледенения занимает около 2 тыс.км². В Средней Азии в южных горных массивах высота снежной линии равна 5000 м над уровнем моря, в северных – 3000 м. Площадь оледенения в государствах Средней Азии приближается к 13 тыс.км².

В горах выше снеговой линии свежавывалившийся пушистый снег 1 быстро превращается в метелевый и зернистый 2 (рис.2.8), чему, кроме ветра и оттепелей, способствует солнечная радиация, благодаря которой снежинки днем под снежным покровом начинают подтаивать, а ночью замерзают, образуя крупные зерна, или фирн 3. Накапливаясь, снег оказывает давление на нижележащие слои фирна, что способствует их сближению, уплотнению и превращению сначала в белый фирновый лед 4, а затем в прозрачный – глетчерный лед голубого цвета 5. Под действием силы тяжести благодаря большой

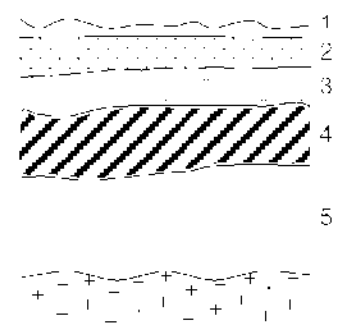


Рис. 2.8. Схема фирнового бассейна

пластичности глетчерный лед выползает из-под фирнового покрова, опускается ниже снеговой линии, образуя ледниковый язык, который постепенно тает, питает многочисленные ручейки, сбегаящие с гор. Часть ледника, расположенная выше снеговой линии, называется фирновым бассейном. Толщина льда в ледниковом языке может достигать нескольких метров, относительная плотность – 0,7-0,8. Таяние ледников происходит в течение жаркого периода года, создавая летнее половодье, характерное для рек с ледниковым питанием.

На Земле ледники занимают площадь свыше 15,5 млн.км² (более 10% от площади суши). Объем льда составляет 24 млн.км³; если он растает, то уровень Мирового океана поднимается на 64 м [10].

Зависимость испарения от количества выпадающих на площади речных бассейнов осадков была в общем виде проанализирована Э.М.Ольдекопом. В основу анализа были положены следующие положения: 1) если осадков выпадает мало, то все они расходуются на испарение; 2) если осадков выпадает много, то испарение стремится к максимально возможному (испаряемости). Связь испарения с осадками была выражена Ольдекопом через гиперболический тангенс:

$$h_v = h_{v_0} \operatorname{th} \frac{h_N}{h_{v_0}},$$

которая соответствует высказанным выше двум положениям:

$$\text{при } h_N \rightarrow 0, \operatorname{th} \frac{h_N}{h_{v_0}} \rightarrow \frac{h_N}{h_{v_0}}, h_v \rightarrow h_N; \quad \text{при } h_N \rightarrow \infty, \operatorname{th} \frac{h_N}{h_{v_0}} \rightarrow 1, h_v \rightarrow h_{v_0}.$$

Следовательно, кривая $h_v = f(h_N)$ имеет две асимптоты: прямую, выходящую из начала координат под углом 45° , и прямую $h_v = h_{v_0}$ (рис.2.9). Для h_{v_0} Ольдекоп

предложил простую связь с дефицитом влажности: $h_{v_0} = 136 \cdot d$.

В связи с тем, что для средних многолетних величин разность между осадками и испарением соответствует речному стоку, можно на графике провести кривую $h_W = \varphi(h_N)$ и выделить на нем две зоны, обозначенные на рис.2.9 буквами А и Г. Первая зона относится к таким областям, где осадков выпадает сравнительно немного и

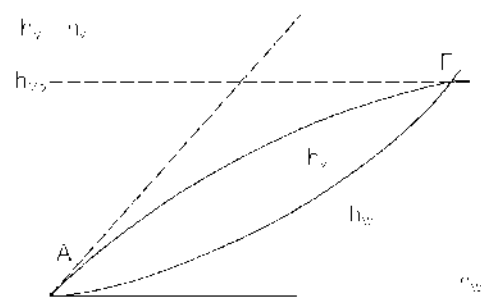


Рис. 2.9. График Ольдекопа

связь между осадками и стоком отсутствует, но имеется хорошо выраженная связь между осадками и испарением. Это аридная зона, или зона недостаточного увлажнения. Конечно, речь здесь идет об осадках, выпадающих в долинах, и стоке протекающих здесь рек. Речной сток обусловлен в этой зоне другими причинами: главным образом осадками, которые выпадают в горах выше снеговой линии в фирновом бассейне и проявляются в речном стоке много лет спустя после выпадения в результате таяния ледников. Буквой Г обозначена гумидная зона, или избыточного увлажнения, где осадков выпадает достаточно, чтобы образовать речной сток, и связь между осадками и стоком хорошо выражена, а между испарением и осадками отсутствует. Следовательно, графики

Ольдекопа играют принципиальную роль в задачах поиска связи стока с осадками: она существует только в гумидной зоне, в аридной такой поиск лишен смысла.

Приведем некоторые данные, свидетельствующие о правильности выводов Ольдекопа. В Астрахани средняя высота слоя годовых осадков 200 мм, слой годового испарения тоже равен 200 мм, в Волгограде, соответственно, 320 и 290; в Воронеже 520 и 370; в Москве 600 и 360.

2.5. Подземные воды

Подземные воды в гидрологии рассматривают с трех различных точек зрения: их движения, взаимодействия с осадками и поверхностными водами. Рассмотрим процессы, которые происходят в почвогрунтах при выпадении осадков.

В начале выпадения осадков идет промачивание зоны аэрации – инфильтрация. Важной характеристикой инфильтрации является скорость впитывания воды в почвогрунт v (рис.2.10). Пусть на поверхность почвы выпадает дождь интенсивностью i . Рассмотрим общий случай, когда на поверхности образовался слой воды h_0 . Пусть за время t фронт промачивания $n-n$ прошел путь Z . За время Δt он продвинулся еще дополнительно на расстояние ΔZ .

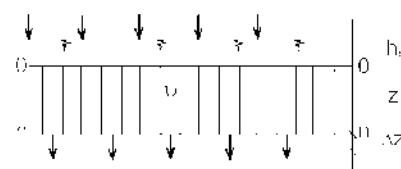


Рис. 2.10. Схема инфильтрации воды в почвогрунт

Если начальная влажность почвогрунта была θ_m , то дефицит влажности $\mu = \theta_m - \theta_n$. Тогда при продвижении фронта промачивания на расстояние ΔZ было израсходовано на каждой единице площади поверхности почвогрунта количество воды, равное $\mu \Delta Z$. Но это количество воды прошло через поверхность почвогрунта 0-0 за время Δt со скоростью впитывания v . Отсюда из условия баланса объемов воды имеем $\mu \Delta Z = v \Delta t$.

В пределе, устремляя Δt и ΔZ к нулю, получим:

$$\frac{dZ}{dt} = u = \frac{v}{\mu}.$$

Допустим, что область промачивания Z находится в состоянии полного насыщения водой. Тогда на нее действует сила тяжести; выраженная в единицах напора она определяется высотой слоя воды на поверхности почвогрунта h_0 и толщиной промокшего слоя Z . Но одновременно движение влаги происходит под действием капиллярных сил, характеризующихся приведенной высотой капиллярного поднятия h_K . Следовательно, величина полного напора, с которым происходит процесс инфильтрации, равна $\Pi = h_0 - h_K + Z$.

В соответствии с законом Дарси для скорости инфильтрации (впитывания) v можно записать

$$v = K_{\phi} \left[\frac{(h_0 + h_k + Z)}{Z} \right] .$$

Обычно пренебрегают высотой поверхностного слоя воды h_0 , равной 1-5 см, по сравнению с h_k и Z , достигающих сотен сантиметров. Такое допущение аналогично предположению о незначительном влиянии высоты поверхностного слоя воды на процесс инфильтрации в начале выпадения дождя на сухую почву и после образования на поверхности слоя воды и образования стока. С учетом этого допущения, используя две приведенные выше зависимости, в результате интегрирования, полагая, что при $t = 0$ $Z = 0$, была получена следующая формула:

$$v = \sqrt{h_k \mu K_{\phi} / 2t} + K_{\phi} .$$

График этой зависимости приведен на рис.2.11, где одновременно нанесена прямая, соответствующая постоянной интенсивности ливня i , которая пересекается с кривой впитывания в точке с абсциссой $t = t_c$. Если $t < t_c$, то $v > i$, и имеет место только процесс впитывания воды в почвогрунт; при $t > t_c$ $v < i$, следовательно, происходит не только инфильтрация воды в почвогрунт, но и накопление ее на поверхности и образование поверхностного стока. Время t_c найдем из последней формулы, принимая $v = i$:

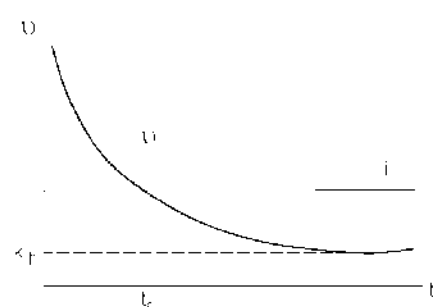


Рис. 2.11. Определение момента образования поверхностного стока

$$t_c = \frac{h_k \mu K_{\phi}}{2(i - K_{\phi})^2} ; \quad i > K_{\phi} .$$

В табл.2.4 приведены ориентировочные значения коэффициента фильтрации рыхлых пород [12]. В табл.2.5 даны сведения относительно основных констант зоны аэрации, полученные по данным непосредственных измерений в некоторых регионах СНГ [16]. В последней таблице также приведены результаты расчетов времени t_c , определенного при условии, что начальная влажность пород θ_0 была принята равной влажности максимальной молекулярной θ_0 , интенсивность ливня – 0,6 мм/мин, или 0,01 мм/с. В последней строчке стоит прочерк, так как коэффициент фильтрации легкой супесей, равный 1,2 м/сут, или 0,014 мм/с, превышает интенсивность ливня, что говорит о невозможности на поверхности этой породы при выбранной интенсивности ливня образования поверхностного стока.

Таблица 2.4

Порода	м/сут
Глины	0.001
Легкий суглинок	0.05-0.10
Супесь	0.1-0.5
Лёс	0.25-0.50
Мелкозернистый песок	1-5
Крупнозернистый песок	20-50
Гравий	20-150
Галечник	100-500

Таблица 2.5

Порода	θ_m	θ_o	h_k , м	$K_{ф}$, м/сут	t_c , мин
Суглинок тяжелый	0,45	0,15	4,0	0,01	12,3
Суглинок тяжелый	0,37	0,17	2,5	0,10	64,5
Суглинок лесовидный	0,42	0,17	1,4	0,05	19,8
Супесь легкая	0,42	0,10	1,0	1,2	-

Из-за постоянного влагообмена с атмосферой нижележащими слоями грунтов и потребления влаги растениями влажность почвы подвержена сезонным колебаниям. Размах их зависит от климатических условий, рельефа местности, типа почв и произрастающих на них растений.

Влажность почвы – важный фактор, который определяет ее водоудерживающую и инфильтрационную способность и распределение влаги между испарением, грунтовым и поверхностным стоком. Так, в зоне избыточного увлажнения (гумидной) максимальные запасы активной (или продуктивной) влаги, равной разности между влажностью почвы и влажностью завядания растений, наблюдаются в весеннее время и достигают в метровом слое почвогрунтов величины 250-300 мм. К концу лета наблюдается минимум запасов, равный приблизительно 150 мм. В этой зоне создаются благоприятные условия для питания рек как подземными, так и поверхностными водами. Почвы здесь относятся к промывному типу, в которых нисходящее движение влаги в почве превышает восходящее движение; почвы подвергаются ежегодному сквозному промачиванию; просочившаяся вода пополняет запасы грунтовых вод, уходящих подземными путями в дренирующие их реки.

В зоне недостаточного увлажнения (аридной) максимум запасов активной влаги в весеннее время не превышает в метровом слое почвы 50-70 мм, что ниже наименьшей влагоемкости. В этой зоне условия формирования поверхностного и подземного стока ограничены. При близком залегании грунтовых вод от земной поверхности здесь формируется так называемый выветный тип почв, при котором корни растений отсасывают почвенную воду из капиллярной каймы, а сами растения испаряют ее в атмосферу (отсюда термин "выветной"). Этот процесс активно способствует минерализации грунтовых вод, которая в зоне недостаточного увлажнения наблюдается повсеместно.

Поверхностные и подземные воды тесно связаны друг с другом. Водотоки оказывают существенное влияние на подземные воды в прибрежных зонах. С другой стороны, подземные воды питают реки в периоды, когда поверхностный сток отсутствует.

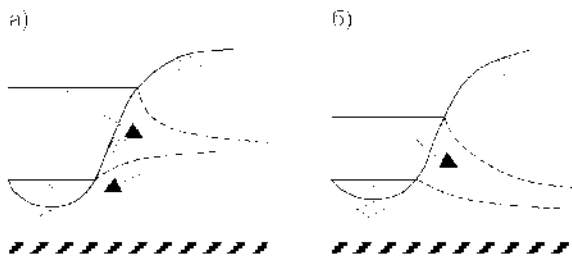


Рис. 2.12. Подземные и поверхностные воды гидравлически связаны

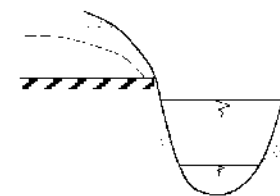


Рис. 2.13. Подземные и поверхностные воды гидравлически не связаны

Процессы водообмена поверхностных и грунтовых вод зависят от двух причин: изменения уровней соответствующих потоков и гидрологических условий местности, в частности, глубины залегания водоупора. Если водоупор находится ниже минимальной отметки уровня воды в русле (рис.2.12), то грунтовые и поверхностные воды гидравлически связаны. Если речная долина врежется в водоупор, то речные и подземные воды могут быть гидравлически связанными только в отдельные периоды (например, в половодье), в остальное время (в межень) гидравлическая связь прерывается. Наиболее характерный крайний случай приведен на рис.2.13, где водоупор расположен выше максимального уровня воды в реке, следовательно, гидравлическая связь поверхностных и подземных вод отсутствует.

В зоне достаточного увлажнения, где уровни грунтовых вод залегают на сравнительно небольшой глубине от поверхности земли (рис.2.12,а), подземные воды питают речные (дренируют их) большую часть года. Однако в паводок уровни воды в реке повышаются на значительную величину, превышая существенно уровни залегания грунтовых вод. В этот период речные воды питают подземный бассейн.

В зоне аридной грунтовые воды залегают на значительной глубине (рис.2.12.б), поэтому река питает подземный бассейн и в межень, и в паводок. Потери воды на фильтрацию в песчаные грунты долины и поймы реки Амударьи достигают нескольких сотен кубометров в секунду [3].

В гидрологии разработаны методы "расчленения" гидрографа рек. Суть их сводится к выделению на гидрографе периодов времени, когда река получала питание от какого-либо определенного источника. Остановимся вначале на тех из них, которые учитывают подземное питание рек, или базисный сток рек (рис.2.14).

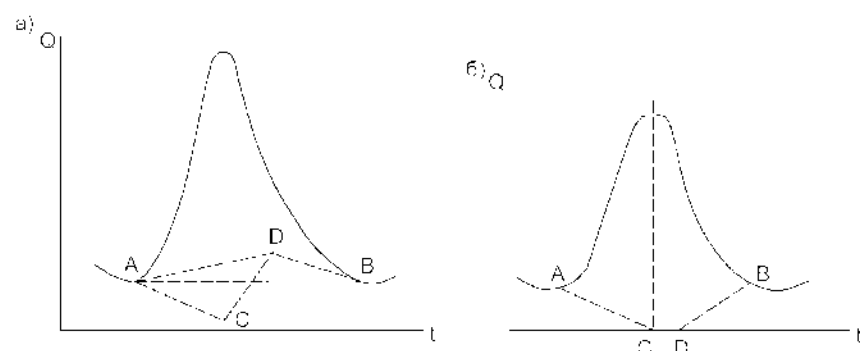


Рис. 2.14. Выделение базисного стока

Существуют различные методы выделения базисного стока [10, 11, 18]. Для рек, у которых подземные и поверхностные воды гидравлически связаны, а уровень грунтовых вод находится ниже минимального уровня воды в реке (рис.2.12.б), на гидрографе (рис.2.14.а) определяют точку А, в которой заканчивается зимняя межень, и точку В, где начинается летняя межень; точки соединяют прямой линией (пунктир АВ), отделяющей базисный сток от паводкового (выше линии АВ). Однако в действительности подземный сток, как и поверхностный, должен иметь максимум, не совпадающий с максимумом поверхностного стока, а несколько сдвинутый по времени на более поздние сроки. Поступают следующим образом: проводят кривую ВД, экстраполирующую кривую летней межени в области паводкового стока. На кривой произвольно выбирают точку Д, затем ее соединяют прямой линией с точкой А. Ломаная АДВ отделяет базисный сток. Следует отметить, что рассматриваемый случай относится к нижнему и среднему течению рек аридной зоны, в стоке которых местные подземные воды из-за их глубокого залегания не участвуют. Речь идет о водах, поступающих в реки из подземного бассейна в верховьях, в предгорных и горных участках этих рек. Для рек, у которых подземные и поверхностные воды гидравлически не связаны (рис.2.13), подъем уровней в реке и увеличение расходов не отражаются на уровне подземных вод, поэтому их режим должен сохранить ту тенденцию, которую он имел до наступления паводка. Этот факт отражен на рис.2.14,а прямой АС, продолжающей кривую стока зимней межени в область паводка. Условно принимается, что момент изменения режима подземных вод совпадает со

временем прохождения пика паводка (точка С). Способ проведения кривой ВД и нахождения точки Д описан выше; есть и другой, когда рекомендуется отрезок ВД принимать в виде прямой, параллельной линии АС. Для этого типа рек ломаная АСДВ отделяет подземный сток от поверхностного.

Реки, у которых поверхностные и подземные воды гидравлически связаны, а уровень грунтовых вод находится выше меженных уровней воды в реке (рис.2.12,а), при прохождении паводка сами начинают питать водой подземные бассейны. На рис.2.14,б этот факт отражает линия АС, при этом предполагается, что подземное питание полностью прекращается в момент прохождения в реке пика паводка (точка С). На спаде паводка подземное питание восстанавливается (линия ДВ). Как и в предыдущем случае, здесь имеются свои трудности, в частности, в определении отрезка времени СД, когда приток грунтовых вод в реку полностью отсутствует.

В заключение этого параграфа остановимся на вопросе о так называемых "возвратных" водах, происхождение которых поясняет рис.2.15. Допустим, что в аридной зоне в бассейне реки имеется орошаемый массив (на рис.2.15 одна его граница условно обозначена линией 1-1). В течение вегетационного периода на массив тем или иным известным в оросительных мелиорациях методом подают воду на орошение сельскохозяйственных культур. Практически невозможно подать воду так, чтобы она полностью расходовалась только на транспирацию, неизбежны потери на глубинную фильтрацию. Вследствие этого уровень грунтовых вод, который перед началом орошения находился на отметке УГВ, в конце вегетационного периода окажется на более высокой отметке - УГВП. Если в начале периода орошения речные воды питали подземный бассейн, то в конце его в реку начнут поступать воды из этого бассейна. Эти воды и называются возвратными. На отдельных участках больших рек Средней Азии возвратные воды дают расходы в осеннее время, измеряемые десятками кубометров воды в секунду. К сожалению, из-за общей минерализации подземных вод в этом регионе возвратные воды, как правило, тоже минерализованы.

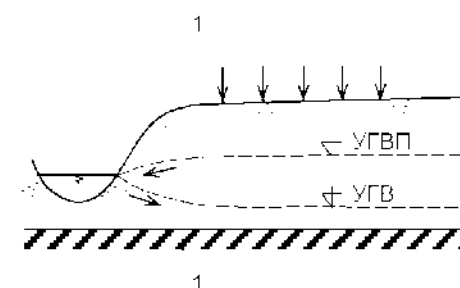


Рис. 2.15. Схема образования возвратных вод

Получение уравнения водного баланса имеет, прежде всего, большое значение для понимания процессов кругооборота влаги в пределах рассматриваемой территории. Вместе с тем анализ таких зависимостей необходим при составлении водохозяйственных балансов, в которых потребности в воде народного хозяйства соизмеряются с возобновляемыми в процессе круговорота воды запасами природных вод.

При получении уравнения водного баланса для замкнутого речного или озерного бассейна исходят из принципа сохранения воды, поэтому отдельно устанавливают приходную и расходную части баланса, а потом приравнивают их друг другу.

Рассмотрим вначале уравнение водного баланса для речного бассейна, площадь которого равна F_0 , за промежуток времени t (год, месяц и т.п.) [9]. Приходную часть баланса составляют: осадки h_N ; конденсация h_{KH} ; количество воды, поступающее из соседних бассейнов вследствие несовпадения поверхностного и подземного водоразделов $W_{ин}$. Расходная часть водного баланса включает: испарение h_v ; количество воды, которое уходит в соседние бассейны из-за несовпадения поверхностного и подземных водоразделов $W_{пу}$; сток реки через замыкающий створ W . Кроме того, есть законопеременная часть баланса: это аккумуляция (или расходование) воды в наземных аккумуляторах стока $W_{пак}$ (например, в озерах, болотах), а также в подземном бассейне $W_{пак}$. Знак у этой части водного баланса определяется в зависимости от того, поднимается или опускается уровень воды в наземных аккумуляторах, а также — уровень грунтовых вод. Если в замыкающем створе за время t производилось измерение расходов воды, тогда

$$W = \int_0^t Q(t) dt \quad .$$

Теперь можно составить уравнение водного баланса для речного бассейна F_0 за промежуток времени t :

$$F_0 h_N - F_0 h_{KH} + W_{ин} = W - F_0 h_v + W_{пу} = W_{пак} \pm W_{пак} \quad .$$

В уравнение водного баланса входят три члена, относящиеся к подземным водам, их можно объединить в один:

$$W_{п} - W_{ин} - W_{пу} \pm W_{пак} \quad .$$

Как уже отмечалось выше, этот член на практике очень трудно определяется, точность таких расчетов невелика. Можно объединить $W_{п}$ и $W_{пак}$:

$$W_{ак} = W_{п} \pm W_{пак} \quad .$$

Кроме того, для большинства регионов, расположенных в средних и высоких широтах, величиной $h_{\text{кп}}$ можно пренебречь по сравнению с h_N и h_V . Тогда получим соотношение

$$W = F_0(h_N - h_V) \pm W_{\text{ак}} \quad ,$$

которое для среднеемноголетних величин сведется к приведенной выше зависимости (1.4):

$$\overline{W} = F_0(\overline{h_N} - \overline{h_V}) - \overline{N} - \overline{V} \quad .$$

Получим уравнение водного баланса за время t для озера, площадь водной поверхности которого равна F_0 . Приходную часть баланса составляют: осадки, приток воды рек, впадающих в озеро $W_{\text{пр}}$, приток подземных вод $W_{\text{ппр}}$. Расходную часть составляют: испарение, фильтрация воды в подземный бассейн $W_{\text{пф}}$ и сток рек, вытекающих из озера $W_{\text{ст}}$. Знакопеременная часть – объем аккумуляции воды в озере при повышении уровня воды, или объем сработки при понижении уровня воды. Эту часть можно определить, если известны колебание уровня в озере за время t и кривая зависимости площади озера от уровня:

$$W_{\text{ак}} = \int_{H_1}^{H_2} F_0 dH \approx \overline{F_0}(H_2 - H_1) \quad ; \quad \overline{F_0} \approx \frac{(F_{02} + F_{01})}{2} \quad ,$$

где $\overline{F_0}$ – средняя площадь озера между отметками уровня H_2 и H_1 , F_{01} и F_{02} соответственно, площади озера при уровне H_1 и H_2 . Но так как изменения уровней произвольно за время t , то $\overline{F_0}$ – средняя площадь озера за этот промежуток времени. Уравнение водного баланса для озера будет выглядеть так:

$$\overline{F_0}h_N + W_{\text{пр}} + W_{\text{ппр}} = \overline{F_0}h_V + W_{\text{пф}} + W_{\text{ст}} \pm W_{\text{ак}} \quad .$$

Здесь также имеются два члена, связанные с подземными водами, которые трудно точно определить. Но если озеро находится в котловине, то $W_{\text{пр}} \approx 0$. Особенно велики потери на фильтрацию в карстовых районах. Если считать, что $W_{\text{ппр}} - W_{\text{пф}} \approx 0$, то в многолетнем разрезе будем иметь

$$\overline{F_0}h_N + \overline{W_{\text{пр}}} = \overline{F_0}h_V + \overline{W_{\text{ст}}} \quad ,$$

где $\overline{F_0}$ – средняя многолетняя площадь озера.

