ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

С. Г. ГРИГОРЬЕВ, С. В. ИВОЛГИНА

МАТЕМАТИКА

Под редакцией **проф. В. А. Гусева**

УЧЕБНИК

Рекомендовано
Федеральным государственным учреждением «Федеральный институт развития образования» в качестве учебника для использования в учебном процессе образовательных учреждений, реализующих образовательные программы среднего профессионального образования

Регистрационный номер рецензии 122
от 14 мая 2010 г. ФГУ «ФИРО»

11-е издание, стереотипное

Москва
Издательский центр «Академия»
2015

УДК 51(075.32)
ББК 22.1я723
Г831

Рецензенты:
проф., канд. пед. наук Московского городского педагогического университета
Т. А. Корешкова;
преподаватель математики ГОУ СПО «Политехнический колледж № 39»
Л. К. Лисицина;
преподаватели математики Мытищинского машиностроительного техникума
Л. Г. Осипова, *Т. Н. Корчагина*

Григорьев С. Г. 97558

Г831 Математика : учебник для студ. образоват. учреждений сред. проф. образования / С. Г. Григорьев, С. В. Иволгина; под ред. В. А. Гусева. — 11-е изд., стер. — М. : Издательский центр «Академия», 2015. — 416 с.

ISBN 978-5-4468-2267-6

Учебник создан в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом среднего профессионального образования, ЕН «Математика».

Материал учебника охватывает все основные разделы математики: дифференциальное и интегральное исчисление, ряды, обыкновенные дифференциальные уравнения, а также элементы теории вероятностей и математической статистики. Каждый раздел включает разбор практических задач и задачи для самостоятельного решения.

Для студентов образовательных учреждений среднего профессионального образования.

УДК 51(075.32)
ББК 22.1я723

ISBN 978-5-4468-2267-6

Предисловие

В настоящее время математика служит фундаментом ряда экономических дисциплин. Овладение ее методами и умение применять их на практике необходимы каждому экономисту, поэтому цель предлагаемого учебника — изложение основ современной математики и их приложений в экономических областях.

Материал книги разбит на семь глав: дифференциальное и интегральное исчисление, ряды, дифференциальное исчисление функций нескольких переменных, обыкновенные дифференциальные уравнения, основы дискретной математики, численные методы алгебры, основы теории вероятностей и математической статистики.

В учебнике дано большое количество примеров с решениями, в том числе прикладного характера, а также задачи для самостоятельного решения. Большинство фундаментальных теорем приведено с доказательствами, в конце которых стоит специальный знак ■, заменяющий слова «что и требовалось доказать».

Учебник соответствует требованиям Федерального государственного образовательного стандарта для студентов образовательных учреждений среднего профессионального образования. Может быть рекомендован учителям и школьникам старших классов средних школ, а также служить для целей самообразования.

В учебнике приняты следующие условные обозначения:

$\boxed{\text{О}}$ — определение;

$\boxed{\text{Т}}$ — теорема;

$\boxed{\text{Л}}$ — лемма;

$\boxed{\text{С}}$ — следствие.

Глава 1

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

1.1. ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

1.1.1. Общие понятия

При изучении закономерностей, встречающихся в природе, все время приходится иметь дело с величинами *постоянными* и величинами *переменными*.

$\boxed{\text{О}}$ ***Постоянной*** называется величина, сохраняющая одно и то же числовое значение (или вообще, или в данном примере).

Примеры. 1. Сумма углов в треугольнике есть величина постоянная ($\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$).

2. Отношение длины окружности к ее диаметру $\left(\dfrac{2\pi R}{2R} = \pi\right)$ есть величина постоянная.

Среди постоянных величин полезно различать *абсолютно постоянные* и *параметры*.

Первые в любых условиях и при всяких заданиях сохраняют одно и то же определенное числовое значение, например 2, -3, $\sqrt{7}$, π, 2π, ...

Параметры лишь условно постоянны (т. е. в пределах одного примера их рассматривают как величины не меняющиеся, но в пределах другого примера они могут иметь совсем другие значения, хотя точно так же не меняющиеся). Например, числа k и b в данном уравнении прямой $y = kx + b$ постоянны.

$\boxed{\text{О}}$ ***Переменной*** называется величина, принимающая различные числовые значения.

Примеры. 1. При бросании вверх камня его расстояние до поверхности Земли есть величина переменная.

2. Скорость автомобиля при движении по городским улицам есть величина переменная.

Совокупность числовых значений, принимаемых переменной величиной, называется *областью ее значений*. Геометрически она изображается в виде некоторого множества точек числовой прямой.

1.1.2. Функция одной переменной

Пусть даны два множества произвольной природы X и Y, состоящие из произвольных элементов x и y.

[O] Если каждому элементу x множества X по некоторому правилу f поставлен в соответствие элемент y множества Y, то говорят, что на множестве X ***определена функция*** со значениями в множестве Y, и пишут: $y = f(x)$.

Таким образом, для того чтобы задать функцию, необходимы три компонента: два множества и правило их соответствия.

Переменная x называется *независимой переменной*, или *аргументом*, а переменная y — *зависимой переменной*, или *функцией*.

Множество X называется *областью определения функции*, а множество Y — *областью значений функции*. В дальнейшем область определения функции будем обозначать $D(f)$, а множество ее значений — $E(f)$.

Если множество X специально не оговорено, то под областью определения функции понимается *область допустимых значений* аргумента x, т. е. множество таких значений x, при которых функция $y = f(x)$ вообще имеет смысл.

Примеры. 1. $y = \sin x$: $D(f) = (-\infty; +\infty)$; $E(f) = [-1; 1]$.

2. $y = \dfrac{x-8}{x^2-7x+12} = \dfrac{x-8}{(x-3)(x-4)}$:

$D(f) = (-\infty; 3) \cup (3; 4) \cup (4; +\infty)$, так как $x \neq 3$ и $x \neq 4$.

3. $y = \lg(4 - x^2)$:

$D(f) = (-2; 2)$, так как $4 - x^2 > 0 \Rightarrow (2 - x)(2 + x) > 0 \Rightarrow -2 < x < 2$.

Замечание. Для обозначения функции не обязательно использовать буквы y и x. Например, каждому значению радиуса шара R соответствует одно значение объема шара: $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

Следовательно, объем шара является функцией радиуса шара. Областью определения этой функции является множество $D(V) = [0; +\infty)$, так как радиус шара не может быть отрицательным. Множество значений $E(V) = [0; +\infty)$, так как объем шара не может быть отрицательным.

[0] ***Частным значением*** функции $y = f(x)$ при $x = x_0$, $x_0 \in X$, называется то значение y, которое соответствует данному значению x_0. Оно обозначается через $f(x_0)$.

Примеры. 1. Вычислить частное значение функции $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ при $R = 3$.

Решение. Имеем: $V(3) = \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 = 36\pi.$

2. Дана функция $y = 2\sqrt{4-x} + \frac{3}{\sqrt{x+2}}$. Найти ее область определения и частные значения при $x = 0$; $x = 2$.

Решение. 1) Данная функция определена для всех значений x, при которых оба слагаемых имеют действительные значения. Поэтому ее областью определения является пересечение двух множеств, представляющих области определения каждого слагаемого, т.е.

$$D(f) = \begin{cases} 4 - x \ge 0 \\ x + 2 > 0 \end{cases} = (-2; 4].$$

2) Частными значениями данной функции являются числа:

$$f(0) = 2\sqrt{4-0} + \frac{3}{\sqrt{0+2}} = 2 \cdot 2 + \frac{3}{\sqrt{2}} = 4 + \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

и

$$f(2) = 2\sqrt{4-2} + \frac{3}{\sqrt{2+2}} = 2\sqrt{2} + \frac{3}{2} = 2\sqrt{2} + 1{,}5.$$

1.1.3. Способы задания функции

Функцию можно задать аналитическим, табличным, графическим и словесным способами. Рассмотрим подробнее способы задания функции.

Аналитический. В этом способе функциональная зависимость между переменными x, y выражается в виде формулы, которая указывает совокупность тех математических операций, которые должны быть выполнены, чтобы по заданному значению аргумента найти соответствующее значение функции. При аналитическом задании функции обычно не указывается область ее определения.

Примеры. **1.** $y = x^4$. **2.** $S = vt$. **3.** $y = \begin{cases} 0, & x \le 1; \\ \frac{1}{2}, & 1 < x \le 3; \\ 1, & x > 3. \end{cases}$

Функцию не следует отождествлять с формулой, с помощью которой она задана. Например, функции $y = x^2$, $x \in (-\infty; +\infty)$ и $y = x^2$, $x \in [1; 3]$, выраженные одной и той же формулой $y = x^2$, различны, так как имеют разные области определения.

Наоборот, одна и та же функция может быть задана разными формулами на различных участках ее области определения.

Например,

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{при } x \le 0; \\ x + 2 & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Здесь две формулы задают одну функцию, определенную на всей числовой прямой. При $x \le 0$ значения этой функции определяются по первой формуле, а при $x > 0$ — по второй. График этой функции представлен в плоскости xOy (рис. 1.1).

Табличный. Аналитический способ задания удобен тем, что значения функции можно вычислить при любых взятых из области определения значениях аргумента. Этот способ является основным в математическом анализе. Однако для расчетов он часто оказывается неудобным, так как сопряжен с необходимостью выполнения в каждом отдельном случае многочисленных, часто трудоемких, вычислений. Поэтому на практике определяются значения функций для большого числа выбранных значений аргумента x и составляются таблицы этих значений (например, тригонометрические, логарифмические таблицы и др.). Когда же опытным путем описывается функциональная зависимость между переменными, то составляются таблицы величин — аргумента и функции, причем в этом случае значения функции являются приближенными.

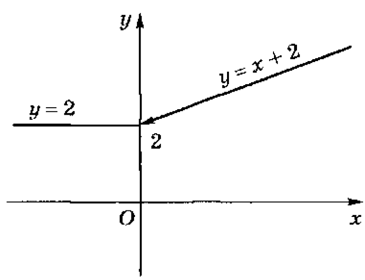


Рис. 1.1

Пример. Рассмотрим взаимосвязь между ценой некоторого продукта p и величиной спроса на этот продукт q, которая может быть представлена в виде таблицы:

p (руб.)	100	120	140	160	180	...
q (тыс. шт.)	20	18	16	14	12	...

Как видно из таблицы, спрос убывает с возрастанием цены.

Графический. Если функция задана в виде формулы $y = f(x)$, то ее графиком является множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют соотношению $y = f(x)$.

Примеры. 1. Графиком функции $y = \sqrt{1 - x^2}$ является полуокружность (рис. 1.2).

2. Графиком функции $y = \dfrac{1}{x}$ $(x > 0)$ является правая ветвь гиперболы (рис. 1.3).

3. Однако графически можно представить не только аналитические функции. Изобразим с помощью графика табличную взаимосвязь рассмотренного выше примера между ценой некоторого продукта p и величиной спроса на этот продукт q (рис. 1.4).

В данном примере все значения находятся на прямой линии $p = 300 - 10q$.

4. Примером графической зависимости может служить также электрокардиограмма (ЭКГ), широко используемая в медицине.

Словесный. В этом способе функция описывается правилом ее составления, например функция Дирихле: $f(x) = 1$, если x — рационально и $f(x) = 0$, если x — иррационально, т.е.

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{если } x \text{ — рационально;} \\ 0, \text{если } x \text{ — иррационально.} \end{cases}$$

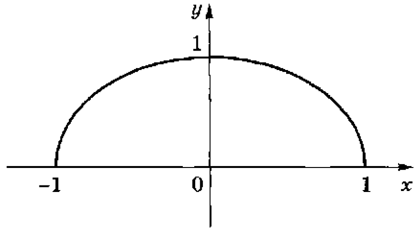


Рис. 1.2

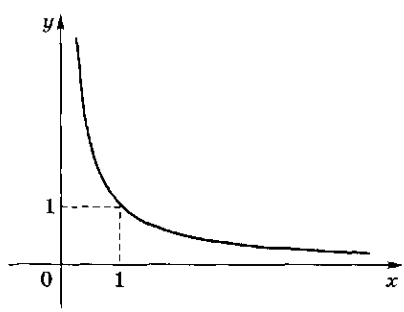


Рис. 1.3

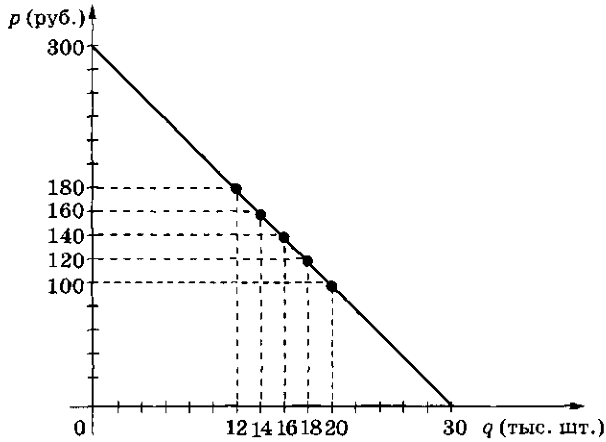


Рис. 1.4

1.1.4. Основные свойства функций

Рассмотрим такие свойства функции как четность и монотонность, ограниченность и периодичность.

Четность и нечетность. Функция $y = f(x)$ называется *четной*, если для любых значений x из области определения $f(-x) = f(x)$, и *нечетной*, если $f(-x) = -f(x)$. В противном случае функция $y = f(x)$ называется *функцией общего вида*.

Примеры. 1. Функция $y = x^4$ является четной, так как

$$f(-x) = (-x)^4 = x^4 = f(x).$$

2. Функция $y = x^3$ — нечетная, так как

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x).$$

3. Функция $y = x^2 + x^3$ — является функцией общего вида, так как

$$f(-x) = (-x)^2 + (-x)^3 = x^2 - x^3;\ f(x) \neq f(-x);\ f(x) \neq -f(x).$$

4. Установить четность или нечетность функций:

1) $f(x) = x^2\sqrt[3]{x} - 3\sin x$; 2) $f(x) = 3^x + 3^{-x}$; 3) $f(x) = 2|x| + 3e^{x^2}$;

4) $f(x) = 3x^2 - 2x$; 5) $f(x) = \ln\dfrac{x-2}{x+2}$.

Решение. 1) Заменив x на $(-x)$, получим

$$f(-x) = (-x)^2\sqrt[3]{-x} - 3\sin(-x) = -x^2\sqrt[3]{x} + 3\sin x = -(x^2\sqrt[3]{x} - 3\sin x) = -f(x),$$

т. е. $f(-x) = -f(x)$, следовательно, функция является нечетной.

2) $f(-x) = 3^{-x} + 3^{-(-x)} = 3^{-x} + 3^{x} = f(x)$, т. е. $f(-x) = f(x)$, следовательно, функция является четной.

3) $f(-x) = 2|-x| + 3e^{(-x)^2} = 2|x| + 3e^{x^2} = f(x)$, т. е. функция является четной.

4) $f(-x) = 3(-x)^2 - 2(-x) = 3x^2 + 2x$, т. е. $f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$, следовательно, данная функция не является ни четной, ни нечетной, т. е. является функцией общего вида.

5) $f(-x) = \ln\dfrac{-x-2}{-x+2} = \ln\dfrac{x+2}{x-2} = \ln\left(\dfrac{x-2}{x+2}\right)^{-1} = -\ln\dfrac{x-2}{x+2} = -f(x)$, т. е. функция является нечетной.

График четной функции симметричен относительно оси ординат, например $y = x^2$ (рис. 1.5). График нечетной функции симметричен относительно начала координат, например $y = x^3$ (рис. 1.6).

Монотонность. Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* (*убывающей*) на некотором промежутке X из области определения, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее (меньшее) значение функции.

Из определения следует, что если $x_1, x_2 \in X$ и $x_2 > x_1$, то функция возрастает на некотором промежутке X из области определения, если $f(x_2) > f(x_1)$, и убывает на этом промежутке, если $f(x_2) < f(x_1)$. Функции возрастающие и убывающие называются монотонными функциями.

Пример. Функция $y = x^2$ убывает на промежутке $X = (-\infty; 0]$ и возрастает на промежутке $X = [0; +\infty)$.

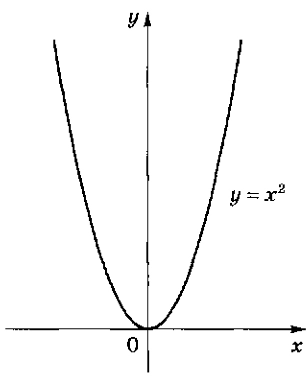


Рис. 1.5

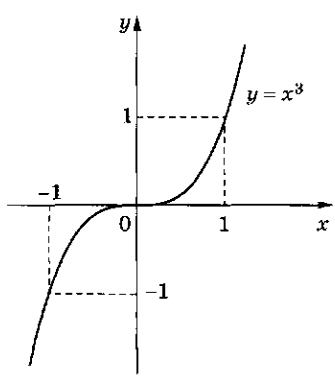


Рис. 1.6

Ограниченность. Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной* на некотором промежутке X из области определения, если существует число $M > 0$ такое, что $|f(x)| \le M$ для любого $x \in X$.

Пример. Функции $y = \cos x$ и $y = \sin x$ являются ограниченными на всей числовой прямой, так как $|\cos x| \le 1$ и $|\sin x| \le 1$ для любого $x \in \mathbf{R}$.

Периодичность. Функция $y = f(x)$ называется *периодической* с периодом $T > 0$, если для любых значений x из области определения функции $f(x + T) = f(x - T) = f(x)$.

Основным периодом функции называется наименьшее положительное число T, обладающее указанным свойством.

Например, функции $y = \cos x$ и $y = \sin x$ имеют период $T = 2\pi$, так как для любых значений x: $\sin(x \pm 2\pi) = \sin x$, $\cos(x \pm 2\pi) = \cos x$.

Пример. Найти основные периоды функций:

1) $f(x) = \cos 6x$; 2) $f(x) = \sin 4x + \operatorname{tg} 3x$.

Решение. 1) Так как основной период функции $\cos x$ равен 2π, то основной период функции $f(x) = \cos 6x$ равен $T = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$.

2) Для функции $\sin 4x$ основной период равен $T_1 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, а для функции $\operatorname{tg} 3x$ основной период равен $T_2 = \frac{\pi}{3}$.

Тогда основным периодом данной функции $f(x) = \sin 4x + \operatorname{tg} 3x$ является наименьшее общее кратное чисел $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{3}$, т.е. $T = \pi$.

1.1.5. Классификация функций

$\boxed{\text{О}}$ ***Целой рациональной функцией*** (многочленом) называют такую функцию, над значениями аргумента x которой и некоторыми постоянными числами выполняются операции: сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в целую положительную степень (и притом конечное число раз).

Общий вид целой рациональной функции (многочлена n-й степени):

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$

где n — целое положительное или равное нулю число; a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n — коэффициенты (постоянные числа).

Частные случаи: *прямая пропорциональная зависимость* $y = kx$; *линейная зависимость* $y = kx + b$; *квадратичная зависимость* $y = ax^2 + bx + c$.

$\boxed{\text{О}}$ ***Дробной рациональной функцией*** называют функцию $R_n(x)$, представимую в виде частного от деления двух целых рациональных функций:

$$R_n(x)=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_m},$$

где $n\in\mathbf{Z}$, $m\in\mathbf{Z}$; $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_{m-1}, b_m$ — коэффициенты (постоянные числа).

Частные случаи: *обратная пропорциональная зависимость* $y=\dfrac{k}{x}$; *дробно-линейная функция* $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$.

Совокупность целых рациональных и дробных рациональных функций образует класс ***рациональных функций.***

Примеры. 1. Функция $y=3x^3-2x^2+2x-3$ является целой рациональной функцией или многочленом 3-й степени относительно x.

2. Функция $y=\dfrac{3x^3-2x^2+2x-3}{5x^2+2x-3}$ является дробной рациональной функцией.

$\boxed{\text{О}}$ ***Иррациональной функцией*** называют такую функцию, над аргументом x которой, кроме перечисленных ранее первых пяти алгебраических операций, производится еще операция извлечения корня конечное число раз и результат не является рациональной функцией.

Пример. Функция $y=\sqrt{\dfrac{2x^2-3x+2}{3x^2+2x-3}}+\left(\sqrt[3]{x}-1\right)^2$ является иррациональной функцией.

Совокупность рациональных и иррациональных функций образуют класс ***алгебраических функций.***

Трансцендентная функция — всякая неалгебраическая функция.

Примеры. 1. Показательная функция $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$, $y=e^x$ (экспонента).

2. Логарифмические функции: $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq1)$, $y=\ln x$ (натуральный логарифм), $y=\lg x$ (десятичный логарифм).

3. Тригонометрические функции: $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$.

4. Обратные тригонометрические функции: $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\operatorname{arctg} x$, $y=\operatorname{arcctg} x$.

1.1.6. Понятие сложной функции

Пусть $u = \varphi(x)$ — некоторая функция от переменной x. Рассмотрим другую функцию $y = f(u)$ такую, что ее область определения совпадает или хотя бы имеет общую часть с множеством значений функции $u = \varphi(x)$. Тогда получим функцию $y = f(u) = f(\varphi(x))$ как функцию от x, т.е. задание x определяет функцию $u = \varphi(x)$, а задание u, если оно попадает в множество значений функции $u = \varphi(x)$, определит функцию y. Таким образом, в конечном счете заданием x определяется значение y, т.е. y становится функцией от x. Полученная таким образом функция $y = f(u) = f(\varphi(x))$ называется ***сложной функцией*** от x (заданной через промежуточную функцию u).

Пример. Функция $y = \sin^2 x$ является сложной функцией. Ее можно представить так: $y = u^2$, где $u = \sin x$.

1.1.7. Обратная функция

Рассмотрим монотонную функцию $y = f(x)$, определенную на отрезке $[a; b]$, и пусть отрезок $[c; d]$ является множеством ее значений.

Функция $y = f(x)$ ставит в соответствие каждой точке $x_0 \in [a; b]$ единственную точку $y_0 \in [c; d]$ (рис. 1.7).

Можно установить и обратную закономерность: каждому значению y_0 из отрезка $[c; d]$ соответствует единственное значение $x_0 \in [a; b]$ (в силу монотонности функции) такое, что $y_0 = f(x_0)$.

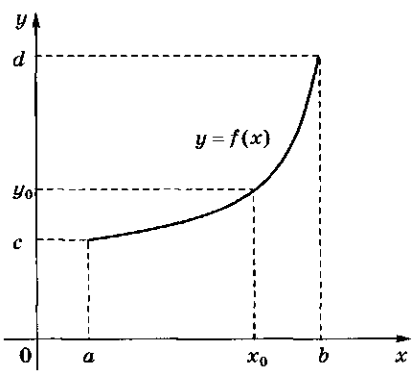


Рис. 1.7

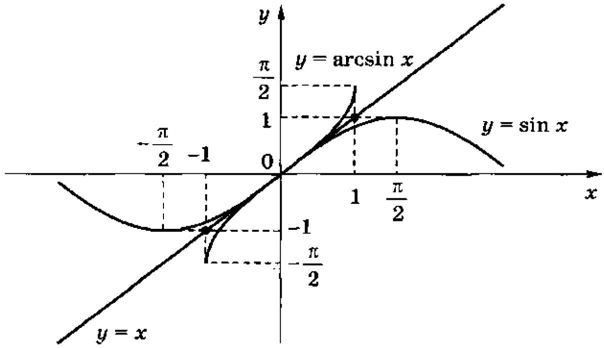


Рис. 1.8

Таким образом можно рассматривать x как функцию от y с областью определения $[c;\ d\,]$ и множеством значений $[a;\ b]$. Функция $x = f^{-1}(y)$ называется ***обратной функцией*** по отношению к функции $y = f\,(x)$. Если же в уравнении $x = f^{-1}(y)$ заменить x на y, то функция $y = f^{-1}(x)$ будет ***взаимно-обратной*** к функции $y = f\,(x)$.

Графики прямой и взаимно-обратной функций симметричны относительно биссектрисы $y = x$ первого и третьего координатных углов.

Пример. Найти взаимно-обратную функцию к функции $y = \sin x$ с $D(f) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и $E(f) = [-1;\ 1]$.

Решение. Из уравнения $y = \sin x$ выразим x через y. Получим $x = \arcsin y$. Заменяя в этом соотношении x на y и y на x будем иметь: $y = \arcsin x$ $D(f) = [-1;\ 1]$ и $E(f) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Итак, функции $y = \sin x$ $\left(D(f) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]\right.$ и $\left.E(f) = [-1; 1]\right)$ и $y = \arcsin x$ $\left(D(f) = [-1; 1] \text{ и } E(f) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]\right)$ являются взаимно-обратными. Их графики симметричны относительно биссектрисы $y = x$ первого и третьего координатных углов (рис. 1.8).

1.1.8. Явные и неявные функции

$\boxed{\text{О}}$ Функция называется ***явной***, если она задана формулой, правая часть которой не содержит y.