В недалеком прошлом рассматривались проблемы перераспределения запасов поверхностных вод на территории бывшего Союза, в том числе в этот процесс активно вовлекались воды озер. Посмотрим, к каким последствиям это может привести в гумидной и аридной зонах. В гумидной зоне, где $h_N > h_V$, из последней зависимости имеем

$$\overline{W_{\text{ст}}} = \overline{W_{\text{пр}}} + \overline{F_0}(h_N - h_V) \quad .$$

Поскольку величины $W_{\text{пр}}$, h_N и h_V заданы природой (в основном местными климатическими условиями), то вмешательство в природный процесс за счет увеличения $W_{\text{ст}}$ должно повлечь за собой необратимые последствия: из-за уменьшений уровня воды в озере – его деградацию, которая со временем будет прогрессировать вследствие уменьшения площади озера. Избежать катастрофу можно двумя путями: первый – это увеличение площади озера, что приведет к увеличению $W_{\text{ст}}$ за счет увеличения второго слагаемого справа. Реализовать такую операцию практически невозможно. Более реалиен второй путь – это уменьшение стока реки, вытекающей из озера. Например, в свое время рассматривался проект отъема воды из Ладожского озера для переброски ее в южные регионы Европейской территории Союза. При сохранении существующей площади озера и естественного колебания уровней воды в нем фактически это означало уменьшение стока реки Невы на объем переброски. Учитывая санитарное состояние реки Невы и Невской губы, такое мероприятие было справедливо отвергнуто. В аридной зоне, где $h_V > h_N$, имеем

$$W_{\text{ст}} = W_{\text{пр}} - \overline{F_0}(h_V - h_N) \quad .$$

Здесь увеличение $W_{\text{ст}}$ возможно за счет уменьшения площади озера, а следовательно, - затрат воды на испарение. Такой проект был разработан в Армении для озера Севан. В его основу были положены следующие данные о водном балансе озера [9, 11]. Расположенное на высоте приблизительно 2000 м над уровнем моря озеро имеет площадь $F_0 \approx 1400 \text{ км}^2$. В него впадает 28 рек, которые дают приток воды в год $W_{\text{пр}} = 0.76 \text{ км}^3$ (высота слоя воды составляет $\sim 540 \text{ мм/год}$). Объем воды, поступающей вместе с осадками в озеро за то же время, оценивается в 0.55 км^3 (высота слоя $\sim 390 \text{ мм/год}$). Итого в сумме приход воды равен $1.32 \text{ км}^3/\text{год}$ ($\sim 930 \text{ мм/год}$). Расход воды складывается из испарения – $1.21 \text{ км}^3/\text{год}$ (860 мм/год) и стока реки Раздан, вытекающей из озера, равного $0.11 \text{ км}^3/\text{год}$ (70 мм/год). В сумме это дает $1.32 \text{ км}^3/\text{год}$ (930 мм/год). Таким образом, сток реки составляет около 7.6% от общего количества поступающей в озеро воды. В связи с этим было принято решение увеличить сток реки Раздан за счет сокращения площади озера путем спуска вековых запасов озера Севан. Озеро состоит из Большого и Малого Севан, глубина воды в первом около 50 м, во втором – превосходит 90 м. По проекту понижение уровня должно было произойти на 50 м, до отметки дна Большого Севана. К счастью, этим планам не суждено было воплотиться в жизнь, так как понижение уровня воды в озере привело к активизации эрозионной деятельности впадающих в озеро рек,

которые начали активно размывать свои собственные отложения в озере ("конуса выноса") и спусить продукты размыва в озерную котловину. Создалась угроза потерять одно из красивейших озер мира вследствие его полного заиления задолго до запланированного снижения уровня воды в нем. В настоящее время осуществляются планы переброски в Севан стока рек из соседних бассейнов с целью получения на каскаде Разданских гидроэлектростанций дополнительной выработки энергии, а также использования самой воды для нужд орошения земель в долинах реки Раздан.

Если сток рек из озера равен нулю (бессточное озеро), то в аридной зоне имеем

$$\overline{F}_a = \frac{\overline{W}_{\text{зп}}}{(\overline{h}_\lambda - \overline{h}_\kappa)}.$$

Отсюда следует, что площадь озера прямо пропорциональна притоку воды в него. Если он по каким-либо причинам изменяется, то это сразу же находит отражение в соответствующем изменении площади озера.

Так, по данным [18], начиная с 1880 по 1932 гг. наблюдалось постепенное снижение уровня Каспийского моря, что свидетельствовало о вступлении моря в период относительного маловодья. Приток поверхностных и подземных вод в среднем в год равнялся $310,5 \text{ км}^3$, сток в залив Кара-Богаз-Гол $23,8 \text{ км}^3$, высота слоя испарения 975 мм , осадков 245 мм ; за этот период уровень моря понизился на $0,74 \text{ м}$. Но с 1932 по 1940 гг. ситуация резко изменилась: уровень моря снизился за это время на $1,68 \text{ м}$. Составляющие водного баланса за этот период в среднем за год равнялись: приток $229,0 \text{ км}^3$; сток $10,5 \text{ км}^3$; испарение 766 мм ; осадки 214 мм . Объясняется столь резкое снижение притока воды в море и падение его уровня активизацией хозяйственной деятельности в бассейне рек Волги, Урала, Терека и Куры на фоне более засушливого периода, чем был предыдущий. Далее уровень моря продолжал понижаться, к 1972 году общее понижение по сравнению с 1880 г. составило $3,13 \text{ м}$. Имеются следующие данные об уменьшении площади моря: с 422 тыс. км^2 в 1930 г. до 371 тыс. км^2 в 1970 г. (снижение уровня составило более $2,5 \text{ м}$), современная площадь моря 367 тыс. км^2 . В это время начали принимать меры по уменьшению негативных последствий этого процесса. Так, в дельте Волги был построен вододельитель, который перераспределяет расходы воды между ее западной и восточной частью с целью сохранения перестиглици в восточной части. Был перекрыт пролив, соединяющий море с заливом Кара-Богаз-Гол, при этом возникли трудности на химических заводах из-за усыхания залива; стали наблюдаться соляные бури. Однако, начиная с 80-годов, уровень моря начал повышаться, что объясняют наступлением очередного относительно более многоводного периода, чем

предыдущий. Пролив, соединяющий залив Кара-Богаз-Гол с морем, освободили от перегородывающих сооружений.

Можно привести еще один пример существенного уменьшения площади водоема вследствие деятельности человека, направленной на сокращение притока поверхностных вод в него – это Аральское море [19]. До 1960 г. средний многолетний уровень моря имел отметку 53 м (Балтийская система высот), при этой отметке площадь моря была около 66 тыс.км², объем воды – 1062 км³. В настоящее время площадь сократилась более чем на треть; уровень моря снизился на 12,5 м. Объем воды уменьшился на 640 км³; береговая линия в некоторых местах отступила на 90 км. Вследствие "усыхания" моря соленость его вод увеличилась в 2,5 раза (до 1960 г. соленость была около 10 г солей в одном литре воды или 10‰). Осушенное дно моря стало источником пыли и солей, разносимых ветрами на громадные расстояния. Водные ресурсы моря определяются притоком вод впадающих в него рек: Амударьи (сток 72,8 км³/год) и Сырдарьи (36,7 км³/год), в сумме сток этих рек равен 109,5 км³/год. Из этого количества фактический приток в море составлял 56 км³/год (Амударья приносила в море 42 км³/год, Сырдарья – 14), остальное расходовалось на хозяйственные нужды, главным образом на орошение (около 90-95%). Начиная с 1960 г., приток речных вод стал сокращаться и в 1986 г. практически прекратился. Это произошло в результате интенсивного использования водных ресурсов. В эти годы: возросли водозаборы на орошение; увеличилось расходование воды на промывку земель, повсеместно подверженных засолению; возросло испарение воды в регионе с поверхности вновь созданных многочисленных водохранилищ. Этому процессу способствовало также и то, что сильно минерализованные возвратные воды не возвращались в реки, а сбрасывались в бессточные понижения (Арнасай, Саракамыш).

Как было отмечено выше, создание водохранилищ в аридной зоне связано с безвозвратными потерями части стока рек на испарение. В качестве примера можно привести водохранилище Капчагайской гидроэлектростанции на реке Или. Река Или впадает в озеро Балхаш, сток ее равен 15 км³/год. Озеро состоит из двух частей: восточной, где вода солоноватая, и западной, в которую впадает р.Или, с пресной водой. Площадь озера колеблется от 17 до 22 тыс.км². Водохранилище Капчагайской ГЭС было запроектировано с огромным объемом воды, приблизительно равным двум годовым стокам р.Или. Если наполнять водохранилище в течение двух лет водой без пуско-выпусков в нижний бьеф, то уровень озера Балхаш снизится за это время приблизительно на 1,5 м, и произойдет засоление вод в его западной части. Площадь водохранилища соответствует площади большого озера и равна около 2000 км². Средняя величина слоя годового

испарения в этом регионе составляет 1100 мм, слоя осадков – 200 мм. Отсюда потери воды на испарение в год будут

$$\Delta V = F_B(h_V - h_N) = 2000 \cdot 0,9 \cdot 10^{-3} = 1,8 \text{ км}^3 / \text{год} \quad .$$

От годового стока р.Или потери составят

$$\frac{\Delta V}{\overline{W}} \cdot 100\% = \frac{1,8 \cdot 100}{15} = 12\% \quad .$$

По данным, приведенным в [9], расчеты, связанные с регулированием стока рек Дона, Днепра, Южного Буга и Днестра, показали, что после создания водохранилищ на этих реках потери на испарение будут равны 5,5 км³/год, что приблизительно соответствует годовому объему безвозвратных потерь воды в бассейнах этих рек в естественных условиях. Таким образом, после проведения мероприятий по регулированию стока безвозвратные потери возрастут вдвое и станут равными 11 км³, что составляет от суммарного годового стока этих рек (~ 48 км³) около 23%. Отметим, что количества воды, испаряющейся с поверхности указанных водохранилищ, хватило бы для орошения около 1 млн.га земель в этом регионе.

2.7. Классификация рек по условиям их питания

Условия питания рек определяют их режим. Чаще других на земле встречаются реки со смешанным питанием, они в основном преобладают в странах содружества. Для этих рек характерно питание подземными водами, которое в зимнее время становится основным. В странах с холодным и умеренным климатом в зимнее время осадки выпадают в виде снега, накапливающегося в течение зимы на площадях бассейнов рек, образуя при таянии весеннее половодье. В летнее время к подземному питанию добавляются еще воды, стекающие в реки вследствие выпадения на площадях их бассейнов осадков в виде дождей и ливней. При этом, если страны находятся под влиянием муссонов, то летом осадки выпадают преимущественно в виде муссонных ливней. Наконец, для рек, расположенных в горной местности, в странах с теплым климатом в летнее время реки получают обильное питание при таянии ледников в горах, которое продолжается в течение трех-четырех месяцев. В табл.2.6 приводятся данные по некоторым характерным для СНГ рекам о распределении их среднегодового стока по видам питания.

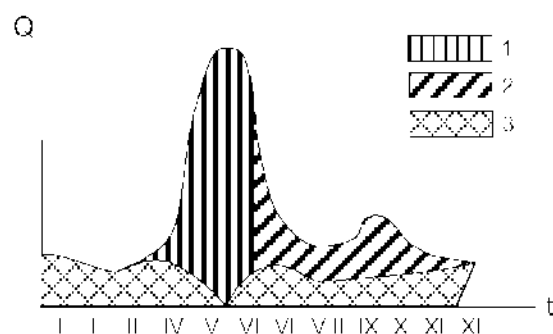


Рис. 2.16. Гидрограф реки первого типа с указанием видов питания:
1- снегового; 2 – дождевого;
3 – грунтового.

В соответствии с данными таблицы можно выделить три типа рек, у которых два вида питания в сумме дают максимальную величину из трех возможных. К первому типу относятся реки с преимущественным снеговым и грунтовым питанием. Это реки типа Волги, равнинные спокойные со снеговым половодьем и небольшим осенним паводком. Типовой гидрограф этих рек дан на рис.2.16, где проведена операция его расчленения в соответствии с принципами, изложенными в разделе 2.5, и данным табл.2.6. Поведение рек этого типа в значительной мере предсказуемо. Например, на Волге в створе у г.Камышина в естественном состоянии весеннее половодье приходилось на конец апреля – начало мая, а заканчивалось – в июне; продолжалось половодье один-полтора месяца. За период весеннего половодья на реках этого типа проходит от 50 до 60% годового стока.

Таблица 2.6

Река	Распределение стока по источникам питания, %			
	снеговое	дождевое	ледниковое	грунтовое
Сев. Двина	50	22	-	28
Зап. Двина	46	18	-	36
Волга	53	17	-	30
Днепр	52	18	-	30
Дон	60	7	-	33
Терек	11	21	37	31
Кубань	12	24	32	32
Обь	49	27	8	16
Енисей	46	36	-	18
Амур	64	19	-	17
Лена	40	35	-	25

Ко второму типу относятся реки с преобладающим ледниковым и грунтовым

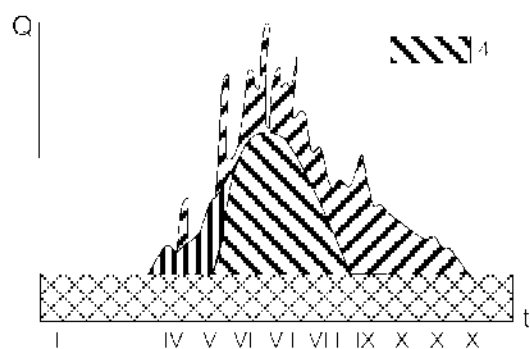


Рис. 2.17. Гидрограф реки второго типа:
1, 2, 3 – обозначения те же, что и на рис. 2.16;
4 – ледниковое питание

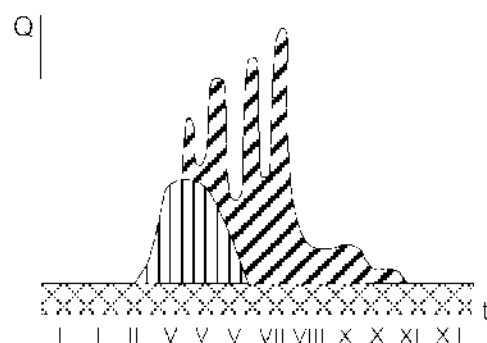


Рис. 2.18. Гидрограф реки
третьего типа
(обозначения см. на рис. 2.16)

питанием. Это реки горных районов Кавказа и Средней Азии. Типичным представителем этих рек является Терек, схематичный расчлененный гидрограф которого у с.Казбеги приведен на рис.2.17. Здесь общий ход паводка тоже известен: он начинается с таяния снегов сначала в долинах, а затем в горах. Вместе с тем уже в мае снеговое питание рек сменяется питанием в результате таяния ледников ниже снеговой линии, которое продолжается до сентября. И на все это накладываются непредсказуемые, непродолжительные по времени, но значительные по величине расходы воды паводки ливневого характера. Половодье растягивается во времени на три-четыре месяца, общий объем воды за время его прохождения составляет 70-75% от годового стока реки.

Третий тип рек находится в Сибири, это реки с преобладающим снеговым и дождевым (муссонные ливни) питанием. На рис.2.18 приведен гидрограф р.Илики у г.Среднека. Характерным для рек этого типа является наличие в "мокрый период" – от мая до октября нескольких мощных по объему воды, продолжительности и максимальным расходам пиков. Общая продолжительность паводкового периода – пять-шесть месяцев в году. За это время в реке проходит 80-85% от годового стока. Наконец, к четвертому типу, не вошедшему в табл.2.6, относятся реки с ливневым питанием, например, р.Сочи, схематичный гидрограф которой у с.Пластунки приведен на рис.2.19. Гидрограф реки представляет собой целую серию пиков паводков, совпадающих по времени с выпадением ливней на площади бассейна реки. Имеется небольшое питание подземными водами, но оно незначительно, так что в межливневый период река почти пересыхает.

Четвертый тип рек выделяют специально, имея в виду особую опасность их для гидротехнических сооружений в силу непредсказуемости появления ливневых паводков с их краткосрочным протеканием и большой разрушительной силой. В равной степени это относится и к другим типам (например, ко второму и третьему). У них должна быть обязательно проанализирована возможность появления ливневой составляющей в стоке. Дело в том, что присутствие в стоке этой составляющей

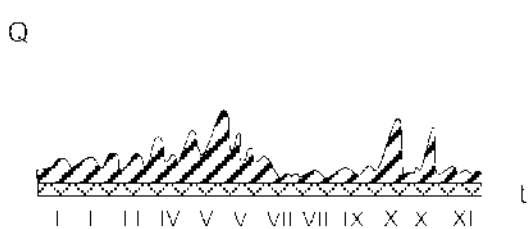


Рис. 2.19. Гидрограф реки четвертого типа (обозначения см. на рис. 2.16)

предъявляет особые требования к обеспечению надежности работы водосбросных сооружений, в первую очередь, - к затворам этих сооружений. В горных и предгорных местностях, где скорость нарастания расходов ливневого паводка велика, вся система автоматики, обеспечивающей подъем и опускание затворов, должна работать в это время безукоризненно. Отказ в работе связан с возможностью переполнения водохранилища, подъемом уровня воды выше нормально подпорного (НПУ), что может повлечь за собой

разрушение всего комплекса гидротехнических сооружений, например, вследствие перелива воды через гребни глухих плотин.

Если выполнить эти требования невозможно, либо вероятность отказа в работе автоматики велика, то отметку НПУ выбирают равной отметке гребня водосливной плотины, который в этом случае никакими затворными устройствами не оборудуется. При прохождении ливневого паводка в случае подъема уровня выше гребня водосливной плотины вода беспрятственно сливается в нижний бьеф.

Здесь рассмотрена наиболее простая классификация рек по условиям питания, имеются и другие классификации, в основу которых положены другие соображения о формировании стока [3, 10, 11].

2.8. Основные числовые характеристики стока

Одной из основных характеристик речного стока является средний многолетний годовой сток реки $\overline{W}$, или норма стока:

$$\overline{W} = \sum_{i=1}^n W_i / n ,$$

где n – число лет наблюдений; W_i – сток i -го года. Кроме того, можно говорить о среднем многолетнем расходе воды, или норме расхода:

$$\overline{Q} = \overline{W} / T = \sum_{i=1}^n W_i / T_n = \sum_{i=1}^n Q_i / n ,$$

где Q_i – средний расход i -го года; T – число секунд в году, если размерность Q м³/с, а W – м³.

Важной характеристикой является модуль стока, равный отношению среднего годового или многолетнего расхода к площади речного бассейна:

$$\mu_i = Q_i / F_{\text{б}} ; \quad \mu = Q / F_{\text{б}} .$$

Модуль стока показывает, какова величина стока воды в реку с каждой единицы площади ее бассейна в единицу времени (размерность μ может быть разной, но наиболее часто применяется в л/с.км²).

Отношение какой-либо характеристики стока, упомянутой выше, к ее среднему значению (норме) называется модульным коэффициентом стока:

$$K_i = W_i / \overline{W} = Q_i / \overline{Q} = \mu_i / \mu .$$

Выше были использованы такие понятия, как высота слоя стока:

$$h_{W_i} = W_i / F_{\delta} \quad ; \quad h_W = W / F_{\delta} \quad .$$

а также коэффициент стока

$$\eta_i = h_{W_i} / h_{N_i} = W_i / N_i \quad ; \quad \eta = h_W / h_N = W / N \quad .$$

Модуль стока отражает способность земной поверхности при выпадении на нее воды в виде осадков формировать речной сток вследствие процесса водоотдачи (стекания воды по поверхности). В первую очередь процессе водоотдачи определяется количеством поступающей на поверхность воды и способностью земной поверхности испарять ее, а они зависят от климата. Однако нельзя полностью игнорировать роль местных факторов (подстилающей поверхности), обуславливающих стекания воды.

В начале столетия господствовало мнение, что модуль стока является некоторой универсальной характеристикой, зависящей только от климата, который изменяется на поверхности земли в широтном направлении. Следовательно, и модуль стока должен изменяться в том же направлении, так что можно создать карты с нанесенными на них линиями равных значений модуля стока. По инициативе Д.И.Кочерина такие карты были созданы, они в целом подтверждали высказанную выше мысль об изменении модуля стока в направлении север-юг. Однако в дальнейшем по мере накопления данных наблюдений и уточнения карт изолиний модуля стока (Б.Д.Зайков, К.П.Воскресенский) стали обнаруживаться регионы, в которых наблюдались систематические отклонения в ту или в другую сторону от указанных закономерностей изменения модуля стока. Общая тенденция в распределении средних годовых модулей стока в Европейской части СНГ такова: на севере и северо-западе средний годовой модуль стока равен 10-12 л/с.км², в направлении к югу и юго-востоку он непрерывно уменьшается, достигая величины 0.5 л/с.км². В горах Урала, Кавказа, на Карнатах модуль среднего стока увеличивается до 15-20 л/с.км², в районе влажных субтропиков (Западная Грузия) – до 50-70 л/с.км².

Карты средних годовых модулей стока приводятся в [9, с.73; 11, с.298] и в других учебниках. Роль этих карт для практических расчетов стока была чрезвычайно велика: не имея данных наблюдений, определив по картам площадь бассейна реки и модуль стока, можно было найти ее средний годовой сток. В настоящее время из-за существенных ошибок при определении стоковых характеристик малых рек метод утратил свое значение, однако основная его идея сохранилась: наносить на географические карты линии равных значений таких стоковых характеристик, которые от местных условий не зависят, а полностью определяются климатом. Например, при отсутствии данных наблюдений максимальный мгновенный расход дождевого паводка определяется в

зависимости от максимального модуля стока заданной вероятности превышения. Для которого даются карты, а местные условия учитываются с помощью коэффициентов, зависящих от характера подстилающей поверхности.

3. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ГИДРОЛОГИЧЕСКИХ РАСЧЕТОВ

3.1. Использование методов теории вероятностей и математической статистики для определения расчетных стоковых величин

В гидрологии часто встречаются случайные явления, которые при повторении всякий раз протекают несколько по-иному. Например, весеннее половодье может продолжаться разное время, иметь различные моменты начала и конца, разное количество воды, протекающей в реке за время половодья, различную величину максимального расхода и т.д.

Математическая наука, изучающая количественные закономерности в случайных явлениях при массовых их повторениях, называется теорией вероятностей [20]. Она оперирует такими понятиями, как событие и его вероятность.

Событие – это всякий факт, который может произойти или не произойти. Вероятность (или частота появления события) – это количественная оценка возможности появления данного случайного события. Если при некоторых условиях из n возможных событий должно произойти одно и нет никаких оснований отдать предпочтение какому-либо из них, то говорят, что эти события имеют одинаковую вероятность (частоту): $p = 1/n$. Если событие A появляется в m случаях (благоприятных исходах) при общем числе их n , то вероятность (частота) его наступления $p = m/n$. Невозможному событию соответствует вероятность "0", достоверному – "1".

В теории вероятностей существует понятие о случайной величине. Это такая величина, которая может принять то или иное значение, причем заранее неизвестно, какое, но известна вероятность появления того или иного ее значения. Случайные величины появляются в том случае, если какая-либо величина определяется достаточно большим числом неучтенных независимых друг от друга величин. Например, максимальный расход весеннего половодья определяется снеговыми запасами, интенсивностью нарастания положительных температур, наличием в этот период дождей, числом дней с солнечной радиацией и т.п. Таким образом, гидрологические величины (максимальный и минимальный расходы, годовой сток и др.) можно отнести к категории случайных.

3.2. Законы распределения случайных величин

Случайная величина характеризуется совокупностью возможных ее значений и вероятностью (частотой), с которой эти значения могут появляться. Эти данные образуют закон распределения случайной величины. Законы распределения случайных величин есть объективные закономерности окружающей нас природы, которые познаются в опытах.

Пусть какая-либо случайная величина в n опытах приняла значение от $A_{\min}$ до $A_{\max}$ (например, A – результат взвешивания какого-либо тела на точных весах). Разделим весь диапазон наблюдений на k интервалов (расположив случайные величины в возрастающем порядке) и подсчитаем количество значений m величин, приходящихся на каждый интервал. Результаты расчетов сведем в табл.2.1, которая представляет собой статистический ряд. Количество интервалов зависит от числа проведенных опытов и может быть найдено из приближенной зависимости: $K = 1 + 3,3 \lg n$.

Таблица 3.1

Интервал	$A_{\min} \dots A_1$	$A_1 \dots A_2$	...	$A_i \dots A_{i-1}$	...	$A_{k-1} \dots A_{\max}$	Примечание
m_i	m_1	m_2		m_i		m_k	$\sum_{i=1}^k m_i = n$
p_i	$p_1 = m_1/n$	$p_2 = m_2/n$		$p_i = m_i/n$		$p_k = m_k/n$	$\sum_{i=1}^k p_i = 1$
F_i	p_1	$p_1 + p_2$		$\sum_{i=1}^i p_i$		$\sum_{i=1}^k p_i = 1$	

В каждом интервале находим $p_i = m_i/n$ – вероятность (или частоту) попадания случайной величины A в заданный интервал. Статистический ряд можно представить в виде графика, где по вертикальной оси откладывается частота, а по горизонтальной – сама случайная величина. Этот график называется гистограммой (рис.3.1, а), или графиком статистической функции распределения плотности вероятности попадания случайной величины в заданный промежуток. Из метода построения этого графика следует, что площадь, ограниченная ступенчатой кривой, будет равна единице, если по вертикальной оси откладывать приведенную частоту $\frac{m_i}{n\Delta A}$, где $\Delta A = \frac{A_{\max} - A_{\min}}{k}$. Пользуясь статистическим рядом, можно построить суммарную ступенчатую кривую (рис.3.1, б), которая называется графиком статистической суммарной функции распределения F_i . Принципы построения становится ясным из рассмотрения последней графы табл.3.1: $F_1 = p_1$; $F_2 = p_1 + p_2$ и т.д.: $F_k = \sum_{i=1}^k p_i = 1$. Статистическая суммарная функция позволяет ответить на вопрос, какова вероятность того, что случайная величина примет значение меньше фиксированного.

Если увеличить число наблюдений n до очень большой величины ($n \rightarrow \infty$), то статистические ступенчатые графики соответствующих функций будут в пределе стремиться чаще всего к некоторым вполне определенным математическим кривым (см. пунктирные кривые на рис.3.1). При этом гистограмма даст в пределе кривую функции распределения плотности вероятностей, или дифференциальную функцию распределения, а график статистической суммарной функции распределения — кривую интегральной функции распределения, или интегрального закона распределения.

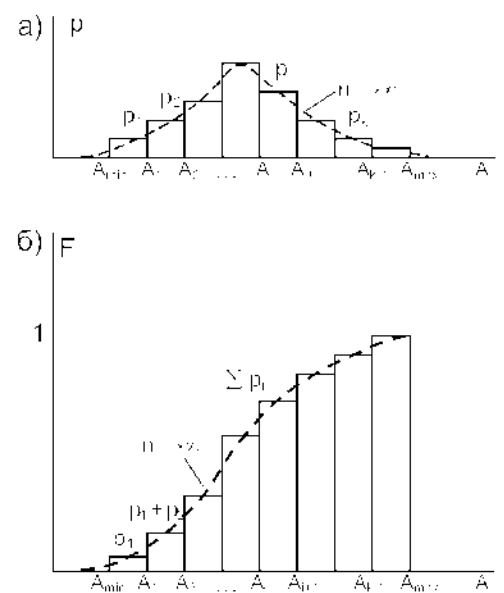


Рис. 3.1. Гистограмма (а) и статистическая суммарная функция распределения (б)

Теперь мы вплотную подошли к одной из основных задач специальной науки, называемой математической статистикой: разработать методы регистрации и анализа статистических экспериментальных данных, получаемых в результате наблюдений за массовыми случайными явлениями. Как правило, при таких наблюдениях имеют дело с ограниченным числом их. По этим данным трудно судить о том, охвачен ли весь диапазон возможных изменений случайной величины (например, максимальных наблюдаемых расходов) и не появится ли в дальнейших наблюдениях величина (максимальный расход) больше самой большой из ранее наблюдаемых. Максимальный расход весеннего половодья — величина случайная, поэтому здесь правомочны методы математической статистики, которые могут дать ответ на поставленный вопрос. При этом, конечно, нельзя определить, когда произойдет это событие, но можно предсказать его появление с наперед заданной вероятностью. С этой целью по данным наблюдений строится гистограмма и график статистической суммарной функции распределения, а потом вычисляются параметры этих функций (вернее, оценки параметров), которые позволяют с той или иной степенью точности подобрать дифференциальную (или интегральную) функцию распределения. Для облегчения поиска соответствующих математических кривых распределения в теории вероятностей обычно используются специальные методы и параметры, называемые критериями согласия. В связи с тем, что в гидрологии набор таких кривых ограничен, метод подбора упрощается и заключается в выборе математической кривой, исходя из условия наилучшего соответствия математической и эмпирической кривых. Пользуясь математическими кривыми

распределения, можно дать ответ на вопрос, каков был бы вид эмпирических кривых, если бы число лет наблюдений за данной случайной величиной было бесконечно большим.

Перед нами стоит задача дать определение и найти оценки параметров, характеризующих законы распределения случайных величин.

3.3. Обеспеченность. Характеристики положения кривых распределения случайных величин.

Пусть имеется функция плотности распределения $f(x)$, график которой изображен на рис. 3.2. а [5]. Рассмотрим элементарный участок dx , примыкающий к точке x . Вероятность попадания непрерывной случайной величины на этот элементарный участок равна $f(x)dx$; эта величина называется элементом вероятности $dp = f(x)dx$. Геометрически она равна площади элементарного прямоугольника, опирающегося на отрезок dx . Обычно на непрерывную случайную величину никаких ограничений не накладывают: она может принять любое значение в промежутке $-\infty$. Интегральная функция распределения связана с плотностью распределения следующим образом:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx.$$

Следовательно, $F'(x) = f(x)$. В связи с тем, что $f(x)$ – неотрицательная функция ($f(x) \geq 0$), интегральная функция распределения – неубывающая функция своего аргумента: если $x_2 > x_1$, то $F(x_2) > F(x_1)$. При $x \rightarrow -\infty$ $F(-\infty) \rightarrow 0$; при $x \rightarrow +\infty$ $F(+\infty) \rightarrow 1$. Если функция в некотором промежутке изменения x возрастает: $f(x) > 0$, то кривая функция $F(x)$ в этом промежутке обращена выпуклостью вниз (рис.3.2. б). Если $f(x)$ в некотором промежутке изменения x убывает, то кривая функции $F(x)$ здесь обращена выпуклостью вверх. Это свойство непосредственно вытекает из следующего соотношения: $f'(x) = F''(x)$. Таким образом, в первом случае $F''(x) > 0$, во втором $F''(x) < 0$; кроме того, точка перегиба на кривой $F(x)$, в которой $F''(x) = 0$, соответствует экстремуму на кривой $f(x)$, где $f'(x) = 0$.

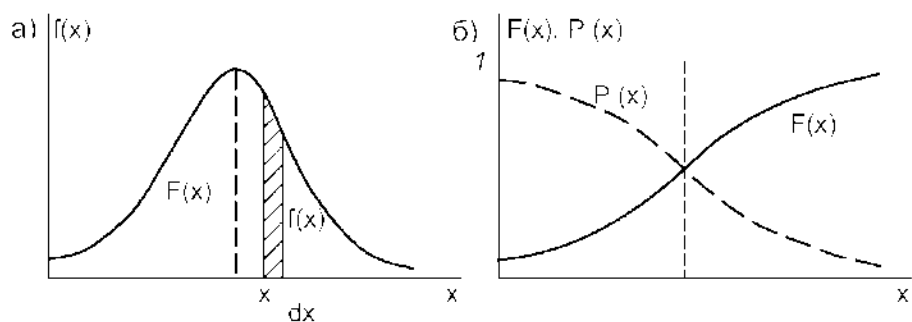


Рис. 3.2. Дифференциальная (а) и интегральная (б, сплошная линия) функции распределения плотности вероятностей, кривая обеспеченности (б, пунктир)

В гидрологии вместо интегральной функции распределения применяется функция обеспеченности, связанная с плотностью распределения: $P(x) = - \int_x^{+\infty} f(x)dx$. Вспомним некоторые свойства определенного интеграла: интеграл $\int_a^b f(x)dx$ при $f(x) > 0$ положителен, если $a < b$, и отрицателен, если $a > b$. Имея это в виду, найдем сумму двух функций:

$$F(x) + P(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx - \int_x^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^x f(x)dx + \int_x^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

Таким образом, функция обеспеченности дополняет интегральную функцию распределения до единицы (пунктирная кривая на рис.3.2. б). Исходя из метода получения этой функции, можно дать такое определение обеспеченности: обеспеченность – это вероятность появления случайной величины, равной или большей заданного значения, или вероятность превышения случайной величины. В дальнейшем мы будем говорить о кривых распределения плотности вероятностей (или просто кривых распределения) и обеспеченности.

Рассмотрим их свойства. Каждая кривая распределения имеет следующие характеристики положения. Математическое ожидание – центр распределения для непрерывной случайной величины - есть определенный интеграл, взятый в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ от произведения случайной величины на элемент ее вероятности

$$M(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} xdp = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx.$$

Если имеем дело с дискретной случайной величиной, то интегрирование необходимо заменить суммированием. Пусть дискретная случайная величина x_i в опытах приняла n равновероятных значений. В соответствии с вышеприведенным определением математическое ожидание для дискретной случайной величины будет равно произведению всех значений случайной величины на вероятность их появления (следует иметь в виду, что термин «вероятность» относится к случайной величине, заданной непрерывно, для дискретной величины правильным будет термин «частота»). Но все величины равновероятны, ни одна из них не имеет никаких преимуществ по сравнению с другими, поэтому частота появления каждой равна: $p = 1/n$. Отсюда имеем:

$$M(x) = \sum_{i=1}^n x_i p_i = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}.$$

где $\bar{x}$ – среднее арифметическое ряда величин, в который входит n членов. Следовательно, среднее арифметическое (или норма) есть оценка математического ожидания: при большом числе опытов ($n \rightarrow \infty$) оно сходится к математическому ожиданию по вероятности.

Точка на оси абсцисс кривой распределения плотности вероятностей, отвечающая норме (или математическому ожиданию), называется центром распределения (рис.3.3).

Модой случайной величины называется такое ее значение $x = M_0$, которому отвечает наибольшая вероятность появления (M_0 соответствует максимальная ордината $[f(x)]_{\max}$). Медианой называется такое значение x , ордината которого делит площадь, ограниченную кривой распределения плотности вероятностей, на две равные части, следовательно, площадь каждой равна $1/2$ (M_e соответствует обеспеченность, равная 50%). Расстояние между центром

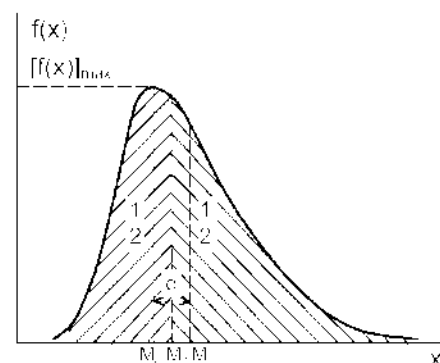


Рис. 3.3. Асимметричная кривая распределения плотности вероятностей

распределения и модой есть радиус асимметрии d . Радиус асимметрии – характеристика несимметричности кривой распределения, которая, в частности, выражается в том, что отклонение от центра распределения в одну сторону могут быть больше, чем в другую. Асимметрия считается положительной, если отклонение в сторону положительных значений x больше, чем в сторону отрицательных, и наоборот. Существует целый класс кривых, которые имеют симметричную форму относительно центра распределений. У таких кривых медиана совпадает с центром распределения и модой, следовательно, радиус асимметрии равен нулю.

Кроме рассмотренных выше трех характеристик положения, вводится ряд иных, описывающих то или иное свойство кривых распределения.

3.4. Характеристики формы кривых распределения случайных величин

В качестве характеристик формы чаще всего используются так называемые моменты. Понятие момента широко применяется в механике для описания распределения масс (статические моменты, моменты инерции и т.п.). Теми же приемами пользуются в теории вероятностей для описания основных свойств распределения случайной величины. На практике чаще всего применяются моменты двух видов: начальные и центральные.

Для непрерывной случайной величины x начальным моментом s -го порядка называется интеграл

$$a_s(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^s f(x) dx \quad .$$

Следовательно, при $s = 1$ $a_1(x) = M(x)$. Таким образом, математическое ожидание есть первый начальный момент случайной величины. В связи с этим можно дать следующее определение начального момента s -го порядка: начальным моментом s -го порядка случайной величины x называется математическое ожидание s -й степени этой величины: $a_s(x) = M(x^s)$.

Оценкой начального момента s -го порядка случайной величины x_i , заданной дискретно, называется сумма вида $a_s(x_i) = \sum_{i=1}^n x_i^s p_i$. Это определение совпадает с определением начального момента порядка s в механике, если на оси абсцисс в точках $x_1, x_2, \dots, x_n$ сосредоточены массы $p_1, p_2, \dots, p_n$. Таким образом оценки начальных моментов равны средним арифметическим из дискретных случайных величин в степени s (первой, второй, третьей и т.д.). Оценки начальных моментов сходятся по вероятности к соответствующим начальным моментам (при $n \rightarrow \infty$).

Далее введем понятие центрального момента, определив вначале центрированную случайную величину как отклонение случайной величины от ее математического ожидания (для непрерывно заданной случайной величины): $x' = x - M$ или от среднего (для дискретной случайной величины): $x'_i = x_i - M$. Ниже математическое ожидание будем обозначать буквой M . Нетрудно убедиться в том, что математическое ожидание центрированной случайной величины равно нулю. Действительно, для непрерывной величины

$$M(x') = M(x - M) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M) f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx - M \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = M - M = 0 \quad .$$

Центрирование случайной величины, очевидно, равносильно переносу начала координат в среднюю "центральную" точку, равную математическому ожиданию (в центр распределения). Моменты центрированной случайной величины носят название центральных. Они аналогичны моментам относительно центра тяжести в механике. Как и ранее, будем относить термин «центральные моменты» к непрерывно заданным случайным величинам; для величин, заданных дискретно, будем говорить об оценках этих моментов.

Таким образом, центральным моментом порядка s случайной величины x называется математическое ожидание s -й степени соответствующей центрированной случайной величины:

$$\alpha_s(x') = M(x'^s) = M[(x - M)^s] \quad .$$

Для случайной величины, заданной дискретно, оценка s-го центрального момента выражается суммой (оценки по-прежнему обозначены чертой над символом):

$$\overline{\alpha}_s(x) = \sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^s p_i \quad .$$

Для непрерывной величины этот момент равен:

$$\alpha_s(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M)^s f(x) dx \quad .$$

В дальнейшем для краткости будем вместо $\alpha_s(x)$ и $\overline{\alpha}_s(x)$ писать α_s и $\overline{\alpha}_s$. Центральный момент первого порядка равен нулю: $\alpha_1 = 0$, ибо математическое ожидание центрированной случайной величины равно нулю. Центральный момент второго порядка носит название дисперсии случайной величины (обозначается $D(x)$):

$$\alpha_2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M)^2 f(x) dx = D(x) \quad .$$

Для дискретной случайной величины оценка дисперсии равна:

$$\alpha_2 = \sum_{i=1}^n (x_i - x)^2 p_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - x)^2 = D(x) \quad .$$

Дисперсия случайной величины есть характеристика рассеяния случайной величины относительно центра ее распределения. В механической интерпретации – это момент инерции заданного распределения масс относительно центра тяжести. Дисперсия случайной величины имеет размерность ее квадрата. Удобнее пользоваться такой величиной, размерность которой совпадает с размерностью случайной величины: для этой цели из дисперсии извлекают квадратный корень. Полученную величину называют средним квадратическим отклонением (или стандартом) случайной величины и обозначают буквой σ

$$\overline{\sigma} = \sqrt{\overline{D}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2 / n} \quad .$$

В теории вероятностей доказано, что эта оценка для σ при малых значениях n получается неточной (смещенной), поэтому оценку среднего квадратического отклонения рекомендуется определять по формуле

$$\overline{\sigma} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2 / (n - 1)} \quad .$$

Среднее квадратическое отклонение принимается мерой точности во многих отраслях техники. Например, для широко распространенного в природе и технике симметричного нормального распределения (рис.3.4) ординаты таких значений x , которые отличаются от

математического ожидания M на $\pm\sigma$, выделяют площадь, ограниченную кривой распределения, составляющую $\sim 68\%$ общей площади, заключенной между кривой и осью

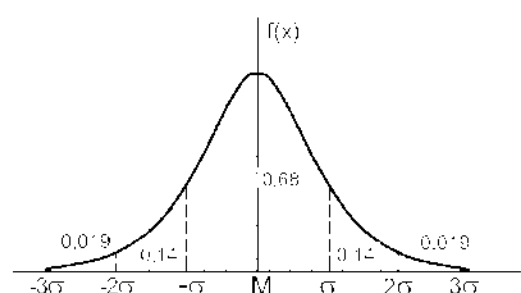


Рис. 3.4. Симметричная кривая распределения плотности вероятностей

абсцисс. Ординаты x , отличающиеся от M на $\pm 2\sigma$, ограничивают площадь, составляющую $\sim 96\%$ всей площади, а $\pm 3\sigma$ - $99,8\%$. Интервал изменения случайной величины, заданный в виде $M \pm n\sigma$, называется доверительным, вероятность попадания случайной величины в этот интервал названа доверительной (в теории надежности она называется надежностью). Вероятность не попадания в доверительный интервал называется уровнем значимости (в теории надежности - это вероятность риска).

Отсюда, уменьшая отклонение от номинала при одновременном увеличении числа средних квадратических значений в отклонении, можно увеличить точность изготовления деталей при уменьшении процента появления брака (например, если отклонение включает в себя $\pm 2\sigma$, то при массовом изготовлении на каждые 100 деталей в среднем четыре будут бракованными; если же в отклонении заключается $\pm 3\sigma$, то на каждые 1000 деталей бракованных в среднем будет только две и т.д.). При увеличении доверительного интервала (надежности) вероятность риска уменьшается. Однако это связано с необходимостью более тщательного изготовления деталей: ответственные детали шлифуются, или даже полируются. Тем самым уменьшается отклонение от номинала (допуск) при одновременном увеличении числа среднеквадратических отклонений в допуске.

В гидрологии вместо среднего квадратического отклонения применяют его отношение к норме. Эта безразмерная величина называется коэффициентом вариации. Его оценка равна:

$$\bar{C}_x = \bar{\sigma} / \bar{x} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i / \bar{x} - 1)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (k_i - 1)^2}{n-1}},$$

где $k_i = x_i / \bar{x}$ - модульный коэффициент, или нормированная случайная величина. Заметим, что $k_i - 1$ - нормированная и центрированная случайная величина. Таким образом, коэффициент вариации - нормированное среднее квадратическое отклонение случайной величины.

Рассмотрим оценку третьего центрального момента:

$$\alpha_3 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3 p_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3 .$$

Этот момент характеризует асимметричность ряда случайных величин, ибо для симметричного ряда отклонения от центра распределения получаются одинаковыми, но с разными знаками, поэтому они должны взаимно уравновеситься (ввиду их симметрии), и сумма третьих степеней отклонений будет равна нулю. Кривые распределения плотности вероятностей, встречающиеся в гидрологии, обычно имеют положительную асимметрию.

В гидрологии употребляют не сам третий момент, а его отношение к кубу среднего квадратичного отклонения. Это безразмерная величина называется коэффициентом асимметрии:

$$\bar{C}_s = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3 / n \bar{\sigma}^3 = \sum_{i=1}^n (k_i - 1)^3 / n \bar{C}_v^3 .$$

3.5. Законы распределения случайных величин, отвечающие гидрологическим явлениям

Рассмотрим некоторые математические законы распределения применительно к гидрологическим явлениям. Наиболее простым и достаточно широко распространенным для математического описания явлений природы и различных процессов в технике является нормальный закон распределения плотности вероятностей, или закон Гаусса. Кривая, соответствующая нормальному закону распределения, симметрична относительно центра распределения и выражается следующей формулой:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left(- \frac{(x - M)^2}{2\sigma^2} \right) ,$$

где σ - среднее квадратическое отклонение; M - математическое ожидание. При $x = M$

$f(x) = [f(x)]_{\max} = 1/\sigma \sqrt{2\pi}$ (рис.3.5). В математических таблицах обычно приводятся значения интегральной функции распределения,

отвечающей нормальному закону: $F(x) = \int_{-\infty}^{+x} f(x) dx$. Известно, что

интеграл типа $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$ в явном виде не выражается и называется

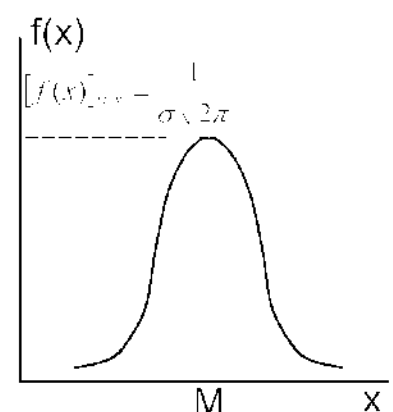


Рис.3.5. Кривая Гаусса

интегралом вероятностей или функцией Лапласа. Значения обеспеченности для нормального закона обычно приводятся в специальных гидрологических таблицах (таблицы Фостера в США или Рыбкина в СССР) [21]. Кривую распределения нормального закона характеризуют только два параметра: центр распределения и среднее квадратическое отклонение (или коэффициент вариации). Кривые распределения с одинаковыми значениями σ , но разными значениями M отличаются друг от друга только местоположением относительно оси x . Отсюда становится ясной операция центрирования: все кривые приводятся к одному началу, которое совпадает с их центрами распределения. Среднее квадратическое отклонение (коэффициент вариации) изменяет при заданном M форму кривой распределения.

Построим кривую распределения и кривую обеспеченности нормального закона так, как это принято в гидрологии. Для этого ось x обычно делают вертикальной, кроме того, вдоль этой оси откладывают не случайную величину x , а ее нормированные значения (отнесенные к математическому ожиданию, или модульный коэффициент). В этой системе центру распределения соответствует единица. Обеспеченность обычно выражают в процентах. Для нормального закона, очевидно, центру распределения будет отвечать $P = 50\%$ (рис.3.6).

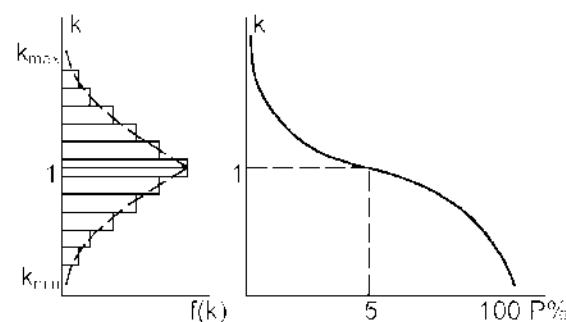


Рис. 3.6. Кривая распределения плотности вероятностей и обеспеченности нормального закона

Рассмотрим, как влияет коэффициент вариации на вид кривых обеспеченности. Поскольку максимальная ордината кривой распределения равна $1/\sigma\sqrt{2\pi}$, то с уменьшением σ (или C_v) кривая распределения должна вытягиваться вдоль оси $f(x)$ или $f(k)$ и одновременно сужаться вдоль оси x (или k), так как площадь, ограниченная этой кривой, всегда равна единице.

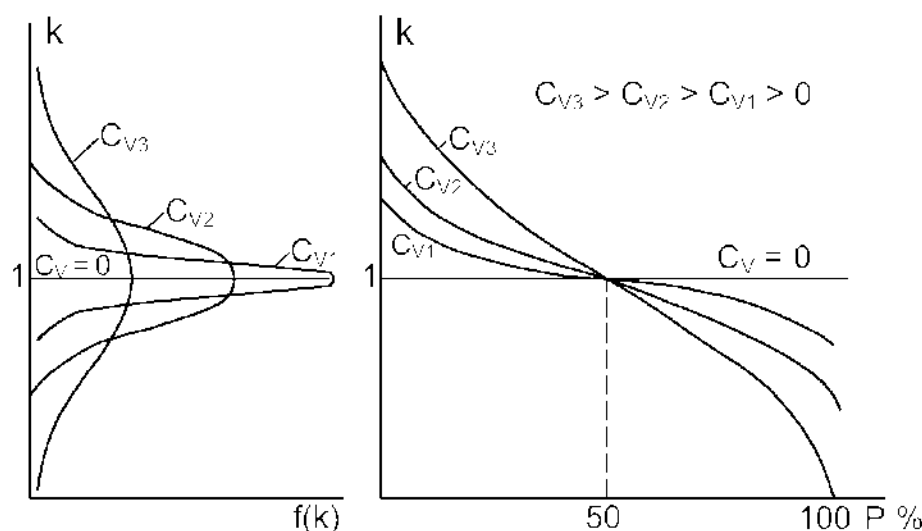


Рис. 3.7. Зависимость кривой распределения плотности вероятностей и обеспеченности нормального закона от коэффициента вариации

При этом кривая обеспеченности поворачивается против часовой стрелки вокруг точки с координатами $1; 50\%$ (рис.3.7), стремясь к прямой $K = 1$, или $x = M$. В пределе она с ней сольется, что будет соответствовать $C_v = 0$ (рис.3.7). В гидрологии это случай полностью зарегулированной реки, у которой, например, $Q = \text{const}$. Чем менее зарегулирована река, тем больше должно быть отклонение расхода от нормы (или центра распределения) и тем большее значение принимает коэффициент вариации C_v .