Пример. $y = \sin x$.

$\boxed{О}$ Функция называется ***неявной***, если она задана уравнением $F(x;\ y) = 0$, из которого либо невозможно выразить y, либо в этом нет необходимости.

Примеры. $\sqrt{x^2 - y^2} + \lg y = 3$; $x^2 + y^2 = 1$.

1.1.9. Однозначные и многозначные функции

$\boxed{О}$ Если каждому значению аргумента соответствует одно значение функции, то она называется ***однозначной***.

Пример. $y = 3x^2$.

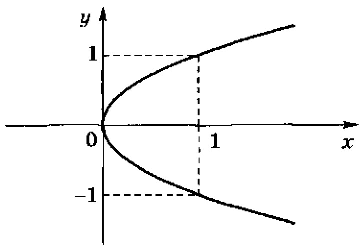


Рис. 1.9

Если каждому значению аргумента соответствует несколько значений функции, то она называется ***многозначной***.

Пример. $y = \pm\sqrt{x}$ (рис. 1.9).

1.1.10. Элементарные функции и их графики

Основными элементарными функциями являются:

1) степенная функция $y = x^n$, где $n \in \mathbf{R}$;

2) показательная функция $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$), $y = \mathrm{e}^x$ (экспонента);

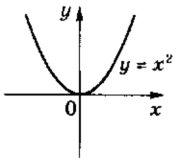
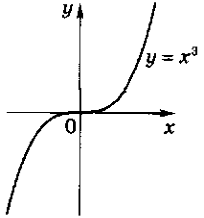
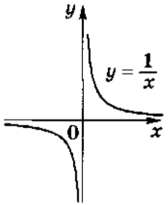
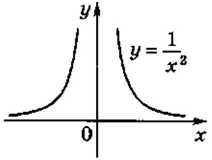
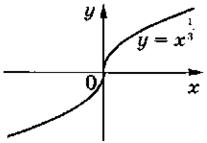
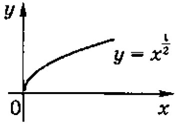
3) логарифмические функции: $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$), $y = \ln x$, $y = \lg x$;

4) тригонометрические функции: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \mathrm{tg}\, x$, $y = \mathrm{ctg}\, x$;

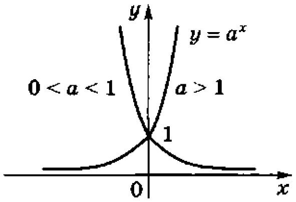
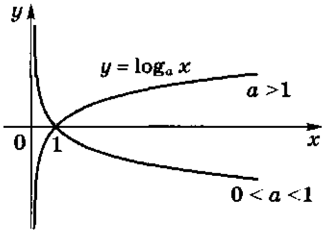
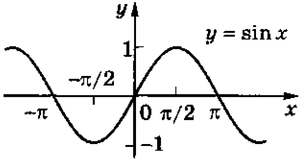
5) обратные тригонометрические (круговые) функции: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \mathrm{arctg}\, x$, $y = \mathrm{arcctg}\, x$.

$\boxed{О}$ ***Элементарными функциями*** называют функции, которые получаются из основных элементарных функций с помощью четырех арифметических действий и суперпозиций (формирование сложных функций), примененных конечное число раз.

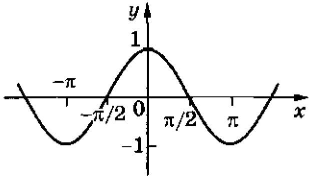
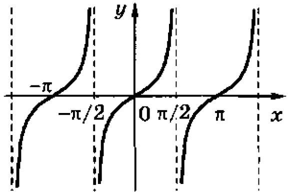
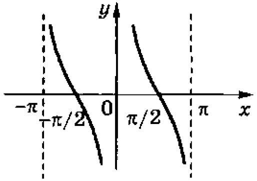
Таблица 1.1

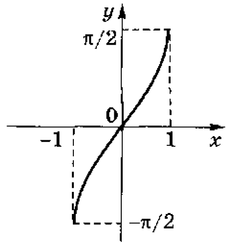
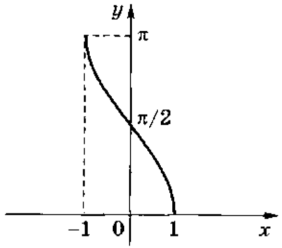
№ п/п	Обозначение функции	Область определения	Множество значений	Четность, нечетность	Монотонность	Периодичность	График функции
							1. Степенная функция (частные случаи)
1	$y = x^n$, $n \in \mathbf{N}$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$, если n — нечетно; $[0, +\infty)$, если n — четно	Нечетная, если n — нечетно. Четная, если n — четно	Возрастает на $(-\infty, +\infty)$, если n — нечетно. Убывает на $(-\infty, 0)$ и возрастает на $(0, +\infty)$, если n — четно	Непериодическая	 
2	$y = x^{-n}$, $n \in \mathbf{N}$	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, если n — нечетно, $(0, +\infty)$, если n — четно	Нечетная, если n — нечетно. Четная, если n — четно	Убывает на $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, если n — нечетно. Возрастает на $(-\infty, 0)$ и убывает на $(0, +\infty)$, если n — четно	Непериодическая	 
3	$y = x^{1/n}$, $n \in \mathbf{N}$	$(-\infty, +\infty)$, если n — нечетно; $[0, +\infty)$, если n — четно	$(-\infty, +\infty)$, если n — нечетно; $[0, +\infty)$, если n — четно	Нечетная, если n — нечетно	Возрастает на $(-\infty, +\infty)$, если n — нечетно. Возрастает на $(0, +\infty)$, если n — четно	Непериодическая	 

97538

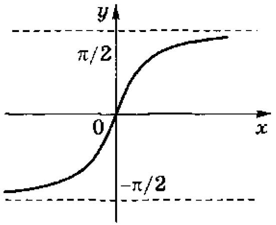
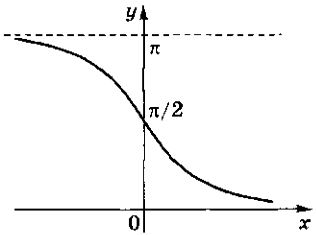
2. Показательная функция							
4	$y = a^x$ $(a > 0,$ $a \neq 1)$	$(-\infty, +\infty)$	$(0, +\infty)$	Общего вида	Возрастает, если $a > 1$. Убывает, если $0 < a < 1$	Непериодическая	
3. Логарифмическая функция							
5	$y = \log_a x$ $(a > 0,$ $a \neq 1)$	$(0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	Общего вида	Возрастает на $(0, +\infty)$, если $a > 1$. Убывает на $(0, +\infty)$, если $0 < a < 1$	Непериодическая	
4. Тригонометрические функции							
6	$y = \sin x$	$(-\infty, +\infty)$	$[-1, 1]$	Нечетная	Возрастает на $[-\pi/2 + 2\pi n, \pi/2 + 2\pi n]$. Убывает на $[\pi/2 + 2\pi n, 3\pi/2 + 2\pi n]$, $n \in \mathbf{Z}$	Период $T = 2\pi$	

Продолжение табл. 1.1

№ п/п	Обозначение функции	Область определения	Множество значений	Четность, нечетность	Монотонность	Периодичность	График функции
7	$y = \cos x$	$(-\infty, +\infty)$	$[-1, 1]$	Четная	**Возрастает на** $[-\pi + 2\pi n, 2\pi n]$. **Убывает на** $[2\pi n, \pi + 2\pi n]$, $n \in \mathbf{Z}$	**Период** $T = 2\pi$	
8	$y = \operatorname{tg} x$	$(-\pi/2 + \pi n,$ $\pi/2 + \pi n)$, $n \in \mathbf{Z}$	$(-\infty, +\infty)$	Нечетная	**Возрастает на** $(-\pi/2 + \pi n,$ $\pi/2 + \pi n)$, $n \in \mathbf{Z}$	**Период** $T = \pi$	
9	$y = \operatorname{ctg} x$	$(\pi n,$ $\pi + \pi n)$, $n \in \mathbf{Z}$	$(-\infty, +\infty)$	Нечетная	**Убывает на** $(\pi n, \pi + \pi n)$, $n \in \mathbf{Z}$	**Период** $T = \pi$	

5. Обратные тригонометрические функции							
10	$y = \arcsin x$	$[-1; 1]$	$[-\pi/2, \pi/2]$	Нечетная	Возрастает на $[-1; 1]$	Непериодическая	
11	$y = \arccos x$	$[-1; 1]$	$[0; \pi]$	Общего вида	Убывает на $[-1; 1]$	Непериодическая	

Окончание табл. 1.1

№ п/п	Обозначение функции	Область определения	Множество значений	Четность, нечетность	Монотонность	Периодичность	График функции
12	$y = \operatorname{arctg} x$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\pi/2; \pi/2)$	Нечетная	Возрастает на $(-\infty, +\infty)$	Непериодическая	
13	$y = \operatorname{arcctg} x$	$(-\infty, +\infty)$	$(0; \pi)$	Общего вида	Убывает на $(-\infty, +\infty)$	Непериодическая	

Примеры.

1. $y = |x| = \begin{cases} x, \text{ при } x \geq 0; \\ -x \text{ при } x < 0. \end{cases}$ — неэлементарная функция.

2. $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}\cos^2 2x}{\sqrt{x} - 3^{2x^2}} + \sqrt{\ln^2 x + 2}$ — элементарная функция.

Здесь число операций сложения, вычитания, умножения, деления и образования сложной функции ($\cos^2 2x$, 3^{2x^2}, $\ln^2 x$, $\sqrt{\ln^2 x + 2}$) конечно.

Графики, а также некоторые свойства основных элементарных функций приведены в табл. 1.1.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите область определения функций:

1) $f(x) = \dfrac{1-x}{3x-6}$; 2) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^3+8}$; 3) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$;

4) $f(x) = \dfrac{2x-1}{4-x^2}$; 5) $f(x) = \sqrt[3]{x-2}$; 6) $f(x) = \sqrt[4]{x^2-9}$;

7) $f(x) = \ln(1 - 4x^2)$; 8) $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x-1}$;

9) $f(x) = \lg(3x-2) - \sqrt{2-x}$; 10) $f(x) = \dfrac{1}{\log_2(1-x)} - 3\sqrt{4-x^2}$;

11) $f(x) = \arccos\left(\dfrac{x}{2} - 1\right)$; 12) $f(x) = \arcsin(x^2 + 2x)$;

13) $f(x) = \sqrt{1-2x} + 3\arcsin\dfrac{3x-1}{2}$; 14) $f(x) = \lg\sin x + \sqrt{4-x^2}$.

2. Установите четность или нечетность функций:

15) $f(x) = |x| + 1$; 16) $f(x) = \ln\cos x$;

17) $f(x) = \sqrt{9-x^2}$; 18) $f(x) = -x^2 + 8x - 13$;

19) $f(x) = x^5 + x^3 - 3x$; 20) $f(x) = 1 - 3\cos x$;

21) $f(x) = 2^{-x^2}$; 22) $f(x) = x^2\sin 5x$;

23) $f(x) = \ln\dfrac{1-x}{1+x}$; 24) $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-4}$;

25) $f(x) = \dfrac{16^x - 1}{4^x}$.

3. Найдите взаимно-обратные функции для данных функций:

26) $y = 4\sqrt[3]{x} - 1$; 27) $y = \sqrt[3]{1 - x^3}$; 28) $y = \sin\frac{x}{2}$;

29) $y = 2x + 3$; 30) $y = \frac{2x - 1}{x + 2}$; 31) $y = \frac{5x + 3}{2x - 5}$.

4. Постройте графики следующих функций:

32) $y = x^2 + 2x - 3$; 33) $y = 2(x + 2)^3 + 1$;

34) $y = 2 + \sqrt{x - 3}$; 35) $y = \frac{1}{x - 2}$;

36) $y = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^x$; 37) $y = \frac{x + 1}{x - 2}$;

38) $y = \lg(x + 2)$; 39) $y = 2\cos(x - \pi/4)$;

40) $y = \begin{cases} -x^2 \text{ при } x < 0; \\ 3x \text{ при } x \geq 0; \end{cases}$ 41) $y = \begin{cases} 4 - x \text{ при } x < -1; \\ 5 \text{ при } -1 \leq x \leq 0; \\ x^2 + 5 \text{ при } x > 0. \end{cases}$

1.2. ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ В ЭКОНОМИКЕ

1.2.1. Функции спроса

При изучении экономических процессов постоянно используются функции спроса, предложения, издержек, полезности; функции, связанные с банковскими операциями; производственные функции и др.

Рассмотрим некоторые из них.

$\boxed{\text{О}}$ Если каждому значению цены p за единицу товара поставлено в соответствие число q — количество товара, которое потребители готовы купить по данной цене за определенный промежуток времени, то говорят, что задана ***функция спроса***, и пишут $q = f(p)$.

Эта функция определена для тех значений $p \geq 0$, для которых $f(p) \geq 0$ и множество ее значений $q \geq 0$.

График функции спроса называют *кривой спроса* (рис. 1.10).

В экономике сформулирован *закон спроса*, который гласит: чем выше цена единицы товара, тем меньше величина спроса,

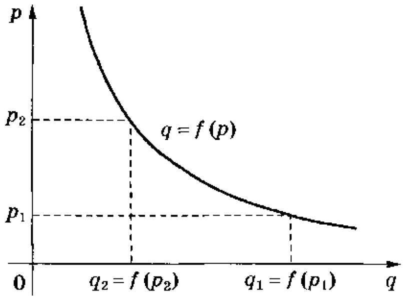


Рис. 1.10

и наоборот, чем ниже цена единицы товара, тем больше величина спроса.

Таким образом, для двух произвольных значений p_1 и p_2, принадлежащих области определения функции спроса $q = f(p)$, и таких, что $p_1 < p_2$, следует, что $q_1 > q_2$, т. е. функция спроса является убывающей функцией цены p.

Обратим внимание на необычное расположение осей координат: аргумент p расположен на вертикальной оси — оси ординат, а значение функции $q = f(p)$ — на горизонтальной — оси абсцисс. Это принятая в экономике система обозначений.

Примеры. 1. Функция спроса на некоторый товар имеет вид:

$$q = 60 - \sqrt{400 + p},$$

где q — количество товара (тыс. шт.); p — цена единицы товара (руб.). Требуется найти:

1) область определения и множество значений этой функции;

2) функцию цены в виде $p = f^{-1}(q)$;

3) объем спроса при ценах на товар: $p_1 = 500$; $p_2 = 1\,200$;

4) цену за единицу товара, если $q_1 = 20$; $q_2 = 30$, и выручку продавцов в каждом из этих случаев, а также построить график функции спроса $q = 60 - \sqrt{400 + p}$.

Решение. 1) Имеем систему неравенств:

$$\begin{cases} p \ge 0 \\ 400 + p \ge 0 \\ 60 - \sqrt{400 + p} \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p \ge 0 \\ p \ge -400 \\ \sqrt{400 + p} \le 60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p \ge 0 \\ p \ge -400 \\ 400 + p \le 3\,600 \end{cases} \Rightarrow 0 \le p \le 3\,200.$$

Итак, $D(f) = [0;\ 3\,200]$.

Выразим значение p через q:

$$\sqrt{400 + p} = 60 - q \Rightarrow 400 + p = (60 - q)^2 \Rightarrow 400 + p = 3\,600 - 120q + q^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p = q^2 - 120q + 3\,200.$$

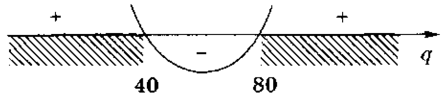


Рис. 1.11

Так как $p \ge 0$, то $q^2 - 120q + 3\,200 \ge 0$.

$$\left(\frac{D}{4} = 3\,600 - 3\,200 = 400;\ \sqrt{\frac{D}{4}} = 20;\ q_1 = 60 - 20 = 40;\ q_2 = 60 + 20 = 80\right)$$

$$q \in (-\infty;\ 40] \cup [80;\ +\infty),\ \text{рис. 1.11.}$$

С учетом того, что $q \ge 0$, получим: $q \in [0;\ 40] \cup [80;\ +\infty)$.

Из закона спроса следует, что с увеличением цены p от нуля до 3 200 руб. спрос должен падать.

В нашем случае функция q убывает в промежутке $q \in [0;\ 40]$, следовательно, множество значений функции $E(f) = [0;\ 40]$.

2) Функция цены имеет вид: $p = q^2 - 120q + 3\,200$.

3) $p_1 = 500 \Rightarrow q_1 = 60 - \sqrt{400 + 500} = 60 - 30 = 30$ (тыс. шт.);

$p_2 = 1200 \Rightarrow q_2 = 60 - \sqrt{400 + 1200} = 60 - 40 = 20$ (тыс. шт.).

4) $q_1 = 20 \Rightarrow p_1 = 400 - 120 \cdot 20 + 3\,200 = 1\,200$ (руб.);

$q_2 = 30 \Rightarrow p_1 = 900 - 120 \cdot 30 + 3\,200 = 500$ (руб.).

Выручка от продажи составляет $u = pq$, следовательно,

$u_1 = p_1 q_1 = 1\,200 \cdot 20 = 24\,000$ (руб.);

$u_2 = p_2 q_2 = 500 \cdot 30 = 15\,000$ (руб.).

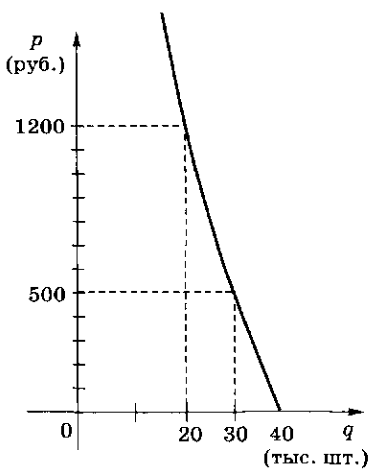


Рис. 1.12

График функции $q = 60 - \sqrt{400 + p}$ имеет вид, представленный на рис. 1.12.

Дополнительная точка: $q = 40 \Rightarrow p = 1\,600 - 120 \cdot 40 + 3\,200 = 0$.

2. В качестве ***теоретического примера*** рассмотрим функции Торнквиста (названные по имени шведского экономиста Л. Торнквиста), моделирующие связь между величиной денежного дохода x (условных единиц) и величиной спроса потребителей y (условных единиц) на различные товары:

1) $y = a\dfrac{x}{x+b}$ — для товаров первой необходимости;

2) $y = a\dfrac{x-c}{x+b}$ — для товаров второй необходимости (относительной роскоши), $(x > c)$;

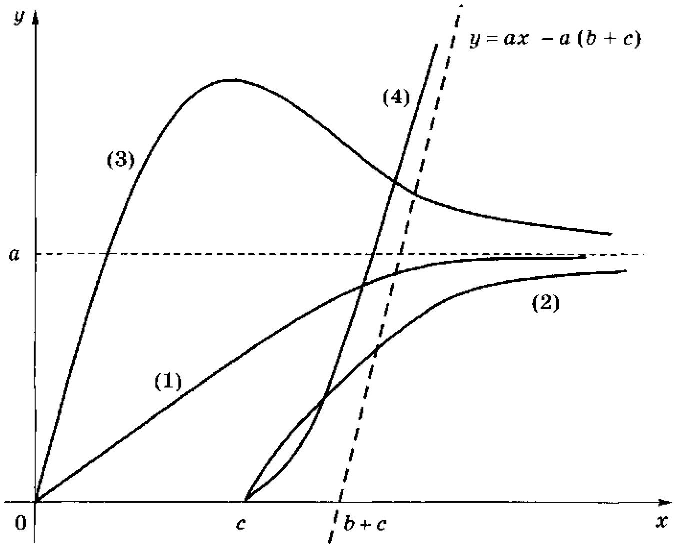


Рис. 1.13

3) $y = a\dfrac{x(x+b)}{x^2+c}$ — для малоценных товаров;

4) $y = a\dfrac{x(x-c)}{x+b}$ — для предметов роскоши ($x > c$)

[a — уровень (точка насыщения) первой, второй и третьей групп товаров; c — уровень дохода, при котором начинается потребление товаров второй необходимости и предметов роскоши; b — постоянная экономическая величина, значение которой определяется по ходу решения конкретной задачи].

Графики данных функций представим пока без подробных объяснений, которые можно давать позднее, после изучения темы «Полное исследование и построение графиков функций» (рис. 1.13).

1.2.2. Функция предложения

$\boxed{\text{О}}$ Если каждому значению цены p за единицу товара поставлено в соответствие число q, выражающее количество товара, которое производители готовы продать за определенный промежуток времени по цене p, то говорят, что задана ***функция предложения***, и пишут $q = \varphi(p)$. Эта функция определена для тех значений $p \geq 0$, для которых $\varphi(p) \geq 0$. Множеством ее значений является $q \geq 0$ (рис. 1.14).

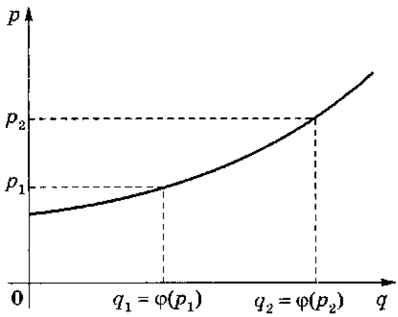


Рис. 1.14

В экономике действует *закон предложения*, который гласит: повышение цены за единицу товара в течение определенного промежутка времени влечет за собой рост объема предложения этого товара и, наоборот, понижение цены за единицу товара в течение определенного промежутка времени приводит к сокращению объема предложения товара.

Из этого закона вытекает, что для любых двух значений p_1 и p_2, принадлежащих области определения функции $\varphi(p)$, и таких, что $p_2 > p_1$, следует, что $(q_2 = \varphi(p_2)) > (q_1 = \varphi(p_1))$, т. е. функция предложения является возрастающей функцией цены p.

Рассматривают также функцию $p = \varphi^{-1}(q)$, которая является обратной к функции $q = \varphi(p)$ и описывает зависимость цены единицы товара от его объема, предложенного к продаже.

Пример. Функция предложения некоторого товара на рынке имеет вид: $q = \frac{1}{4}(p-2)^2 - 1$, где q — количество предлагаемого товара (тыс. шт.); p — цена за единицу товара (руб.). Требуется найти:

1) область определения и множество значений функции q;

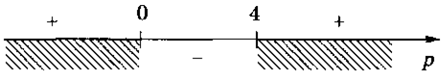
2) объем предложения при цене за единицу товара $p_1 = 12$ руб.; $p_2 = 18$ руб.;

3) зависимость цены за единицу товара от объема спроса, т. е. функцию $p = \varphi^{-1}(q)$, а также построить график функции $q = \frac{1}{4}(p-2)^2 - 1$.

Решение. 1) Областью определения функции q является множество таких действительных значений p, при которых $q \geq 0$, т. е. $\frac{1}{4}(p-2)^2 - 1 \geq 0$, или $(p-2)^2 - 4 \geq 0$, или $(p-2-2)(p-2+2) \geq 0$, или $p(p-4) \geq 0$. Решая данное неравенство методом интервалов, получим (рис. 1.15): $p \in (-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$.

Поскольку значения p не могут быть отрицательными, окончательно принимаем $p \in [4; +\infty)$.

Рис. 1.15



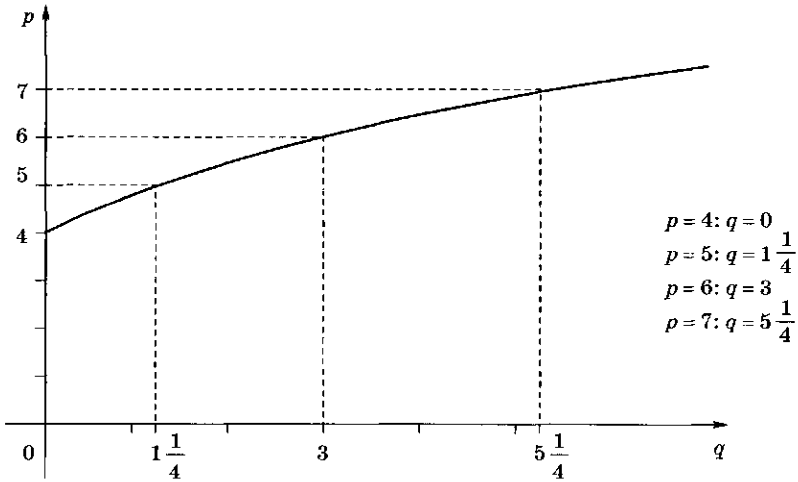


Рис. 1.16

Множество значений функции q при $p \geq 4$ будет $q \in [0; +\infty)$.

2) При $p_1 = 12$: $q_1 = \frac{1}{4}(12 - 2)^2 - 1 = 25 - 1 = 24$ (тыс. шт.);

$p_2 = 18$: $q_2 = \frac{1}{4}(18 - 2)^2 - 1 = 64 - 1 = 63$ (тыс. шт.).