Однако гидрологические явления очень редко подчиняются нормальному закону распределения. Большинство кривых распределения, полученных в результате обработки данных наблюдений, например, за расходами воды в реке, имеют асимметричный вид. При этом асимметрия, как правило, положительная. Статистические кривые распределения плотности вероятностей обладают следующими свойствами. Отклонения от центра распределения в сторону максимальных значений расхода намного больше, чем отклонения в сторону малых расходов. Расходы меньше нормы встречаются чаще, чем расходы больше нормы, следовательно, мода расположена левее центра распределения, что объясняется положительной асимметрией кривой (выбросы в сторону максимальных значений очень редки, но столь велики, что их доля в сумме кубов отклонений весьма существенна). Кривые распределения плотности вероятностей, отвечающие расходам воды в реке, имеют вид, близкий к изображенному на рис.3.8.

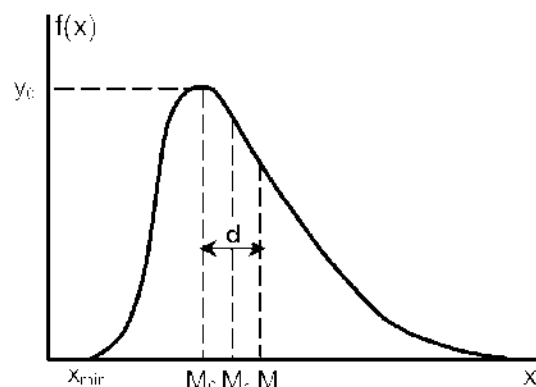


Рис. 3.8. Кривая распределения плотности вероятностей, характерная для гидрологических величин

Этим условиям отвечает дискретное биномиальное распределение. Из биномиального распределения путем перехода от дискретной формы к непрерывной можно получить два закона распределения: симметричный – нормальный и асимметричный – закон гамма-распределения. Таким образом, биномиальное распределение является наиболее общим, включающим нормальное распределение и гамма-распределение, которое приводится ниже. Заметим, что сначала А.Фостер в США, а затем советские гидрологи Д.Л.Соколовский, С.П.Крицкий и М.Ф.Менкель применили гамма-распределение для определения расчетных гидрологических характеристик. При этом Фостер использовал одно распределение (типа III) из группы семейств распределений, предложенных американским математиком К.Пирсоном. Система Пирсона включает большое число распределений, в том числе нормальное распределение (распределение Пирсона типа I) и гамма-распределение (распределение

Пирсона типа III). Здесь речь идет об одном и том же распределении, которое было использовано в США и в нашей стране.

Уравнение кривой Пирсона III рода, у которой начало координат совпадает с модой, имеет вид:

$$f(x) = y_0 e^{-x/d} \left(1 + \frac{x}{Mo}\right)^{x_0/d},$$

где Mo – мода, $d = Mo - M$ – введенный ранее (см. рис.3.8) радиус асимметрии,

$y_0 = [f(x)]_{\max}$ – модальная ордината.

Для гамма-распределения (или, что одно и то же, для распределения Пирсона III рода) справедливо следующее соотношение между коэффициентами асимметрии и вариации:

$C_s = 2C_v$. При этом кривая распределения плотности вероятностей берет начало в точке $x=0$ (следовательно, условию $x=0$, или $k=0$ соответствует обеспеченность $P=100\%$ – река в крайнем случае может пересохнуть). Однако, первые попытки использовать биномиальное распределение для обработки данных натурных наблюдений обнаружили, что коэффициент асимметрии может принимать значения и больше, и меньше двух C_v . Соответствующие кривые распределения плотности вероятностей начинаются в точках $x > 0$ и $x < 0$. Последнее, естественно, неприемлемо так как означало бы, что река потекла вспять (это чаще всего возможно при нарушении человеком естественного режима речного стока). Для таких “сдвинутых” кривых была найдена связь между рассматриваемыми коэффициентами в виде:

$$C_s = \frac{2C_v}{1 - k_{\min}},$$

где $k_{\min} = \frac{x_{\min}}{x}$, $x_{\min}$ – минимальный расход воды в

реке.

Отсюда следует: если $k_{\min} > 0$, то $C_s > 2C_v$; если $k_{\min} < 0$, то $C_s < 2C_v$. Таким образом в последнем случае при использовании биномиального распределения можно получить при больших значениях обеспеченности отрицательные значения расходов воды.

Серия кривых, отвечающих различным соотношениям C_s и C_v , при $C_v = 1$, приведена на рис.3.9. Существенными являются два обстоятельства: 1) чем больше C_s , тем дальше уходит кривая при малых значениях

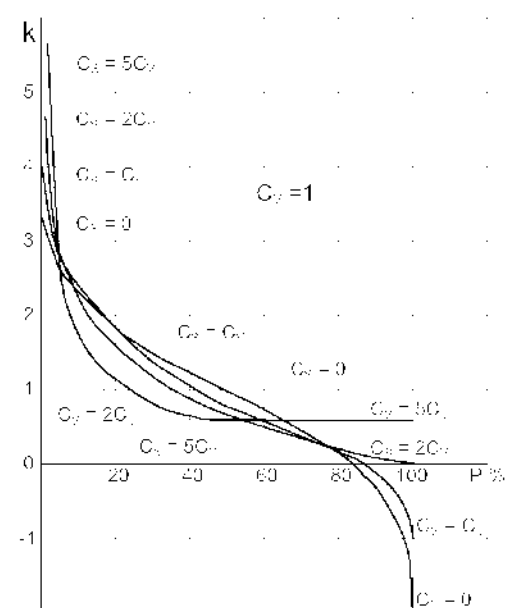


Рис. 3.9. Влияние коэффициентов асимметрии на форму кривой обеспеченности гамма-распределения

обеспеченности ($P < 5\%$) в сторону больших значений k ; 2) чем меньше C_s , тем больше участок с отрицательными значениями k при $P > 85\%$. В том и другом случае кривая ограничена снизу кривой нормального распределения при $P < 5\%$ и $P > 85\%$.

Рассмотрим, как влияет коэффициент асимметрии при $C_v = 1$ на вид кривых обеспеченности. С увеличением C_s кривая поворачивается в области малых P ($< 5\%$) по часовой стрелке, а в области больших ($P > 85\%$) – против часовой стрелки. В средней части кривые ограничены сверху кривой нормального распределения (только при $C_s > 0$) и перемещаются с увеличением C_s в сторону оси P .

Применение гамма-распределения к случаю, когда $C_s > 2C_v$, сомнения не вызывает. Другое дело, когда обработка ряда наблюдений приводит к неравенству $C_s < 2C_v$. При этом на теоретической кривой получим отрицательные значения стока, что лишено физического смысла. Это неприятное свойство кривых биномального распределения пытались тем или другим способом устранить гидрологи России.

Более предпочтительным и простым оказался метод С.Н.Крицкого и М.Ф.Менкеля, которые предложили относить биномальный закон не к самой переменной x , а к какой-либо ее монотонной функции ξ , например, вида $\xi = x^a$. Подбирая значения a , можно получить семейство кривых, которые при условии $0 < C_s/2C_v < 1$ неизменно выходят из начала координат.

Кривые Менкеля-Крицкого, иначе называемые кривыми трехпараметрического гамма-распределения приведены на рис.3.10 для случая $C_v = 1$ и различных значений C_s . Там же изображена кривая нормального закона распределения. Если сравнить кривые обеспеченности, приведенные на рис.3.9 и 3.10, то можно видеть, что в области малых значений P они практически не отличаются, в области же больших P отличие получается существенным. Следовательно, при определении максимальных значений стоковых характеристик в равной мере приемлемы законы двух- и трехпараметрического гамма-распределения. При определении минимальных и средних характеристик больших рек предпочтение следует отдавать двухпараметрическому распределению (биномальной кривой), ибо трудно себе представить, что такая река, как Волга, может когда-нибудь пересохнуть. Для малых рек, где такая возможность не исключена, трехпараметрическое распределение лучше отвечает этому условию.

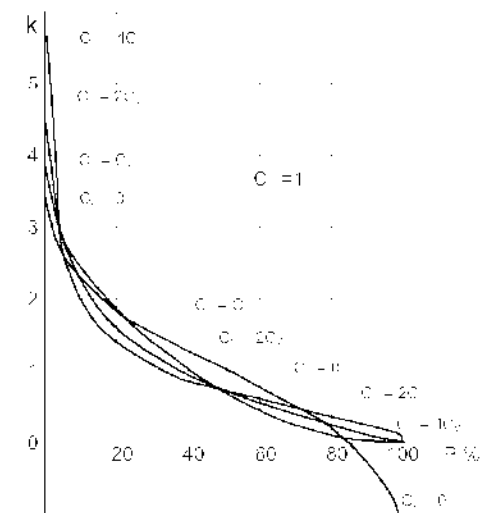


Рис. 3.10. Кривые трехпараметрического гамма-распределения

Кривые биномиального (двухпараметрического) распределения приведены в Приложении 1 в системе координат: $k_i = \frac{k-1}{C_v} = F(P, C_v)$ при $C_v = 1$; здесь k_i - табличное значение модульного коэффициента. Кривые трехпараметрического гамма-распределения (Менкеля-Крицкого) приведены в Приложении 2 в системе координат $k = f(P, C_v)$ при $C_v = nC_v$, где n принимает значения: 1, 2, 3, 4, которые соответствуют номерам таблиц (например, для первой таблицы $C_v = C_v$, для второй - $C_v = 2C_v$ и т.д.).

3.6. Определение эмпирической обеспеченности.

Как было отмечено выше, при выбранных законах распределения плотности вероятностей подбор математических кривых, отвечающих тем или иным гидрологическим явлениям, осуществляется по методу наилучшего соответствия данным наблюдений. Для этого данные наблюдений необходимо нанести на координатную плоскость. Один из возможных способов был описан выше - это построение по данным наблюдений гистограммы, а по ней - статистической кривой обеспеченности. Однако такой путь трудоемок, кроме того, содержит элемент субъективности. Практика гидрологических расчетов выбрала другой, более объективный путь, позволяющий всем, использующим эти методы, избегать субъективного фактора, выполняя эти расчеты единообразно. Для этого члены гидрологического ряда наблюдений, независимо от того, в какой хронологической последовательности они были получены, располагают в убывающем порядке, например

$$x_1 > x_2 > x_3 > \dots > x_i > \dots > x_n \quad .$$

Следовательно, величины $x_1 = x_{\max}$ и $x_n = x_{\min}$ являются самой большой и самой наименьшей в ряду наблюдений. Если $n \rightarrow \infty$ и нет оснований отдать предпочтение появлению какого-то определенного члена в этом ряду, то все они равновероятны, так что вероятность появления p_i каждого члена ряда должна удовлетворять зависимости:

$$p_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} \right] \quad .$$

Тогда вероятность превышения P_i в убывающем ряду i -го члена ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) равна:

$$P_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{i}{n} \right] \quad .$$

Это следует из простых рассуждений: вероятность превышения первого члена в убывающем ряду равна $1/n$; второго - $1/n + 1/n = 2/n$; третьего - $3/n$; i -того - i/n . При ограниченном n , что характерно для данных гидрологических наблюдений, оценка обеспеченности как $P_i = i/n \cdot 100\%$ будет неточной (смещенной). Действительно, для последнего члена, независимо от n , обеспеченность всегда будет равна 100%, в то время как для первого члена ряда она, напротив, будет зависеть от n , поскольку равна $1/n \cdot 100\%$. Теоретический анализ этого вопроса позволил установить, что наиболее подходящими оценками обеспеченности будут:

$$P_i = \frac{i}{1+n} \cdot 100\% \quad \text{и} \quad P_i = \frac{i-0,3}{n-0,4} \cdot 100\% .$$

Расчеты показывают, что первая формула (она предложена Крицким и Менкелем) дает большие значения обеспеченности при $i > 1$, чем вторая; в области $i > n$ большие значения получаются по второй формуле (ее автор Чебодаев). Первая рекомендуется для определения эмпирической обеспеченности максимальных расходов и уровней воды, так как ее использование дает некоторый запас при поиске математических кривых обеспеченности. Во всех остальных случаях предпочтение отдается второй формуле.

3.7. Подбор аналитических функций распределения, соответствующих эмпирическим данным гидрологических наблюдений

Практика гидрологических расчетов основывается на определении расходов воды заданной вероятности превышения. Для этого используются различные теоретические кривые распределения. В теории вероятностей соответствие теоретических распределений эмпирическим данным устанавливается с помощью критериев согласия: Пирсона, Колмогорова и др. Однако, для использования этих критериев нужно иметь достаточно длинные ряды наблюдений (не менее 100 членов). Такой длины рядов наблюдений в гидрологии практически нет, поэтому критерии согласия пока не используются. Выбор конкретной кривой распределения из числа тех, которые наилучшим образом соответствуют гидрологическим случайным явлениям (биномального, двух- и трехпараметрического γ -распределения, последнее называется распределением Менкеля-Крицкого) осуществляется различными методами: моментов, квантилей, наибольшего правдоподобия, а также с использованием клетчаток вероятностей. Наибольшее распространение в гидрологии получил метод моментов, сущность которого заключается в том, что параметры искомого распределения выражаются через моменты, вычисляемые по эмпирическим данным. Моментов должно быть столько, сколько параметров рассматриваемого закона распределения. Однако ошибки в определении моментов высоких порядков велики, поэтому

в гидрологии обычно не используются распределения, зависящие более чем от трех параметров. С помощью вычисленных моментов (оценок параметров искомого распределения) находится теоретическая кривая и визуально сравнивается с эмпирической кривой распределения. Такой прием согласия аналитической функции распределения и эмпирических данных имеет существенный недостаток: неоднозначность решения вследствие его субъективности. Использование клетчаток вероятностей распределений, соответствующих гидрологическим явлениям, преобразующих кривые распределений в прямые линии, позволяет в некоторой степени ослабить элемент субъективности, но не устраняет его. Полностью устраняет этот недостаток метод квантилей, который в гидрологии используется путем вычисления так называемого коэффициента обеспеченности. Здесь в качестве основного принимается условие совпадения аналитической кривой обеспеченности в трех точках с эмпирической кривой.

Метод квантилей разработан для дискретного биномиального распределения. Параметры распределения Менкеля-Крицкого находятся методом наибольшего правдоподобия с использованием функции максимального правдоподобия. Все эти методы определения параметров кривых обеспеченности и построения самих кривых будут рассмотрены ниже. Следует, однако, заметить, что они справедливы для статистически однородных рядов гидрологических величин. В гидрологии в этой связи существует специальное понятие о фазово-однородных величинах. Это такие величины, которые имеют одинаковое происхождение (формируются под действием одинаковых факторов) и происходят в одно и то же время (находятся в одинаковой фазе). К ним, например, можно отнести максимальные расходы весеннего половодья (причина – таяние снегов, фаза – весна) и осеннего паводка (причина – осенние дожди и подземные воды, фаза – осень). Соответственно можно говорить о минимальных расходах зимней и летней межени и т.п. Но есть такие реки, где максимальные расходы могут формироваться за счет таяния снегов в весенний период и выпадения ливней летом.

Возникает естественный вопрос: образуют ли наибольшие расходы такой реки, независимо от условий их формирования (таяние снегов или ливневые осадки), единую статистическую совокупность, или следует отдельно рассматривать максимальные расходы дождевых паводков и весеннего половодья как две самостоятельные статистические совокупности. Кроме того, как использовать на практике суммарную информацию об этих совокупностях, если при проектировании гидротехнических сооружений необходимо знать наибольший расход воды заданной обеспеченности независимо от условий его формирования. В качестве другого примера можно привести выбор реки-аналога, когда

необходим анализ однородности физико-географических и климатических факторов стока. В гидрологических исследованиях нашли применение различные критерии однородности, ниже будут рассмотрены два из них: Вилькоксона и Фишера.

3.8 Критерии оценки однородности гидрологических рядов. Построение кривой обеспеченности для неоднородных статистических совокупностей.

При пользовании критериями однородности следует иметь в виду, что большинство из них исходят из предположения о принадлежности выборочных данных нормальному закону. Результаты наблюдений за гидрологическими величинами свидетельствуют об асимметричном характере соответствующих распределений, поэтому анализ однородности рядов наблюдений с помощью таких критериев, строго говоря, справедлив только в тех случаях, когда асимметрия не велика. К непараметрическим (не зависящим от закона распределения, к которому принадлежат рассматриваемые совокупности) относится критерий однородности Вилькоксона. При анализе однородности рядов наблюдений за гидрологическими величинами, прежде всего, выдвигается нуль-гипотеза об отсутствии существенного различия между параметрами сравниваемых рядов. Затем назначается уровень значимости α и производится подсчет числа инверсий, положенный в основу критерия Вилькоксона. С этой целью наблюдения, образующие две выборки с членами x_i и y_j , $i = 1, 2, 3, \dots, n$, $j = 1, 2, 3, \dots, m$, располагают в общей последовательности в убывающем или возрастающем порядке, например: $y_1 x_1 x_2 u_2 u_3 x_3 u_4 u_5 x_4$. Если какому-либо значению x предшествует некоторое значение y , то эта пара образует инверсию. Следовательно, x_1 и x_2 образуют по одной инверсии, x_3 — три (с u_3 , u_2 и y_1), x_4 — пять (с u_5 , u_4 , u_3 , u_2 и y_1) и т.п. В данном случае всего инверсий: $u = 1 + 1 + 3 + 5 = 10$. Доказано, что в однородных рядах с числом членов не менее 10 в каждом, инверсии распределены по нормальному закону с математическим ожиданием

$$M(u) = \frac{m \cdot n}{2}$$

и средним квадратичным отклонением:

$$\sigma(u) = \sqrt{\frac{m \cdot n}{12} (m + n + 1)},$$

где n и m — число членов в первой и второй выборках. Далее вычисляют критические величины инверсий, выделяющие область допустимых значений, в пределах которой с вероятностью $(1-\alpha)100\%$ будет справедлива нуль-гипотеза при попадании в нее вычисленного значения инверсий. Если вычисленное значение оказывается вне этой области,

то такое событие считается практически невозможным (вероятность его появления равна выбранному уровню значимости: $\alpha 100\%$), и принимается альтернативная гипотеза. В методе Вилькоксона критических величин инверсий u_k две:

$$u_k = M(u) \pm t_B \sigma(u) \quad ,$$

где статистика t_B определяется в зависимости от выбранного уровня значимости для нормального распределения, а именно: уровням значимости 10, 5 и 1% соответствуют значения статистики t_B - 1,64, 1,96, 2,58. Нуль-гипотеза (в данном случае принадлежность двух выборок к одной генеральной совокупности) принимается, если выполняется условие:

$u_{kn} \leq u \leq u_{kv}$: здесь u_{kn} и u_{kv} соответственно нижний и верхний критические уровни инверсий, определяемые из последней формулы (верхнему соответствует знак "+", нижнему - знак "-"). Следует отметить, что обобщения и параметрических, и непараметрических критериев однородности на случай более двух выборок отличаются большой громоздкостью и сложностью.

При использовании критерия Фишера F предполагается, что анализируемые ряды подчинены нормальному закону. Критерий вычисляется по формуле

$$F = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} \quad ,$$

где σ_x и σ_y - средние квадратические отклонения рядов, при этом $\sigma_x > \sigma_y$. Критерий Фишера зависит от двух степеней свободы, которые определяются как: $l_n = n-1$ и $l_m = m-1$, где n и m - число членов в каждом из рассматриваемых рядов. Критические значения критерия Фишера определяются из таблиц, приведенных в Приложении 3 в зависимости от выбранного уровня значимости и полученных значений l_n и l_m . Если $F < F_k$, то расчетная величина F попадает в область допустимых значений, и принимается нуль-гипотеза.

Если принимается альтернативная гипотеза - выборки принадлежат к разным генеральным совокупностям, - то возникает вопрос, как в этом случае построить кривую обеспеченности. Рассмотрим предложение, выдвинутое Г.Н.Бровковичем и Г.Н.Великановым, на примере двух неоднородных распределений. Пусть величина x принадлежит первой совокупности, в которой n членов, а y - второй с m членами. Вероятность случайной переменной x принадлежать к своей совокупности в суммарном ряду двух совокупностей равна $n/(n+m)$ соответственно для случайной y - $m/(n+m)$.

Пусть $P(x_i)$ и $P(y_j)$ - вероятности появления соответственно x и y в своих совокупностях. Рассмотрим событие, состоящее в появлении конкретной величины x_i и y_j . При этом для каждого такого события должно реализоваться совместное появление двух

независимых событий, принадлежности к своей совокупности и появления конкретных величин в этих совокупностях. Совместное появление событий называется их произведением, а поскольку события независимы, то по теореме умножения вероятностей независимых событий имеем для вероятности появления конкретной величины x_i или y_j соответственно:

$$\frac{n}{n+m} \cdot P(x_i) \quad \text{и} \quad \frac{m}{n+m} \cdot P(y_j) \quad .$$

Рассматриваемый случай изначально предполагал, что речь идет о событиях несовместных. Например, в каждом году из N -летнего периода наблюдений имеются два максимальных расхода: один вследствие таяния снегов, другой — из-за выпадения ливней. При анализе данных гидрологических наблюдений в конкретном году выбирался только один расход, а именно тот, который в этом году был наибольшим. Естественно, что количество таких расходов в общем случае не должно совпадать. Например, максимальных расходов снегового происхождения (обозначим их x_i) было n , $i = 1, 2, 3, \dots, n$, а ливневого (y_j)- m , $j = 1, 2, 3, \dots, m$, так что $m+n = N$. Отсюда можно найти вероятность появления $P(x, y)$ любого конкретного значения случайной величины (x или y) по теореме сложения вероятностей несовместных событий как

$$P(x, y) = \frac{n}{n+m} \cdot P(x_i) + \frac{m}{n+m} \cdot P(y_j) \quad .$$

Эта зависимость также используется при статистической обработке однородных рядов, имеющих нулевые значения входящих в него величин (например, речь может идти о рядах минимальных расходов воды в реке).

Пусть имеется ряд, в котором n членов имеют ненулевые значения (обозначим их x), а m членов равны нулю (обозначим их y). В связи с тем, что при $y = 0$ $P(y_j) = 0$, последняя формула переносывается так:

$$P(x) = \frac{n}{n+m} \cdot P(x) \quad .$$

Однако та же самая задача может быть решена другим путем, когда неоднородные данные не разделяются, а рассматриваются совместно, без выбора в результате предварительного анализа в году только одной величины — наибольшей. Но тогда неоднородных величин будет одинаковое количество $n = m = N$. Но в связи с тем, что практику интересует только одна гидрологическая характеристика, независимо от того, какими причинами она была вызвана, то в этом случае для нахождения вероятности появления этой характеристики $P(x_i, y_j)$ используется теорема сложения вероятностей

совместных событий. Пусть имеются два совместных события x_i и y_j , $i = 1, 2, 3, \dots, N$, а соответствующие им вероятности появления каждого обозначим $P(x_i)$ и $P(y_j)$. Тогда в соответствии с теоремой о сложении вероятностей совместных событий [20]

$$P(x_i, y_j) = P(x_i) + P(y_j) - P(x_i)P(y_j) \quad .$$

3.9 Методы построения кривых обеспеченности для однородных совокупностей данных гидрологических наблюдений

Особенности использования методов теории вероятностей в гидрологических расчетах состоят в том, что класс кривых распределения плотности вероятностей, отвечающих гидрологическим явлениям, благодаря работам отечественных ученых был определен и нормативно рекомендован к практическому применению. Задача практика заключается в подборе кривой обеспеченности, соответствующей конкретным данным наблюдений и принадлежащей этому классу. Прежде всего, находят параметры кривых распределения плотности вероятностей по имеющимся данным наблюдений. Но в связи с тем, что число данных ограничено, параметры определяются неточно, поэтому их называют оценками. В оценки параметров тем или иным способом вводят поправки, которые особенно существенны в методе моментов. В методе квантилей эмпирическую и аналитическую кривые обеспеченности совмещают в трех точках. Считается, что этого достаточно для правильного выбора аналитической кривой. В методе максимального правдоподобия используется специальная функция, позволяющая получить более устойчивые характеристики распределений по сравнению с методом моментов. Параметры позволяют подобрать аналитические кривые, наиболее точно соответствующие данным гидрологических наблюдений. По этим кривым, по сути дела, осуществляется вероятностный прогноз ожидаемых величин гидрологических характеристик: величина характеристики определяется с заданной вероятностью превышения.

3.9.1. Метод моментов

Сущность метода довольно подробно изложена в предыдущем разделе. Речь идет об определении параметров искоемых кривых распределения по случайным выборкам. Следовательно, найденные таким образом параметры сами являются случайными, поэтому обычно говорят не о параметрах, а об оценках этих параметров, которые обладают различной степенью приближения к истинным значениям рассматриваемых параметров. Для того, чтобы такое приближение было наибольшим, к оценкам параметров предъявляют

определенные требования. Прежде всего, они должны сходиться по вероятности к оцениваемому параметру при неограниченном возрастании объема наблюдений.

Оценки, удовлетворяющие первому требованию, называются состоятельными. Примерами состоятельных оценок являются выборочные оценки среднего и дисперсии. Из факта состоятельности оценки еще не следует вывод о ее пригодности для определения приближенного значения параметра при любых объемах выборки n . Речь идет о том, что при малых значениях n состоятельная оценка может отклоняться от искомого значения параметра в ту или иную сторону.

Вторым требованием, предъявляемым к статистическим оценкам, является условие отсутствия в них систематических погрешностей при любом n . Оценки, удовлетворяющие этому требованию, называются несмещенными. Так, выборочное среднее арифметическое является состоятельной и несмещенной оценкой математического ожидания. Выборочная дисперсия состоятельна, но смещенная оценка дисперсии генеральной совокупности. Смещение устраняется тем, что в знаменатель формулы для определения дисперсии вместо числа опытов вводится величина $(n - 1)$. Поправка на смещение существенна, если $n < 20$, при $n > 20$ влияние ее незначительно и уменьшается с ростом числа n .

Наконец, третье требование состоит в том, что оценка должна иметь минимально возможную дисперсию. Такая оценка называется эффективной. Так, например, в [22] доказывается, что для оценки математического ожидания при нормальном распределении можно использовать среднее арифметическое и эмпирическую медиану, так как обе они состоятельны и не смещены. На среднее арифметическое более эффективно, чем медиана. Изложенные результаты относятся к нормальному распределению или к γ -распределению при условии $C_y = 2 C_x$. Для устранения смещенности в оценках параметров других распределений были выполнены специальные статистические испытания. В основу их положен известный метод Монте-Карло [23], базирующийся на нормальном законе распределения плотности вероятностей. Применение этого метода к законам распределения, отвечающим гидрологическим явлениям, было реализовано следующим образом. С помощью генератора (таковым может быть любой компьютер) по специальной программе создавалась совокупность равномерно распределенных случайных чисел, которые преобразовались в числа, заключенные в промежутке 0.1. Последние по кривой обеспеченности, соответствующей заданному распределению, определяли значения случайных величин, отвечающих этому закону. Таким же образом, но по более сложной программе моделировались случайные величины, обладающие корреляционной связью между смежными членами (простые цепи Маркова). Следовательно, были созданы

возможности получения рядов практически неограниченного объема. Пока остановимся на результатах анализа тех из них, в которых корреляционные связи отсутствовали (коэффициент корреляции равен нулю).

Как отмечается в [23], число членов в моделируемых последовательностях доходило до 10^6 , при этом из них брались выборки с числом членов от 10 до 200, далее определялись по ним оценки параметров, которые сравнивались с параметрами генеральной совокупности. Исследования подтвердили, что независимо от закона распределения среднее арифметическое является состоятельной, несмещенной и эффективной оценкой математического ожидания. Средние арифметические, полученные по многочисленным выборкам, входящим в состав генеральной совокупности, подчиняются нормальному закону со средним квадратическим σ_x

$$\sigma_x = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = \frac{C_v \bar{X}}{\sqrt{n}},$$

где σ_x , C_v и $\bar{X}$ - соответственно среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации и среднее арифметическое из выборки, в которой число членов n . Зависимость не используется для оценки необходимого числа лет наблюдений (или объеме репрезентативной выборки), для получения нормы с заданной ошибкой

Выборочное среднее квадратическое отклонение и коэффициент вариации для всех используемых в гидрологии распределений получают смещенными, смещенность только частично устраняется заменой n на $(n - 1)$. В [23] отмечается, что выборочные оценки коэффициентов вариации для кривой Менкеля-Крицкого обладают меньшим смещением, чем оценки, соответствующие другим кривым, используемым в гидрологии. Связь между смещенной (выборочной) оценкой коэффициента вариации C_{vc} и коэффициентом вариации, принадлежащим генеральной совокупности C_v , может быть найдена решением следующего уравнения, предложенного Е.Г.Блохиновым [24]:

$$C_{vc}^3 - \frac{4n-1}{3} C_v + \frac{4}{3} n C_{vc} = 0.$$

Среднее квадратическое отклонение выборочных коэффициентов вариации, полученных методом моментов, определяется по формуле

$$\sigma_{C_v} = \frac{C_v}{\sqrt{2n}} \sqrt{1 + C_v^3},$$

а для тех же коэффициентов, вычисленных методом наибольшего правдоподобия, зависимость имеет вид

$$\sigma_{cs} = \frac{C_v}{\sqrt{2n}} \sqrt{\frac{3}{3 + C_v^2}}$$

Как показали исследования, выборочные значения коэффициента асимметрии обладают большим смещением, чем коэффициента вариации. Частично оно устраняется путем введения в формулу для расчета коэффициента асимметрии поправки $n^2 / (n - 1)(n - 2)$, так что формула превращается в следующую, вошедшую в нормативный документ [25]:

$$C_s = \frac{n \sum_{i=1}^n (K_i - 1)^3}{C_v^3 (n - 1)(n - 2)}.$$

Для расчета несмещенной оценки C_s А.П.Резниковским выведена формула, связывающая ее с выборочной (смещенной) оценкой C_{sc} :

$$C_s = \frac{4 - n - C_v}{n} C_{sc}$$

Для рядов, у которых $C_s = 2C_v$ им предложена зависимость, позволяющая определить среднее квадратическое отклонение выборочных коэффициентов асимметрии

$$\sigma_{cs} = \sqrt{\frac{6}{n}} (1 + C_v^2).$$

Подбор теоретической кривой обеспеченности по методу моментов осуществляется визуально, преследуя цель добиться наилучшего ее совпадения с эмпирической кривой. При этом основным параметром, существенно влияющим на форму теоретической кривой, является коэффициент вариации, изменения которой в пределах его возможной ошибки, можно достичь такого совпадения. В связи с тем, что ошибки в определении коэффициента асимметрии велики, величина его нормируется в зависимости от типа реки и режима речного стока [25].

В Приложении 1 приведены данные для построения кривой обеспеченности, соответствующей биномиальному распределению (или 2^k -параметрическому γ -распределению). Табличные значения модульного коэффициента k_T связаны с истинной величиной этого коэффициента $k = \frac{x}{M}$ соотношением: $k_T = \frac{k - 1}{C_v}$, при коэффициенте вариации C_v равном единице. Табличные значения модульного коэффициента приводятся в зависимости от обеспеченности P и коэффициента асимметрии C_s . В этой системе нормальному закону распределения плотности вероятностей ($C_s = 0$) соответствует значение

$k_T = 0$ при $P = 50\%$, так как величина $k = 1$. Если $P = 84\%$, то $k_T = -1$, так как $k = 0$ ит.д.. В частности, для биномиального распределения при $C_S = 2 C_V$ (табличное значение $C_S = 2$) величина коэффициента $k_T = -1$. Сказанное справедливо в случае $C_V = 1$, для других значений коэффициента вариации нужно пользоваться формулой:

$$k = 1 + k_T C_V. \quad (3.1)$$

В Приложении 2 приведены данные для построения кривой обеспеченности, соответствующей распределению Менкеля – Крицкого (3^x -параметрическое γ -распределение). Значения модульного коэффициента k приведены в зависимости от обеспеченности P и коэффициента вариации C_V при условии, что $C_S = nC_V$, где каждой таблице соответствуют такие значения n : 1, 2, 3, 4. Можно отметить, что в области достаточно больших значений обеспеченности ($> 90\%$) величины модульного коэффициента равны нулю. Если сравнить данные этих таблиц с соответствующими для биномиального распределения в области малых значений обеспеченности ($P < 5\%$), то можно обнаружить, что они совпадают.

3.9.2. Построение кривых обеспеченности с использованием клетчаток вероятностей.

Когда говорят о клетчатке вероятностей, то речь идет о начертании кривой обеспеченности в такой системе координат, в которой она из кривой линии превращается в прямую. Процедура построения клетчатки вероятностей, соответствующей кривой нормального распределения (сплошные линии), представлена на рис. 3.11. С этой целью

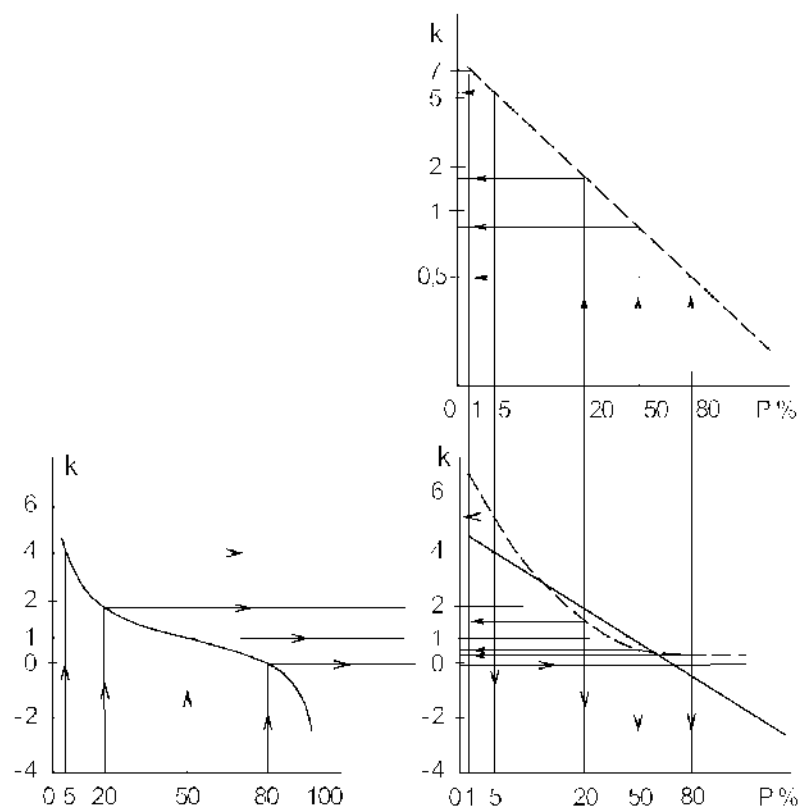


Рис. 3.11. Схема построения клетчатки вероятностей нормального (сплошные линии) и биномиального при $C_S = 2 C_V$

справа от кривой, начерченной в декартовой системе координат, под произвольным углом проводится прямая линия, с помощью которой строится новая система координат. В новой системе вертикальная ось сохраняет свой масштаб и выбранную ранее шкалу модульных коэффициентов; горизонтальная ось (обеспеченностей) получается с неравномерной шкалой. Построенная таким образом клетчатка вероятностей обладает свойством спрямлять кривые обеспеченности, отвечающие нормальному закону распределения, с любыми значениями коэффициентов вариации, а угол наклона этих линий к оси ординат пропорционален этому коэффициенту. В этой связи клетчатки вероятностей снабжается лучевым масштабом, по которому можно определить коэффициент вариации по наклону к оси ординат прямой линии, проведенной визуально среди эмпирических точек, нанесенных на клетчатку вероятностей, если эти данные соответствуют нормальному закону.

Асимметричные кривые распределения зависят от коэффициентов вариации и асимметрии, поэтому вышеприведенная операция "спрямления" их повлекла бы за собой необходимость построения практически безграничного количества клетчаток вероятностей. По предложению Г.Н.Бровковича, удалось их число свести до разумного минимума. Он предложил вначале кривые обеспеченности асимметрических законов распределения наносить на клетчатку вероятностей нормального закона. При положительной асимметрии на такой клетчатке получаются кривые, выпуклостью обращенные вниз.

На рис.3.11 пунктиром нанесена такая кривая, соответствующая $C_s = 2C_v$, когда кривые биномиального распределения совпадают с распределением Манкеля-Крицкого. Далее эту кривую спрямляют (см. пунктирную прямую в правой верхней части рисунка). При этом обе шкалы осей координат получаются с переменным шагом. На такой клетчатке спрямляются кривые при разных величинах коэффициента вариации, поэтому здесь, как и в предыдущем случае, клетчатки дополняются лучевым масштабом, по которому можно определить величину коэффициента вариации. Целесообразно строить клетчатки вероятностей не по величине коэффициента асимметрии, а в зависимости от отношения C_s/C_v , которое принимается равным: 1,0; 1,5; 2,0; 3,0; 4,0.

Для того чтобы воспользоваться этим методом, нужно иметь полный набор клетчаток вероятностей; на них наносятся точки, соответствующие эмпирической обеспеченности. Если на какой-то из них точки ложатся на прямую линию, то по ней определяются коэффициенты вариации и асимметрии. Следовательно, в этом методе отпадает необходимость в получении их расчетным путем.

Здесь в качестве основного принимается условие совпадения аналитической кривой обеспеченности в трех точках с эмпирической кривой. Квантилем случайной величины x называется такое ее значение x_{α} , которое удовлетворяет условию: $\int_{-\infty}^{x_{\alpha}} f(x) dx = \alpha$. При

использовании кривой обеспеченности эта зависимость может быть представлена в таком виде: $\int_{-\infty}^{x_{\alpha}} f(x) dx = \alpha$. Следовательно, квантилю x_5 по кривой обеспеченности соответствует 5% и т.п. В случае симметричной кривой распределения плотности вероятностей справедливо условие:

$$x_{95} - x_{50} = x_{50} - x_5,$$

из которого следует:

$$x_5 + x_{95} - 2x_{50} = 0. \quad (3.2)$$

Естественно, что вместо квантилей x_5 и x_{95} могут быть приняты и другие соответствующие квантили, например: x_{10} и x_{90} , x_{15} и x_{85} и т.д. Если кривая имеет положительную асимметрию, то выражение (3.1) не равно нулю и тем больше по величине, чем больше асимметрия кривой.

По предложению Г.А.Алексеева был введен коэффициент скошенности кривой распределения плотности вероятностей (при положительной асимметрии величина положительная):

$$S = \frac{x_5 + x_{95} - 2x_{50}}{x_5 - x_{95}} \quad (3.3)$$

Эту величину можно заранее рассчитать по конкретному теоретическому закону распределения, а при решении практических задач определять коэффициент скошенности по эмпирическим данным и подбирать теоретическую кривую с равным значением S . Этот способ нашел применение для определения параметров биномиальной кривой распределения, для распределения Менкеля-Крицкого он оказался непригодным. В соответствии с формулой (3.1) перейдем от модульного коэффициента к x ,

$$x = \bar{x} + \bar{\sigma}_x K_1, \quad (3.4)$$

где $\bar{x}$ и $\bar{\sigma}_x$ — оценки среднего арифметического и среднего квадратического случайной величины x . Таким образом, истинное значение случайной величины x заданной обеспеченности, соответствующее биномиальному распределению, зависит от среднего

арифметического, среднего квадратического и табличного значения той же обеспеченности. Следовательно, нужно иметь, по крайней мере, три уравнения, чтобы эту задачу решить. Вот почему берут три характерные точки на кривой обеспеченности, для которых можно составить три уравнения. Величина табличного значения модульного коэффициента зависит от коэффициента асимметрии, а также от табличного значения коэффициента скошенности

$$S_t = \frac{K_{.95} + K_{.5} - 2K_{.05}}{K_{.15} - K_{.85}} \quad (3.5)$$

Подставим в зависимость (3.5) соответствующие значения случайной величины, используя зависимость (3.4) получим, что коэффициент скошенности, определенный по эмпирическим данным S , совпадает с табличным S_t . Значения коэффициента скошенности приведены в правой части таблицы биномиальной кривой обеспеченности (смотри Приложение 1), в левой части таблицы даются соответствующие значения коэффициента асимметрии. Из оставшихся двух уравнений можно найти:

$$\sigma_x = \frac{x_{.5} - x_{.95}}{K_{.15} - K_{.85}},$$

$$\bar{x} = x_{.50} - \sigma_x K_{.50}$$

Тем самым задача отыскания теоретической кривой обеспеченности, совпадающей в трех характерных точках с эмпирической кривой, будет полностью решена.

3.9.4. Метод наибольшего правдоподобия

Этот метод был разработан Е.Л.Блохиновым для распределения Менкеля-Крицкого и в какой-то степени он аналогичен методу квантилей. Здесь тоже определяются параметры распределения непосредственно по эмпирическим данным, но в его основу положена функция правдоподобия. Ее можно получить в результате следующих рассуждений. Пусть задана функция $f(x, a_1, a_2, \dots, a_m)$, характеризующая распределение плотности вероятностей случайной величины x , где $a_j, j = 1, 2, 3, \dots, m$ — параметры распределения. Вероятность попадания величины x_i в интервал Δx_i (от x_i до $x_i + \Delta x_i$) равна $f(x_i, a_j) \Delta x_i$. Найдем вероятность совместного появления при независимых испытаниях в выборке n случайных величин ($i = 1, 2, 3, \dots, n$). По теореме о произведении вероятностей

$$f(x_1, a_j) f(x_2, a_j) f(x_3, a_j) \dots + (x_n, a_j) \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 \dots \Delta x_n$$

При достаточно малых интервалах Δx_i вероятность попадания в них величины x_i можно приближенно считать пропорциональной ординате $f(x_i, a_j)$ кривой плотности распределения вероятностей. Зависимость $P(x_i, a_j)$ равная

$$\Pi(x_i, a_j) = f(x_1, a_j) f(x_2, a_j) f(x_3, a_j) \dots f(x_n, a_j) \quad (3.6)$$

называется функцией правдоподобия. Но выборочные значения x_i фактически наблюдались в n опытах, поэтому можно предположить, что существуют такие значения параметров a_j , при которых функция правдоподобия будет максимальна. Тогда частные производные от этой функции по параметрам должны равняться нулю

$$\frac{\partial \Pi(x_i, a_j)}{\partial a_j} = 0 \quad (3.7)$$

В связи с тем, что функция правдоподобия не равна нулю, зависимость (3.7) можно разделить на нее, тем самым перейти от операции дифференцирования этой функции к более удобной при проведении вычислений операции дифференцирования ее логарифмов:

$$\frac{\partial \Pi(x_i, a_j)}{\partial a_j \Pi(x_i, a_j)} = \frac{\partial [\ln \Pi(x_i, a_j)]}{\partial a_j} = \frac{\partial [\ln [f(x_1, a_j) f(x_2, a_j) \dots f(x_n, a_j)]]}{\partial a_j} = \frac{\partial \left[\sum_{i=1}^n \ln f(x_i, a_j) \right]}{\partial a_j} \quad (3.8)$$

Зависимость (3.8) называется уравнением правдоподобия; из него определяются значения параметров a_j , при которых функция правдоподобия (3.6) достигает наибольшего значения. Из выводов следует, что при использовании метода наибольшего правдоподобия отдается предпочтение тем выборочным значениям случайной величины рассматриваемого распределения, которым соответствуют большие значения вероятностей появления их при независимых испытаниях в выборке, содержащей n членов. Этот метод дает более устойчивые оценки параметров, чем метод моментов, они состоятельны и эффективны, хотя и смещены, но смещение незначительное и легко устраняется.

Для нормального закона распределения оценки параметров, полученные по методу наибольшего правдоподобия, совпадают с аналогичными оценками, определяемыми по методу моментов. В этом случае функция правдоподобия достигает максимального значения, что представляется вполне естественным результатом. Для других кривых распределения такое совпадение не всегда имеет место.

Расчеты показывают, что оценка математического ожидания биномиального распределения, определенного по методу наибольшего правдоподобия, совпадает с оценкой по методу моментов. Метод наибольшего правдоподобия был использован Е.Г.Блохиновым для оценки параметров (x, C_γ, C_δ) трехпараметрического γ -распределения [22]. Он привел к трудно разрешаемым трансцендентным уравнениям. Но автору удалось доказать, что

оценки параметров C_λ и C_κ этого распределения, отвечающие методу наибольшего правдоподобия, зависят от двух статистик: λ_2 и λ_3 :

$$\lambda_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \frac{x_i}{x} \quad .$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{x} \ln \frac{x_i}{x} \quad .$$

Статистика, обозначенная в работе λ_1 , совпадающая со средним арифметическим: $\lambda_1 = \bar{x}$. Были построены номограммы для определения параметров C_λ и C_κ трехпараметрического гамма-распределения методом наибольшего правдоподобия. В связи с тем, что оценки параметров этим методом и методом моментов при $C_\lambda < 0,5$ совпадают, номограммы построены для параметра C_λ , изменяющегося от 0,5 до 1,5 и отношения C_κ / C_λ от 1 до 6. Номограммы приведены в Приложении 4, а также в [22] и в нормативных документах [25].

3.10 Использование методов теории вероятностей для подбора эмпирических формул.

На практике очень часто приходится сталкиваться с задачами, в которых явление описывается не одной случайной величиной, а двумя или более случайными величинами, образующими систему. Например, если x и y – некоторые физические величины, связь между которыми устанавливается из опыта, то положение точки $m(x,y)$ на плоскости в

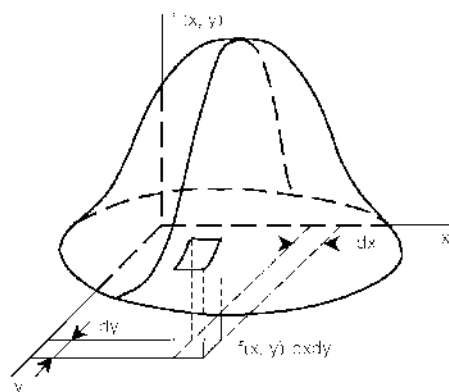


Рис. 3.12. Плотность распределения системы двух случайных величин

прямоугольной декартовой системе координат XOY определяется не одной случайной величиной, а двумя: абсциссой и ординатой (рис.3.12).

Плотность распределения системы двух случайных величин $f(x,y)$ можно изобразить некоторой поверхностью. Элементом вероятности в данном случае называется выражение $f(x,y)dxdy$. Следовательно, элемент вероятности есть вероятность попадания в элементарный прямоугольник со

сторонами dx, dy , примыкающий к точке (x,y) . Она равна объему элементарного параллелепипеда, опирающегося на элементарный прямоугольник dx, dy и ограниченного сверху поверхностью $f(x,y)$. Функцию распределения системы $F(x,y)$ можно рассматривать как вероятность попадания в

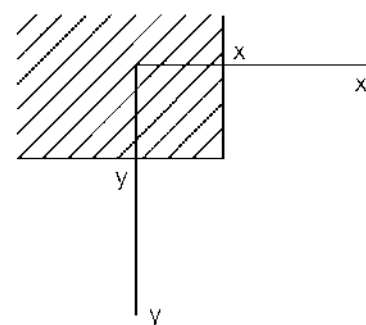


Рис. 3.13. График, поясняющий смысл функции распределения двух случайных величин

бесконечный квадрант, который можно считать прямоугольником, ограниченным абсциссами $-\infty$ и x и ординатами $-\infty$ и y (рис.3.13). Следовательно, функция распределения связана с плотностью распределения $f(x,y)$ таким (см. рис.3.14) образом:

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(x,y) dx dy \quad .$$

Двойной интеграл от плотности распределения системы в бесконечных пределах $+\infty$
 $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx dy = 1$. Этот интеграл есть не что иное, как вероятность попадания во всю плоскость XOY, т.е. вероятность достоверного события.

В теории вероятностей существует понятие о зависимости случайных величин, которое несколько отличается от того, которым обычно оперируют в математике. В математике под зависимостью понимают жесткую или функциональную связь, когда каждому значению одной величины x соответствует точное значение другой – y . В теории вероятностей речь идет о более общем типе зависимости – вероятностной, или стохастической. Если величины x и y связаны вероятностной зависимостью, то, зная x , нельзя точно указать значение y , а только – закон ее распределения. Вероятностная связь может быть более или менее тесной; по мере увеличения тесноты связи она все более приближается к функциональной, которую можно рассматривать как предельный случай вероятностной зависимости. Другой крайний случай – полная "независимость" случайных величин. Вероятностная зависимость часто встречается на практике и означает, что с изменением величины x величина y тоже изменяется.

Эта тенденция соблюдается лишь в общих чертах, "в среднем". Например, известно, что люди с большим ростом имеют большой вес, поэтому рост человека x (см) и его вес y (кг) находятся в определенной вероятностной связи, которую можно представить эмпирической формулой, приближенно заменяющей вероятностную связь функциональной: $y = x - 100$. Формулы подобного вида не являются точными и выражают лишь среднюю закономерность. Можно привести примеры величин практически независимых: рост человека и его возраст, но для ребенка эти величины зависимы.

В теории вероятностей доказывается, что плотность распределения системы независимых случайных величин равна произведению плотностей распределения отдельных величин, входящих в систему: $f(x,y) = f_1(x) f_2(y)$. Теперь можно ввести некоторые числовые характеристики системы случайных величин, которые дадут возможность оценивать степень зависимости этих величин. Такими характеристиками служат начальные и центральные моменты системы двух случайных величин.