3) Найдем функцию $p = \varphi^{-1}(q)$.

Будем иметь: $\frac{1}{4}(p - 2)^2 = q + 1 \Rightarrow (p - 2)^2 = 4(q + 1) \Rightarrow p - 2 = \pm 2\sqrt{q+1} \Rightarrow$

$\Rightarrow p = 2 - 2\sqrt{q+1}$ или $p = 2 + 2\sqrt{q+1}$.

Так как $p \geq 4$, берем $p = 2 + 2\sqrt{q+1}$.

График функции $q = \frac{1}{4}(p - 2)^2 - 1$ имеет вид, представленный на рис. 1.16.

1.2.3. Рыночное равновесие

На рынке происходит встреча продавцов и производителей товара с его покупателями и потребителями. При этом продавцы желают продать больше товара по более высокой цене и тем самым максимизировать свою прибыль, а покупатели хотят приобрести нужное им количество товара по возможно более низкой цене и тем самым минимизировать свои расходы.

О Цена p_0, при которой величина спроса равняется величине предложения, в экономике называется ***равновесной ценой***, а количество товара q_0, приобретаемого по этой цене, ***равновесным количеством товара***.

Для нахождения рыночного равновесия достаточно решить систему уравнений $\begin{cases} q = f(p) \\ q = \varphi(p) \end{cases}$, где $q = f(p)$ — функция спроса на некоторый товар; $q = \varphi(p)$ — функция предложения этого же товара на рынке. Относительно найденного значения p_0 можно выделить два случая.

Случай 1. Если цена товара на рынке будет превышать равновесную цену p_0, то можно ожидать ее снижение в ближайшее время, так как появятся излишки предлагаемого товара.

Случай 2. Если цена на рынке окажется меньше равновесной (например, если государство в приказном порядке установит цену меньше p_0), то следует ожидать, что в ближайшее время она повысится, в противном случае — дефицит товара, очереди, возникновение «черного рынка» и т. д.

Пример. Функция спроса на рынке некоторого товара имеет вид: $q = \dfrac{200}{p}$, а функция предложения $q = p - 10$, где q — объем спроса (предложения) (тыс. шт.); p — цена единицы товара (руб.). Требуется найти:

1) диапазон изменения цены на рассматриваемый товар;

2) рыночное равновесие;

3) выручку продавца при продаже товара по равновесной цене;

4) величину излишков товара при $p = 25$ руб. и величину дефицита при $p = 15$ руб.;

5) новую функцию предложения и новое рыночное равновесие после введения государством налога на единицу товара в размере 1 руб. Сравните суммы, полученные продавцом до и после введения налога;

6) новую функцию предложения и новое рыночное равновесие, если за каждую проданную единицу товара производители получают из бюджета дотацию в размере 1 руб. Сравните суммы, получаемые продавцами до и после введения дотации;

7) количество товара (излишки продукта), закупаемого государством, и сумму, в которую ему это обходится, если оно для поддержания производителя решило установить твердую цену в 22 руб. за каждую единицу товара;

8) сделать схематический чертеж.

Решение. 1) По условию $p \ge 0$ и $q \ge 0$. Согласно условию задачи, получим

$$\begin{cases} p \ge 0 \\ \dfrac{200}{p} \ge 0 \\ p-10 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p \ge 0 \\ p > 0 \\ p \ge 10 \end{cases} \Rightarrow p \in [10;+\infty).$$

Таким образом, при цене единицы товара 10 руб. и менее продавцы не поставляют товар на рынок (при $p = 10$ предложение $q = 0$, а спрос есть $q = \dfrac{200}{10} = 20$ (тыс. шт.)). При $p > 10$ предложение растет, а спрос падает (становится меньше 20).

2) Для нахождения рыночного равновесия решим систему уравнений:

$$\begin{cases} q = \dfrac{200}{p} \\ q = p-10 \end{cases} \Rightarrow \frac{200}{p} = p-10 \Rightarrow p^2 - 10p - 200 = 0;$$

$$D = 100 + 800 = 900;\ \sqrt{D} = 30;$$

$$p_1 = \frac{10-30}{2} = -10 \text{ (не подходит, так как } p \ge 0);\ p_2 = \frac{10+30}{2} = 20.$$

Таким образом, получаем единственное решение $p_0 = 20$ (руб.).

Ему соответствует $q_0 = \dfrac{200}{20} = 10$ (тыс. шт.).

Итак, рыночное равновесие характеризуется ценой за единицу товара $p_0 = 20$ руб. При этой цене покупатели приобретут, а производители поставят товара в количестве $q_0 = 10$ тыс. шт.

3) Выручка продавца при продаже товара по равновесной цене составит: $u_1 = p_0 q_0 = 20 \cdot 10 = 200$ (тыс. руб.).

4) При $p = 25$ величина предложения $q_1 = 25 - 10 = 15$ (тыс. шт.), а величина спроса $q_2 = \dfrac{200}{25} = 8$ (тыс. шт.). Таким образом, при этой цене предложение превышает спрос (т.е. появляются излишки товара) на $q_1 - q_2 = 15 - 8 = 7$ (тыс. шт.). При $p = 15$ величина предложения $q_1 = 15 - 10 = 5$ (тыс. шт.), а величина спроса $q_2 = \dfrac{200}{15} = 13\dfrac{1}{3}$ (тыс. шт.). Таким образом, при этой цене спрос превышает предложение (т.е. появляется дефицит товара) на $q_2 - q_1 = 13\dfrac{1}{3} - 5 = 8\dfrac{1}{3}$ (тыс. шт.) $\approx$ 8333 шт.

5) Введение налога размером 1 руб. на каждую единицу товара приведет к тому, что на 1 руб. возрастет цена каждой единицы товара и новая функция предложения будет иметь вид: $p = q + 10 + 1$, или $p = q + 11$.

Новое рыночное равновесие найдем из системы уравнений:

$$\begin{cases} p = \dfrac{200}{q} \\ p = q + 11 \end{cases} \Rightarrow \frac{200}{q} = q + 11 \Rightarrow q^2 + 11\,q - 200 = 0;$$

$$D = 121 + 800 = 921;\ \sqrt{D} \approx 30{,}348;$$

$$q_1 = \frac{-11 - 30{,}348}{2} = -20{,}674 \text{ (не подходит, так как } q \geq 0);$$

$$q_2 = \frac{-11 + 30{,}348}{2} = 9{,}674.$$

Таким образом, получаем единственное решение $q_0 = 9{,}674$ (тыс. шт.). Ему соответствует $p_0 = \dfrac{200}{q_0} \approx 20{,}67$ (руб.).

Итак, новое рыночное равновесие характеризуется ценой за единицу товара $p_0 = 20{,}67$ руб. По этой цене покупатели приобретут, а производители поставят товар в количестве $q_0 = 9{,}674$ тыс. шт.

Выручка продавца при продаже товара по новой равновесной цене составит:

$$u_2 = p_0\, q_0 = 20{,}67 \cdot 9674 = 199962 \text{ (руб.)}.$$

Вычислим налог, который заплатит продавец государству:

$$u_3 = 1 \cdot 9674 = 9674 \text{ (руб.)}.$$

После реализации товара и уплаты налога у продавца останется сумма $u_4 = u_2 - u_3 = 199962 - 9674 = 190288$ (руб.). Эта сумма на 9712 руб. меньше выручки, полученной от продажи товара по первоначальной равновесной цене ($200000 - 190288 = 9712$).

6) Введение государством дотации в размере 1 руб. на каждую единицу товара приведет к тому, что на 1 руб. уменьшится цена каждой единицы продукта и новая функция предложения будет иметь вид:

$$p = q + 10 - 1, \text{ или } p = q + 9.$$

Новое рыночное равновесие найдем из системы уравнений:

$$\begin{cases} p = \dfrac{200}{q} \\ p = q + 9 \end{cases} \Rightarrow \frac{200}{q} = q + 9 \Rightarrow q^2 + 9q - 200 = 0;$$

$$D = 81 + 800 = 881;\ \sqrt{D} \approx 29{,}682;$$

$$q_1 = \frac{-9 - 29{,}682}{2} = -19{,}341 \text{ (не подходит, так как } q \geq 0);$$

$$q_2 = \frac{-9 + 29{,}682}{2} = 10{,}341.$$

Таким образом, получаем единственное решение $q_0 = 10{,}341$ (тыс. шт.). Ему соответствует $p_0 = \dfrac{200}{q_0} \approx 19{,}34$ (руб.).

Итак, новое рыночное равновесие характеризуется ценой за единицу товара $p_0 = 19{,}34$ руб. По этой цене покупатели приобретут, а производители поставят $q_0 = 10{,}341$ тыс. шт. товара.

Выручка продавца при продаже товара по новой равновесной цене составит: $u_2 = p_0 q_0 = 19{,}34 \cdot 10\,341 = 199\,995$ руб. Эта сумма на 5 руб. меньше выручки, полученной от продажи товара по первоначальной равновесной цене.

7) Если для поддержания производителя государство решило установить твердую цену в размере 22 руб. за каждую единицу товара, то величины предложения и спроса при этой цене соответственно равны:

$$q_1 = 22 - 10 = 12 \text{ (тыс. шт.)}$$

и

$$q_2 = \frac{200}{22} = 9{,}091 \text{ (тыс. шт.).}$$

Таким образом, при этой цене предложение превышает спрос на $q_1 - q_2 = 12 - 9{,}091 = 2{,}909$ (тыс. шт.). Эти излишки закупает государство и тратит на это сумму $u = 22(q_1 - q_2) = 22 \cdot 2{,}909 = 63{,}998$ (тыс. руб.), или 63 998 руб.

8) Схематический чертеж представлен на рис. 1.17.

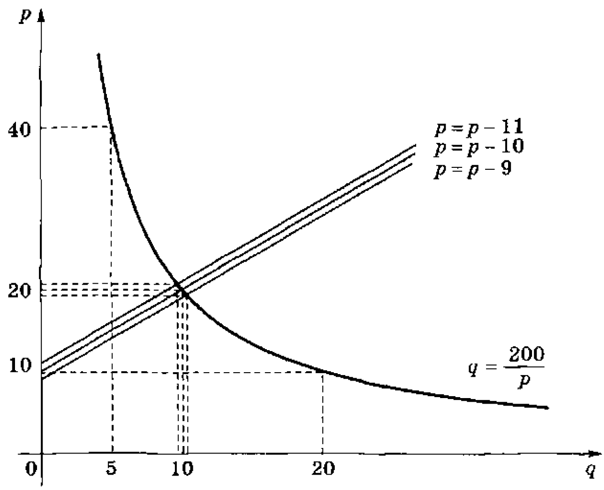


Рис. 1.17

1.2.4. Производственные функции

Производственные функции (ПФ) отражают зависимость результата производственной деятельности от обусловивших его факторов. Дадим два взаимосвязанных определения однофакторной ПФ, т. е. ПФ одной переменной.

$\boxed{01}$ Функцию, выражающую зависимость между объемом y выпускаемой продукции и объемом x перерабатываемого ресурса, называют ***однофакторной ПФ***.

$\boxed{02}$ Функцию, выражающую зависимость между суммарной стоимостью y выпускаемой продукции и стоимостью x суммарных затрат на ее производство, называют ***однофакторной ПФ***.

Из этих определений следует, что данные функции могут задаваться как в объемном (тонны, киловатт-часы и т. п.), так и стоимостном (рубль, доллар, евро и т. п.) выражении.

Наряду с линейными ПФ используются нелинейные функции, такие, как дробно-рациональные, степенные (квадратная, кубическая и др.), показательные (экспоненциальные), логарифмические. Периодичность (колеблемость) ряда экономических процессов позволяет также использовать тригонометрические ПФ.

Пример. При статистическом обследовании фермерских хозяйств была установлена следующая зависимость урожайности картофеля с одного гектара от количества внесенных органических удобрений:

а) без внесения удобрений урожайность составила 30 т;

б) при внесении 5 т удобрений урожайность составила 50 т;

в) при внесении 10 т удобрений урожайность составила 45 т.

С помощью ПФ вида $y = ax^2 + bx + c$ требуется:

1) установить аналитическую зависимость урожайности y (тонн) картофеля с одного гектара от количества x (тонн) внесенных на этот гектар органических удобрений;

2) по графику ПФ найти максимальное значение урожайности y и соответствующий ему расход удобрения.

Решение. 1) Из условия задачи можно заключить, что при $x = 0$: $y = 30$; при $x = 5$: $y = 50$; при $x = 10$: $y = 45$.

Подставляя эти значения в ПФ $y = ax^2 + bx + c$, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} a\cdot 0 + b\cdot 0 + c = 30; \\ a\cdot 5^2 + b\cdot 5 + c = 50; \\ a\cdot 10^2 + b\cdot 10 + c = 45; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 30; \\ 25a + 5b + 30 = 50; \\ 100a + 10b + 30 = 45; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 30; \\ 5a + b = 4; \\ 20a + 2b = 3. \end{cases}$$

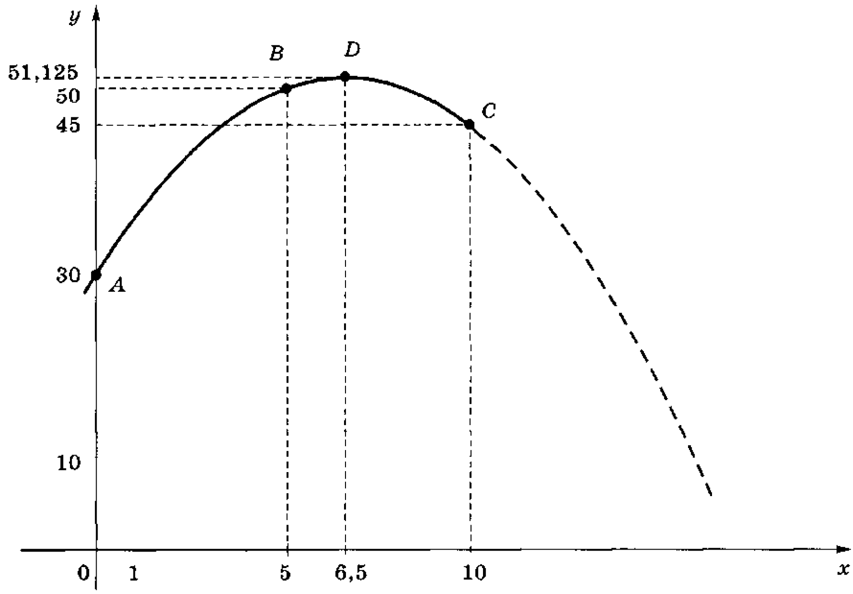


Рис. 1.18

Выражая из второго уравнения b и подставляя полученный результат в третье уравнение, будем иметь:

$$\begin{cases} c = 30; \\ b = 4 - 5a; \\ 20a + 2(4 - 5a) = 3; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 30; \\ b = 4 - 5a; \Rightarrow \\ a = -\dfrac{1}{2}; \end{cases} \begin{cases} c = 30; \\ b = 4 - 5\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{13}{2}; \\ a = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Итак, $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{13}{2}x + 30 = -\frac{1}{2}(x^2 - 13x - 60) = -\frac{1}{2}\left[\left(x - \frac{13}{2}\right)^2 - \frac{409}{4}\right] =$

$= -\frac{1}{2}\left(x - \frac{13}{2}\right)^2 + \frac{409}{8} = -\frac{1}{2}(x - 6{,}5)^2 + 51{,}125.$

2) Начертим график функции $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{13}{2}x + 30$. Он проходит через точки A (0; 30); B (5; 50); C (10; 45) и имеет максимальное значение в точке D (6,5; 51,125) (рис. 1.18).

Таким образом, максимальная урожайность картофеля равна 51 125 кг при внесении 6,5 т органических удобрений.

Задачи для самостоятельного решения

1. Функция спроса на некоторый товар имеет вид: $q = -2 + \frac{160}{2p+5}$, где q — количество товара (тыс. шт.); p — единица товара (руб.). Найдите:

а) область определения и множество значений этой функции;

б) объем спроса при ценах на товар $p_1 = 7{,}5$; $p_2 = 10$;

в) функцию цены в виде $p = f^{-1}(q)$;

г) цену за единицу товара, если $q_1 = 14$; $q_2 = 18$, и выручку продавцов в каждом из этих случаев.

Постройте график функции спроса.

2. Функция предложения некоторого товара на рынке имеет вид $q = -1 + \sqrt{p-4}$, где q — количество предлагаемого товара (тыс. шт.); p — цена за единицу товара (руб.). Найдите:

а) область определения и множество значений этой функции;

б) объем предложения при цене за единицу товара $p_1 = 29$; $p_2 = 40$;

в) функцию цены в виде $p = f^{-1}(q)$;

г) цену за единицу товара, если $q_1 = 8$; $q_2 = 11$, и выручку продавцов в каждом из этих случаев.

Постройте график функции предложения.

3. Функция спроса на данный товар имеет вид: $q = \frac{15-p}{p+3}$, а функция предложения $q = \frac{1}{2}p - 2$, где q — объем спроса (предложения) (тыс. шт.); p — цена за единицу товара (руб.).

Найдите:

а) в каком диапазоне могут изменяться цены на рассматриваемый товар;

б) рыночное равновесие;

в) выручку продавца при продаже товара по равновесной цене;

г) величину излишков товара при $p = 9$ руб. и величину дефицита при $p = 5$ руб.;

д) новую функцию предложения и новое рыночное равновесие после введения государством налога на каждую единицу товара в размере 1 руб. Сравните суммы, полученные продавцом до и после введения налога;

е) новую функцию предложения и новое рыночное равновесие, если за каждую проданную единицу товара производители получают из бюджета дотацию в размере 1 руб. Сравните суммы, получаемые продавцами до и после введения дотации;

ж) количество товара (излишки продукта), закупаемого государством, и сумму, в которую ему это обходится, если оно для поддержания производителя решило установить твердую цену в 7 руб. за каждую единицу товара. Сделайте схематический чертеж.

1.3. ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

1.3.1. Понятие числовой последовательности

[О] Говорят, что задана ***бесконечная числовая последовательность***, если всякому натуральному числу (номеру места) по какому-нибудь закону однозначно поставлено в соответствие определенное число (член последовательности).

Обозначим члены последовательности $x_1, x_2, ..., x_n, ...$.

Тогда $x_n = f(n)$ (каждый член последовательности есть некоторая функция своего номера).

Последовательность есть частный случай функции. Ее областью определения является множество натуральных чисел.

Числа $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ называются *членами числовой последовательности*: x_1 — первый член, x_2 — второй член, x_n — n-й член, или *общий член*, последовательности.

Основным способом задания числовой последовательности является аналитический, при котором последовательность выражается формулой общего члена.

Примеры. 1. $x_n = 2n - 1$: $n = 1$: $x_1 = 1$; $n = 2$: $x_2 = 3$; ....

2. $x_n = \dfrac{n}{2n+1}$: $\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{5}, \dfrac{3}{7}, \dfrac{4}{9}, ..., \dfrac{n}{2n+1}, ...$.

3. $x_n = \dfrac{2n+1}{n}$: $3, \dfrac{5}{2}, \dfrac{7}{3}, \dfrac{9}{4}, \dfrac{11}{5}, ..., \dfrac{2n+1}{n}, ...$.

[О] Последовательность $\{x_n\}$ ($n \in \mathrm{N}$) называется ***возрастающей***, если для любого натурального n выполняется неравенство $x_{n+1} > x_n$, и ***убывающей***, если для любого натурального n выполняется неравенство $x_{n-1} < x_n$.

Возрастающие и убывающие последовательности называются ***монотонными***.

Примеры. 1. Исследовать последовательность $x_n = \dfrac{3n+2}{4n+3}$ на монотонность.

Решение. Имеем $x_{n+1}=\dfrac{3n+5}{4n+7}$. Приведем дроби к общему знаменателю:

$$x_n=\frac{(3n+2)(4n+7)}{(4n+3)(4n+7)}=\frac{12n^2+29n+14}{(4n+3)(4n+7)},\ x_{n+1}=\frac{(3n+5)(4n+3)}{(4n+7)(4n+3)}=\frac{12n^2+29n+15}{(4n+7)(4n+3)}.$$

Из сравнения этих дробей следует, что $x_{n+1}>x_n$, следовательно, данная последовательность $x_n=\dfrac{3n+2}{4n+3}$ является возрастающей.

2. Показать, что последовательность $y_n=\dfrac{6-n}{5n-1}$ является убывающей.

Решение. Имеем $y_{n+1}=\dfrac{6-(n+1)}{5(n+1)-1}=\dfrac{5-n}{5n+4}$. Сравним эти дроби. Для этого приведем их к общему знаменателю:

$$y_n=\frac{(6-n)(5n+4)}{(5n-1)(5n+4)}=\frac{26n+24-5n^2}{(5n-1)(5n+4)},\ y_{n+1}=\frac{(5-n)(5n-1)}{(5n+4)(5n-1)}=\frac{26n-5-5n^2}{(5n+4)(5n-1)}.$$

Вычислим разность $y_n-y_{n+1}=\dfrac{26n+24-5n^2}{(5n-1)(5n+4)}-\dfrac{26n-5-5n^2}{(5n-1)(5n+4)}=$

$=\dfrac{26n+24-5n^2-26n+5+5n^2}{(5n-1)(5n+4)}=\dfrac{29}{(5n-1)(5n+4)}>0$, так как $n\in\mathbf{N}$. Итак, $y_n-y_{n+1}>0$, откуда $y_{n+1}<y_n$, следовательно, данная последовательность является убывающей.

$\boxed{\text{О}}$ Последовательность $\{x_n\}$ называется ***ограниченной***, если существуют два числа m и M такие, что для всех $n\in\mathbf{N}$ выполняется неравенство $m\le x_n\le M$.

Примеры. 1. $x_n=\dfrac{1}{n}$, $0<\dfrac{1}{n}\le 1$, $m=0$, $M=1$.

2. $x_n=\dfrac{2n+1}{n}$, $2<\dfrac{2n+1}{n}\le 3$, $m=2$, $M=3$.

1.3.2. Предел числовой последовательности

Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$ и введем для нее понятие предела.

Пусть номер n неограниченно увеличивается, т.е. ему придаются сколь угодно большие значения. Это записывается в виде $n\to+\infty$ и читается: «n стремится к бесконечности». При этом может оказаться, что соответствующие значения последовательности $\{x_n\}$ неограниченно приближаются к некоторому числу a. Тогда это число a называется ***пределом последовательности*** $\{x_n\}$ и записывается как $x_n \to a$ при $n \to +\infty$, или в виде символического равенства $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Прежде чем дать точное определение предела последовательности, напомним понятие абсолютного значения (модуля) числа.

1.3.3. Абсолютное значение числа

Определение абсолютного значения числа можно выразить формулой

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0; \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Например, $|-5| = 5$; $|3| = 3$; $|-x| = |x|$.

Неравенства вида $|x - x_0| < a$ ($\leq a$), где $a > 0$. Геометрически они означают, что значения переменной величины x попадают в открытую или замкнутую окрестность точки x_0 радиусом a, т. е. расстояния от точек x до точки x_0 не превосходят a: $|x - x_0| < a \Rightarrow$ $\Rightarrow x_0 - a < x < x_0 + a$ (рис. 1.19).

Пример. $|x + 1| \leq 3 \Rightarrow -1 - 3 \leq x \leq -1 + 3 \Rightarrow -4 \leq x \leq 2$ (рис. 1.20).

Неравенства вида $|x - x_0| > a$ ($\geq a$), где $a > 0$. Геометрически они означают, что значения переменной величины x попадают за пределы открытой или замкнутой окрестности точки x_0 радиусом a, т. е. расстояния от точек x до точки x_0 больше или равны a (рис. 1.21).

Пример. $|x - 1| \geq 2 \Rightarrow x \leq 1 - 2$ и $x \geq 1 + 2 \Rightarrow x \leq -1$ и $x \geq 3$ (рис. 1.22).

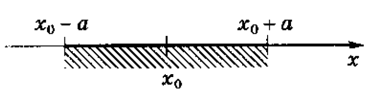


Рис. 1.19

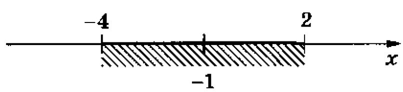


Рис. 1.20

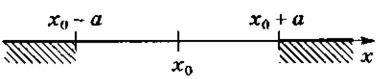


Рис. 1.21

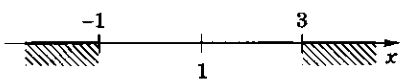


Рис. 1.22

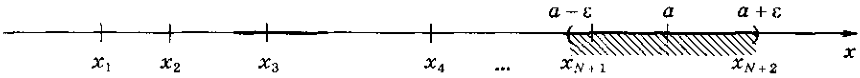


Рис. 1.23

Выполняются следующие соотношения:

$$|x+y| \le |x|+|y|; \quad |x-y| \le |x|+|y|; \quad |x-y| \ge |x|-|y|.$$

$\boxed{\text{О}}$ Число a называется ***пределом последовательности*** $\{x_n\}$, если для любого сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon > 0$ найдется натуральное число $N(\varepsilon)$ такое, что при всех $n > N$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$, т.е. для любого выбранного по нашему желанию сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $n = N$ (и соответствующий ему член последовательности x_N), что все последующие члены последовательности с номерами $n > N$ (x_{N+1}, x_{N+2}, ...) попадут в ε-окрестность точки a (их расстояния от точки a будут $< \varepsilon$), рис. 1.23.