3.10.1. Числовые характеристики системы случайных величин

Начальным моментом порядка k, s системы (x, y) называется математическое ожидание от произведения $x^k y^s$:

$$a_{ks} = M(x^k, y^s) \quad .$$

Центральным моментом порядка k, s системы (x, y) называется математическое ожидание от произведения k -й и s -й степеней соответствующих центрированных величин

$$\alpha_{k,s} = M[(x - M_x)^k (y - M_y)^s] \quad .$$

Помимо чисел k и s , характеризующих порядок момента по отношению к отдельным величинам, рассматривается еще суммарный порядок моментов $k+s$, равный сумме показателей степени при x и y . Соответственно суммарному порядку моменты классифицируются на первые, вторые и т.п.

Для дискретных случайных величин используется следующая формула для определения оценок начальных моментов:

$$a_{k,s} = \sum_i \sum_j x_i^k y_j^s p_{ij} \quad ,$$

а также для определения оценок центральных моментов

$$\alpha_{k,s} = \sum_i \sum_j (x_i - x)^k (y_j - y)^s p_{ij} \quad .$$

На практике наиболее часто встречаются только первые и вторые суммарные моменты, причем первые начальные суммарные моменты есть математические ожидания величин x и y :

$$a_{1,0} = M(xy^0) = M(x) = M_x \quad ;$$

$$a_{0,1} = M(x^0 y) = M(y) = M_y \quad .$$

Совокупность математических ожиданий представляет собой характеристику положения системы. Геометрически это координаты средней точки на плоскости, вокруг которой происходит рассеивание точек, или координаты центра тяжести системы.

Вторые центральные суммарные моменты системы можно представить в трех видах. Первые два – это дисперсии величин x и y :

$$\alpha_{2,0} = M[(x_i - M_x)^2 (y_j - M_y)^0] = M[(x_i - M_x)^2] = D_x \quad ;$$

$$\alpha_{0,2} = M[(x_i - M_x)^0 (y_j - M_y)^2] = M[(y_j - M_y)^2] = D_y \quad .$$

Эти величины характеризуют рассеивание случайных точек в направлении осей x и y .
Особая роль в теории вероятностей отводится второму смешанному центральному моменту:

$$\alpha_{1,1} = M[(x_i - M_x)(y_j - M_y)] \quad .$$

Это есть математическое ожидание произведения центрированных величин. Обычно его обозначают K_{xy} и называют корреляционным моментом или моментом корреляционной связи случайных величин. Для дискретных случайных величин оценка момента корреляционной связи равна:

$$K_{xy} = \sum_i \sum_j (x_i - x)(y_j - y) p_{ij} \quad ;$$

для непрерывных величин момент корреляционной связи определяется по формуле:

$$K_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M_x)(y - M_y) f(x, y) dx dy \quad .$$

Для вычисления оценки корреляционного момента используется при $i = 1, 2, \dots, n$ и $j = 1, 2, \dots, n$ формула:

$$K_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \quad .$$

Этот момент описывает, помимо рассеивания величин x и y , еще и связь между ними. Действительно, пусть мы имеем дело с величинами независимыми, тогда

$$\begin{aligned} K_{xy} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M_x)(y - M_y) f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M_x)(y - M_y) f_1(x) f_2(y) dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M_x) f_1(x) dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (y - M_y) f_2(y) dy = 0 \quad , \end{aligned}$$

ибо $\int_{-\infty}^{+\infty} (z - M_z) f(z) dz$ — математическое ожидание центрированной случайной величины, или первый центральный момент.

Таким образом, если корреляционный момент двух случайных величин отличен от нуля, то это есть признак наличия зависимости между ними.

Корреляционный момент двух случайных величин K_{xy} характеризует не только зависимость величин, но и их рассеивание. Например, если одна из величин мало

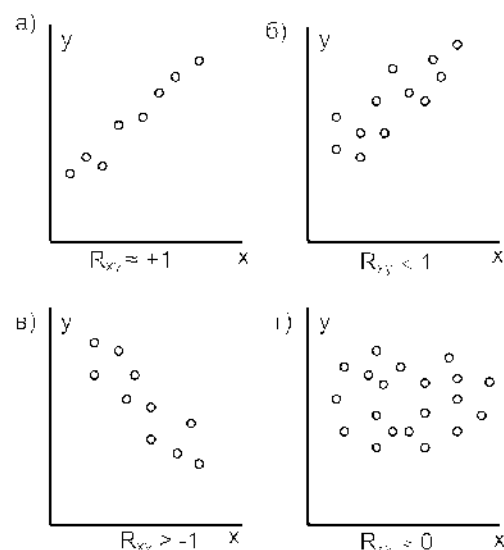


Рис.3.14 Изменения коэффициента корреляции в зависимости от тесноты линейной связи между двумя случайными величинами

отклоняется от своего математического ожидания (почти не случайно), то корреляционный момент будет мал, как бы тесно ни были связаны величины x и y . Вот почему от момента K_{xy} переходят к безразмерной характеристике, которая называется коэффициентом корреляции:

$$R_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \quad ,$$

где σ_x и σ_y – средние квадратические отклонения величин x и y . Для независимых случайных величин коэффициент корреляции равен нулю (говорят, что они некоррелированы, или не связаны). Допустим теперь, что величины x и y находятся в точной функциональной линейной зависимости (на рис.3.18, стр. 40, ей соответствует пунктирная линия, углы наклона которой к осям координат равны α и β , так что $\alpha + \beta = 90^\circ$). Произведем подстановку в выражение для коэффициента корреляции значения корреляционного момента и средних квадратичных отклонений, получим

$$R_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} \quad .$$

Если связь между x и y линейная функциональная, то в соответствии с рис.3.18 можно для пунктирной линии записать

$$y_i - \bar{y} = (x_i - \bar{x}) \operatorname{tg} \alpha \quad ,$$

или в системе координат, принятой на рисунке, $y' = x' \operatorname{tg} \alpha$. Подставив эти результаты в формулу для R_{xy} , найдем

$$R_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{\left[\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right]^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}} = 1 \quad .$$

Следовательно, абсолютные значения коэффициента корреляции заключены между нулем (величины не связаны, некоррелированы) и единицей (они связаны функционально).

Коэффициент корреляции характеризует не всякую зависимость, а степень тесноты линейной связи между случайными величинами. Если величины x и y связаны точной линейной функциональной зависимостью $y = b + ax$, то коэффициент корреляции $R_{xy} = \pm 1$, причем знак соответствует знаку коэффициента a . В общем случае, когда величины x и y связаны произвольной вероятностной зависимостью, коэффициент корреляции может иметь значение в пределах $-1 < R_{xy} < 1$. В случае $R_{xy} > 0$ говорят о положительной корреляции величин x и y (при возрастании одной из них другая имеет в среднем тенденцию к росту,

рис.3.14. б); в случае $R_{xy} < 0$ корреляция отрицательная (возрастание одной величины приводит в среднем к убыванию другой, рис.3.14 в). Если связь отсутствует (рис.3.14, г), то $R_{xy} \approx 0$.

3.10.2. Подбор эмпирических формул. Корреляция.

В гидрологии сплошь и рядом мы имеем дело с такими величинами, для которых отсутствует функциональная связь, когда каждому значению аргумента отвечает вполне определенное значение функции. Однако тенденция к функциональной связи имеется, ибо нельзя сказать, что связь между такими гидрологическими величинами, как расходы и уровни воды в заданном створе на реке, сток реки и осадки в зоне достаточного увлажнения, выпадающие на соответствующей площади водотока, и т.п. вообще отсутствует, поскольку увеличение расхода воды в реке ведет, как правило, к повышению уровня ее в заданном створе, а увеличение осадков – к увеличению стока реки в зоне достаточного увлажнения. Нанесенные на соответствующую координатную плоскость точки наблюдений ложатся с разбросом, что свидетельствует о присутствии элементов случайности в результатах наблюдений. Следовательно, в данном случае имеет место система, состоящая из двух случайных величин: расходов и уровней, стока и осадков и т.п. При этом возникают следующие вопросы. Можно ли вообще говорить о связанности таких величин и что принять за меру связи? Можно ли говорить о тенденции к функциональной связи и чем ее аппроксимировать?

По-видимому, правильным ответом на первый вопрос, поскольку речь идет о системе двух случайных величин, будет утверждение, что мерой из связи должен быть коэффициент корреляции. Ниже на примере прямолинейной корреляции это утверждение будет доказано и дана графическая интерпретация этого коэффициента.

Что касается ответа на второй вопрос, то на выбор аппроксимирующих функций (при наличии связи между случайными величинами), как правило, никаких ограничений не накладывается. Процесс подбора эмпирической формулы для установленной из опыта функциональной зависимости (принимаемой в "стохастическом" смысле) распадается на две части: сначала выбирается вид формулы, а после этого определяются численные значения параметров, для которых приближение к данной функции оказывается наилучшим. Если нет каких-либо теоретических соображений для подбора вида формул, обычно выбирают функциональную зависимость из числа наиболее простых.

Иногда при обработке данных наблюдений, например, установлении связи между расходом и уровнями, нас не столько интересует вид аппроксимирующей функции, сколько ее графическое начертание: как известно, на практике используют графики связи $Q = f(H)$, а не их аналитическое выражение. Причем основное назначение этих графиков – осуществлять графическую интерполяцию в области расчетных значений расходов и уровней, не используя данные фактических наблюдений. При этом возникает задача правильного графического изображения аппроксимирующей кривой. Для того чтобы в некоторой степени избежать произвола в начертании этой кривой и изобразить ее так, чтобы она наилучшим образом соответствовала наблюдаемым точкам, прибегают к следующему приему. Весь диапазон изменения одной из величин разбивают на ряд промежутков. В пределах каждого промежутка определяют первые начальные моменты одной и другой случайных величин (иными словами, находят центр тяжести системы точек в заданном промежутке k , имеющий координаты

$$x_k = \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} x_i \quad ; \quad y_k = \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} y_i \quad ,$$

где n_k – число точек в k -м промежутке. Через найденные таким образом центры тяжести проводят плавную кривую, которая пройдет через заданное поле точек с наилучшим приближением (рис.3.15, точки в виде крестиков).

Второй метод, позволяющий правильно проводить кривую среди поля эмпирических точек и находить ее приблизительное аналитическое выражение, получил название метода выравнивания, он заключается в следующем. Если вид зависимости между x и y известен или его можно установить по виду кривой, то вводят

некоторые величины $X = \phi(x,y)$ и $Y = \psi(x,y)$, которые связаны между собой линейно. Вычисляя для заданных значений x и y соответствующие X и Y и изображая их графически, легко увидеть, близка ли зависимость между X и Y к линейной (ложатся ли соответствующие точки приблизительно на прямую линию).

Метод выравнивания наиболее просто реализуется, если искомые функции имеют простейший вид. Например, если по каким-либо признакам установлено, что опытным точкам должна соответствовать зависимость $y = ax^b$, то "выравненными" переменными будут $X = \lg x$ и $Y = \lg y$, которые связаны между собой линейно: $Y = \lg a + bX$, или $\lg y = \lg a + b \lg x$. Заметим, что в гидрологии вместо термина "метод выравнивания" чаще употребляется

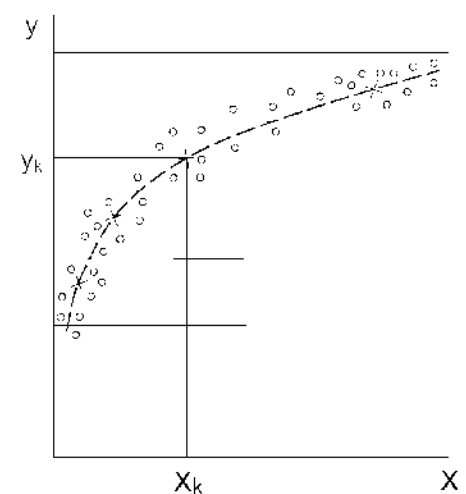


Рис. 3.15. Графический способ построения аппроксимирующей кривой

"метод анаморфозы", в данном случае он называется "логарифмической анаморфозой". Можно, в частности, показать, что кривая связи $Q = f(H)$ должна иметь вид $Q = a(H + b)^c$. Это следует из зависимости $Q = \omega u = Bhu$, где ω – площадь поперечного сечения русла реки; u – средняя скорость течения; h – средняя глубина; B – ширина русла. Для средней скорости используют формулу Шези: $u = C_o \sqrt{hi_o}$, здесь C_o – коэффициент Шези; i_o – уклон дна потока. В связи с тем, что измерения производятся в определенном створе, принимают $i_o = \text{const}$. Коэффициент Шези обычно определяют по формуле Маннинга $C_o = \frac{1}{n} h^m$, где n – коэффициент шероховатости, который в заданном створе тоже считают постоянным. Кроме того, всегда можно предположить, что $B = F(H)$. Учитывая, что $h = H - \nabla_d$, где H – уровень водной поверхности, ∇_d – отметка уровня дна в створе, получим зависимость $Q = a(H + b)^c$. Логарифмическая анаморфоза имеет вид

$$\lg Q = \lg a + c \cdot \lg(H + b) \quad .$$

Следующий этап – определение параметров кривых. Здесь можно использовать различные методы. Самый простой – графический, основанный на использовании линейной выравнивающей функции. Если наше предположение о виде аппроксимирующей кривой является правильным и точки располагаются действительно вокруг выравнивающей прямой, то эту прямую можно просто провести "на глаз". После этого не составит труда определить параметры прямой a и c (рис.3.16). Параметр b должен удовлетворять условно: при $H = b$ $Q = 0$. Нужно иметь при этом в виду, что $c = \lg \alpha$ с учетом масштаба чертежа.

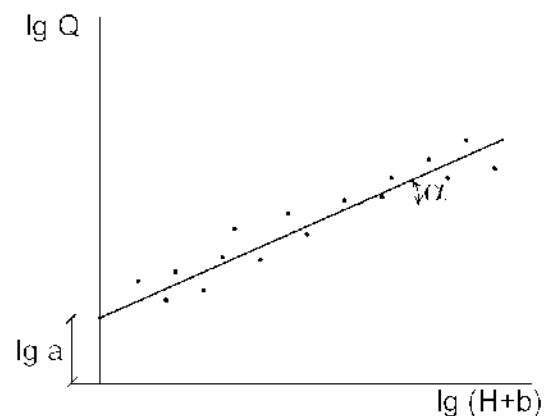


Рис. 3.16. Построение прямых регрессии в системе координат x, y .

Обратимся к "методу средних" как к одному из сравнительно простых. Заметим, что линейная связь между выравненными переменными в общем случае имеет вид $Y = a_1 + a_2 X$ и содержит два параметра a_1 и a_2 , для нахождения которых достаточно составить два уравнения. По методу средних весь диапазон изменения пар значений X_i и Y_i (следовательно, x_i и y_i) делится на две равные (или почти равные) группы в порядке возрастания переменной X_i или Y_i . Обозначим в первой группе пары известных величин X_{j1} и Y_{j1} , во второй – X_{j2} и Y_{j2} . Далее составляются так называемые условные уравнения: $Y_{j1} = a_1 + a_2 X_{j1}$ и

$Y_{i2} = a_1 + a_2 X_{i2}$. Складывая условные уравнения каждой группы, получим два

уравнения, из которых и определяются параметры a_1 и a_2 : $\sum_{i=1}^{n_1} Y_{i1} = n_1 a_1 + a_2 \sum_{i=1}^{n_1} X_{i1}$ и

$\sum_{i=1}^{n_2} Y_{i2} = n_2 a_1 + a_2 \sum_{i=1}^{n_2} X_{i2}$, где n_1 и n_2 - число величин в первой и во второй группах. Выражая

X и Y через первоначальные переменные x и y , получим искомую связь между ними.

Наиболее точным методом определения параметров является метод наименьших квадратов, при котором требование наилучшего согласования кривой и экспериментальных точек сводится к тому, чтобы сумма квадратов отклонений экспериментальных точек от сглаживающей кривой обращалась в минимум. Этот метод допускает довольно веское теоретическое обоснование, исходя из нормального закона ошибок измерения и требования максимальной вероятности данной совокупности ошибок.

Пусть из каких-либо соображений (связанных с существом явления или просто с внешним видом наблюдаемой зависимости) выбран общий вид функции y , зависящей не только от x , но и от нескольких числовых параметров $a_1, a_2, a_3, \dots, a_j, \dots, a_k$: $y = \varphi(x, a_j), j = 1, 2, \dots, k$. Именно параметры a_j и требуется выбрать согласно методу наименьших квадратов так, чтобы сумма квадратов отклонений y_i от $\varphi(x_i, a_j)$ была минимальной:

$$\sum_{i=1}^n [\varphi(x_i, a_j) - y_i]^2 \rightarrow \min, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Найдем значения a_j , обращающие левую часть этого выражения в минимум. Для этого, как известно, необходимо продифференцировать ее по a_j и приравнять производные нулю. При этом мы приходим к следующей системе уравнений:

$$\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n [\varphi(x_i, a_j) - y_i] \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial a_j} \right)_i = 0,$$

где $i = 1, 2, 3, \dots, n$ - число опытных точек; $j = 1, 2, \dots, k$ - число параметров a_j ; $(\partial \varphi / \partial a_j)_i$ - значение частной производной функции φ по параметру a_j в точке x_i . Система уравнений содержит столько уравнений, сколько неизвестных a_j , т.е. всего k . Решить эту систему в общем виде нельзя; для этого необходимо задаться конкретным видом функции φ .

В наиболее простом случае функция выражается полиномом $(k-1)$ -й степени:

$y = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \dots + a_k x^{k-1}$. Выберем параметры a_j из условия, чтобы сумма

квадратов отклонений всех наблюдаемых точек кривой была наименьшей. Обозначим ее S :

$$S = \sum_{i=1}^n (y - y_i)^2 = \sum_{i=1}^n (a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \dots + a_k x^{k-1} - y_i)^2 \rightarrow \min.$$

Найдем частные производные от S по параметрам и приравняем их нулю:

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial S}{\partial a_2} = 0 \quad ; \quad \dots \quad ; \quad \frac{\partial S}{\partial a_k} = 0 \quad .$$

В результате дифференцирования суммы по a_1 имеем

$$\sum_{i=1}^n 2(a_1 + a_2 x_i - a_3 x_i^2 + \dots + a_k x_i^{k-1} - y_i) = 0 \quad .$$

В связи с тем, что при суммировании по i коэффициенты a_j являются постоянными и их можно вынести за знак суммы, кроме того, $\sum_{i=1}^n 1 = n$, а двойку можно вообще отбросить как постоянный множитель, получим

$$a_1 n + a_2 \sum_{i=1}^n x_i - a_3 \sum_{i=1}^n x_i^2 + \dots + a_k \sum_{i=1}^n x_i^{k-1} - \sum_{i=1}^n y_i = 0 \quad .$$

Аналогичным образом после дифференцирования по a_2 получим:

$$\sum_{i=1}^n 2(a_1 - a_2 x_i + a_3 x_i^2 - \dots - a_k x_i^{k-1} - y_i) x_i = 0 \quad .$$

Для последнего k -го уравнения найдем:

$$a_1 \sum_{i=1}^n x_i^{k-1} + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^k + a_3 \sum_{i=1}^n x_i^{k+1} + \dots + a_k \sum_{i=1}^n x_i^{2(k-1)} - \sum_{i=1}^n x_i^{k-1} y_i = 0 \quad .$$

Таким образом, получим k алгебраических уравнений с неизвестными коэффициентами a_j . Система замкнута, из нее можно найти коэффициенты a_j , удовлетворяющие поставленному условию.

В общем случае решение этой системы уравнений связано с большим количеством расчетов; действительно, если в качестве сглаживающей функции взят полином $(k-1)$ -й степени, то необходимо иметь суммы наблюдаемых значений x_i в степени от 1 до $2(k-1)$, а также сумму всех наблюдаемых значений y_i и суммы всех произведений: $y_i x_i$, $y_i x_i^2$ и т.д. до $y_i x_i^{k-1}$. Даже при $k=2$ (y зависит от x линейно) расчеты получаются далеко не простыми.

Рассмотрим этот случай (линейной аппроксимации) более подробно, тем более, что в гидрологии часто разброс наблюдаемых точек получается очень большим (например, при отыскании связи между стоком и осадками и т.п.), а поиск линейной связи между искомыми величинами наиболее оправдан. Кроме того, этот случай дает возможность рассмотреть некоторые приемы, заметно упрощающие выкладки.

Допустим, что данные наблюдений величин y и x ложатся на плоскость XOY с разбросом (рис.3.17), так что поиск аппроксимирующей функции нужно ограничить

линейной зависимостью $y = o(x)$, которая называется прямой регрессии y по x . Прямая проведена так, чтобы сумма квадратов отклонений наблюдаемых y_i от этой прямой была наименьшей

$$S_y = \sum_{i=1}^n (y - y_i)^2 = \sum_{i=1}^n \Delta y_i^2 \rightarrow \min \quad .$$

Заметим, что при обосновании метода наименьших квадратов результат опыта считается случайной величиной, распределенной по нормальному закону с математическим ожиданием $\varphi(x)$, т.е. каждая точка, лежащая на сглаживающей кривой, есть математическое ожидание для группы экспериментальных точек, лежащих в окрестности. Следовательно, центр тяжести системы точек как математическое ожидание всей выборки должен лежать на прямой регрессии y по x .

Можно провести и вторую прямую регрессии x по y так, чтобы сумма квадратов отклонений наблюдаемых значений x_i от этой прямой была наименьшей

$$S_x = \sum_{i=1}^n (x - x_i)^2 = \sum_{i=1}^n \Delta x_i^2 \rightarrow \min \quad .$$

Разумеется, что и эта прямая должна пройти через центр тяжести системы точек, которая одновременно будет точкой пересечения двух прямых регрессии O' (см. рис.3.17).

Перенесем начало координат в точку пересечения. Новая система координат x', y' так связана со старой: $x' = x - \bar{x}$, $y' = y - \bar{y}$, т.е. перенос начала координат в центр тяжести системы означает одновременно и центрирование системы случайных величин.

В новой системе (рис.3.18) прямые регрессии проходят через начало координат O' . Следовательно, каждая прямая содержит всего один параметр — тангенс ее наклона к соответствующей оси, что приводит к существенному упрощению выкладок метода наименьших квадратов, так как в этом случае достаточно рассмотреть для каждой прямой только одно уравнение. Запишем уравнения регрессии в новой системе координат: $y' = \operatorname{tg} \alpha x'$; $x' = \operatorname{tg} \beta y'$. Заметим, что в данном случае речь идет о двух различных прямых, поэтому прямой связи не

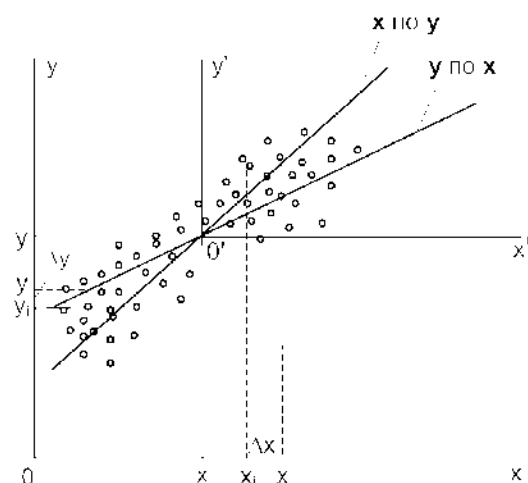


Рис. 3.17 Построение прямых регрессии в системе координат y, x

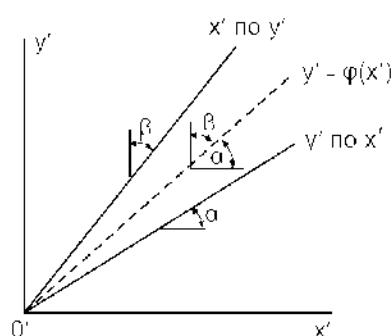


Рис. 3.18. Построение прямых регрессии в системе координат y', x'

соответствует обратная: $x' = (1/\operatorname{tg}\alpha)y' \neq \operatorname{tg}\beta y'$, так как $\alpha + \beta \neq 90^\circ$.

Обратимся к методу наименьших квадратов для определения параметра прямой регрессии y' по x' , которым является угол наклона ее к оси x' . Изменяя его, можно добиться такого положения прямой, при котором сумма квадратов отклонений S'_y будет наименьшей

$$S'_y = \sum_{i=1}^n (y' - y'_i)^2 = \sum_{i=1}^n \Delta y'_i{}^2 \rightarrow \min$$

Берем производную от S'_y по α и приравниваем ее нулю

$$\frac{\partial S'_y}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\sum_{i=1}^n (\operatorname{tg}\alpha x'_i - y'_i)^2 \right] = \sum_{i=1}^n (\operatorname{tg}\alpha x'_i - y'_i) x'_i \frac{2}{\cos^2 \alpha} = 0$$

Отсюда, отбрасывая постоянный множитель $2/\cos^2 \alpha$, получим

$$\operatorname{tg} \alpha = \sum_{i=1}^n y'_i x'_i / \sum_{i=1}^n (x'_i)^2.$$

Следовательно:

$$y' = \left[\frac{\sum_{i=1}^n y'_i x'_i / \sum_{i=1}^n (x'_i)^2}{1} \right] x'_i$$

Возратимся теперь к первоначальной системе координат

$$y - \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} (x - \bar{x})$$

Прежде чем перейти к канонической записи этой формулы, произведем для тангенса угла наклона прямой регрессии y по x (он называется коэффициентом регрессии) следующие тождественные преобразования:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})n}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 n} = \frac{K_{xy} \sigma_y}{\sigma_x^2 \sigma_y} = R_{xy} \frac{\sigma_y}{\sigma_x},$$

где K_{xy} и R_{xy} - рассмотренные ранее корреляционный момент и коэффициент корреляции; σ_x, σ_y - соответствующие средние квадратические отклонения. В канонической форме уравнение регрессии y по x получит вид

$$y = \bar{y} - R_{xy} \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \bar{x} + R_{xy} \frac{\sigma_y}{\sigma_x} x = a_1 + a_2 x$$

где

$$a_1 = \bar{y} - R_{xy} \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \bar{x}; a_2 = R_{xy} \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

По аналогии для коэффициента регрессии прямой x по y

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})n}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 n} = R_{xy} \frac{\sigma_x}{\sigma_y}$$

Каноническая форма уравнения регрессии x по y

$$x = \bar{x} - R_{xy} \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \bar{y} + R_{xy} \frac{\sigma_x}{\sigma_y} y = a'_1 + a'_2 y, \quad ,$$

где

$$a'_1 = \bar{x} - R_{xy} \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \bar{y} \quad ; \quad a'_2 = R_{xy} \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \quad .$$

Таким образом, коэффициент корреляции входит в оба уравнения регрессии, кроме того, он прямо пропорционален коэффициентам регрессии. При этом $R_{xy}^2 = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta$, или $R_{xy} = \pm \sqrt{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$. Отсюда становится ясной геометрическая интерпретация коэффициента корреляции как корня квадратного из произведения тангенсов углов наклона прямых регрессии y' по x' и x' по y' (см. рис.3.18). Допустим, что связь между y' и x' функциональная (жесткая), тогда вместо двух прямых регрессии будет только одна прямая линейной функциональной связи (см. пунктирную линию на рис.3.18), для которой $\alpha + \beta = 90^\circ$. В этом случае $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(90^\circ - \beta) = \operatorname{ctg} \beta = 1/\operatorname{tg} \beta$, следовательно $R_{xy} = \pm 1$. И только тогда прямой связи будет соответствовать обратная:

$$y' = \operatorname{tg} \alpha x' \quad ;$$

$$x' = (1/\operatorname{tg} \alpha) y' = (1/\operatorname{tg}(90^\circ - \beta)) y' = (1/\operatorname{ctg} \beta) y' = \operatorname{tg} \beta y' \quad .$$

Расчеты начинают с определения коэффициента корреляции, чтобы прежде всего убедиться в том, что наблюдаемые величины связаны между собой. О тесноте связи обычно судят по величине ошибки, с которой определяется коэффициент корреляции:

$$\Delta R_{xy} = \pm 0,674 \cdot \frac{1 - R_{xy}^2}{\sqrt{n-1}}.$$

Причем связь считается тесной, если $R_{xy} > 4\Delta R_{xy}$.

Если связь между случайными величинами не линейная, то коэффициент корреляции можно определять для выровненной прямой (так же, как и параметры этой прямой).

Все расчеты по определению коэффициента корреляции и параметров прямой регрессии удобно вести в табличной форме [21].

4. Случайные процессы в гидрологии. Влияние внутрирядной корреляции на оценки параметров кривых распределения

Гидрограф реки в определенном ее створе представляет собой совокупность случайных расходов воды, определенным образом изменяющихся во времени. В этом легко убедиться, если на график нанести несколько гидрографов за несколько лет ежедневных наблюдений (рис.3.19). Изучением подобных случайных явлений, в которых случайность проявляется в форме процесса, занимается специальный раздел теории вероятностей – теория случайных функций [20]. Случайная функция времени называется случайными процессами. Характерно для случайной функции то, что она может принять тот или иной конкретный, но заранее неизвестный вид, называемый реализацией; совокупность реализаций образует семейство. Семейство реализаций гидрографов реки в заданном створе представлено на рис.3.19. Число таких реализаций в данном случае равно количеству лет, в течение которых велась наблюдения за ежедневными расходами воды в реке.

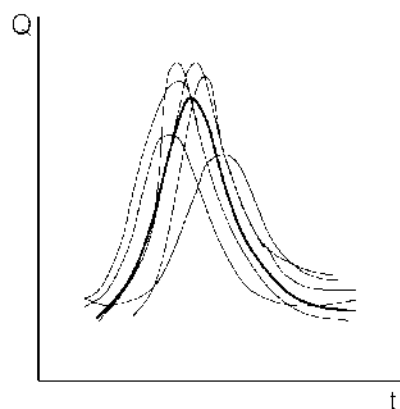


Рис. 3.19. Гидрограф реки как пример случайной функции

В случайных процессах случайные величины находятся в определенных временных зависимостях друг от друга. Действительно, расход воды в определенном створе реки, измеренный сегодня, зависит от расхода, который был вчера; количество воды в летнюю межень зависит от весеннего половодья и т.п. Но подобные связи могут иметь место и в

хронологических совокупностях фазово-однородных случайных величин. Известно, что в ходе изменения расходов воды в реке за многолетний промежуток времени наблюдаются периоды многоводных лет, которые чередуются с маловодными периодами. Следовательно, и в таких хронологических рядах случайных фазово-однородных величин между ними могут быть определенные внутрирядовые связи. В предыдущих разделах, посвященных законам распределения одной случайной величины, рассматривались совокупности данных наблюдений, в которых отсутствовали внутренние связи между величинами, входящими в совокупность. В связи с этим необходимо рассмотреть закономерности, характерные для случайных процессов, чтобы учесть их влияние на оценки параметров законов распределения.

Рассмотрим случайную функцию $X(t)$, где t – аргумент (чаще всего время). Пусть в n независимых опытах было получено n реализаций (рис.3.20). Каждая реализация (на рисунке они показаны тонкими линиями) есть обычная, не случайная функция. Возьмем фиксированное значение аргумента t , получим n значений, обычной случайной величины x , принятых в n опытах. Эту случайную величину называют сечением случайной функции, соответствующим данному t .

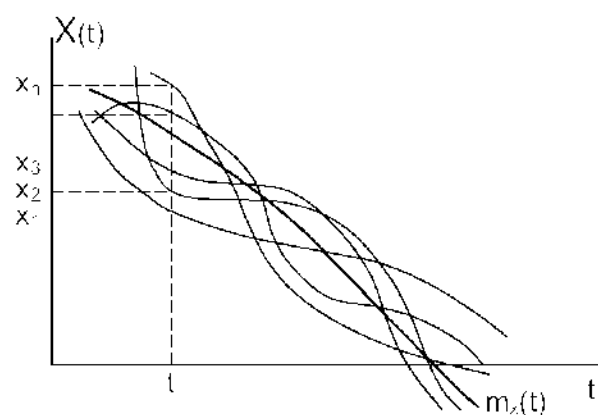


Рис. 3.20. Реализация случайной функции $X(t)$, ее сечение и математическое ожидание

Если числовыми характеристиками случайных величин являются определенные числа, то характеристики случайных функций представляют в общем случае функции аргумента t . Так, математическим ожиданием случайной функции $X(t)$ называется неслучайная функция $m_x(t)$, которая при каждом значении аргумента t равна математическому ожиданию соответствующего сечения случайной функции

$$m_x(t) = M[X(t)] \quad .$$

Следовательно, $m_x(t)$ есть средняя функция (на рис.3.20 и 3.21 изображена жирной линией), около которой варьируются реализации случайной функции.

Дисперсией случайной функции $X(t)$ называется неслучайная функция $D_x(t)$, значения которой для каждого t равно дисперсии соответствующего сечения случайной функции

$$D_x(t) = D[X(t)] \quad .$$

Корень квадратный из этой функции есть среднее квадратическое отклонение $\sigma_x(t)$ случайной функции

$$\sigma_x(t) = \sqrt{D_x(t)} \quad .$$

На рис.3.21 изображены две случайные функции $X_1(t)$ (тонкие сплошные линии) и $X_2(t)$ (пунктир), у которых примерно одинаковые математические ожидания (жирная линия) и дисперсии, однако, характер этих функций существенно разный.

Для случайной функции $X_1(t)$ характерно плавное изменение; случайная функция $X_2(t)$ имеет резко колебательный беспорядочный характер. У первой функции прослеживается зависимость между ее значениями при различных t ; у второй такая зависимость быстро затухает по мере увеличения промежутка t между значениями случайной функции. Для определения степени зависимости между сечениями случайной функции, относящимися к двум различным значениям аргумента t_1 и t_2 , вводится

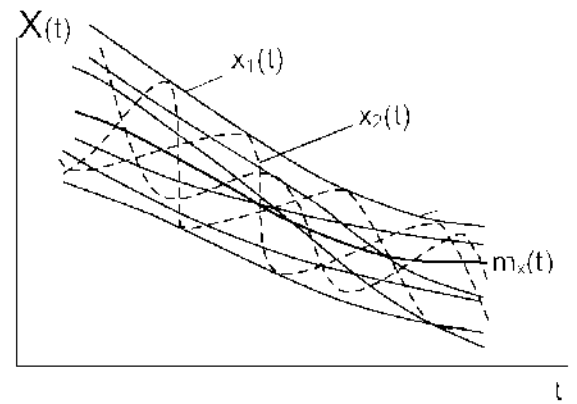


Рис. 3.21. Случайные функции с одинаковыми математическими ожиданиями и дисперсиями, но с различными автокорреляционными свойствами

корреляционная (или автокорреляционная) функция. Автокорреляционной функцией случайной функции $X(t)$ называется неслучайная функция двух аргументов $K_x(t_1, t_2)$, которая при каждой паре значений t_1 и t_2 равна корреляционному моменту соответствующих сечений случайной функции

$$K_x(t_1, t_2) = M\{[X(t_1) - m_x(t_1)] \cdot [X(t_2) - m_x(t_2)]\} \quad .$$

Если аргументы совпадают, то автокорреляционная функция обращается в дисперсию случайной функции; при $t_1 = t_2$

$$K_x(t, t) = M\{[X(t) - m_x(t)]^2\} = D_x(t) \quad .$$

Таким образом, в качестве основных характеристик случайной функции достаточно рассматривать ее математическое ожидание и автокорреляционную функцию. Вместо автокорреляционной функции $K_x(t_1, t_2)$ используют нормированную автокорреляционную функцию, которая называется коэффициентом автокорреляции величин $X(t_1)$ и $X(t_2)$

$$r_x(t_1, t_2) = \frac{K_x(t_1, t_2)}{\sigma_x(t_1)\sigma_x(t_2)} \quad .$$

Если $t_1 = t_2$, то коэффициент автокорреляции $r_x(t_1, t_2)$ становится равным единице:

$$r_x(t, t) = \frac{K_x(t, t)}{[\sigma_x(t)]^2} = \frac{D_x(t)}{[\sigma_x(t)]^2} = 1 \quad .$$

В гидрологии случайные функции рассматриваются в виде случайных последовательностей, заданных дискретным рядом равноотстоящих друг от друга точек ($t_1, t_2, t_3, \dots, t_i, \dots, t_n$). Следовательно, случайная функция представляется в виде хронологического ряда независимых случайных величин $x(t_i) = x_i$, где $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Случайные последовательности, в которых $r_x(t_1, t_2) \neq 0$ при $t_1 \neq t_2$, называются цепями Маркова. В простой цепи Маркова условный закон распределения каждого члена случайной последовательности x_{i+1} зависит от предыдущего члена x_i . В таких последовательностях автокорреляция имеет место лишь между смежными членами ряда, отстоящими друг от друга на единицу. Отсюда для коэффициента автокорреляции можно записать

$$r_x(t_1, t_2) = r(i+1, i) = r(1) \quad .$$

В [25] дана следующая зависимость для определения коэффициента автокорреляции случайной последовательности:

$$r(1) = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} (x_i - \overline{x_1})(x_{i+1} - \overline{x_2})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} (x_i - \overline{x_1})^2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - \overline{x_2})^2}} \quad ,$$

где

$$\overline{x_1} = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} x_i \quad ; \quad \overline{x_2} = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=2}^n x_i \quad .$$

Наличие корреляционной связи между смежными членами ряда оказывает существенное влияние на вид случайной последовательности, делает оценки параметров смещенными, требует существенного увеличения числа членов выборки для того, чтобы она стала репрезентативной. Причиной этих искажений является сглаживание колебаний в пределах относительно малочисленных выборок при возрастании связи между членами ряда (рис. 3.22).

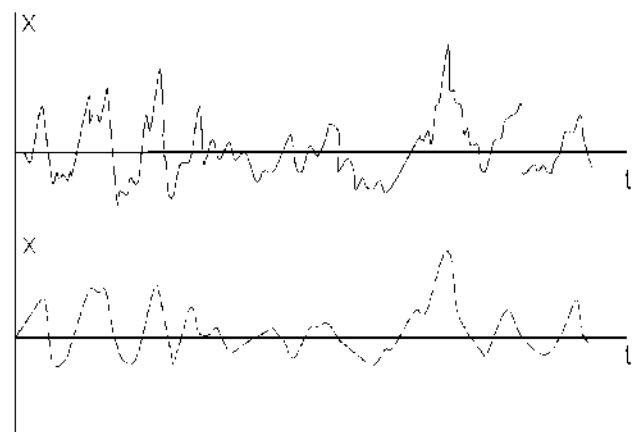


Рис. 3.22. Влияние коэффициентов автокорреляции между смежными членами ряда на вид статистических последовательностей:

1 — $r(1) = 0$; 2 — $r(1) = 0,6$;
 ————— 1; ———— 2

Влияние внутрирядной связанности на оценки параметров случайных последовательностей, полученных методом статистических испытаний, представляющих собой простые цепи Маркова, было исследовано А.Ш.Резниковским и др. [23]. Так, среднее

квадратическое отклонение ряда, составленного из средних арифметических значений, полученных по многочисленным выборкам, входящим в генеральную статистическую совокупность, обладающую внутрядной корреляцией между смежными членами, оказалось зависящим от коэффициента автокорреляции. $r(1)$. Для практических расчетов при малых значениях $r(1)$ предложена приближенная зависимость

$$\sigma_s = \frac{\sigma_y}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{1 + r(1)}$$

формула при $r(1) = 0$ превращается в зависимость, справедливую для внутрядно не связанных случайных величин.

В [25] для расчета несмещенных коэффициентов вариации и асимметрии приводятся формулы, позволяющие определить эти коэффициенты в зависимости от $r(1)$ и смещенных оценок коэффициентов $\overline{C_y}$ и $\overline{C_s}$. В качестве смещенных оценок параметров $\overline{C_y}$ и $\overline{C_s}$ в [25] используются зависимости, непосредственно вытекающие из метода моментов, с поправкой $(n - 1)$ для $\overline{C_y}$ и Бюхинова – для $\overline{C_s}$. При $r(1) = 0$ для этих параметров устраняется смещение, вызванное ограниченным объемом выборки, а при $r(1) \neq 0$ смещение, причина которого – в наличии междурядной корреляции. Как показали проведенные исследования [22], характер влияния коэффициента автокорреляции на параметры C_y и C_s неоднозначный, зависящий от многих факторов. В связи с этим не следует ожидать, что регрессионные зависимости, приведенные в [25] для параметров C_y и C_s , полностью учитывают влияние этих факторов, они лишь устраняют смещенность оценок параметров в первом приближении.

Нормированные отклонения от среднего значения ординат биномиальной кривой обеспеченности

$$\frac{\bar{X}_p - \bar{X}}{\sigma} = \frac{K_p - 1}{C_v} = \Phi(P, C_v) : S = \frac{X_5 + X_{95} - X_{50}}{X_5 - X_{95}}$$

Коэффици- циент	Значения $\Phi(P,C_v)$ при обеспеченности P, %																				Коэффи- циент
	0,01	0,1	1	3	5	10	20	30	40	50	60	70	80	90	95	97	99	99,9			
ассиммет- метрии Cs	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20		
1	3,72	3,09	2,33	1,88	1,64	1,28	0,84	0,52	0,25	0,00	-0,25	-0,52	-0,84	-1,28	-1,64	-1,88	-2,33	-3,09	0,00		
0,0	3,94	3,23	2,40	1,92	1,67	1,29	0,84	0,51	0,24	-0,02	-0,27	-0,53	-0,85	-1,27	-1,61	-1,84	-2,25	-2,95	0,03		
0,1	4,16	3,33	2,47	1,96	1,70	1,30	0,83	0,50	0,22	-0,03	-0,28	-0,55	-0,85	-1,26	-1,58	-1,79	-2,18	-2,81	0,06		
0,2	4,38	3,52	2,54	2,00	1,72	1,31	0,82	0,48	0,20	-0,05	-0,30	-0,56	-0,85	-1,24	-1,55	-1,75	-2,10	-2,67	0,08		
0,3	4,61	3,66	2,61	2,04	1,75	1,32	0,82	0,47	0,19	-0,07	-0,31	-0,57	-0,85	-1,23	-1,52	-1,70	-2,03	-2,54	0,11		
0,4	4,83	3,81	2,68	2,08	1,77	1,32	0,81	0,46	0,17	-0,08	-0,33	-0,58	-0,85	-1,22	-1,49	-1,66	-1,96	-2,40	0,14		
0,5	5,05	3,96	2,75	2,12	1,80	1,33	0,80	0,44	0,16	-0,10	-0,34	-0,59	-0,85	-1,20	-1,45	-1,61	-1,88	-2,27	0,17		
0,6	5,28	4,10	2,82	2,15	1,82	1,33	0,79	0,43	0,14	-0,12	-0,36	-0,60	-0,85	-1,18	-1,42	-1,57	-1,81	-2,14	0,20		
0,7	5,50	4,24	2,89	2,18	1,84	1,34	0,78	0,41	0,12	-0,13	-0,37	-0,60	-0,85	-1,17	-1,38	-1,52	-1,74	-2,02	0,22		
0,8	5,73	4,38	2,96	2,22	1,86	1,34	0,77	0,40	0,11	-0,15	-0,38	-0,61	-0,85	-1,15	-1,35	-1,47	-1,66	-1,90	0,25		
0,9	5,96	4,53	3,02	2,25	1,88	1,34	0,76	0,38	0,09	-0,16	-0,39	-0,62	-0,85	-1,13	-1,32	-1,42	-1,59	-1,79	0,28		
1,0	6,18	4,67	3,09	2,28	1,89	1,34	0,74	0,36	0,07	-0,18	-0,41	-0,62	-0,85	-1,10	-1,28	-1,38	-1,52	-1,68	0,31		
1,1	6,41	4,81	3,15	2,31	1,91	1,34	0,73	0,35	0,05	-0,19	-0,42	-0,63	-0,84	-1,08	-1,24	-1,33	-1,45	-1,58	0,34		
1,2	6,64	4,95	3,21	2,34	1,92	1,34	0,72	0,33	0,04	-0,21	-0,43	-0,63	-0,84	-1,06	-1,20	-1,28	-1,38	-1,48	0,37		
1,3	6,87	5,09	3,27	2,37	1,94	1,34	0,71	0,31	0,02	-0,22	-0,44	-0,64	-0,83	-1,04	-1,17	-1,23	-1,32	-1,39	0,39		
1,4	7,09	5,23	3,33	2,39	1,95	1,33	0,69	0,30	0,00	-0,24	-0,45	-0,64	-0,82	-1,02	-1,13	-1,19	-1,26	-1,31	0,42		
1,5	7,31	5,37	3,39	2,42	1,96	1,33	0,68	0,28	-0,02	-0,25	-0,46	-0,64	-0,81	-0,99	-1,10	-1,14	-1,20	-1,24	0,45		
1,6	7,54	5,50	3,44	2,44	1,97	1,32	0,66	0,26	-0,03	-0,27	-0,47	-0,64	-0,81	-0,97	-1,06	-1,10	-1,14	-1,17	0,48		
1,7	7,76	5,64	3,50	2,46	1,98	1,32	0,64	0,24	-0,05	-0,28	-0,48	-0,64	-0,80	-0,94	1,02	-1,06	-1,09	-1,11	0,51		
1,8	7,98	5,77	3,55	2,49	1,99	1,31	0,63	0,22	-0,07	-0,29	-0,48	-0,64	-0,79	-0,92	-0,98	-1,01	-1,04	-1,05	0,54		
1,9	8,21	5,91	3,60	2,51	2,00	1,30	0,61	0,20	-0,08	-0,31	-0,49	-0,64	-0,78	-0,90	-0,96	-0,97	-0,99	-1,00	0,57		

Приложение 2

Ординаты кривых трехпараметрического гамма-распределения

Р, %	Коэффициент вариации C_v											
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,1	1,2
	$C_s = C_v$											
0,001	1,46	1,94	2,46	2,97	3,47	3,94	4,36	4,73	5,06	5,35	5,58	5,76
0,01	1,38	1,81	2,26	2,70	3,15	3,57	3,95	4,31	4,64	4,92	5,16	5,34
0,03	1,35	1,74	2,15	2,56	2,97	3,37	3,74	4,09	4,41	4,69	4,94	5,16
0,05	1,34	1,71	2,10	2,49	2,89	3,27	3,64	3,98	4,29	4,58	4,83	5,06
0,1	1,32	1,67	2,03	2,40	2,77	3,13	3,48	3,82	4,13	4,42	4,69	4,92
0,3	1,28	1,59	1,91	2,23	2,56	2,89	3,21	3,53	3,84	4,14	4,44	4,74
0,5	1,27	1,55	1,84	2,15	2,46	2,77	3,08	3,38	3,69	3,99	4,29	4,58
1	1,24	1,49	1,76	2,03	2,30	2,59	2,88	3,16	3,46	3,75	4,06	4,36
3	1,19	1,39	1,60	1,82	2,04	2,27	2,50	2,75	3,01	3,29	3,59	3,92
5	1,17	1,34	1,52	1,70	1,90	2,10	2,30	2,53	2,76	3,02	3,31	3,63
10	1,13	1,26	1,40	1,54	1,68	1,83	1,99	2,16	2,36	2,55	2,78	3,03
20	1,08	1,17	1,25	1,34	1,42	1,51	1,60	1,70	1,80	1,90	2,00	2,10
25	1,07	1,13	1,20	1,26	1,33	1,39	1,46	1,52	1,59	1,64	1,68	1,69
30	1,05	1,10	1,15	1,20	1,24	1,29	1,33	1,37	1,39	1,40	1,39	1,34
40	1,02	1,04	1,06	1,08	1,09	1,10	1,10	1,08	0,95	0,99	0,91	0,81
50	1,00	0,99	0,98	0,97	0,95	0,93	0,89	0,83	0,76	0,66	0,56	0,44
60	0,97	0,94	0,91	0,87	0,82	0,77	0,70	0,61	0,51	0,40	0,30	0,21
70	0,94	0,89	0,83	0,76	0,69	0,61	0,51	0,41	0,31	0,21	0,14	0,08
75	0,93	0,86	0,79	0,71	0,62	0,53	0,43	0,32	0,22	0,14	0,08	0,04
80	0,91	0,83	0,74	0,65	0,55	0,44	0,34	0,24	0,15	0,09	0,05	0,02
90	0,87	0,75	0,62	0,50	0,38	0,26	0,16	0,09	0,04	0,02	0,01	0,00
95	0,84	0,68	0,53	0,39	0,26	0,16	0,08	0,03	0,01	0,00	0,00	0,00
97	0,82	0,64	0,48	0,33	0,20	0,11	0,05	0,02	0,00	0,00	0,00	0,00
99	0,77	0,57	0,38	0,23	0,11	0,05	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