Из определения следует, что вне ε-окрестности точки a окажется *конечное число* членов последовательности (может быть только члены x_1, x_2, x_3, ..., x_N).

$\boxed{\text{О}}$ Если последовательность $\{x_n\}$ имеет конечный предел, то она называется ***сходящейся***, если предела не имеет (либо он равен $+\infty$), то она называется ***расходящейся***.

Пример. Показать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1}{2}$, где $x_n = \dfrac{n}{2n+1}$.

Решение. 1) При увеличении n разность $\left|x_n - \dfrac{1}{2}\right| = \left|\dfrac{n}{2n+1} - \dfrac{1}{2}\right|$ неограниченно уменьшается. Так, например: $n = 3$: $\left|\dfrac{3}{7} - \dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{1}{14}$; $n = 10$: $\left|\dfrac{10}{21} - \dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{1}{42}$; $n = 100$: $\left|\dfrac{100}{201} - \dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{1}{402}$.

2) Для того чтобы показать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1}{2}$, нужно доказать, что начиная с некоторого номера $n = N$ члены последовательности x_{N+1}, x_{N+2}, ... попадут в ε-окрестность точки $x = \dfrac{1}{2}$ (число ε выбирается произвольно).

Рассмотрим разность

$$\left|x_n - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2n-2n-1}{2(2n+1)}\right| = \left|\frac{-1}{2(2n+1)}\right| = \frac{1}{2(2n+1)}.$$

Потребуем, чтобы

$$\left|x_n - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{2(2n+1)} < \varepsilon \Rightarrow 2(2n+1)\varepsilon > 1 \Rightarrow 2n+1 > \frac{1}{2\varepsilon} \Rightarrow 2n > \frac{1}{2\varepsilon} - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n > \frac{1}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}; \quad n > \frac{1-2\varepsilon}{4\varepsilon}.$$

В результате получили зависимость между номером, начиная с которого будет выполняться неравенство $\left|x_n - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$, и числом ε (которое задаем произвольно).

Например, возьмем $\varepsilon = \frac{1}{10}$; $n > \dfrac{1 - \frac{2}{10}}{\frac{4}{10}} = 2$, т.е. начиная с 3-го номера члены последовательности x_3, x_4, ... будут отклоняться от $\frac{1}{2}$ менее чем на $\frac{1}{10}$. Возьмем, например, $\varepsilon = \frac{1}{100}$: $n > \dfrac{1 - \frac{2}{100}}{\frac{4}{100}} = 24{,}5$, т.е. начиная с 25-го номера члены последовательности x_{25}, x_{26}, ... будут отклоняться от $\frac{1}{2}$ менее чем на $\frac{1}{100}$. Произвольно задавая ε, будем получать значения номеров последовательности, начиная с которых выполняется неравенство $\left|x_n - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$. Тем самым мы показали, что выполнено определение предела, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2}$.

1.3.4. Критерий Коши

Для того чтобы последовательность (переменная величина) x_1, x_2, ..., x_n, ... имела предел, необходимо и достаточно, чтобы для всякого сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon > 0$ можно было указать натуральное число $N(\varepsilon)$ такое, что при $m > N$ и $n > N$ выполняется неравенство $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

1.3.5. Свойства сходящихся последовательностей

Свойство 1. Если последовательность сходится (т.е. если она имеет предел), то она ограничена (т.е. ограниченность последовательности является необходимым условием ее сходимости).

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ N$: $n > N$ $|x_n - a| < \varepsilon$.

Возьмем, например, $\varepsilon = 1$, тогда начиная с некоторого номера n $|x_n - a| < 1 \Rightarrow |x_n| - |a| \le |x_n - a| < 1 \Rightarrow |x_n| - |a| < 1 \Rightarrow |x_n| < |a| + 1$. Рассмотрим max $\{|x_1|, |x_2|, ..., |x_{n-1}|, |a| + 1\} = k$. Тогда все члены данной последовательности по абсолютному значению будут меньше этого числа k ($|x_n| < k$), т.е. последовательность является ограниченной. Такое значение k можно найти для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$. ■

***Замечание* 1.** Не всякая ограниченная последовательность имеет предел. Например, последовательность $x_n = (-1)^n$ ограничена, но предела не имеет.

***Замечание* 2.** Если последовательность не ограничена, то она предела не имеет. Например, $x_n = n^2$.

Свойство 2. Неограниченность последовательности является достаточным признаком ее расходимости.

Свойство 3 (*теорема Вейерштрасса*). Если последовательность монотонна и ограничена, то она имеет предел, т.е. является сходящейся последовательностью. (Выражает достаточное условие сходимости последовательности.)

Свойство 4. Последовательность может иметь лишь один предел.

Доказательство. Предположим противное. Пусть последовательность $\{x_n\}$ имеет два предела a и b, причем $a \ne b$.

Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1$: $n > N_1$ $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ и $\exists N_2$: $n > N_2$ $|x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Возьмем $N > \max(N_1; N_2)$. Тогда для $n > N$ оба неравенства будут выполняться. Будем иметь:

$$|a - b| = |(a - x_n) + (x_n - b)| \le |a - x_n| + |x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

т.е. при $n > N$ $|a - b| < \varepsilon$.

Но разность двух постоянных чисел не может быть меньше любого наперед заданного положительного числа. Следовательно, предположение $a \ne b$ неверно. ■

Свойство 5. Если последовательность $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ сходится, то любая ее подпоследовательность $x_{n_1}, x_{n_2}, ..., x_{n_k}, ...$ также сходится и притом к тому же числу, что и первоначальная последовательность. Обратное утверждение неверно.

Свойство 6. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ и $a < b$, то, начиная с некоторого номера n, будет выполнено неравенство: $x_n < y_n$.

Свойство 7. Если значения переменной величины z_n, начиная с некоторого номера n, заключены между соответственными значениями двух других переменных x_n и y_n, т. е. с указанного номера выполняется соотношение $x_n \le z_n \le y_n$, x_n, y_n имеют общий предел a, то переменная z_n имеет тот же предел.

1.3.6. Бесконечно малые величины

[О] Переменная величина x_n, имеющая своим пределом нуль, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, называется ***бесконечно малой величиной***, или просто ***бесконечно малой*** (б/м) ($\forall\varepsilon > 0\ \exists N\colon n > N \Rightarrow |x_n| < \varepsilon$, т.е. начиная с некоторого номера переменная величина становится по абсолютному значению меньше любого наперед заданного положительного числа ε).

[Т] *Переменную величину x_n, имеющую предел a, можно представить в виде суммы своего предела и некоторой бесконечно малой величины α_n, т.е. $x_n = a + \alpha_n$.*

Доказательство. $\forall\varepsilon > 0\ \exists N\colon n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$, следовательно, $x_n - a$ является бесконечно малой. Обозначим

$$x_n - a = \alpha_n \Rightarrow x_n = a + \alpha_n. \qquad \blacksquare$$

Справедлива и **обратная теорема**: *если переменную величину x_n можно представить в виде суммы двух слагаемых $x_n = a + \alpha_n$, где a есть некоторое число, а α_n — б/м, то a есть предел переменной величины x_n.*

Пример. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right) = 1$, так как $\dfrac{1}{n}$ — бесконечно малая.

1.3.7. Бесконечно большие величины

[О1] Переменная величина x_n называется ***бесконечно большой***, если для любого наперед заданного числа M можно указать натуральное число N такое, что при всех $n > N$ будет выполняться неравенство $|x_n| > M$.

[О2] Переменная величина x_n, имеющая своим пределом бесконечность ($\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$), называется ***бесконечно большой***.

1.3.8. Основные теоремы о пределах последовательностей

$\boxed{\text{Л1}}$ *Алгебраическая сумма любого (но ограниченного) числа бесконечно малых величин* $\underbrace{(\alpha_n - \beta_n + \gamma_n - ... + \mu_n)}_{m}$ *есть также величина бесконечно малая.*

Доказательство.

$$\alpha_n - \text{б/м} \Rightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists N_1\colon n > N_1 |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{m}$$

$$\beta_n - \text{б/м} \Rightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists N_2\colon n > N_2 |\beta_n| = \frac{\varepsilon}{m}$$

....

$$\mu_n - \text{б/м} \Rightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists N_m\colon n > N_m |\mu_n| = \frac{\varepsilon}{m}.$$

Возьмем $N = \max(N_1, N_2, ..., N_m)$, тогда при $n > N$:

$$|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{m},\quad |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{m},\quad ...,\ |\mu_n| < \frac{\varepsilon}{m} \Rightarrow\ |\alpha_n| + |\beta_n| + ... + |\mu_n| < \varepsilon.$$ ■

$\boxed{\text{Л2}}$ *Произведение ограниченной переменной величины x_n на бесконечно малую величину α_n есть величина бесконечно малая.*

Доказательство. Пусть x_n — ограниченная величина, следовательно $\forall n \Rightarrow |x_n| < k$.

$$\alpha_n - \text{б/м} \Rightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists N_1\colon n > N_1\ \ |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{k}.$$

Но $|x_n\alpha_n| = |x_n||\alpha_n| \Rightarrow$ при $n > N$ $|x_n\alpha_n| < k\frac{\varepsilon}{\kappa} \Rightarrow$ величина $x_n\alpha_n$ — бесконечно малая. ■

Следует заметить, что частное двух б/м не обязательно будет б/м.

$\boxed{\text{Т1}}$ *Предел постоянной величины равен самой постоянной, т.е. если $x_n = a$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.*

Доказательство. Из определения предела следует, что если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то $\forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) > 0$: для всех $n > N \Rightarrow |\ x_n - a\ | < \varepsilon$.

Рассмотрим в нашем случае разность $|\ x_n - a\ | = |\ a - a\ | = 0 < \varepsilon$ при любом N. Следовательно, если $x_n = a$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. ■

$\boxed{\text{Т2}}$ *Если переменные x_n и y_n имеют пределы, соответственно равные a и b, то их сумма (разность) также имеет предел, причем* $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b$.

Доказательство.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow x_n = a + \alpha_n \\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \Rightarrow y_n = b + \beta_n\end{array}\right\} \Rightarrow x_n \pm y_n = (a \pm b) + (\alpha_n + \beta_n).$$

Но по лемме 1 (см. $\boxed{\text{Л1}}$) величина $\alpha_n \pm \beta_n$ есть б/м, следовательно, переменная величина $(x_n \pm y_n)$ есть сумма постоянной величины $(a \pm b)$ и б/м $(\alpha_n \pm \beta_n) \Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. ■

Данную теорему можно перенести на случай любого фиксированного числа слагаемых.

$\boxed{\text{Т3}}$ *Если переменные x_n и y_n имеют пределы, соответственно равные a и b, то произведение их также имеет предел, причем* $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = ab = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

$\boxed{\text{С1}}$ Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim_{n\to\infty}(Cx_n) = \lim_{n\to\infty} C \lim_{n\to\infty} x_n = C \lim_{n\to\infty} x_n.$$

$\boxed{\text{С2}}$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n)^k = (\lim_{n\to\infty} x_n)^k$$

$$\lim_{n\to\infty}\underbrace{(x_n x_n \ldots x_n)}_{k} = \underbrace{\lim_{n\to\infty} x_n \cdot \ldots \cdot \lim_{n\to\infty} x_n}_{k} = (\lim_{n\to\infty} x_n)^k$$

(если переменная x_n имеет предел и k — целое положительное число).

$\boxed{\text{Т4}}$ *Если переменные величины x_n и y_n имеют пределы, соответственно равные a и b, причем $b \neq 0$, то и частное этих переменных также имеет предел, причем* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$.

$\boxed{\text{С3}}$ Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, причем $a \neq 0$ и k — некоторое целое отрицательное число, то $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n)^k = a^k$.

$\boxed{\text{Т5}}$ *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, *причем $x_n \geq 0$ и k — некоторое натуральное число, то* $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[k]{x_n} = \sqrt[k]{a}$.

$\boxed{\text{С4}}$ Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, причем $a > 0$ и k — любое рациональное число, то $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n)^k = a^k$.

$\boxed{\text{Т6}}$ *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |a|$.

Доказательство. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то $\forall\varepsilon > 0\ \exists N\colon n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$. Но так как $\big||x_n| - |a|\big| \le |x_n - a|$, то при тех же значениях n и подавно выполнится $\big||x_n| - |a|\big| < \varepsilon$ и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |a|$. ■

Обратное утверждение неверно, т. е. если $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |a|$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ — неверно.

Пример. $x_n = (-1)^{n+1} \Rightarrow |x_n| = 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = 1$, но $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ не существует.

1.3.9. Примеры вычисления пределов числовых последовательностей

Необходимо вычислить следующие пределы:

$$1)\lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{n^2+1};\quad 2)\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-1}{n^2+1};\quad 3)\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{1-2n};$$

$$4)\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n^2+1}}{2n-1};\quad 5)\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2-3n+2}{2n^2+4n+1};\quad 6)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2+3n^4}{n-6n^4}\right)^5;$$

$$7)\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n}-n\right);\quad 8)\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n});$$

$$9)\lim_{n\to-\infty}(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-4n});\quad 10)\lim_{n\to\infty}\left(n-\sqrt[3]{n^3-n^2}\right);$$

$$11)\lim_{n\to\infty}\frac{1-10^n}{1+10^{n+1}};\quad 12)\lim_{n\to-\infty}\frac{3-10^n}{2+10^{n+1}}.$$

Решение. 1) При $n \to +\infty$ числитель и знаменатель дроби неограниченно возрастают, следовательно, нельзя применить теорему о пределе частного двух последовательностей.

Разделив числитель и знаменатель на старшую степень n, т. е. на $n^2 \ne 0$ при $n \to +\infty$, получим: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n-1}{n^2+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}$. Учитывая, что последовательности $\frac{3}{n}$ и $\frac{1}{n^2}$ являются бесконечно малыми, и используя свойства бесконечно малых последовательностей, окончательно будем иметь:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}=\frac{0}{1}=0.\ \text{Итак, } \lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{n^2+1}=0.$$

2) Разделив числитель и знаменатель дроби на старшую степень n, т.е. на $n^3\neq 0$ при $n\to+\infty$, получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-1}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}}.$$

При $n\to+\infty$ последовательность $\left(1-\frac{1}{n^3}\right)$ является сходящейся и имеет предел, равный 1, а последовательность $\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}\right)$ является бесконечно малой и имеет предел, равный 0, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}}=+\infty$. Итак, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3-1}{n^2+1}=+\infty$.

3) Разделив числитель и знаменатель дроби на n, получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{1-2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\frac{1}{n}-2}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}3}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-2\right)}=\frac{3}{-2}=-1,5.$$

4) В числителе дроби вынесем из-под знака корня n^2, а в знаменателе дроби — n. Учитывая, что $\sqrt{n^2}=n$ (так как $n\in\mathbf{N}$), получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n^2+1}}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{2+\frac{1}{n^2}}}{n\left(2-\frac{1}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2+\frac{1}{n^2}}}{2-\frac{1}{n}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{2+\frac{1}{n^2}}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$5)\ \lim_{n\to\infty}\frac{5n^2-3n+2}{2n^2+4n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{5-\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}{2+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(5-\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}=\frac{5}{2}=2{,}5.$$

Замечание. Если $n\to+\infty$, то при вычислении несложных пределов от дроби, в числителе и знаменателе которой стоят по одному многочлену, можно пользоваться следующим правилом:

а) если старшая степень числителя меньше старшей степени знаменателя, то предел равен нулю;

б) если старшая степень числителя больше старшей степени знаменателя, то предел равен бесконечности;

в) если старшая степень числителя равна старшей степени знаменателя, то предел равен отношению коэффициентов при старших степенях.

Пределы 1 ... 5 удовлетворяют данному правилу.

$$6)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2+3n^4}{n-6n^4}\right)^5=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{2+3n^4}{n-6n^4}\right)^5=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n^4}+3}{\frac{1}{n^3}-6}\right)^5=\left(-\frac{1}{2}\right)^5=-\frac{1}{32}.$$

$$7)\ \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+3n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+3n}+n\right)}{\sqrt{n^2+3n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n-n^2}{\sqrt{n^2+3n}+n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{\sqrt{n^2+3n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{n\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1\right)}=\frac{3}{2}=1{,}5.$$

[Здесь первоначально числитель и знаменатель дроби умножили на ненулевое сопряженное выражение $\left(\sqrt{n^2+3n}+n\right)$.]

$$8)\ \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n}\right)\left(\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n}\right)}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n+1-(n^2-n)}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(2+\frac{1}{n}\right)}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(2+\frac{1}{n}\right)}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)}=\frac{2+0}{1+1}=1.$$

9) Забегая вперед, рассмотрим случай $n\to-\infty$:

$$\lim_{n\to-\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-4n}\right)=\lim_{n\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-4n}\right)\left(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-4n}\right)}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-4n}}=$$

$$=\lim_{n\to-\infty}\frac{n^2+1-(n^2-4n)}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-4n}}=\lim_{n\to-\infty}\frac{4n+1}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-4n}}=$$

$$=\lim_{n\to-\infty}\frac{n\left(4+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n^2}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{4}{n}}\right)}.$$

Учитывая, что $\sqrt{n^2}=-n$ при $n\to-\infty$, окончательно получим:

$$\lim_{n\to-\infty}\frac{n\left(4+\frac{1}{n}\right)}{-n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{4}{n}}\right)}=-\lim_{n\to-\infty}\frac{\left(4+\frac{1}{n}\right)}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{4}{n}}\right)}=$$

$$=-\frac{\lim\limits_{n\to-\infty}\left(4+\frac{1}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to-\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{4}{n}}\right)}=-\frac{4+0}{1+1}=-2.$$

Итак, $\lim\limits_{n\to-\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-4n}\right)=-2.$

$$10)\ \lim_{n\to\infty}\left(n-\sqrt[3]{n^3-n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n-\sqrt[3]{n^3-n^2}\right)\left(n^2+n\sqrt[3]{n^3-n^2}+\sqrt[3]{\left(n^3-n^2\right)^2}\right)}{n^2+n\sqrt[3]{n^3-n^2}+\sqrt[3]{\left(n^3-n^2\right)^2}}=$$

[числитель и знаменатель дроби умножили на неполный квадрат суммы a^2+ab+b^2 для того, чтобы использовать формулу $a^3-b^3=$ $=(a-b)(a^2+ab+b^2)$]

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-(n^3-n^2)}{n^2+n\sqrt[3]{n^3-n^2}+\sqrt[3]{\left(n^3-n^2\right)^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+n\sqrt[3]{n^3-n^2}+\sqrt[3]{\left(n^3-n^2\right)^2}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2\left[1+\sqrt[3]{1-\frac{1}{n}}+\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{n}\right)^2}\right]}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\sqrt[3]{1-\frac{1}{n}}+\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{n}\right)^2}}=\frac{1}{3}.$$

11) Разделив числитель и знаменатель дроби на 10^n, получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-10^n}{1+10^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{10^n}-1}{\frac{1}{10^n}+10}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{10^n}-1\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{10^n}+10\right)}=\frac{0-1}{0+10}=-\frac{1}{10}=-0{,}1.$$

12) Пусть $n=-k$, где $k\in\mathbf{N}$. Тогда $k=-n$. При $n\to-\infty$, $k\to\infty$. Получим

$$\lim_{n\to-\infty}\frac{3-10^n}{2+10^{n+1}}=\lim_{k\to\infty}\frac{3-10^{-k}}{2+10^{-k+1}}=\lim_{k\to\infty}\frac{3-\frac{1}{10^k}}{2+\frac{10}{10^k}}=\frac{\lim\limits_{k\to\infty}\left(3-\frac{1}{10^k}\right)}{\lim\limits_{k\to\infty}\left(2+\frac{10}{10^k}\right)}=$$

$$=\frac{3-0}{2+0}=\frac{3}{2}=1{,}5.$$

Итак, $\lim\limits_{n\to-\infty}\frac{3-10^n}{2+10^{n+1}}=1{,}5.$

Задачи для самостоятельного решения

1. Покажите, используя определение предела, что:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n+2}{n+2}=4$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+5}{3n-1}=\frac{2}{3}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n+2}=0.$

2. Вычислите пределы числовых последовательностей:

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+3}{n^3+2n-1}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+n+1}{n+2}$;

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^3+2n^2-n+2}{32+2n+n^2-6n^3}$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+2}{\sqrt{2n^2+3}}$;

8) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2+3n-2}{2n^2-n+1}$;

9) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{\sqrt{3n^2+1}}$;

10) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n^2}{1-n^2}+2^{\frac{1}{n}}\right)$;

11) $\lim\limits_{n\to\infty}(n-\sqrt{n^2-n+1})$;

12) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n(n-5)}-n\right)$;

13) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$;

14) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\sqrt{n}-\sqrt{n(n+1)(n+2)}\right)$;

15) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$;

16) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2-4}-\sqrt{n^2+2}}{\sqrt[5]{2n-n^4}+n}$.

1.4. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

1.4.1. Понятие предела функции

Рассмотрев понятие предела применительно к числовой последовательности, т. е. к функции натурального аргумента, перейдем к выяснению этого понятия для функций произвольного действительного аргумента.

$\boxed{\text{О1}}$ **По Гейне.** Если для любой последовательности значений x: $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, входящих в область определения функции и сходящихся к a, но отличных от a, соответствующая последовательность значений функции $f(x)$: $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ сходится и притом всегда к одному и тому же числу A, то говорят, что функция $f(x)$ стремится к A при x, стремящемся к a, а число A называют ***пределом функции*** $f(x)$ в точке a или ее предельным значением в этой точке. (Число A называется пределом функции $f(x)$ при $x\to a$, если из условия $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ $(x_n\neq a)$ всегда следует равенство $\lim\limits_{x\to a}f(x_n)=A$.)

Замечание. Поскольку предельная точка a может и не принадлежать области определения функции $f(x)$, функция $f(x)$ при этом может быть и не определена в самой точке a.

Данное определение предела функции часто называют определением предела функции по Гейне. Оно основано на понятии предела числовой последовательности.

$\boxed{02}$ **По Коши.** Число A называется ***пределом функции*** $f(x)$ при x, стремящемся к a (или в точке a), если для любого наперед заданного сколь угодно малого положительного числа ε можно найти такое положительное число δ, что для всех значений x, входящих в область определения функции, отличных от a ($|x-a|>0$) и удовлетворяющих условию $|x-a|<\delta$, имеет место неравенство: $|f(x)-A|<\varepsilon$. (Число A называется пределом функции $f(x)$ при $x \to a$, если выполнение неравенства $0<|x-a|<\delta$ влечет за собой выполнение неравенства $|f(x)-A|<\varepsilon$, где $\varepsilon>0$ наперед задано, а $\delta>0$ соответствующим образом подобрано по нему.)

Замечание. Следует обратить внимание на то, что в определении предела функции по Гейне и по Коши не требуется, чтобы функция $f(x)$ была определена в точке a. Но в обоих определениях требуется, чтобы точка a была предельной для области определения функции $f(x)$. Значит, если некоторая точка не является таковой, то нельзя и ставить вопрос о пределе функции в этой точке (в смысле указанных определений).

1.4.2. Геометрическая интерпретация понятия предела

Построим график функции $y=f(x)$ и нанесем на нем точку M с координатами $(a; A)$. Проведем прямые с уравнениями $y=A-\varepsilon$ и $y=A+\varepsilon$. Эти прямые ограничат на плоскости некоторую полосу шириной 2ε, внутрь которой попадет точка $M(a; A)$ (рис. 1.24). Наличие у функции $f(x)$ при $x \to a$ предела A геометрически интерпретируется так: как бы узка ни была полоса между прямыми $y=A-\varepsilon$ и $y=A+\varepsilon$ (это соответствует фразе «как бы ни было мало $\varepsilon>0$»), всегда вокруг точки a можно создать такую окрестность $(a-\delta; a+\delta)$ (это соответствует фразе «можно найти соответствующее $\delta>0$»), что все точки кривой $y=f(x)$ (за исключением, быть может, точки с абсциссой a, т. е. $f(a)$, если такая точка есть у графика), абсциссы которых принадлежат окрестности $(a-\delta; a+\delta)$, попадут в полосу, ограниченную прямыми $y=A-\varepsilon$ и $y=A+\varepsilon$. Разумеется, что кроме указанных точек, в данной полосе

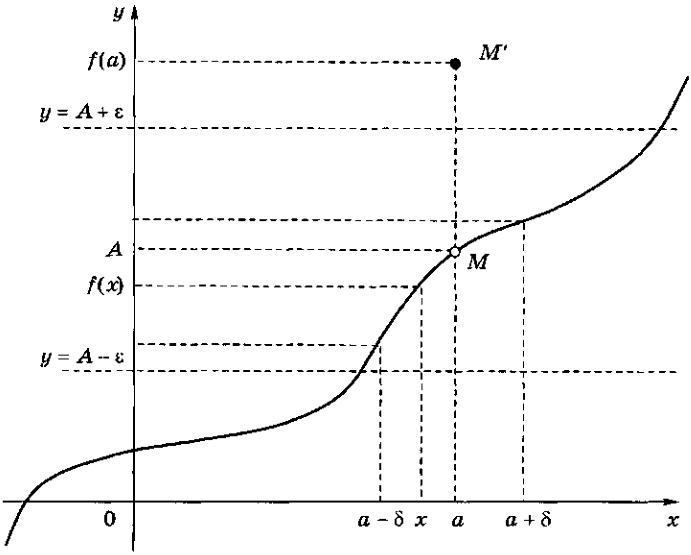


Рис. 1.24

могут оказаться и другие точки, в том числе и точка $M'(a;\ f(a))$, если $f(a)$ существует. Попадет ли внутрь этой полосы точка M' или нет, это для определения предела функции значения не имеет.