P, %	Коэффициент вариации C_v														
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
$C_s = 2C_v$															
0,001	1,49	2,09	2,82	3,68	4,67	5,78	7,03	8,40	9,89	11,50	13,20	15,10	17,20	19,30	21,60
0,01	1,42	1,92	2,52	3,20	3,98	4,85	5,81	6,85	7,98	9,21	10,50	11,80	13,20	14,70	16,40
0,03	1,38	1,83	2,36	2,96	3,64	4,39	5,22	6,11	7,08	8,11	9,20	10,30	11,60	12,90	14,30
0,05	1,36	1,79	2,29	2,85	3,48	4,18	4,95	5,77	6,66	7,60	8,61	9,65	10,80	11,90	13,10
0,1	1,34	1,73	2,19	2,70	3,27	3,87	4,56	5,30	6,08	6,91	7,75	8,65	9,60	10,60	11,6
0,3	1,3	1,64	2,02	2,45	2,91	3,42	3,96	4,55	5,16	5,81	6,47	7,10	7,98	8,70	9,50
0,5	1,28	1,59	1,94	2,32	2,74	3,20	3,68	4,19	4,74	5,30	5,90	6,50	7,13	7,80	8,42
1	1,25	1,52	1,82	2,16	2,51	2,89	3,29	3,71	4,15	4,60	6,05	6,53	6,02	6,55	7,08
3	1,2	1,41	1,64	1,87	2,13	2,39	2,66	2,94	3,21	3,51	3,80	4,12	4,42	4,71	4,98
5	1,17	1,35	1,54	1,74	1,94	2,15	2,36	2,57	2,78	3,00	3,22	3,40	3,60	3,80	3,96
10	1,13	1,26	1,4	1,54	1,67	1,80	1,94	2,06	2,19	2,30	2,40	2,50	2,57	2,64	2,70
20	1,03	1,16	1,24	1,31	1,38	1,44	1,5	1,54	1,58	1,61	1,62	1,63	1,62	1,61	1,59
25	1,06	1,13	1,18	1,23	1,28	1,31	1,34	1,37	1,38	1,39	1,39	1,35	1,33	1,31	1,28
30	1,05	1,09	1,13	1,16	1,19	1,21	1,22	1,22	1,22	1,20	1,18	1,14	1,11	1,08	1,04
40	1,02	1,04	1,05	1,05	1,04	1,03	1,01	0,98	0,95	0,92	0,87	0,83	0,77	0,72	0,67
50	1	0,99	0,97	0,95	0,92	0,89	0,85	0,80	0,75	0,69	0,64	0,58	0,52	0,46	0,40
60	0,97	0,94	0,99	0,85	0,80	0,75	0,69	0,63	0,57	0,51	0,45	0,39	0,33	0,28	0,23
70	0,94	0,89	0,82	0,76	0,69	0,62	0,55	0,49	0,42	0,36	0,30	0,25	0,20	0,16	0,12
75	0,93	0,86	0,78	0,71	0,63	0,56	0,49	0,42	0,35	0,29	0,24	0,19	0,15	0,11	0,08
80	0,92	0,83	0,74	0,66	0,57	0,50	0,42	0,35	0,28	0,22	0,18	0,13	0,09	0,06	0,05
90	0,87	0,75	0,64	0,53	0,44	0,35	0,27	0,21	0,15	0,10	0,07	0,05	0,03	0,02	0,01
95	0,84	0,69	0,56	0,45	0,34	0,26	0,18	0,12	0,08	0,05	0,03	0,02	0,00	0,00	0,00
97	0,82	0,66	0,52	0,39	0,29	0,20	0,14	0,09	0,05	0,03	0,02	0,01	0,00	0,00	0,00
99	0,78	0,59	0,44	0,3	0,21	0,13	0,08	0,13	0,08	0,04	0,02	0,01	0,00	0,00	0,00

Продолжение прил. 2

P, %	Коэффициент вариации C_v										
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1
	$C_s = 3C_v$										
0,001	1,54	2,29	3,32	4,63	6,24	8,14	10,30	12,70	15,40	18,2	21,3
0,01	1,46	2,05	2,83	3,80	4,94	6,26	7,70	9,30	11,00	12,8	14,8
0,03	1,41	1,93	2,59	3,42	4,35	5,39	6,58	7,85	9,19	10,6	12,1
0,05	1,39	1,88	2,49	3,24	4,09	5,04	6,08	7,21	8,40	9,65	11,0
0,1	1,36	1,81	2,35	3,01	3,74	4,56	5,44	6,38	7,37	8,41	9,49
0,3	1,31	1,69	2,12	2,65	3,21	3,82	4,48	5,17	5,88	6,61	7,37
0,5	1,28	1,63	2,03	2,48	2,97	3,50	4,06	4,64	5,24	5,84	6,47
1	1,25	1,55	1,90	2,26	2,66	3,07	3,50	3,96	4,41	4,87	5,33
3	1,20	1,42	1,66	1,91	2,17	2,43	2,69	2,95	3,21	3,47	3,73
5	1,17	1,36	1,55	1,75	1,95	2,14	2,34	2,53	2,70	2,88	3,05
10	1,13	1,26	1,40	1,52	1,65	1,76	1,87	1,97	2,06	2,15	2,23
20	1,08	1,16	1,23	1,29	1,34	1,38	1,42	1,45	1,47	1,49	1,50
25	1,07	1,12	1,17	1,21	1,24	1,26	1,28	1,28	1,29	1,29	1,28
30	1,05	1,09	1,12	1,14	1,15	1,16	1,16	1,15	1,14	1,13	1,11
40	1,02	1,03	1,03	1,03	1,01	0,99	0,97	0,94	0,91	0,88	0,85
50	1,00	0,98	0,96	0,93	0,90	0,86	0,82	0,78	0,74	0,70	0,65
60	0,97	0,93	0,89	0,84	0,79	0,74	0,69	0,64	0,60	0,55	0,50
70	0,94	0,88	0,82	0,76	0,69	0,63	0,58	0,52	0,47	0,42	0,37
75	0,93	0,86	0,78	0,71	0,65	0,58	0,52	0,46	0,41	0,36	0,32
80	0,91	0,83	0,75	0,67	0,59	0,53	0,46	0,41	0,35	0,30	0,26
90	0,87	0,76	0,65	0,56	0,48	0,40	0,34	0,28	0,23	0,19	0,15
97	0,82	0,67	0,55	0,44	0,35	0,28	0,22	0,17	0,13	0,10	0,04
99	0,78	0,62	0,48	0,37	0,28	0,21	0,16	0,11	0,08	0,06	0,04

Продолжение приложения 2

P, %	Коэффициент вариации C_v								
	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
	$C_s = 3C_v$								
0.001	24,50	27,90	31,50	35,30	39,30	43,40	47,80	52,50	57,40
0.01	16,80	19,00	21,20	23,50	25,90	28,40	31,00	33,70	36,50
0,03	13,70	15,30	17,00	18,80	20,60	22,40	24,30	26,30	28,40
0,05	12,40	13,80	15,20	16,80	18,30	19,90	21,50	23,30	25,10
0.1	10,60	11,80	13,00	14,20	15,40	16,70	18,00	19,40	20,80
0.3	8,15	8,94	9,75	10,60	11,40	12,30	13,10	14,00	14,80
0,5	7,10	7,75	8,41	9,07	9,74	10,40	11,10	11,80	12,40
1	5,79	6,26	6,74	7,21	7,68	8,14	8,61	9,07	9,53
3	3,98	4,20	4,44	4,67	4,89	5,10	5,31	5,51	5,70
5	3,22	3,37	3,52	3,66	3,80	3,92	4,04	4,15	4,26
10	2,30	2,36	2,42	2,47	2,51	2,55	2,58	2,60	2,62
20	1,50	1,50	1,49	1,48	1,46	1,45	1,42	1,40	1,37
25	1,27	1,25	1,23	1,20	1,18	1,15	1,12	1,08	1,05
30	1,08	1,06	1,03	1,00	0,96	0,93	0,89	0,85	0,82
40	0,81	0,77	0,73	0,70	0,66	0,62	0,58	0,54	0,51
50	0,61	0,57	0,53	0,49	0,45	0,41	0,38	0,34	0,31
60	0,46	0,42	0,38	0,34	0,30	0,27	0,24	0,21	0,18
70	0,33	0,29	0,26	0,22	0,19	0,16	0,14	0,12	0,10
75	0,28	0,24	0,20	0,17	0,15	0,12	0,10	0,09	0,07
80	0,22	0,19	0,16	0,13	0,11	0,09	0,07	0,06	0,05
90	0,12	0,10	0,08	0,06	0,05	0,03	0,02	0,02	0,01
95	0,07	0,06	0,04	0,03	0,02	0,01	0,01	0,01	0,00
97	0,05	0,04	0,03	0,02	0,01	0,01	0,00	0,00	0,00
99	0,03	0,02	0,01	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Р, %	Коэффициент вариации C _v									
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
	$C_s = 4C_v$									
0,001	1,59	2,49	3,90	5,80	8,15	10,90	13,90	17,20	20,80	24,60
0,01	1,50	2,18	3,17	4,43	5,91	7,58	9,41	11,40	13,40	15,50
0,03	1,44	2,04	2,86	3,86		6,30	7,67	9,14	10,70	12,30
0,05	1,41	1,97	2,72	3,61	4,63	5,76	6,96	8,22	9,56	11,00
0,1	1,38	1,88	2,53	3,29	4,15	5,07	6,05	7,08	8,15	9,26
0,3	1,32	1,74	2,24	2,82	3,44	4,09	4,79	5,50	6,22	6,96
0,5	1,29	1,67	2,12	2,61	3,13	3,68	4,26	4,85	5,43	6,03
1	1,25	1,58	1,94	2,34	2,75	3,17	3,59	4,03	4,47	4,91
3	1,20	1,44	1,68	1,93	2,18	2,43	2,68	2,92	3,16	3,39
5	1,17	1,36	1,56	1,75	1,94	2,12	2,29	2,46	2,62	2,78
10	1,13	1,26	1,39	1,51	1,62	1,72	1,81	1,90	1,98	2,05
20	1,08	1,15	1,22	1,27	1,31	1,34	1,37	1,40	1,41	1,42
25	1,07	1,12	1,16	1,19	1,21	1,23	1,24	1,24	1,24	1,24
30	1,05	1,08	1,11	1,12	1,13	1,13	1,13	1,20	1,11	1,10
40	1,02	1,02	1,02	1,01	1,00	0,98	0,95	0,93	0,90	0,87
50	1,00	0,97	0,95	0,92	0,89	0,85	0,81	0,78	0,74	0,71
60	0,97	0,93	0,88	0,84	0,79	0,75	0,70	0,66	0,61	0,57
70	0,94	0,88	0,82	0,76	0,70	0,65	0,60	0,56	0,50	0,46
75	0,93	0,85	0,79	0,72	0,66	0,60	0,54	0,59	0,45	0,40
80	0,91	0,83	0,75	0,68	0,61	0,55	0,49	0,44	0,39	0,35
90	0,88	0,77	0,67	0,58	0,51	0,44	0,38	0,33	0,28	0,24
95	0,84	0,72	0,61	0,52	0,44	0,37	0,31	0,26	0,22	0,18
97	0,83	0,69	0,57	0,48	0,40	0,33	0,27	0,22	0,18	0,15
99	0,79	0,64	0,51	0,42	0,33	0,27	0,21	0,17	0,13	0,10

Продолжение прил. 2

P, %	Коэффициент вариации C_v									
	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
	$C_s = 4C_v$									
0,001	28,6	32,8	37,2	41,8	46,6	51,5	56,6	61,8	67,2	72,8
0,01	17,9	20,3	22,8	25,4	28,0	30,8	33,6	36,5	39,4	42,4
0,03	14,0	15,8	17,6	19,4	21,3	23,3	25,3	27,3	29,4	31,5
0,05	12,4	13,9	15,4	17,0	18,6	20,3	21,9	23,7	25,4	27,2
0,1	10,4	11,6	12,8	14,0	15,3	16,6	17,9	19,2	20,6	21,9
0,3	7,73	8,53	9,31	10,1	10,9	11,7	12,5	13,3	14,2	15,0
0,5	6,65	7,29	7,91	8,53	9,16	9,97	10,4	11,0	11,7	12,3
1	5,34	5,79	6,22	6,66	7,09	7,52	7,95	8,37	8,78	9,19
3	3,62	3,83	4,04	4,25	4,45	4,64	4,83	5,01	5,18	5,34
5	2,29	3,07	3,21	3,34	3,46	3,57	3,68	3,78	3,87	3,96
10	2,12	2,18	2,24	2,28	2,32	2,36	2,39	2,42	2,44	2,45
20	1,43	1,44	1,43	1,43	1,42	1,41	1,39	1,38	1,36	1,33
25	1,23	1,22	1,21	1,19	1,17	1,15	1,13	1,10	1,08	1,05
30	1,08	1,06	1,04	1,01	0,98	0,96	0,93	0,9	0,87	0,84
40	0,84	0,81	0,78	0,75	0,71	0,68	0,65	0,62	0,59	0,56
50	0,67	0,63	0,60	0,56	0,53	0,49	0,46	0,43	0,40	0,37
60	0,53	0,49	0,46	0,42	0,39	0,35	0,32	0,30	0,27	0,25
70	0,41	0,38	0,34	0,31	0,28	0,25	0,22	0,20	0,18	0,16
75	0,36	0,32	0,29	0,26	0,23	0,20	0,18	0,16	0,14	0,12
80	0,31	0,27	0,24	0,21	0,18	0,16	0,14	0,12	0,10	0,09
90	0,20	0,17	0,15	0,12	0,10	0,09	0,07	0,06	0,05	0,04
95	0,15	0,12	0,10	0,08	0,06	0,05	0,04	0,03	0,02	0,02
97	0,12	0,09	0,07	0,06	0,04	0,03	0,03	0,02	0,01	0,01
99	0,08	0,06	0,04	0,03	0,02	0,02	0,01	0,01	0,00	0,00

F-распределение (Фишера)

$$\alpha = 0,05$$

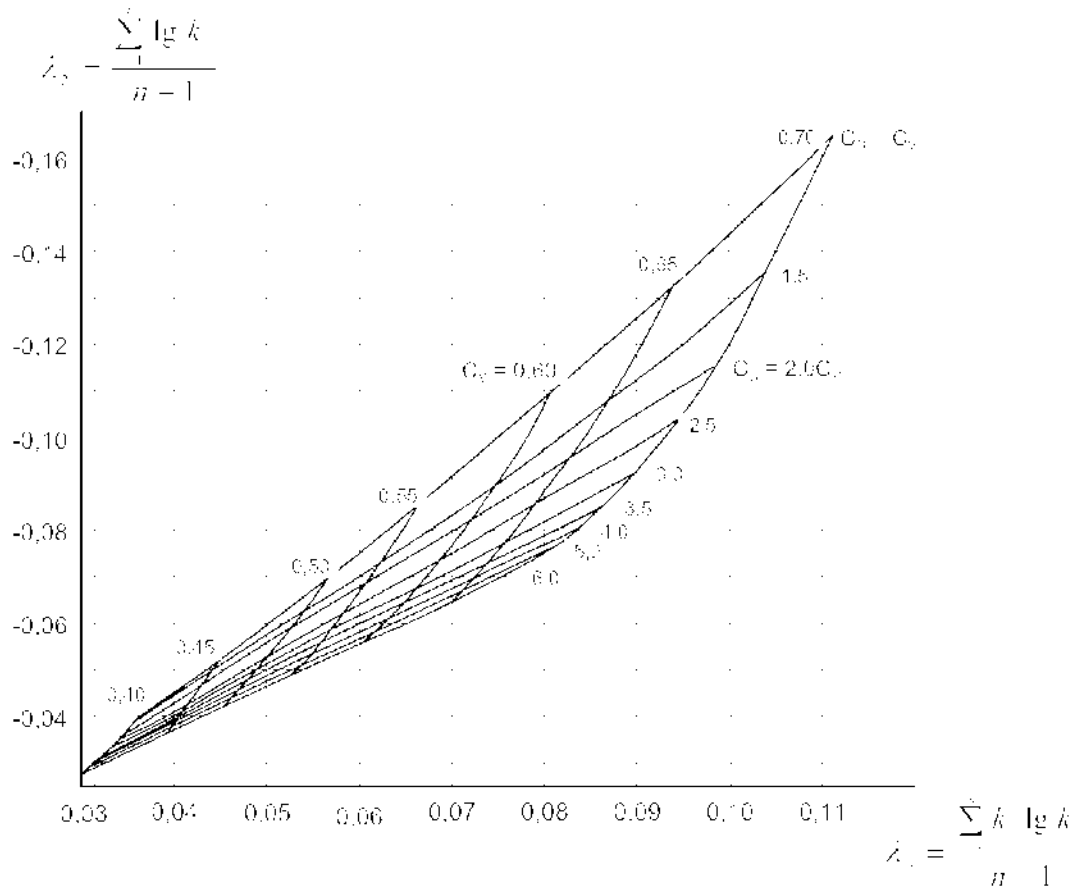
m_1 m_2	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	161.4	199,5	215.7	224.6	230,2	234.0	238.9	243,9	249.0	254.3
2	18,51	19.00	19.16	19,25	19.30	19.33	19,37	19,41	19,45	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,84	8,74	8,64	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,91	5,77	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,68	4,53	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,00	3,84	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,57	3,41	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,28	3,12	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,07	2,90	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,91	2,74	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,95	2,79	2,61	2,40
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,69	2,50	2,30
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,77	2,60	2,42	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,53	2,35	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,48	2,29	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,42	2,24	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,55	2,38	2,19	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,34	2,15	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,48	2,31	2,11	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,28	2,08	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,42	2,25	2,05	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,40	2,23	2,03	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,38	2,20	2,00	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,36	2,18	1,98	1,73
25	4,24	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	2,34	2,16	1,96	1,71
26	4,22	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,32	2,15	1,95	1,69
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,30	2,13	1,93	1,67

Продолжение приложения 3

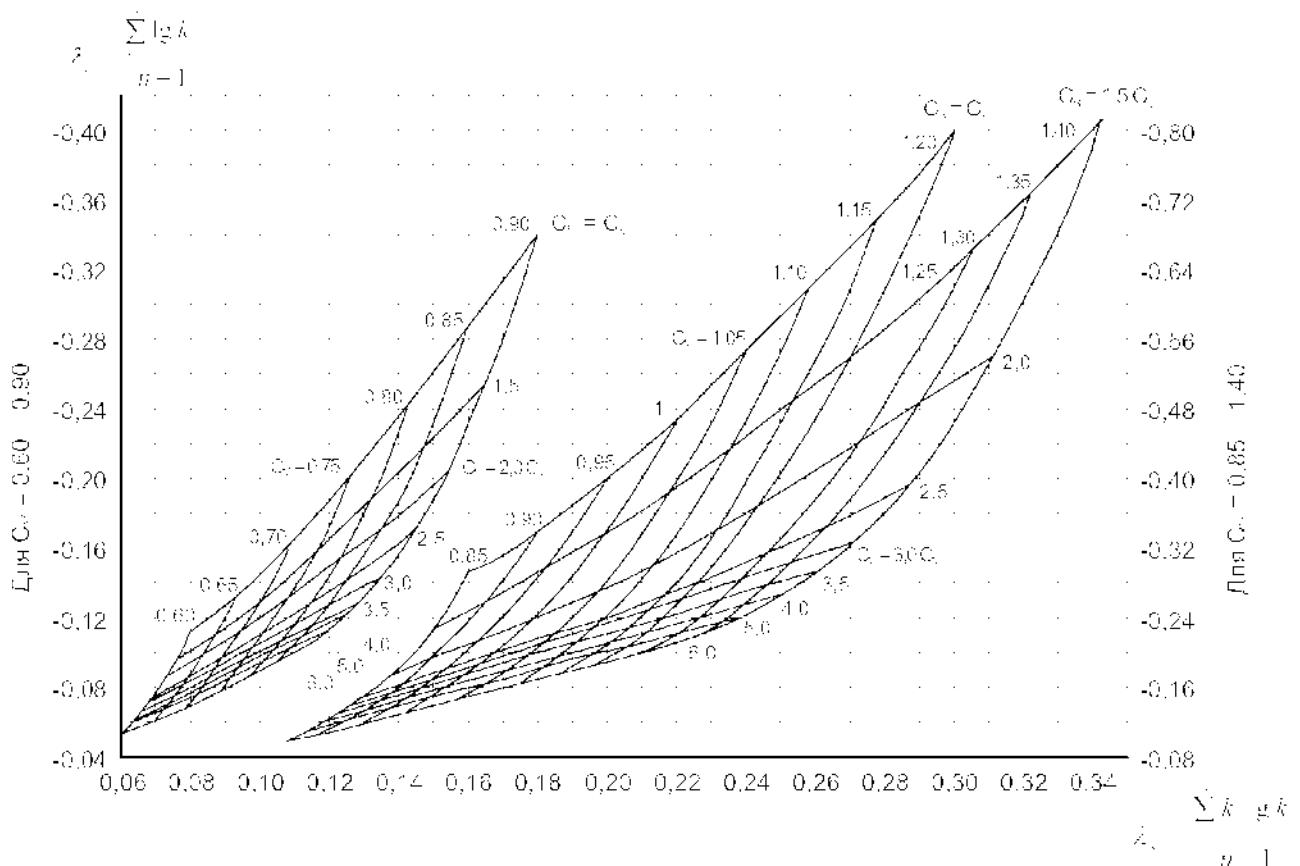
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,44	2,29	2,12	1,91	1,65
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,54	2,43	2,28	2,10	1,90	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,09	1,89	1,62
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,00	1,79	1,52
60	4,00	3,15	2,76	2,52	2,37	2,25	2,10	1,92	1,70	1,39
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,02	1,83	1,61	1,25
∞	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	1,94	1,75	1,52	1,00

где m – число степеней свободы выборки имеющей большую дисперсию.

Номограмма кривой трехпараметрического гамма-распределения для
 $C_v = 0,4 - 0,7$



Номограмма кривой трехпараметрического гамма-распределения для
 $C_v = 0,6 - 1,4$



1. Михалев М.А. Инженерная гидрология. Теория стока. СПб.: Изд-во СПбГТУ, 1994. 77 с.
2. Биевас Азиз К. Человек и вода (из истории гидрологии). Л.: Гидрометеиздат, 1975. – 287 с.
3. Чебогарев А.И. Общая гидрология. Л.: Гидрометеиздат, 1975. – 544 с.
4. Федоров М.П., Шилин М.Б., Ролле Н.Н. Экология для гидротехников. С.-Петербург: ВНИИГ им. Б.Е.Веденеева, СПбГТУ, 1992. – 90 с.
5. Михалев М.А. Инженерная гидрология. Загрязнение вод суши. Математические основы гидрологических расчетов. СПб.: Изд-во СПбГТУ, 1995. 96 с.
6. Канарский Н.Д., Михалев М.А. Гидрологические расчеты. Л.: ЛПИ. 1984. – 63 с.
7. Железняков Г.В., Овчаров Е.Е. Инженерная гидрология и регулирование стока. М.: Колос, 1983. – 464 с.
8. Использование водной энергии / Под ред. Д.С.Щавелева. Л.: Энергия. 1976. – с.81-100.
9. Леви И.И. Инженерная гидрология. М.: Высшая школа, 1968. – 237 с.
10. Соломенцев Н.А., Львов А.М. и др. Гидрология суши. Л.: Гидрометеиздат, 1976. – 432 с.
11. Великанов М.А. Гидрология суши. Л.: Гидрометеиздат, 1964. – 403 с.
12. Давыдов Л.К., Дмитриева А.А., Конкина Н.Г. Общая гидрология. Л.: Гидрометеиздат, 1973. – 462 с.
13. Соколов А.А., Чанмен Т.Г. Методы расчета водных балансов. Л.: Гидрометеиздат, 1979. – 120 с.
14. Иванов А.П., Петовская Т.А. Гидрология и регулирование стока. М.: Колос, 1979. – 384 с.
15. Справочник, мелиорация и водное хозяйство. Под ред. Шумакова Б.Б. Т.6 "Орошение". М.: ВО Агропромиздат, 1990. – с.13-28.
16. Шестаков В.М., Пашковский И.С., Сойфер А.М. Гидрогеологические исследования на орошаемых территориях. М.: Недра. 1982. – 244 с.
17. Колшаков В.В., Сухарев И.И. Сельскохозяйственные мелиорации. М.: Агропромиздат, 1988. – с.24-25.
18. Виссмен У., Харбиф Т.Н., Кигэши Д.У. Введение в гидрологию. Л.: Гидрометеиздат, 1979. – 470 с.
19. Шикломанов И.А. Антропогенные изменения водности рек. Л.: Гидрометеиздат, 1979. – 302 с.
20. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. М.: Физматгиз, 1962. – с.11-359.

21. Михайлов М.А. Инженерная гидрология. Гидрологические расчеты. СПб.: Изд-во СПбГПУ, 1999. – 92 с.
22. Рождественский А.В. Чеботарев А.И. Статистические методы в гидрологии. Л.: Гидрометеоиздат, 1974. – 424 с.
23. Резниковский А.Ш. и др. Водно-энергетические расчеты методом Монте-Карло. М.: Энергия, 1969. – 303 с.
24. Блюхинов Е.Г. Новые приемы для оценки параметров случайных колебаний речного стока по данным многолетних наблюдений // Тр. Гос. гидрологического института. 1967. Вып. 143. – с. 134 – 185.
25. Определение расчетных гидрологических характеристик. СНиП 2.01.14-83. М.: Стройиздат, 1985. – 33 с.