Пример. Требуется доказать, что $\lim\limits_{x \to 1}(4x + 2) = 6$.

Доказательство. $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta(\varepsilon) > 0$: $|x - 1| < \delta \Rightarrow |4x + 2 - 6| < \varepsilon$, или $4|x - 1| < \varepsilon$, или $|x - 1| < \dfrac{\varepsilon}{4}$.

Сравнивая два неравенства: $|x - 1| < \delta$ и $|x - 1| < \dfrac{\varepsilon}{4}$, заключаем, что в качестве δ можно взять $\dfrac{\varepsilon}{4}$.

Например, при $\varepsilon = 1$: $\delta = 0{,}25$; при $\varepsilon = 0{,}1$: $\delta = 0{,}025$, т. е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists(\varepsilon) > 0$.■

1.4.3. Основные свойства пределов функции

Свойства пределов выражают правила, по которым можно находить пределы функций. Они называются *правилами предельного перехода*.

Рассмотрим функции $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, которые при $x \to x_0$ имеют пределы, т. е. $\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) = A_1$, $\lim\limits_{x \to x_0} f_2(x) = A_2$.

$\boxed{\text{Т1}}$ ***(о пределе алгебраической суммы).*** *Предел алгебраической суммы двух функций, имеющих пределы при $x \to x_0$, равен алгебраической сумме пределов этих функций, т.е.*

$$\lim_{x\to x_0}(f_1(x)\pm f_2(x)) = \lim_{x\to x_0} f_1(x) \pm \lim_{x\to x_0} f_2(x) = A_1 \pm A_2.$$

$\boxed{\text{Т2}}$ ***(о пределе произведения).*** *Предел произведения двух функций, имеющих пределы при $x \to x_0$, равен произведению пределов этих функций, т.е.*

$$\lim_{x\to x_0}(f_1(x)f_2(x)) = \lim_{x\to x_0} f_1(x) \lim_{x\to x_0} f_2(x) = A_1A_2.$$

$\boxed{\text{С}}$ $\lim\limits_{x\to x_0}(Cf(x)) = C\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, C — const.

$\boxed{\text{Т3}}$ ***(о пределе частного).*** *Предел частного двух функций, имеющих пределы при $x \to x_0$, равен произведению пределов этих функций, если $\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x) = A_2 \neq 0$, т.е.* $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)} = \dfrac{A_1}{A_2}$.

Примеры. Вычислить пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^4+6x^2+5}{4x^4-5x^2+3x}$; 2) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2-x-14}{x^2+8x+12}$;

3) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+4}-3}{\sqrt{x-1}-2}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}[x(\sqrt{x^2+1}-x)]$.

Решение. 1) При $x \to +\infty$ числитель и знаменатель неограниченно увеличиваются, следовательно, получаем неопределенность вида $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$.

Для вычисления предела преобразуем данную дробь, разделив числитель и знаменатель на старшую степень переменной, т.е. на $x^4 \neq 0$ при $x \to +\infty$.

Пользуясь свойствами пределов, получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-x^4+6x^2+5}{4x^4-5x^2+3x} = \lim_{x\to\infty}\frac{-1+\dfrac{6}{x^2}+\dfrac{5}{x^4}}{4-\dfrac{5}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(-1+\dfrac{6}{x^2}+\dfrac{5}{x^4}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(4-\dfrac{5}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}\right)} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty}(-1)+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6}{x^2}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5}{x^4}}{\lim\limits_{x\to\infty}4-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5}{x^2}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{x^3}} = \frac{-1+0+0}{4-0+0} = -\frac{1}{4}.$$

Итак, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^4+6x^2+5}{4x^4-5x^2+3x}=-\dfrac{1}{4}$.

2) При $x=-2$ числитель и знаменатель обращаются в 0, следовательно, получаем неопределенность вида $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$. Преобразуем данную дробь, разложив числитель и знаменатель на множители по формуле разложения квадратного трехчлена:

$$\lim_{x\to-2}\frac{3x^2-x-14}{x^2+8x+12}=\lim_{x\to-2}\frac{3(x+2)\left(x-\frac{7}{3}\right)}{(x+6)(x+2)}=\lim_{x\to-2}\frac{3x-7}{x+6}=\frac{\lim\limits_{x\to-2}(3x-7)}{\lim\limits_{x\to-2}(x+6)}=$$

$$=\frac{3(-2)-7}{-2+6}=-\frac{13}{4}.$$

Итак, $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{3x^2-x-14}{x^2+8x+12}=-\dfrac{13}{4}$.

3) При $x=5$ числитель и знаменатель обращаются в 0, следовательно, получаем неопределенность вида $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$. Преобразуем дробь. Для этого умножим числитель и знаменатель дроби на произведение $\left(\sqrt{x+4}+3\right)\left(\sqrt{x-1}+2\right)\neq 0$ при $x\to 5$ (сопряженные выражения):

$$\lim_{x\to5}\frac{\sqrt{x+4}-3}{\sqrt{x-1}-2}=\lim_{x\to5}\frac{(\sqrt{x+4}-3)(\sqrt{x+4}+3)(\sqrt{x-1}+2)}{(\sqrt{x-1}-2)(\sqrt{x-1}+2)(\sqrt{x+4}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to5}\frac{\left(\left(\sqrt{x+4}\right)^2-3^2\right)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}{\left(\left(\sqrt{x-1}\right)^2-2^2\right)\left(\sqrt{x+4}+3\right)}=\lim_{x\to5}\frac{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)}{(x-5)(\sqrt{x+4}+3)}=\lim_{x\to5}\frac{\sqrt{x-1}+2}{\sqrt{x+4}+3}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to5}(\sqrt{x-1}+2)}{\lim\limits_{x\to5}(\sqrt{x+4}+3)}=\frac{\sqrt{5-1}+2}{\sqrt{5+4}+3}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$

Итак, $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{x+4}-3}{\sqrt{x-1}-2}=\dfrac{2}{3}$.

4) $$\lim_{x\to\infty}\left[x(\sqrt{x^2+1}-x)\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x(x^2+1-x^2)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{1}{2}.$$

Рассмотрим тот же самый пример, но при $x \to -\infty$. Тогда

$$\sqrt{x^2+1} = \sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = |x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = -x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \text{ при } x<0.$$

Имеем: $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{1-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = -\infty.$

1.4.4. Первый замечательный предел (предел отношения синуса угла к радианной мере этого угла)

$\boxed{\text{Т}}$ *Рассмотрим функцию* $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$. *Эта функция в точке* $x = 0$ *не определена, тем не менее ее предел при* $x \to 0$ *существует, причем* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Доказательство (рис. 1.25).

$$|AB| < \overset{\smile}{ACB} < |AD| + |BD|$$

$$2\sin x < 2x < 2\operatorname{tg} x \Rightarrow \sin x < x < \operatorname{tg} x \Rightarrow 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Но так как $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$ ($\cos x \to 1$ при $x \to 0$) и $\lim\limits_{x\to 0} 1 = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1.$ ■

$\boxed{\text{С}}$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{ax} = 1;$ $\quad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax}{\sin ax} = 1;$ $\quad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{bx} = \dfrac{a}{b};$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx} = \dfrac{a}{b};$ $\quad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} ax}{ax} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax}{\operatorname{tg} ax} = 1;$ $\quad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} ax}{bx} = \dfrac{a}{b};$

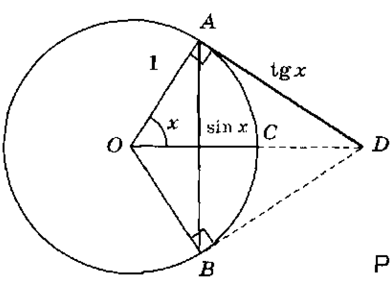


Рис. 1.25

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} ax}{\operatorname{tg} bx}=\frac{a}{b};\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin ax}{bx}=\frac{a}{b};\qquad \lim_{x\to 0}\frac{ax}{\arcsin bx}=\frac{a}{b}.$$

Примеры. 1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot 2\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}.$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{ctg}2x\cdot\operatorname{tg}3x=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}3x}{\operatorname{tg}2x}=\dfrac{3}{2}.$ 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{ctg}5x}{\operatorname{ctg}3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}3x}{\operatorname{tg}5x}=\dfrac{3}{5}.$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{4x\cdot\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x(1-\cos^2 x)}{4x\cdot\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x\cdot\sin^2 x}{4x\cdot\sin x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x\cdot\sin x}{4x}=\dfrac{1}{4}\lim\limits_{x\to 0}\cos x\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{1}{4}\cdot 1\cdot 1=\dfrac{1}{4}.$

1.4.5. Второй замечательный предел (число е)

$\boxed{\text{T}}$ *Выражение* $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, *где n — натуральное число, стремится к вполне определенному пределу, когда число $n\to+\infty$. Этот предел больше 2 и меньше 3.*

Доказательство. Рассмотрим бином Ньютона:

$$(a+b)^n=a^n+\frac{n}{1!}a^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3+\ldots+$$
$$+\frac{n(n-1)\ldots[n-(k-1)]}{k!}a^{n-k}b^k+\ldots+b^n.$$

В нашем случае: $a=1$ и $b=\dfrac{1}{n}$. Получим

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{n}{1}\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k}+\ldots+\frac{1}{n^n}=2+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+$$
$$+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{n^n}.$$

С одной стороны: $\left(1-\dfrac{1}{n}\right)>0$; $\left(1-\dfrac{2}{n}\right)>0$; $\left(1-\dfrac{k-1}{n}\right)>0.$

Очевидно, что $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n > 2$.

С другой стороны, число в каждой из скобок меньше 1 и, следовательно,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...+\frac{1}{k!}+\frac{1}{n^n} < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^k}+...+\frac{1}{2^n}.$$

Рассмотрим сумму: $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+...+\dfrac{1}{2^k}+...+\dfrac{1}{2^n}$ — это бесконечно убывающая геометрическая прогрессия ($a_1 = 1$; $q = \dfrac{1}{2}$); $S = \dfrac{a_1}{1-q} = \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2}} = 2$. Имеем: $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < 3$. Окончательно: $2 < \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < 3$ для любого натурального числа n.

С увеличением числа n число в каждой скобке возрастает, стремясь к единице, следовательно, переменная величина $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ монотонно возрастает, оставаясь ограниченной. А такая переменная величина имеет предел. Обозначим $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$ ($\mathrm{e} \approx 2{,}718281828459045$).

Докажем теперь, что выражение $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ будет стремиться к тому же пределу e, если x будет стремиться к $+\infty$, принимая любые значения.

Пусть n — наибольшее целое число, заключающееся в x, т. е. $n \le x < n+1$. Тогда: $\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x < \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ (убедитесь в этом самостоятельно).

$$\text{Но } \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\frac{\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\dfrac{1}{n+1}} = \frac{\mathrm{e}}{1} = \mathrm{e}.$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^1 = \mathrm{e}\cdot 1 = \mathrm{e}.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$

Нам остается рассмотреть лишь случай, когда $x \to -\infty$.
Пусть $x = -1 - y$. Тогда $y = -1 - x$ и при $x \to -\infty \Rightarrow y \to +\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{-1-y}\right)^{-1-y} = \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{-y}{-1-y}\right)^{-1-y} = \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{1+y}{y}\right)^{1+y} =$$

$$= \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{1+y} = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\left(1+\frac{1}{y}\right)^1 = e\cdot 1 = e.$$

Окончательно, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$ ■

C1 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right) = e^k.$

C2 Сделаем замену: $\frac{1}{x} = y \Rightarrow x = \frac{1}{y}$. Тогда при $x \to \infty$ $y \to 0$ и

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y\to0}(1+y)^{\frac{1}{y}} = e.$$

***Примеры.* 1.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4n-5}{4n-3}\right)^{3n+5} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{(4n-3)-2}{4n-3}\right)^{3n+5} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{4n-3}\right)^{3n+5}$

{Замена: $-\frac{2}{4n-3} = \frac{1}{y} \Rightarrow 4n-3 = -2y \Rightarrow 4n = 3-2y \Rightarrow$

$\Rightarrow n = \frac{3}{4}-\frac{1}{2}y \Rightarrow 3n+5 = \frac{9}{4}-\frac{3}{2}y+5 = \frac{29}{4}-\frac{3}{2}y$. При $n \to +\infty \Rightarrow y \to +\infty$.}

Имеем:

$$\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{\frac{29}{4}-\frac{3}{2}y} = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{\frac{29}{4}}\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{-\frac{3}{2}y} = 1\left(\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right)^{-\frac{3}{2}} = e^{-3/2} = \frac{1}{e\sqrt{e}}.$$

2. $\lim\limits_{x\to0}(1-3x)^{\frac{2}{x}} = \lim\limits_{y\to0}(1+y)^{-\frac{6}{y}} = (\lim\limits_{y\to0}(1+y)^{\frac{1}{y}})^{-6} = e^{-6}.$

{Замена: $-3x = y \Rightarrow x = -\frac{1}{3}y \Rightarrow \frac{2}{x} = \frac{2}{-\frac{1}{3}y} = -\frac{6}{y}$. При $x \to 0 \Rightarrow y \to 0$.}

1.4.6. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

$\boxed{\text{О}}$ Функция $\alpha(x)$ называется ***бесконечно малой*** функцией при $x \to a$ (или в окрестности точки a), если $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x) = 0$.

$\boxed{\text{О}}$ Функция $\alpha(x)$ называется ***бесконечно большой*** функцией при $x \to a$ (или в окрестности точки a), если $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x) = +\infty$.

1.4.7. Сравнение бесконечно малых

Пусть функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются бесконечно малыми при $x \to a$. Характер приближения к нулю функций $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ может быть различен, т.е. одна из них может стремиться к нулю быстрее, чем другая.

В ряде исследований возникает необходимость сравнить бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ между собой в отношении быстроты стремления к нулю в окрестности данной точки. В основе такого сравнения рассматривают $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$, предполагая, что б/м, стоящая в знаменателе, не обращается в нуль в некоторой окрестности точки a. При этом возможны четыре случая.

Случай 1. Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \quad (A \neq 0)$, то говорят, что $\alpha(x)$ — бесконечно малая того же порядка малости, что и бесконечно малая $\beta(x)$ при $x \to a$.

Примеры. 1. $\alpha(x) = \sin 2x$; $\beta(x) = \sin 3x$: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x} = \dfrac{2}{3}$.

2. $\alpha(x) = x^3 - 1$; $\beta(x) = x^2 - 1$: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x+1}{x+1} = \dfrac{3}{2}$.

Случай 2. Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то $\alpha(x)$ называется бесконечно малой высшего порядка малости по сравнению с бесконечно малой $\beta(x)$ при $x \to a$. Напротив, $\beta(x)$ называется при этом бесконечно малой низшего порядка малости по сравнению с бесконечно малой $\alpha(x)$ при $x \to a$.

Примеры. 1. $\alpha(x) = 5x^4$; $\beta(x) = x^2$: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^4}{x^2} = 0$.

2. $\alpha(x) = \dfrac{4}{x^3}$; $\beta(x) = \dfrac{1}{x}$: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{4}{x^3}}{\frac{1}{x}} = 0$.

3. $\alpha(x) = x$; $\beta(x) = \sqrt{x}$: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{x}} = 0$.

4. $\alpha(x) = 1 - \cos x$; $\beta(x) = 2x$: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{2x} = 0$.

Случай 3. Если порядок бесконечно малой $\alpha(x)$ выше порядка бесконечно малой $\beta(x)$, то $\alpha(x)$ стремится к нулю быстрее, чем $\beta(x)$.

Если не существует предела $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$, то бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ нельзя сравнить.

Пример. $\alpha(x) = x^2\sin\dfrac{1}{x}$; $\beta(x) = x^2$. Не существует $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$.

Случай 4. Всякая бесконечно малая $\beta(x)$, порядок которой одинаков с порядком бесконечно малой $[\alpha(x)]^k$, где k — положительное число, называется бесконечно малой k-го порядка по сравнению с бесконечно малой $\alpha(x)$ при $x \to a$.

Пример. $\beta(x) = \operatorname{tg} x - \sin x$; $\alpha(x) = 2x$.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{(2x)^3} = \dfrac{1}{8} \Rightarrow \beta(x)$ — бесконечно малая 3-го порядка по сравнению с бесконечно малой $\alpha(x)$ при $x \to 0$.

1.4.8. Эквивалентные бесконечно малые

$\boxed{\text{О}}$ Две бесконечно малые величины $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются ***эквивалентными*** (равносильными) при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$.

В этом случае пишут, что $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Если $\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$, то

1) $\sin\alpha(x) \sim \alpha(x)$, $\operatorname{tg}\alpha(x) \sim \alpha(x)$, $\arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x)$, $\operatorname{arctg}\alpha(x) \sim \alpha(x)$;

2) $\ln[1+\alpha(x)] \sim \alpha(x)$; $\log_a[1+\alpha(x)] \sim \dfrac{\alpha(x)}{\ln a}$;

3) $a^{\alpha(x)} \sim 1+\alpha(x)\cdot\ln a$; $e^{\alpha(x)} \sim 1+\alpha(x)$;

4) $[1+\alpha(x)]^n \sim 1+n\alpha(x)$; $\sqrt[n]{1+\alpha(x)} \sim 1+\dfrac{1}{n}\alpha(x)$; $\sqrt{1+x} \sim 1+\dfrac{1}{2}\alpha(x)$;

5) $\cos\alpha(x) \sim 1-\dfrac{1}{2}[\alpha(x)]^2$.

Соотношения 1 ... 5 образуют таблицу эквивалентных бесконечно малых величин.

$\boxed{\text{Т}}$ *Пусть при $x \to a$ б/м $\alpha(x)$ эквивалентна б/м $\alpha_1(x)$, а б/м $\beta(x) \sim \beta_1(x)$. Тогда $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$ (если они существуют).*

Доказательство. $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \dfrac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)}\dfrac{\beta_1(x)}{\beta(x)}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$;

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)}\lim_{x\to a}\frac{\beta_1(x)}{\beta(x)}\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = 1\cdot 1\cdot\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = \lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}. \blacksquare$$

Таким образом, при вычислении пределов бесконечно малые при $x \to a$ функции можно заменять эквивалентными им.

Примеры. **1.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\sqrt{x}} = 0.$

2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{\operatorname{tg}(4-x^2)} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{4-x^2} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x-3)}{-(x-2)(x+2)} = -\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-3}{x+2} = \dfrac{1}{4}.$

3. $\lim\limits_{x\to b}\dfrac{a^x-a^b}{x-b} = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{a^{b+y}-a^b}{y} = a^b\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{a^y-1}{y} =$

{замена: $x-b=y \Rightarrow x=y+b$. При $x \to b \Rightarrow y \to 0$}

$= a^b\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{1+y\ln a-1}{y} = a^b\ln a.$

$\boxed{\text{С}}$ $\lim\limits_{x\to b}\dfrac{e^x-e^b}{x-b} = e^b.$

4. $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}} = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sqrt{1-y+8}-3}{2+\sqrt[3]{y-8}} = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sqrt{9-y}-3}{2+\sqrt[3]{y-8}} = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{3\sqrt{1-\frac{y}{9}}-3}{2-2\sqrt[3]{1-\frac{y}{8}}} =$

{замена: $y = x + 8$; $x = y - 8$. При $x \to -8 \Rightarrow y \to 0$}

$$= \frac{3}{2}\lim_{y\to 0}\frac{\sqrt{1-\frac{y}{9}}-1}{1-\sqrt[3]{1-\frac{y}{8}}} = \frac{3}{2}\lim_{y\to 0}\frac{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{y}{9}-1}{1-\left(1-\frac{1}{3}\cdot\frac{y}{8}\right)} = \frac{3}{2}\lim_{y\to 0}\frac{-\frac{y}{18}}{\frac{y}{24}} = -\frac{3}{2}\cdot\frac{24}{18} = -2.$$

5. $$\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2} = \lim_{y\to 0}\frac{\sqrt{y+9}-\sqrt[3]{y+27}}{\sqrt[4]{y+16}-2} = \lim_{y\to 0}\frac{3\sqrt{1+\frac{y}{9}}-3\sqrt[3]{1+\frac{y}{27}}}{2\sqrt[4]{1+\frac{y}{16}}-2} =$$

{замена: $x - 7 = y$; $x = y + 7$. При $x \to 7 \Rightarrow y \to 0$}

$$= \frac{3}{2}\lim_{y\to 0}\frac{\sqrt{1+\frac{y}{9}}-\sqrt[3]{1+\frac{y}{27}}}{\sqrt[4]{1+\frac{y}{16}}-1} = \frac{3}{2}\lim_{y\to 0}\frac{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{y}{9}-1-\frac{1}{3}\cdot\frac{y}{27}}{1+\frac{1}{4}\cdot\frac{y}{16}-1} = \frac{3}{2}\lim_{y\to 0}\frac{\frac{y}{18}-\frac{y}{81}}{\frac{y}{64}} =$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\frac{\frac{7y}{81\cdot 2}}{\frac{y}{64}} = \frac{3}{2}\cdot\frac{7\cdot 4\cdot 16}{81\cdot 2} = \frac{112}{27}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Используя определение предела функции, покажите, что $\lim\limits_{x\to 2}(3x-2)=4$.

2. Вычислите пределы функций, используя правила предельного перехода:

1) а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-2x-1}{2x^2-3x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-2x-1}{2x^2-3x+1}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x-1}{2x^2-3x+1}$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}$; 3) $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{x^3-1000}{x^3-20x^2+100x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^5-1}{x^4-1}$;

5) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{4+x+x^2}-2}{x+1}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x}-1}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}}{x^2-x}$; 8) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[4]{x}-1}{x-1}$; 9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{(1+x)^3}-1}{x}$.

3. Вычислите пределы функций, используя таблицу эквивалентных бесконечно малых, первый и второй замечательные пределы:

10) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{\ln(1+3x)}$; 11) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{\ln(1-4x)}$; 12) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{\operatorname{tg}3x}$;

13) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 4x}{\arcsin^2 2x}$; 14) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+3x\sin 2x)}{\operatorname{tg}x^2}$; 15) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x}\right)^{2x}$;

16) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x-1}\right)^{4x}$; 17) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+5x+4}{x^2+3x-7}\right)^{x}$; 18) $\lim\limits_{x\to0}(1-3x)^{\frac{2}{x}}$;

19) $\lim\limits_{x\to0}(1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x})^{\frac{1}{2x}}$; 20) $\lim\limits_{x\to1}(7-6x)^{\frac{x}{3x-3}}$; 21) $\lim\limits_{x\to0}\left(5-\dfrac{4}{\cos x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 3x}}$;

22) $\lim\limits_{x\to0}\left(6-\dfrac{5}{\cos x}\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$; 23) $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x\ln(1+x)}}$; 24) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{\pi-2x}$;

25) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\frac{1}{2}-\cos x}{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}$; 26) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x+1}{2x}\right)^{\frac{1}{1-x}}$; 27) $\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{9-2x}{3}\right)^{\frac{1}{x-3}}$;

28) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\ln(x-1)}{\sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)-1}$; 29) $\lim\limits_{x\to10}\dfrac{\lg x-1}{\sqrt{x-9}-1}$; 30) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\ln(2-x)}}$;

31) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\ln(5-2x)}{\sqrt{10-3x}-2}$; 32) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3^{5x-3}-3^{2x^2}}{\operatorname{tg}\pi x}$; 33) $\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{6-x}{3}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{6}}$;

34) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\ln(2+\cos x)}{\left(3^{\sin x}-1\right)^2}$.

1.5. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ. ТОЧКИ РАЗРЫВА ФУНКЦИИ

1.5.1. Понятие непрерывности функции

$\boxed{\text{О}}$ Функция $f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** $x = x_0$, если:

1) она определена в точке $x = x_0$, т.е. существует ее значение в точке $x = x_0$, равное $f(x_0)$;

2) существует конечный предел функции в точке $x = x_0$, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$;

3) этот предел равен значению функции при $x = x_0$, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) = A$.

Иными словами, $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0\colon 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

$\boxed{\text{О}}$ Функция ***непрерывна на промежутке***, если она непрерывна во всех точках этого промежутка.

Примеры. Исследовать на непрерывность в точке $x_0 = 0$ заданные функции:

1) $y = \dfrac{1}{x}$; 2) $y = \begin{cases} x+1 \text{ при } x \ge 0; \\ x-1 \text{ при } x < 0; \end{cases}$ 3) $y = \begin{cases} x^2 \text{ при } x \ne 0; \\ 1 \text{ при } x = 0; \end{cases}$ 4) $y = x^2$.

Решение. 1) Функция $y = \dfrac{1}{x}$ в точке $x = 0$ не является непрерывной, так как не выполняется первое условие непрерывности — существование $y(0)$ (рис. 1.26).

2) Функция $y = \begin{cases} x+1 \text{ при } x \ge 0 \\ x-1 \text{ при } x < 0 \end{cases}$ в точке $x = 0$ также не является непрерывной (первое условие непрерывности выполняется $f(0) = 1$, но второе условие не выполняется, так как в точке $x_0 = 0$ не существует конечного предела), рис. 1.27.

3) $y = \begin{cases} x^2 \text{ при } x \ne 0 \\ 1 \text{ при } x = 0 \end{cases}$ в точке $x_0 = 0$ не является непрерывной, так как первые два условия непрерывности выполняются, а третье условие не выполняется, т.е. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \ne f(0)$, рис. 1.28.

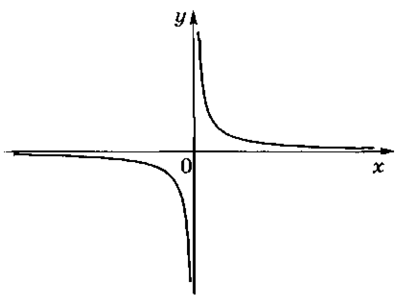


Рис. 1.26

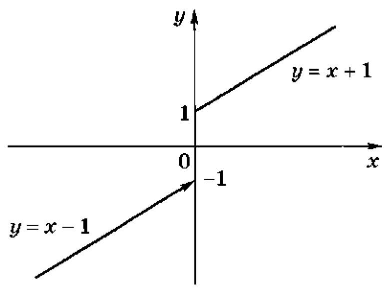


Рис. 1.27

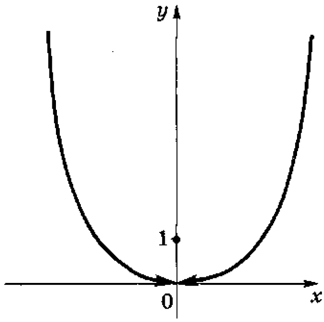


Рис. 1.28

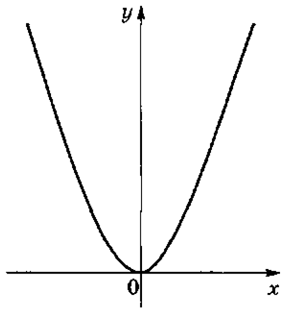


Рис. 1.29

4) Функция $y = x^2$ в точке $x_0 = 0$ является непрерывной, так как все три условия непрерывности в точке x_0 выполняются $(\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0)$, рис. 1.29.

Замечание. Геометрически непрерывность функции в точке x_0 означает, что ее график не разрывается в точке x_0, т. е. состоит из одной непрерывной (сплошной) линии.

Перепишем определение непрерывности в виде $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Пусть $\Delta x = x - x_0 \Rightarrow x = x_0 + \Delta x \Rightarrow \lim\limits_{\Delta x\to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) \Rightarrow$
$\Rightarrow \lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0.$

Из последнего соотношения вытекает другое определение непрерывности функции в точке x_0.

$\boxed{\text{О}}$ Функция $y = f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** x_0, если она определена в этой точке и бесконечно малому приращению аргумента Δx соответствует бесконечно малое приращение функции Δy, т. е. $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0$.

Непрерывность функции в данной точке x дает гарантию того, что если немного сдвинуться из этой точки, то значение функции изменится тоже совсем немного.

С помощью данного определения на практике производится исследование функции на непрерывность.

Примеры. 1. Показать, что функция $y = x^2$ является непрерывной в каждой точке числовой прямой.

Решение. Вычислим приращение функции при заданном приращении аргумента $\Delta x = x - x_0$ в произвольной точке $x_0 \in \mathrm{R}$:

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 =$$
$$= x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + \Delta x^2.$$

Далее вычислим

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}(2x_0\Delta x+\Delta x^2)=2x_0\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x+\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x^2=2x_0\cdot 0+0^2=0.$$

Итак, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f(x_0)=0$. А это означает, что функция $y=x^2$ является непрерывной в любой точке числовой прямой.

2. Показать, что функция $y=\cos x$ является непрерывной в каждой точке числовой прямой.

Решение. $\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\cos(x_0+\Delta x)-\cos x_0=$

$$=-2\sin\frac{x_0+\Delta x+x_0}{2}\cdot\sin\frac{x_0+\Delta x-x_0}{2}=-2\sin\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\sin\frac{\Delta x}{2};$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f(x_0)=-2\lim_{\Delta x\to 0}\sin\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\sin\frac{\Delta x}{2}=-2\sin x_0\cdot 0=0.$$

Итак, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f(x_0)=0$. А это означает, что функция $y=\cos x$ является непрерывной в любой точке числовой прямой.

Т *Пусть функция $y=\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $f(y)$ непрерывна в точке $y_0=\varphi(x_0)$. Тогда сложная функция $f[\varphi(x)]$ непрерывна в точке x_0 и $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f[\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)]$, т.е. операция предельного перехода перестановочна с операцией взятия непрерывной функции.*

Примеры. **1.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2x-1}{2x^2-3x-2}\right)^{\frac{2x-3}{x+1}}=\left(\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x-1}{2x^2-3x-2}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-3}{x+1}}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}.$

С Рассмотрим $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)^{\varphi(x)}$, причем $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=1$;

$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\pm\infty$. Так как $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=1$, то $f(x)=1+\alpha(x)\Rightarrow$

$$\Rightarrow\lim_{x\to x_0}(1+\alpha(x))^{\varphi(x)}=\lim_{\alpha\to 0}\left[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\alpha\varphi(x)}=\left[\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\lim\limits_{\alpha\to 0}\alpha\varphi(x)}=$$

$$=e^{\lim\limits_{\alpha\to 0}\alpha\varphi(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-1)\varphi(x)}.$$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln(1+x)=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=$

$$=\ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=\ln e=1.$$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x\cdot 2^x}{1+x\cdot 3^x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1;\quad \lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)=+\infty;$

$$f-1=\frac{1+x\cdot 2^x}{1+x\cdot 3^x}-1=\frac{1+x\cdot 2^x-1-x\cdot 3^x}{1+x\cdot 3^x}=\frac{x(2^x-3^x)}{1+x\cdot 3^x};$$

$$(f-1)\varphi=\frac{x(2^x-3^x)}{1+x\cdot 3^x}\frac{1}{x^2}=\frac{2^x-3^x}{x(1+x\cdot 3^x)}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^x-3^x}{x(1+x\cdot 3^x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x\ln 2-1-x\ln 3}{x\left[1+x(1+x\ln 3)\right]}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln 2-\ln 3}{1+x+x^2\ln 3}=\ln 2-\ln 3=\ln\frac{2}{3}.$$

Окончательно, $e^{\ln\frac{2}{3}}=\dfrac{2}{3}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{\log_a(1+y)}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{\dfrac{\ln(1+y)}{\ln a}}=\ln a\cdot\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{\ln(1+y)}=\ln a.$

{Замена: $a^x-1=y\Rightarrow a^x=y+1\Rightarrow x=\log_a(1+y)$.}

$\boxed{\text{C}}$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=\ln e=1.$

5. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-x^a}{x-a}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{a^{a+y}-(a+y)^a}{y}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{a^a a^y-a^a(1+\frac{y}{a})^a}{y}=$

{замена: $x-a=y\Rightarrow x=y+a$}

$=a^a\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{a^y-(1+\frac{y}{a})^a}{y}=a^a\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{1+y\ln a-(1+a\frac{y}{a})}{y}=a^a\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{1+y\ln a-1-y}{y}=$

$=a^a(\ln a-1).$

1.5.2. Свойства непрерывных функций

Приведем основные свойства непрерывных функций (свойства 1 ... 3 определяют непрерывность функции в точке, свойство 4 — на промежутке).

Свойство 1. Сумма двух непрерывных функций в точке x_0 является функцией непрерывной в этой точке, т. е. если $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)=f_1(x_0)$, $\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)=f_2(x_0)$, то

$$\lim_{x \to x_0}(f_1(x) + f_2(x)) = f_1(x_0) + f_2(x_0).$$

Свойство 2. Произведение двух непрерывных функций в точке x_0 является функцией, непрерывной в точке x_0, т. е.

$$\lim_{x \to x_0}(f_1(x) f_2(x)) = f_1(x_0) f_2(x_0).$$

Свойство 3. Частное двух непрерывных функций в точке x_0 является непрерывной функцией в точке x_0, если $f_2(x_0) \neq 0$, т. е.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{f_1(x_0)}{f_2(x_0)}.$$

Свойство 4. Все основные элементарные функции ($y = x^\alpha$, $y = a^x$, $y = e^x$, $y = \log_a x$, $y = \ln x$, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$) являются непрерывными в их области определения.

1.5.3. Основные теоремы о непрерывных функциях (на отрезке)

Т ***Первая теорема Коши.*** *Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна в замкнутом промежутке $[a; b]$ и на концах этого промежутка принимает значения* ***разных*** *знаков. Тогда между a и b найдется точка c, в которой функция обратится в нуль* (рис. 1.30, 1.31).

Т ***Вторая теорема Коши.*** *Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна в некотором промежутке (конечном или бесконечном, замкнутом или незамкнутом). Если в двух точках*

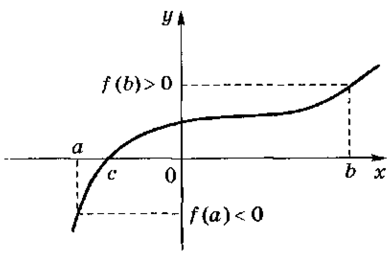


Рис. 1.30

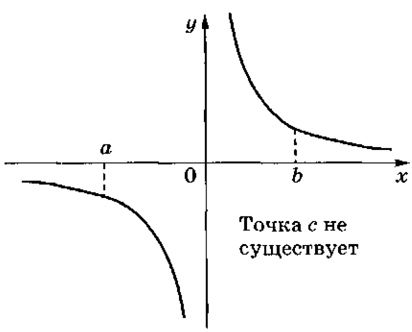


Рис. 1.31

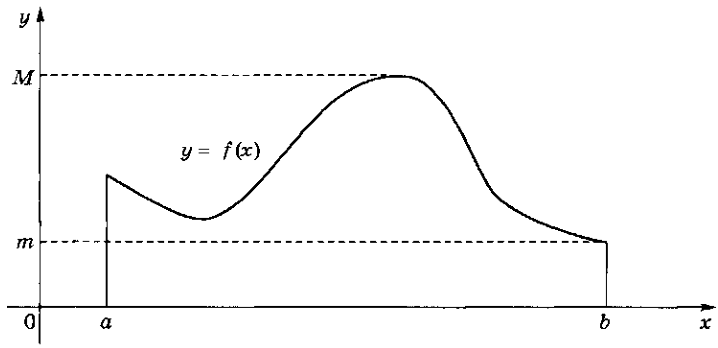


Рис. 1.32

$x = a$ и $x = b$ ($a < b$) этого промежутка функция принимает неравные значения $f(a) = A$ и $f(b) = B$, то каково бы ни было число C, лежащее между A и B, найдется точка $x = c$, лежащая между a и b, такая, что $f(c) = C$ (переходя от одного значения к другому, функция хотя бы раз проходит через каждое промежуточное значение).

[Т] ***Теорема Вейерштрасса.*** *Если функция определена и непрерывна в некотором замкнутом промежутке $[a; b]$, то она* ***ограничена****, т.е. существуют постоянные и конечные числа m и M такие, что $m \le f(x) \le M$ при $a \le x \le b$* (рис. 1.32).

1.5.4. Точки разрыва функции и их классификация

[О] Если в какой-либо точке x_0 функция $y = f(x)$ не является непрерывной, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \ne f(x_0)$, то точка $x = x_0$ называется ***точкой разрыва*** этой функции, а ***функция*** $y = f(x)$ называется ***разрывной*** в этой точке.

Замечание. В данном определении предполагается, что функция определена в некоторой окрестности точки x_0, а в самой точке x_0 функция может быть как определена, так и не определена.

Введем определение односторонних пределов функции $y = f(x_0)$ в точке x_0.

[О] Пусть аргумент $x \to x_0$ остается все время слева от x_0, т.е. $x < x_0$. Если при этом условии функция $f(x)$ имеет предел — число A_1, то это число называется ***односторонним пределом*** функции слева в точке x_0 и обозначается: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x<x_0)}} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = A_1$.

Аналогично определяется односторонний предел функции справа, т.е. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x>x_0)}} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = A_2$.

$\boxed{\text{О}}$ Точка x_0 называется ***точкой разрыва I рода*** функции $f(x)$, если в этой точке функция $f(x)$ имеет конечные односторонние пределы слева и справа, т.е. существуют

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = A_1 \text{ и } \lim_{x\to x_0+0} f(x) = A_2.$$

При этом возможны два случая.

Случай 1. $A_1 = A_2$. В таком случае точка x_0 называется ***точкой устранимого разрыва***.

Пример (рис. 1.33). $y = \begin{cases} x+1, & x<0; \\ x+1, & x>0. \end{cases}$

Случай 2. $A_1 \neq A_2$. В этом случае величина $A = |A_1 - A_2|$ называется ***скачком функции*** $f(x)$ в точке x_0.

Пример (рис. 1.34). $y = \dfrac{|x|}{x} = \begin{cases} -1, & x<0; \\ 1, & x>0. \end{cases}$

$A = |-1 - 1| = 2$.

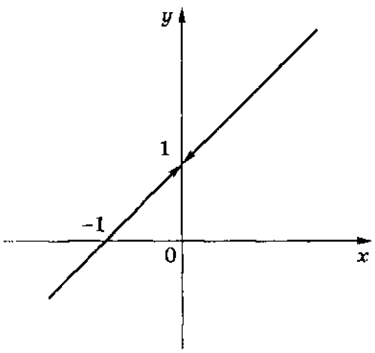


Рис. 1.33

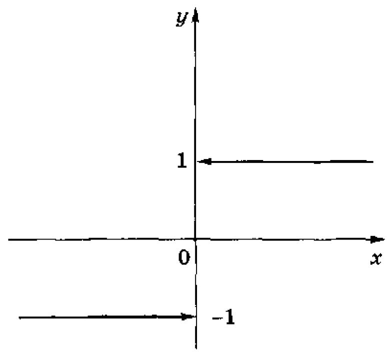


Рис. 1.34

$\boxed{О}$ Точка x_0 функции $f(x)$ называется ***точкой разрыва II рода***, если нет по крайней мере одного конечного одностороннего предела функции в этой точке.

Пример (рис. 1.35). $y=\dfrac{1}{x-1}$.

Рассмотрим примеры исследования функций на непрерывность и точки разрыва.

Примеры. 1. $y=\dfrac{x}{x-2}$.

Решение. Данная функция определена при всех $x \neq 2$, т.е. определена на промежутках $(-\infty;2) \cup (2;+\infty)$. В области определения данная функция является непрерывной как частное от двух непрерывных функций.

Точкой разрыва функции является единственная точка $x_0 = 2$.

Для исследования типа разрыва вычислим односторонние пределы при $x \to 2$: $\lim\limits_{x\to 2-0}\dfrac{x}{x-2}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{x}{x-2}=+\infty$, следовательно, $x_0 = 2$ — точка разрыва II рода (рис. 1.36).

2. $y=3^{\frac{1}{x}}$.

Решение. Функция определена и непрерывна на промежутках $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$. Точка $x_0 = 0$ является точкой разрыва, так как $\lim\limits_{x\to 0}3^{\frac{1}{x}} \neq y(0)$. Вычислим односторонние пределы функции при $x \to 0$:

$\lim\limits_{x\to 0-0} 3^{\frac{1}{x}}=0$, так как при $x \to 0-0$: $\dfrac{1}{x}\to-\infty$, $3^{\frac{1}{x}}\to 0$;

$\lim\limits_{x\to 0+0} 3^{\frac{1}{x}}=+\infty$, так как при $x \to 0+0$: $\dfrac{1}{x}\to+\infty$, $3^{\frac{1}{x}}\to+\infty$.

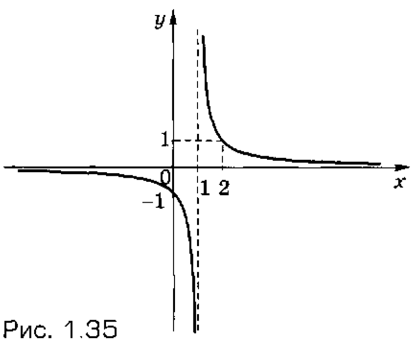


Рис. 1.35

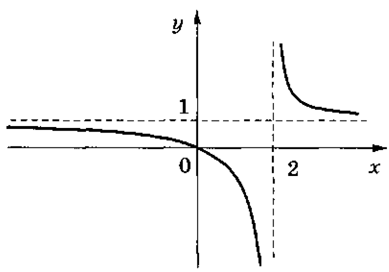


Рис. 1.36

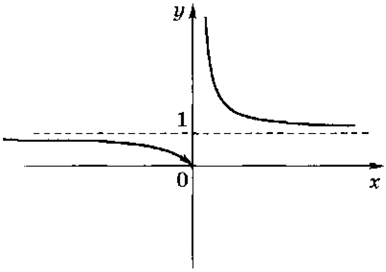


Рис. 1.37

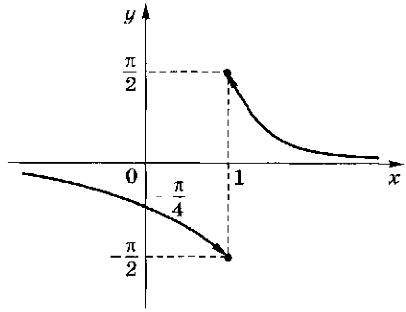


Рис. 1.38

Точка $x_0 = 0$ является точкой разрыва II рода (рис. 1.37).

3. $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-1}$.

Решение. Функция определена и непрерывна на промежутках $(-\infty; 1)\cup(1; +\infty)$. В точке $x_0 = 1$ имеет разрыв I рода, так как

$\lim\limits_{x\to 1-0}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-1} = -\dfrac{\pi}{2}$ — конечный предел, $\lim\limits_{x\to 1+0}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-1} = \dfrac{\pi}{2}$ — конечный предел. Так как эти односторонние пределы различны и конечны, точка $x_0 = 1$ является точкой разрыва I рода (рис. 1.38).

Скачок функции в точке $x_0 = 1$ равен: $\left|-\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{2}\right| = \pi$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Исходя из определения непрерывной функции, докажите непрерывность данных функций в указанных точках:

1) $y = 3x - 1$ в точке $x = -1$;

2) $y = x^2 + 3$ в точке $x = -2$;

3) $y = \dfrac{1}{x}$ в точке $x = 3$;

4) $y = |x|$ в точке $x = 0$;

5) $y = \dfrac{x}{x^2 - 2}$ в точке $x = 2$.

2. Исследуйте функции на непрерывность. Найдите точки разрыва и определите их тип. В случае устранимого разрыва доопределите функцию до непрерывной:

6) $y=\begin{cases}\frac{1}{5}(2x^2+3), \ x\le 1;\\ 6-5x, \ 1<x<3;\\ x-3, \quad x\ge 3;\end{cases}$ 7) $y=\frac{5x^2-3x}{2x}$; 8) $y=\frac{|2x-3|}{2x-3}$;

9) $y=\begin{cases}\frac{|x+2|}{x+2}, \quad x<-2;\\ \sqrt{4-x^2}, \ -2\le x\le 2;\\ \frac{1}{x-2}, \quad x>2;\end{cases}$ 10) $y=\frac{1}{x-x^3}$; 11) $y=\frac{|x+5|}{x+5}-\frac{5}{x}$;

12) $y=\frac{2|x-1|}{x^2-x^3}$; 13) $y=\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$;

14) $y=\begin{cases}\frac{|x+1|}{x+1}x-1, \text{ если } x\ne -1;\\ 1, \quad \text{если } x=-1;\end{cases}$ 15) $y=\frac{x^2-|x|}{x^2+x}$;

16) $y=\frac{x-1+|x-1|}{x^2-1}$; 17) $y=\frac{x^2+|x|+x}{x^2-|x|+3x}$;

18) $y=\frac{2(x-x^3)+|x-x^3|}{2(x-x^3)-|x-x^3|}$; 19) $y=\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$; 20) $y=\frac{e^x-1}{x}$.

1.6. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

1.6.1. Общие понятия

Пусть $y=f(x)$ — непрерывная функция в своей области определения $D(f)$. Рассмотрим произвольную точку $x\in D(f)$. Дадим аргументу x приращение Δx. Получим точку $(x+\Delta x)\in D(f)$. Значение функции в ней $f(x+\Delta x)$. Составим разность $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$. Рассмотрим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Это отношение показывает, во сколько раз на данном промежутке $(x;\ x+\Delta x)$ приращение функции y больше приращения аргумента x; иными словами, оно дает среднюю скорость изменения функции y относительно аргумента x. Чем меньше будет Δx, тем лучше будет отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ описывать относительное поведение функции y в непосредственной близости точки x. Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$ (при этом в силу непрерывности функции y приращение Δy также будет стремиться к 0) и предполагая, что соответствующий предельный переход имеет смысл, получим величину $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, характеризующую поведение функции в самой точке x. Этот предел и носит название производной $y' = f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

О ***Производной функции*** называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

Можно сказать, что производная y' функции $y = f(x)$ в данной точке x представляет собой *относительную* (по отношению к аргументу x) *скорость изменения функции* в точке x, понимая под этим, что y' с любой степенью точности дает относительную среднюю скорость изменения функции y в ближайшем соседстве с точкой x. Например, если в некоторой точке x имеется $y' = 2$, то это означает, что на участке $(x; x + \Delta x)$ функция y возрастает приблизительно в два раза быстрее, чем аргумент x, т.е. $\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx 2$. При этом данное приближенное соотношение будет тем точнее, чем меньше Δx.

Формулу для производной можно записать в другом виде:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Пример. Пользуясь определением, найти производную функции $y = x^2$ ($f(x) = x^2$).

Решение. $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2$;

$f(x + \Delta x) - f(x) = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$;

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

1.6.2. Механический смысл производной

Особенно наглядный смысл получает производная функции $y = f(x)$, если под аргументом понимать время t ($y = f(t)$).Тогда отношение $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ представляет собой среднюю скорость изменения функции y за промежуток времени $(t;\ t + \Delta t)$, а предел этого отношения $y' = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}$ есть скорость изменения функции y в момент времени t, т.е. истинная (мгновенная) скорость изменения функции y в данный момент времени t.

1.6.3. Геометрический смысл производной

Из графика (рис. 1.39) видно, что $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg}\varphi$. При $\Delta x \to 0 \Rightarrow \varphi \to$ $\to \alpha \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi \to \operatorname{tg}\alpha \Rightarrow \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg}\alpha$.

Таким образом, $f'(x) = \operatorname{tg}\alpha$, где $\operatorname{tg}\alpha$ есть угловой коэффициент касательной к кривой $y = f(x)$ в точке x (т.е. в тех точках, где существует производная, график функции имеет касательную).

$\boxed{\text{C}}$ Напишем уравнение касательной и нормали к плоской кривой $y = f(x)$ в данной точке $A(x_0;\ y_0)$.

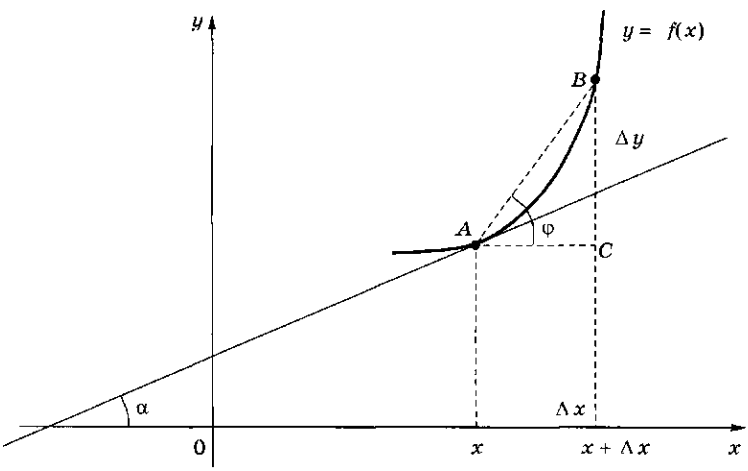


Рис. 1.39

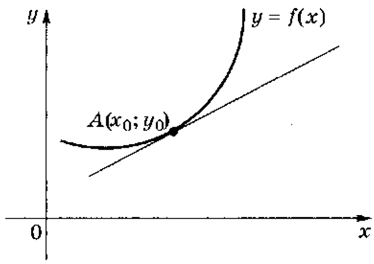


Рис. 1.40

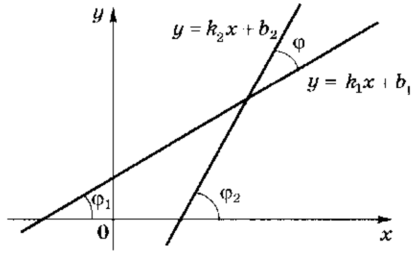


Рис. 1.41

Уравнение касательной. Рассмотрим вначале уравнение прямой, проходящей через данную точку $A(x_0;\ y_0)$ и имеющую данный угловой коэффициент k (рис. 1.40). Оно записывается в виде: $y - y_0 = k(x - x_0)$.

Поскольку прямая является касательной к плоской кривой $y = f(x)$ в точке $A(x_0;\ y_0)$, можно заключить, что $k = y'(x_0)$ и, следовательно, искомое уравнение касательной имеет вид:

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)\,.$$

Пример. Написать уравнение касательной к кривой $y = 2x^2$ в точке $(-1;\ 2)$.

Решение. $y' = 4x$; $y'(-1) = -4 \Rightarrow y - 2 = -4(x + 1) \Rightarrow y = -4x - 2$.

Уравнение нормали. Рассмотрим вначале вывод формулы, выражающей угол между двумя прямыми $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ (рис. 1.41).

Поскольку $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, то $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \dfrac{\operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_1}{1 + \operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2}$.

Но $\operatorname{tg}\varphi_1 = k_1$; $\operatorname{tg}\varphi_2 = k_2$, следовательно, $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$. Из этой формулы сделаем два важных вывода:

- если прямые параллельны, то угол между ними $\varphi = 0° \Rightarrow$ $\Rightarrow k_2 - k_1 = 0 \Rightarrow k_1 = k_2$ (дробь равна нулю, когда числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю).

Таким образом, если прямые параллельны, то их угловые коэффициенты равны между собой;

- если прямые перпендикулярны, то угол между ними $\varphi = 90° \Rightarrow$ $\Rightarrow \operatorname{tg}\varphi$ не существует $\Rightarrow 1 + k_1k_2 = 0 \Rightarrow k_2 = -\dfrac{1}{k_1}$ (дробь не существует, когда ее знаменатель равен нулю).

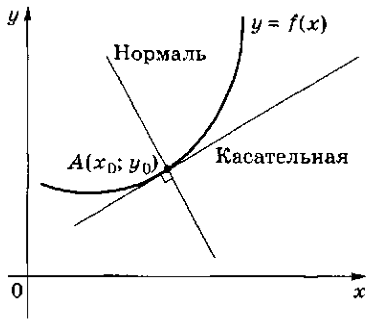


Рис. 1.42

Таким образом, если прямые перпендикулярны, то их угловые коэффициенты связаны соотношением $k_2 = -\frac{1}{k_1}$.

Уравнение нормали к плоской кривой $y = f(x)$ (рис. 1.42) в точке $A(x_0; y_0)$ имеет вид: $y - y_0 = k\,(x - x_0)$. Поскольку нормаль перпендикулярна касательной, то ее угловой коэффициент $k = -\frac{1}{y'(x_0)}$.

Окончательно уравнение нормали имеет вид

$$y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0).$$

Пример. Написать уравнение нормали к кривой $y = \ln x$ в точке (1; 0).

Решение. $y' = \frac{1}{x}$; $y'(1) = 1$. Искомое уравнение нормали имеет вид: $y - 0 = -\frac{1}{1}(x - 1)$, или $y = -x + 1$.

1.6.4. Экономический смысл производной

Пусть непрерывная функция $y = f(x)$ описывает, например, зависимость издержек производства (суммарных затрат) y от объема x выпускаемой продукции.

Если объем производства увеличится с x до $x + \Delta x$, т.е. на Δx единиц, то издержки производства возрастут на $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ единиц.

Отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ дает среднее приращение издержек производства при изменении объема производства на Δx единиц с исходного значения в x единиц.

Предел отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при условии $\Delta x \to 0$, т.е. $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ дает нам так называемые *предельные издержки производства*, которые попытаемся интерпретировать следующим образом.

При малых Δx формулу $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ можно записать в виде: $\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(x)$, откуда $\Delta y \approx f'(x)\,\Delta x$ или $f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\,\Delta x$.

Если x велико, а Δx мало и равно 1, то $f(x+1) - f(x) \approx f'(x) \cdot 1$ или $f'(x) \approx f(x+1) - f(x)$. Таким образом, предельные издержки производства равны дополнительным затратам на производство продукции при увеличении объема производства на малую единицу Δx, если исходный объем производства составляет x единиц.

Пример. Пусть непрерывная функция $y = f(x)$ выражает зависимость объема производимой некоторой фирмой за единицу времени продукции y от объема затраченного ресурса x — численности работников фирмы. Предположим, что в некоторый момент времени на фирме было x работников (x достаточно велико) и приняли еще одного. Тогда $f'(x) \approx f(x+1) - f(x)$ есть не что иное, как количество единиц добавочной продукции, производимой новым сотрудником фирмы за единицу времени.

Если C — единица продукции, а p — заработная плата работника за единицу времени, то при $Cf'(x) > p$ нужно нанимать еще одного работника, так как он приносит фирме больше, чем она ему платит. Это соотношение называется *золотым правилом экономики.*

Таким образом, если непрерывная функция $y = f(x)$ выражает зависимость объема производимой продукции y за единицу времени от объема x человеческого труда, то $f'(x)$ можно назвать предельной производительностью труда в точке x.

Резюмируя вышеизложенное, можно сказать, что многие предельные экономические показатели вычисляются как производные соответствующих экономических функций. К ним можно отнести рассмотренные предельные издержки производства, предельную производительность труда, а также предельный спрос, предельное предложение, предельную выручку и т.д. В этом и состоит экономический смысл производной.

1.6.5. Зависимость между непрерывностью и дифференцируемостью функции

$\boxed{\text{О}}$ Функция называется ***дифференцируемой в некоторой точке*** (области), если она имеет в этой точке (области) ***конечную*** производную, т.е. если существует конечный предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x) .$$

Замечание. В случаях, когда в данной точке $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$, иногда говорят, что функция $f(x)$ имеет в этой точке бесконечную производную. Нетрудно понять, что в этом случае касательная к кривой в соответствующей точке перпендикулярна оси $0x$.

В дальнейшем, отмечая, что производная данной функции существует, не будем иметь в виду случая бесконечной производной.

$\boxed{\text{Т}}$ *Функция $y = f(x)$, имеющая в данной точке x_0 производную, непрерывна в этой точке. (Иными словами, функция, разрывная в данной точке x_0, не может иметь в этой точке производную.)*

Доказательство. По условию существует $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} =$ $= f'(x_0)$, т. е. отношение $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, являющееся функцией от Δx, имеет при $\Delta x \to 0$ предел $f'(x_0)$. Но функцию, имеющую предел в данной точке, можно представить как сумму этого предела и некоторой б/м в окрестности этой точки функции, поэтому (для $\Delta x \neq 0$) имеем: $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x)$, где $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Отсюда: $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta y = f'(x_0)\Delta x +$ $+ \alpha(\Delta x)\Delta x \Rightarrow \Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$, а это и доказывает непрерывность функции $y = f(x)$ в данной точке x_0. ■

Обратное утверждение неверно: из одного только факта непрерывности функции в данной точке (в данной области) еще не следует существование у нее в этой точке (в этой области) производной. Поясним это на примерах.

Примеры.

1. $y = |x| = \begin{cases} -x, & x < 0; \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$ (рис. 1.43).

Рассмотрим точку $x_0 = 0$: $\Delta y = |0 + \Delta x| - |0| = |\Delta x|$.

При $\Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta y \to 0$ — функция непрерывна в точке $x_0 = 0$. Составим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} -1, & \Delta x < 0 \\ 1, & \Delta x > 0 \end{cases}$, т. е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1$ и $\lim\limits_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$

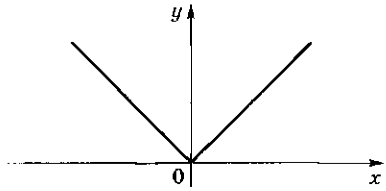


Рис. 1.43

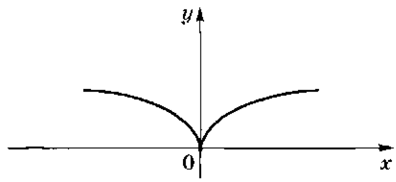


Рис. 1.44

и, следовательно, не существует $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, т. е. для данной функции не существует производной в точке $x_0 = 0$. С геометрической точки зрения это означает, что график функции $y = f(x)$ не имеет в точке $x_0 = 0$ касательной.

2. $y=\sqrt[3]{x^2}$ (рис. 1.44).

Рассмотрим точку $x_0 = 0$: $\Delta y = \sqrt[3]{(0+\Delta x)^2}-\sqrt[3]{0^2}=(\Delta x)^{\frac{2}{3}}$.

При $\Delta x\to 0 \Rightarrow \Delta y\to 0$ — функция непрерывна в точке $x_0 = 0$. Составим отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{(\Delta x)^{\frac{2}{3}}}{\Delta x}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}}\to+\infty$ при $\Delta x\to 0$, т. е. в данном случае имеем бесконечную производную в точке $x_0 = 0$ (касательная к кривой $y=\sqrt[3]{x^2}$ в точке $x_0 = 0$ перпендикулярна оси $0x$, т.е. совпадает с осью $0y$).

1.6.6. Основные правила дифференцирования

Непосредственное вычисление производной функции с помощью предела в большинстве случаев представляет собой громоздкие вычисления. Значительно проще вычислять производные, применяя правила дифференцирования.

Правило 1. *Дифференцирование постоянной.*

Если $y = C = \text{const}$, то $y' = 0$.

Доказательство. $\Delta y = C - C = 0$, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=0$,

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}0=0. \qquad \blacksquare$$

Правило 2. *Дифференцирование алгебраической суммы.*

Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы, т. е.

$$u'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x},\quad v'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x},$$

тогда $(u(x)\pm v(x))'=u'(x)\pm v'(x)$.

Доказательство. Покажем, что $(u(x)+v(x))' = u'(x)+v'(x)$. (Аналогично показывается, что $(u(x)-v(x))' = u'(x)-v'(x)$.)

Обозначим $y(x) = u(x)+v(x)$. Дадим аргументу x приращение Δx, тогда функции получат приращения Δy, Δu, Δv:

$$\Delta u = u(x+\Delta x) - u(x),\quad \Delta v = v(x+\Delta x) - v(x),$$

$$\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x) = u(x+\Delta x) + v(x+\Delta x) - u(x) - v(x) = \Delta u + \Delta v.$$

Составим отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta u+\Delta v}{\Delta x} = \dfrac{\Delta u}{\Delta x} + \dfrac{\Delta v}{\Delta x}$.

Вычислим $y'(x) = (u+v)' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\dfrac{\Delta u}{\Delta x}+\dfrac{\Delta v}{\Delta x}\right) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x} +$

$+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta x} = u'(x)+v'(x).$ ■

Правило 3. *Дифференцирование произведения.*

Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке x, т. е.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = u',\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} = v'.$$

Тогда $(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.

Доказательство. Пусть $y = u(x)v(x)$. Дадим аргументу x приращение Δx. Тогда функции $u(x)$, $v(x)$ и y получат приращения

$$\Delta u = u(x+\Delta x) - u(x),\quad \Delta v = v(x+\Delta x) - v(x),$$
$$\Delta y = u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x).$$

Отсюда находим: $u(x+\Delta x) = u+\Delta u$, $v(x+\Delta x) = v+\Delta v$, $\Delta y = (u + \Delta u)(v+\Delta v) - uv = uv + u\Delta v + \Delta u v + \Delta u\Delta v - uv = u\Delta v + \Delta u v + \Delta u\Delta v$.

Составим отношение:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u\Delta v+\Delta u v+\Delta u\Delta v}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x}v + \frac{\Delta v}{\Delta x}u + \frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v.$$

Вычислим $y' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\dfrac{\Delta u}{\Delta x}v + \dfrac{\Delta v}{\Delta x}u + \dfrac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v\right) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\dfrac{\Delta u}{\Delta x}v\right) +$

$+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\dfrac{\Delta v}{\Delta x}u\right) + \lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\dfrac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v\right) = u'v + uv' + u'\cdot 0$, так как $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v = 0$, поскольку $v(x)$ — непрерывная в точке x функция. Итак,

$$y' = (uv)' = u'v + uv'.$$ ■

$\boxed{C}$ $(Cu)' = Cu'$.

Действительно, $(Cu)' = C'u + Cu' = 0 \cdot u + Cu' = Cu'$.

Правило 4. *Дифференцирование частного.*

Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке x, т.е.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = u',\ \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} = v' \text{ и } v(x)\neq 0.$$

Тогда

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}.$$

Доказательство. Пусть $y = \dfrac{u(x)}{v(x)}$. Дадим аргументу x приращение Δx. Тогда функции $u(x)$, $v(x)$ и y получат приращения

$\Delta u = u(x + \Delta x) - u(x)$, $\Delta v = v(x + \Delta x) - v(x)$,

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = \frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)}.$$

Отсюда находим: $u(x + \Delta x) = u(x) + \Delta u$, $v(x + \Delta x) = v(x) + \Delta v$,

$$\Delta y = \frac{u+\Delta u}{v+\Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{uv + \Delta u v - uv - u\Delta v}{v(v+\Delta v)} = \frac{\Delta u v - u\Delta v}{v(v+\Delta v)}.$$

Составим отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v\Delta v}$. Вычислим

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v\Delta v} = \frac{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\dfrac{\Delta u}{\Delta x}v - u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}\right)}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}(v^2 + v\Delta v)} = \frac{u'v - uv'}{v^2},$$

так как $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v = 0$, поскольку v-функция — непрерывная функция. ■

1.6.7. Дифференцирование сложной и обратной функции

Производная сложной функции. Производная сложной функции равна производной функции по промежуточному аргументу, умноженной на производную аргумента по независимой переменной.

Доказательство. Пусть $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$. Предположим, что эти функции являются непрерывными и имеют производные $f'(u)$ и $\varphi'(x)$. Тогда $y = f(\varphi(x)) = \Phi(x)$ является сложной функцией от x.

Найдем производную этой сложной функции. Для этого дадим аргументу x приращение $\Delta x \neq 0$, тогда функция $u = \varphi(x)$ получит приращение Δu, а функция $y = f(u)$ — приращение Δy. Составим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u}\frac{\Delta u}{\Delta x}$. Вычислим

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\frac{\Delta u}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = f'(u)u'.$$

Итак, производная сложной функции вычисляется по формуле:

$$y' = f'(u)u'. \qquad \blacksquare$$

Производная обратной функции. Рассмотрим непрерывную функцию $y = f(x)$ и пусть она имеет обратную функцию $x = \varphi(y)$.

Вычислим производную $y'_x = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{x'_y}$.

Итак, производные обратных функций вычисляются по формулам:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}, \text{ или } x'_y = \frac{1}{y'_x}.$$

1.6.8. Производные основных элементарных функций

Производная степенной функции. Выведем формулу для производной функции $y = x^n$.

Имеем:

$$y(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^n = x^n + \frac{n}{1!}x^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \dots + (\Delta x)^n$$

(по формуле бинома Ньютона).

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = \frac{n}{1!}x^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \dots + (\Delta x)^n.$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x + \dots + (\Delta x)^{n-1}.$$

$$y'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x + \dots + (\Delta x)^{n-1}\right) = nx^{n-1}.$$

Итак, $\boxed{(x^n)' = nx^{n-1}.}$

$\boxed{\text{C}}$ $y = u^n$, где $u = f(x)$, $y' = nu^{n-1}u' = n[f(x)]^{n-1}f'(x)$.

Примеры. 1. $y = 3x^5$; $y' = 3\cdot 5\cdot x^4 = 15x^4$.

2. $y = 4\sqrt[4]{x^3} = 4x^{3/4}$; $y' = 4\cdot\frac{3}{4}\cdot x^{3/4-1} = 3\cdot x^{-1/4} = \frac{3}{\sqrt[4]{x}}$.

3. $y = \frac{5}{\sqrt[5]{x^3}} = \frac{5}{x^{3/5}} = 5x^{-3/5}$; $y' = 5\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot x^{-3/5-1} = -3\cdot x^{-8/5} = -\frac{3}{\sqrt[5]{x^8}}$.

4. $y = \sqrt{2-3x^4} = (2-3x^4)^{1/2} = u^{1/2}$, где $u = 2 - 3x^4$;

$$y' = \frac{1}{2}u^{1/2-1}\cdot u' = \frac{1}{2}(2-3x^4)^{-1/2}(2-3x^4)' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2-3x^4}}(-12x^3) = -\frac{6x^3}{\sqrt{2-3x^4}}.$$

5. $y = (2\sqrt{x} - x^3)^5 = u^5$, где $u = 2\sqrt{x} - x^3$.

$$y' = 5u^4u' = 5(2\sqrt{x}-x^3)^4(2\sqrt{x}-x^3)' = 5(2\sqrt{x}-x^3)^4\left(2\frac{1}{2\sqrt{x}} - 3x^2\right) =$$

$$= 5(2\sqrt{x}-x^3)^4\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 3x^2\right).$$

Производные тригонометрических функций. Выведем формулы для производных функций $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$.

- $y = \sin x$. Имеем: $y(x + \Delta x) = \sin(x + \Delta x)$.

$$\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x) = \sin(x+\Delta x) - \sin x =$$

$$= 2\sin\frac{x+\Delta x - x}{2}\cos\frac{x+\Delta x + x}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = 1 \cdot \cos x = \cos x.$$

Итак, $\boxed{(\sin x)' = \cos x.}$

C $y = \sin u$, где $u = f(x)$, $y' = \cos u \cdot u' = \cos f(x) \cdot f'(x)$.

Пример. $y = \sin 4x^3 = \sin u$, где $u = 4x^3$.
$y' = \cos u \cdot u' = \cos 4x^3 \cdot (4x^3)' = \cos 4x^3 \cdot 12x^2$.

- $y = \cos x$. $\boxed{(\cos x)' = -\sin x.}$

C $y = \cos u$, где $u = f(x)$, $y' = -\sin u \cdot u' = -\sin f(x) \cdot f'(x)$.

Пример. $y = \cos\sqrt[3]{x} = \cos u$, где $u = \sqrt[3]{x}$.

$$y' = -\sin u \cdot u' = -\sin\sqrt[3]{x} \cdot (\sqrt[3]{x})' = -\sin\sqrt[3]{x} \cdot \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

- $y = \operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

$$y' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}. \text{ Итак, } \boxed{(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x.}$$

C $y = \operatorname{tg} u$, где $u = f(x)$, $y' = \dfrac{1}{\cos^2 u} u' = \dfrac{1}{\cos^2 f(x)} f'(x)$.

Пример. $y = \operatorname{tg}(4 - 2x) = \operatorname{tg} u$, где $u = 4 - 2x$.

$$y' = \frac{1}{\cos^2 u} u' = \frac{1}{\cos^2(4 - 2x)}(4 - 2x)' = \frac{1}{\cos^2(4 - 2x)}(-2).$$

- $y = \operatorname{ctg} x$. $\boxed{(\operatorname{ctg} x)' = \dfrac{-1}{\sin^2 x}.}$

C $y = \operatorname{ctg} u$, где $u = f(x)$, $y' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} u' = -\dfrac{1}{\sin^2 f(x)} f'(x)$.

Пример. $y = \operatorname{ctg} 6x = \operatorname{ctg} u$, где $u = 6x$.

$$y' = -\frac{1}{\sin^2 u}\,u' = -\frac{1}{\sin^2 6x}\,(6x)' = -\frac{1}{\sin^2 6x}\cdot 6.$$

Производные обратных тригонометрических функций. Выведем формулы для производных функций $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

- $y = \arcsin x$ $(-1 \le x \le 1;\ -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2})$. Имеем: $x = \sin y$. Тогда $x'_y = \cos y$, откуда $y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y}$. Но $\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}$ (перед корнем знак «+», так как $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$), откуда $y'_x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Итак, $\boxed{(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.}$

C $y = \arcsin u$, где $u = f(x)$, $y' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}u' = \frac{1}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}f'(x)$.

Пример. $y = \arcsin\sqrt{x} = \arcsin u$, где $u = \sqrt{x}$.

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}u' = \frac{1}{\sqrt{1-x}}(\sqrt{x})' = \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

- $y = \arccos u$, где $u = f(x)$.

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}u' = -\frac{1}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}f'(x).$$

Пример. $y = \arccos\frac{1}{x} = \arccos u$, где $u = \frac{1}{x}$.

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}u' = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\left(-\frac{1}{x^2}\right).$$

- $y = \operatorname{arctg} u$, где $u = f(x)$, $y' = \frac{1}{1+u^2}u' = \frac{1}{1+[f(x)]^2}f'(x)$.

Пример. $y = \operatorname{arctg} x^2 = \operatorname{arctg} u$, где $u = x^2$.

$$y' = \frac{1}{1+u^2}u' = \frac{1}{1+x^4}(x^2)' = \frac{1}{1+x^4}2x.$$

• $y=\operatorname{arcctg} u$, где $u=f(x)$, $y'=-\dfrac{1}{1+u^2}u'=-\dfrac{1}{1+\left[f(x)\right]^2}f'(x)$.

Пример. $y=\operatorname{arcctg}^3 5x=(\operatorname{arcctg} 5x)^3=u^3$, где $u=\operatorname{arcctg} 5x$.

$$y'=3u^2u'=3\operatorname{arcctg}^2 5x(\operatorname{arcctg} 5x)'=3\operatorname{arcctg}^2 5x\left(-\frac{1}{1+25x^2}\cdot 5\right)=$$

$$=-15\frac{\operatorname{arcctg}^2 5x}{1+25x^2}.$$

Производная логарифмической функции. Для функции $y=\ln x$ $(x>0)$ имеем: $y(x+\Delta x)=\ln(x+\Delta x)$;

$$\Delta y=y(x+\Delta x)-y(x)=\ln(x+\Delta x)-\ln x=\ln\frac{x+\Delta x}{x}=\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right).$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}=\frac{1}{x}\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}.$$

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x}\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}=\frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}=\frac{1}{x}\cdot 1=\frac{1}{x}$$

(так как $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\ln(1+z)}{z}=1$). Итак, $\boxed{(\ln x)'=\dfrac{1}{x}.}$

C1 $y=\ln u$, где $u=f(x)$, $y'=\dfrac{1}{u}u'=\dfrac{1}{f(x)}f'(x)$.

C2 $y=\log_a u$, где $a>0$, $a\neq 1$, $u=f(x)$.

$y'=\dfrac{1}{\ln a}\dfrac{1}{f(x)}f'(x)$.

Примеры. 1. $y=\log_{\frac{1}{3}} 3\sqrt[3]{x^2}=\log_{\frac{1}{3}} 3+\log_{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{x^2}=-1+\log_{\frac{1}{3}} x^{\frac{2}{3}}=$

$=-1+\dfrac{2}{3}\log_{\frac{1}{3}} x=-1-\dfrac{2}{3}\log_3 x$.

$$y' = (-1 - \frac{2}{3}\log_3 x)' = 0 - \frac{2}{3}\frac{1}{\ln 3}\frac{1}{x} = -\frac{2}{3\ln 3 \cdot x}.$$

2. $y = \ln\sqrt[3]{\frac{2-x^3}{2+x^3}} = \ln\left(\frac{2-x^3}{2+x^3}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\left[\ln(2-x^3) - \ln(2+x^3)\right] = \frac{1}{3}\left[\ln u - \ln v\right],$

где $u = 2 - x^3$, $v = 2 + x^3$.

$$y' = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{u}u' - \frac{1}{v}v'\right) = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2-x^3}(-3x^2) - \frac{1}{2+x^3}3x^2\right] = -x^2\left[\frac{1}{2-x^3} + \frac{1}{2+x^3}\right] =$$

$$= -\frac{4x^2}{4-x^6}.$$

Производная показательной функции. Для функции $y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$, имеем : $\ln y = \ln a^x = x\ln a$; $x = \frac{1}{\ln a}\ln y$.

$x'_y = \frac{1}{\ln a}\frac{1}{y}$, откуда $y'_x = \frac{1}{x'_y} = y \ln a = a^x \ln a$.

Итак, $\boxed{(a^x)' = a^x \ln a.}$

C1 $y = a^u$, где $u = f(x)$, $y' = a^u \ln a \cdot u' = a^{f(x)} \ln a \cdot f'(x)$.

C2 $y = e^u$, где $u = f(x)$, $y' = e^u u' = e^{f(x)} f'(x)$.

Примеры. 1. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{2-3x^3} = \left(\frac{1}{2}\right)^u$, где $u = 2 - 3x^3$,

$$y' = \left(\frac{1}{2}\right)^u \ln\frac{1}{2} \cdot u' = \left(\frac{1}{2}\right)^{2-3x^3} \ln\frac{1}{2}(-9x^2).$$

2. $y = 3^{\sqrt{1-x}} = 3^u$, где $u = \sqrt{1-x}$.

$$y' = 3^u \ln 3 \cdot u' = 3^{\sqrt{1-x}} \ln 3 \cdot (\sqrt{1-x})' = 3^{\sqrt{1-x}} \ln 3 \cdot \frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}(-1) =$$

$$= -\frac{3^{\sqrt{1-x}}\ln 3}{2\sqrt{1-x}}.$$

3. $y = e^{4-5x} = e^u$, где $u = 4 - 5x$,
$y' = e^u u' = e^{4-5x}(4-5x)' = e^{4-5x}(-5)$.

Логарифмическое дифференцирование. Выведем формулу для производной степенно-показательной функции $y=[f(x)]^{\varphi(x)}$, где $f(x)>0$.

Будем иметь: $\ln y=\ln[f(x)]\varphi^{(x)}=\varphi(x)\ln[f(x)]$.

Взяв производную от обеих частей, получим

$$\frac{1}{y}y'=\varphi'(x)\ln[f(x)]+\varphi(x)\frac{1}{f(x)}f'(x)=A(x).$$

Окончательно:

$$\boxed{y'=A(x)\cdot y=\left[\varphi'(x)\ln[f(x)]+\varphi(x)\frac{1}{f(x)}f'(x)\right]\left[f(x)^{\varphi(x)}\right]}.$$

Примеры. **1.** $y=x^x$.

$f(x)=x\Rightarrow f'(x)=1;\ \ \varphi(x)=x\Rightarrow\varphi'(x)=1.$

$$A(x)=1\cdot\ln x+x\frac{1}{x}\cdot 1=\ln x+1,\ \ y'=A(x)y=(\ln x+1)x^x.$$

2. $y=\dfrac{x^2}{1-x}\sqrt[3]{\dfrac{3-x}{(3+x)^2}}$.

$$\ln y=\ln\left[\frac{x^2}{1-x}\sqrt[3]{\frac{3-x}{(3+x)^2}}\right]=\ln\frac{x^2}{1-x}+\ln\sqrt[3]{\frac{3-x}{(3+x)^2}}=\ln x^2-\ln(1-x)+$$

$$+\ln\left(\frac{3-x}{(3+x)^2}\right)^{\frac{1}{3}}=2\ln x-\ln(1-x)+\frac{1}{3}[\ln(3-x)-2\ln(3+x)].$$

$$\frac{1}{y}y'=2\frac{1}{x}-\frac{1}{1-x}(-1)+\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3-x}(-1)-2\frac{1}{3+x}\right]=\frac{2}{x}+\frac{1}{1-x}-\frac{1}{3}\frac{9-x}{9-x^2}=A(x).$$

$$y'=A(x)y=\left[\frac{2}{x}+\frac{1}{1-x}-\frac{1}{3}\frac{9-x}{9-x^2}\right]\frac{x^2}{1-x}\sqrt[3]{\frac{3-x}{(3+x)^2}}.$$

1.6.9. Применение производной к вычислению пределов. Правило Лопиталя*

Т *Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ при $x\to x_0$ (или $x\to+\infty$) совместно стремятся к нулю или к бесконечности. Если отношение их*

* Г. Ф. де Лопиталь (1661 — 1704) — французский математик, автор первого печатного учебника по дифференциальному исчислению (1696).

производных имеет предел (конечный или бесконечный), то отношение самих функций также имеет предел, равный пределу отношения производных, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

Докажем только, что если при $x\to x_0$ $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=0$ и их производные в точке x_0 существуют, причем $\varphi'(x)\neq 0$, то

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Предполагается, что функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ определены и непрерывны в некоторой окрестности точки x_0 ($\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)=0$; $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\varphi(x_0)=0$) и знаменатель $\varphi(x)$ не обращается в нуль в точках этой окрестности, за исключением самой точки x_0.

Доказательство. Поскольку $f(x_0)=\varphi'(x_0)=0$, то

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{f(x)-f(x_0)}{\varphi(x)-\varphi(x_0)}=\frac{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\dfrac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}}.$$

Тогда

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\dfrac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\frac{f'(x_0)}{\varphi'(x_0)}.\qquad\blacksquare$$

Примеры. 1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^\alpha}=\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\alpha x^\alpha}=0\ (\alpha>0)$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3^x}{x^3}=\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3^x\ln 3}{3x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3^x\ln^2 3}{6x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3^x\ln^3 3}{6}=+\infty$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}(x^2\ln x)=\{0\cdot\infty\}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}=\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}}=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{2}=0$.

4. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)=\{\infty-\infty\}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1\cdot\ln x+x\dfrac{1}{x}-1}{\ln x+(x-1)\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}.$$

5. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\{1^\infty\}$.

Пусть $A=\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$. Тогда $\ln A=\lim\limits_{x\to 0}\ln(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}=$

$$=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{\cos x}(-\sin x)}{2x}=-\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{2x}=-\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{\cos^2 x}}{2}=-\frac{1}{2}.$$

$$\ln A=-\frac{1}{2}\Rightarrow A=e^{-1/2}=\frac{1}{\sqrt{e}}.$$

6. $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg}x)^{\frac{1}{\ln x}}=\{\infty^0\}$.

Пусть $A=\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg}x)^{\frac{1}{\ln x}}$. Тогда $\ln A=\lim\limits_{x\to 0}\ln(\operatorname{ctg}x)^{\frac{1}{\ln x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\operatorname{ctg}x}{\ln x}=$

$$=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{\operatorname{ctg}x}\left(-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)}{\dfrac{1}{x}}=-\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\frac{1}{\cos x}=-1.$$

$$\ln A=-1\Rightarrow A=e^{-1}=\frac{1}{e}.$$

7. $\lim\limits_{x\to 0}x^x=\{0^0\}$.

Пусть $A=\lim\limits_{x\to 0}x^x$. Тогда $\ln A=\lim\limits_{x\to 0}\ln x^x=\lim\limits_{x\to 0}(x\ln x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x}}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to 0}x=0\Rightarrow A=e^0=1.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите производные следующих функций:

1) $y=\dfrac{x^2}{2\sqrt{1-3x^4}}$; 2) $y=2\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$;

3) $y=\sqrt[5]{x+x\sqrt[3]{x}}$; 4) $y=\cos\ln(1-x^2)$;

5) $y=\sin\sqrt{3}+\frac{1}{3}\frac{\sin^2 3x}{\cos 6x}$; 6) $y=\operatorname{ctg}\sqrt[3]{5}-\frac{1}{8}\frac{\cos^2 4x}{\sin 8x}$;

7) $y=\arcsin^3\sqrt{4-5x}$; 8) $y=\arccos\frac{x^2-4}{\sqrt{x^4+16}}$;

9) $y=\sqrt{\frac{2}{3}}\operatorname{arctg}\frac{3x-1}{\sqrt{6x}}$; 10) $y=\ln\sin\frac{2x+4}{x+1}$;

11) $y=\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$; 12) $y=\ln^3(1+\cos 4x)$;

13) $y=x+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}+2^{\pi\sqrt{2}}$; 14) $y=\ln\arcsin\sqrt{1-e^{2x}}$;

15) $y=e^{-x^2}\cos^3(2x+3)$; 16) $y=e^{\frac{x}{\sqrt{3}}}\operatorname{arctg}^2 2x$;

17) $y=\frac{(x^2-16)\sqrt{(4+x^2)^3}}{120x^5}$; 18) $y=\left(\sin\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{e^x}}$;

19) $y=(19)^{x^{19}}x^{19}$; 20) $y=(\operatorname{ctg} x)^{\ln\operatorname{tg}\frac{x}{4}}$.

2. Вычислите пределы, пользуясь правилом Лопиталя:

21) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$; 22) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{7^{2x}-1}{2x}$;

23) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x+1}{\sqrt[3]{x-7}+2}$; 24) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{(x-3)^2}{\sin^2(x-3)}$; 25) $\lim\limits_{x\to 10}\frac{\lg x-1}{\sqrt{x-9}-1}$.

1.7. ПОНЯТИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛА ФУНКЦИИ И ЕГО СВОЙСТВА

1.7.1. Определение дифференциала функции

На основании свойства предела функции, формулу для производной $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ можно написать в виде: $\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — бесконечно малая, т.е. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(x)=0$, или иначе

$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x$, где $f'(x)\Delta x$ — главная линейная часть приращения функции, пропорциональна Δx; $\alpha\Delta x$ — бесконечно малая более высокого порядка малости, чем Δx.

$\boxed{\text{О}}$ ***Дифференциалом функции*** $y = f(x)$ называется главная линейная часть приращения функции $f'(x)\Delta x$, которая отличается от приращения Δy на бесконечно малую величину $\alpha\Delta x$ более высокого порядка малости, чем Δx, и обозначается dy.

Таким образом, по определению, $dy = f'(x)\Delta x$.

Заметим, что если $y = x$, то $dy = dx = (x)'\Delta x = \Delta x$. Отсюда $\Delta x = dx$, т.е. приращение аргумента и дифференциал аргумента совпадают и формула для вычисления дифференциала запишется в виде $dy = f'(x)dx$.

Таким образом, зная производную функции, можно найти ее дифференциал по формуле $dy = f'(x)dx$ и, обратно, зная дифференциал функции, можно найти ее производную по формуле $f'(x) = y' = \dfrac{dy}{dx}$.

Пример. Найти дифференциал функции $y = x^3$, минуя вычисление производной.

Решение. Вычислим приращение функции

$$\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\,\Delta x^2 + \Delta x^3 - x^3 = 3x^2\,\Delta x + 3x\,\Delta x^2 + \Delta x^3.$$

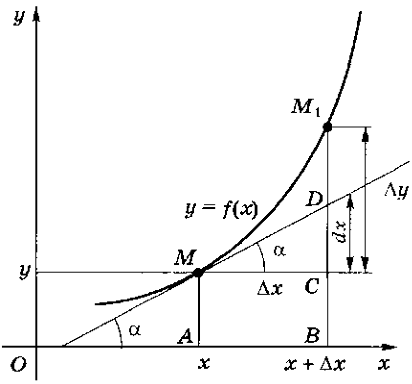
Итак, $\Delta y = 3x^2\Delta\, x + (3x\,\Delta x^2 + \Delta x^3)$.

Первое слагаемое линейно зависит от Δx, а второе — является бесконечно малой более высокого порядка, чем Δx. Следовательно, по определению, искомый дифференциал равен: $dy = 3x^2dx$.

1.7.2. Геометрический смысл дифференциала функции

Рассмотрим график дифференцируемой функции $y = f(x)$ (рис.1.45). Возьмем какую-нибудь точку $M(x;\, y)$ на графике и проведем касательную к графику в этой точке. Обозначим через α угол наклона касательной к положительному направлению оси Ox. Как известно, $\operatorname{tg}\alpha = f'(x)$. Дадим аргументу x приращение Δx, которое на рисунке изображается отрезком $AB = MC = \Delta x$. Тогда ордината кривой получит приращение $CM_1 = \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, а ордината касательной в точке M — приращение CD. Определим длину отрезка $|CD|$.

Рис. 1.45



Из прямоугольного треугольника MCD имеем: $|CD| = |MC| \times \times \operatorname{tg}\alpha = |MC|\ f'(x) = f'(x)\Delta x = dy$.

Итак, $|CD| = f'(x)\Delta x = dy$, т.е. дифференциал функции $y = f'(x)$ геометрически изображается приращением CD ординаты касательной к графику в точке $M(x;\,y)$ при переходе от точки M к точке $M_1(x + \Delta x;\, f(x + \Delta x))$.

1.7.3. Применение дифференциала функции к приближенным вычислениям

Сделаем важное замечание: если приращение Δx аргумента мало по модулю, то дифференциал функции dy и приращение функции Δy можно считать приближенно равными между собой, т.е. $dy \approx \Delta y$.

Действительно, имеем $\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x$ или $\Delta y = dy + \alpha\Delta x$ и, следовательно, когда $|\Delta x|$ мало, то $\Delta y \approx dy$. Перепишем это равенство в виде $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \approx dy$.

Отсюда $f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy$ или $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$.

По этой формуле можно приближенно вычислять значения функции.

Примеры. 1. Вычислить приближенно $\sin 31^\circ$.

Решение. Рассмотрим функцию $y = \sin x$. Будем иметь:

$$\sin(x + \Delta x) \approx \sin x + (\sin x)'\Delta x \text{ или } \sin(x + \Delta x) \approx \sin x + \cos x\Delta x.$$

Полагая $x = 30^\circ\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$, $\Delta x = dx = 1^\circ\left(\dfrac{\pi}{180}\right)$, из последней формулы находим искомое приближенное значение $\sin 31^\circ = \sin(30^\circ + 1^\circ) = \sin 30^\circ + \cos 30^\circ \dfrac{\pi}{6} = 0{,}5 + 0{,}866 \cdot 0{,}017 \approx 0{,}515$. Итак, $\sin 31^\circ \approx 0{,}515$.

2. Вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции $y = \sqrt[3]{x}$ в точке $x = 7{,}76$.

Решение. Рассмотрим функцию $y = \sqrt[3]{x}$. По формуле находим:

$$\sqrt[3]{x+\Delta x} \approx \sqrt[3]{x} + (\sqrt[3]{x})'\Delta x, \text{ или } \sqrt[3]{x+\Delta x} \approx \sqrt[3]{x} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\Delta x.$$

Полагая $x = 8$, $\Delta x = dx = -\,0{,}24$, будем иметь:

$$\sqrt[3]{7{,}76} \approx \sqrt[3]{8} + \frac{1}{3\sqrt[3]{8^2}}\cdot(-0{,}24), \text{ или } \sqrt[3]{7{,}76} \approx 2 + \frac{1}{3\cdot 4}(-0{,}24) = 2 - 0{,}02 = 1{,}98.$$

Итак, $\sqrt[3]{7{,}76} \approx 1{,}98$.

3. Найти приращение Δy и дифференциал dy функции $y = x^3 + 3x^2$ в точке $x = 1$ при $\Delta x = 1$; $0{,}1$ и $0{,}01$. Найти для каждого значения Δx абсолютную погрешность $\Delta = |\Delta y - dy|$ и относительную погрешность $\varepsilon = \left|\frac{\Delta y - dy}{\Delta y}\right|$, которые допускаются при замене приращения дифференциалом функции.

Решение.

$$1)\ \Delta y = y(x+\Delta x) - y(x) = (x+\Delta x)^3 + 3(x+\Delta x)^2 - x^3 -$$

$$-\,3x^2 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 + 3x^2 + 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 - x^3 - 3x^2 =$$

$$= (\Delta x)^3 + (3x+3)(\Delta x)^2 + (3x^2 + 6x)\Delta x.$$

$$dy = y'\Delta x = (3x^2 + 6x)\Delta x.$$

2) При $x = 1$: $\Delta y = (\Delta x)^3 + 6(\Delta x)^2 + 9\Delta x$, $dy = 9\Delta x$.

Абсолютная погрешность $\Delta = |(\Delta x)^3 + 6(\Delta x)^2 + 9\Delta x - 9\Delta x| = |(\Delta x)^3 + 6(\Delta x)^2|$.

Относительная погрешность $\varepsilon = \left|\frac{(\Delta x)^3 + 6(\Delta x)^2}{(\Delta x)^3 + 6(\Delta x)^2 + 9\Delta x}\right|$.

3) при $\Delta x = 1$: $\Delta y = 16$; $dy = 9$; $\Delta = 7$; $\varepsilon = \frac{7}{16} \approx 43{,}8\%$.

4) при $\Delta x = 0{,}1$: $\Delta y = 0{,}961$; $dy = 0{,}9$; $\Delta = 0{,}061$; $\varepsilon = \frac{0{,}061}{0{,}961} \approx 6{,}3\%$.

5) При $\Delta x = 0{,}01$: $\Delta y = 0{,}090601$; $dy = 0{,}09$; $\Delta = 0{,}000601$; $\varepsilon = \frac{0{,}000601}{0{,}090601} \approx 0{,}66\%$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите дифференциал dy функции $y = \operatorname{tg}(\arccos\sqrt{1-2x^2})$.

2. Покажите, что функция $y = \operatorname{tg}\ln 3x$ удовлетворяет уравнению

$$(1 + y^2)dx = xdy.$$

3. Вычислите приближенно с помощью дифференциала значение функции $y = \sqrt{4x+1}$ в точке $x = 2{,}56$.

4. Найдите приращение Δy и дифференциал dy функции $y = \dfrac{x+2}{x-2}$ в точке $x = 3$ при $\Delta x = 1$; $0{,}5$; $0{,}25$.

Найдите для каждого значения Δx абсолютную погрешность $\Lambda = |\Delta y - dy|$ и относительную погрешность $\varepsilon = \left|\dfrac{\Delta y - dy}{\Delta y}\right|$, которые допускаются при замене приращения дифференциалом функции.

1.8. ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

1.8.1. Производные высших порядков

Рассмотрим дифференцируемую функцию $y = f(x)$. Тогда производная $y' = f'(x)$ называется производной 1-го порядка, или первой производной.

Производной 2-го порядка (второй производной) называется производная от ее первой производной и обозначается y'', т. е. $y'' = (y')'$ или $f''(x) = (f'(x))'$.

Аналогично определяются производные 3-го, 4-го, ..., n-го порядка:

$$y''' = (y'')',\ y'''' = (y''')',\ \ldots,\ y^{(n)} = (y^{(n-1)})'.$$

Примеры. 1. $f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$, $f'(x) = 4x^3 - 8x$, $f''(x) = 12x^2 - 8$, ...

2. $y = \sin x = \sin\left(x + 0\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$

$$y' = (\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + 1\cdot\frac{\pi}{2}\right);$$

$$y'' = (y')' = (\cos x)' = -\sin x = \sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right);$$

$$y''' = (y'')' = (-\sin x)' = -\cos x = \sin\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right);$$

$$y'''' = (y''')' = (-\cos x)' = \sin x = \sin\left(x + 4 \cdot \frac{\pi}{2}\right);$$

. . . .

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})' = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right), \text{ где } n \in \mathbf{N} \cup 0.$$

1.8.2. Основные теоремы дифференциального исчисления

$\boxed{\text{Т}}$ ***Теорема Лагранжа о конечном приращении.*** *Если функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале $(a; b)$, определена и непрерывна на отрезке $[a; b]$, то на отрезке $[a; b]$ существует по крайней мере одна точка c $(a < c < b)$ такая, что $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$, т.е. конечное приращение функции равно произведению соответствующего приращения аргумента на значение производной функции в некоторой промежуточной точке.*

Доказательство. Рассмотрим точки $M_1(a; f(a))$ и $M_2(b; f(b))$ графика функции $y = f(x)$ и проведем через них секущую M_1M_2 (рис. 1.46). Будем перемещать эту прямую M_1M_2 с помощью па-

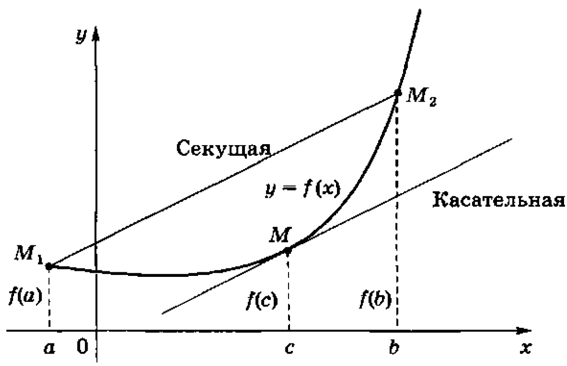


Рис. 1.46

раллельного переноса до тех пор, пока она не совпадет с касательной к графику в некоторой точке $M(c;\ f(c))$, где $a < c < b$.

Так как прямая M_1M_2 параллельна касательной, то угловой коэффициент секущей $k_{сек}$ равен угловому коэффициенту касательной $k_{кас}$, т. е. $k_{сек} = k_{кас}$.

Но угловой коэффициент касательной согласно геометрическому смыслу производной равен: $k_{кас} = f'(c)$, а угловой коэффициент секущей $M_1\ M_2$: $k_{сек} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ (из аналитической геометрии), где $x_1 = a$, $y_1 = f(a)$, $x_2 = b$, $y_2 = f(b)$.

Учитывая, что $k_{сек} = k_{кас}$, получим: $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$, откуда $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$. ■

Из теоремы Лагранжа следует, что на интервале $(a;\ b)$ существует точка c такая, что касательная к графику в точке $M(c;\ f(c))$ параллельна прямой M_1M_2. Таких точек может быть несколько, но по крайней мере одна имеется всегда. В этом заключается геометрический смысл теоремы Лагранжа.

Т ***Теорема Ролля о корнях производной.*** *Если функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале $(a;\ b)$, определена и непрерывна на отрезке $[a;\ b]$ и на его концах принимает равные значения, т.е. $f(a) = f(b)$, то на интервале $(a;\ b)$ существует по крайней мере одна точка c, в которой производная равна* 0: $f'(c) = 0$, где $a < c < b$ (рис. 1.47).

Данную теорему можно также интерпретировать следующим образом: между двумя последовательными корнями дифференцируемой функции всегда содержится по крайней мере один корень ее производной (рис. 1.48).

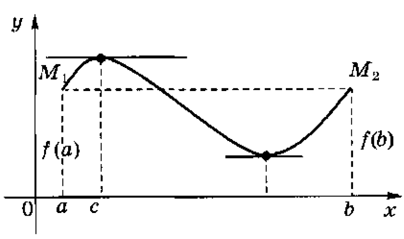


Рис. 1.47

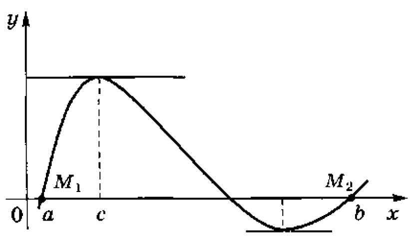


Рис. 1.48

Доказательство. Так как $y = f(x)$ дифференцируемая функция и $f(a) = f(b)$, где $a < b$, то из теоремы Лагранжа $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ получим $0 = f'(c)(b - a)$. Так как $b - a \neq 0$, то $f'(c) = 0$, где $a < c < b$. ■

Геометрический смысл теоремы Ролля заключается в том, что на кривой M_1M_2 (части графика функции $y = f(x)$) имеется по крайней мере одна точка c, в которой касательная параллельна оси $0x$.

$\boxed{\text{Т}}$ ***Теорема Коши — обобщение теоремы Лагранжа.*** *Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на $[a;\ b]$ и дифференцируемы на $(a;\ b)$, причем $\varphi'(x) \neq 0$, то в $(a;\ b)$ существует по крайней мере одна точка c, такая, что*

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}. \tag{1}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что $\varphi(b) - \varphi(a) \neq 0$, так как в противном случае по теореме Ролля на $(a;\ b)$ нашлась бы точка, в которой $\varphi'(x) = 0$, но это противоречит условию теоремы. Обозначим

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = Q \tag{2}$$

и введем вспомогательную функцию

$$\Phi(x) = f(x) - Q\varphi(x). \tag{3}$$

Функция $\Phi(x)$ непрерывна и дифференцируема на $(a;\ b)$ как разность дифференцируемых функций. Покажем, что функция $\Phi(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля. Для этого вычислим

$$\Phi(b) = f(b) - Q\varphi(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}\varphi(b) =$$

$$= \frac{f(b)\varphi(b) - f(b)\varphi(a) - f(b)\varphi(b) + f(a)\varphi(b)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f(a)\varphi(b) - f(b)\varphi(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)};$$

$$\Phi(a) = f(a) - Q\varphi(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}\varphi(a) =$$

$$= \frac{f(a)\varphi(b) - f(a)\varphi(a) - f(b)\varphi(a) + f(a)\varphi(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f(a)\varphi(b) - f(b)\varphi(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}.$$

Следовательно, $\Phi(b) = \Phi(a)$. По теореме Ролля в $(a;\ b)$ существует точка c, такая, что $\Phi'(c) = 0$. Но $\Phi'(x) = f'(x) - Q\varphi'(x)$, следовательно, $\Phi'(c) = f'(c) - Q\varphi'(c) - 0$. Отсюда

$$Q = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}. \tag{4}$$

Из (3) и (4) $\Rightarrow \dfrac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \dfrac{f'(c)}{\varphi'(c)}$. ■

Замечание. В частном случае при $\varphi(x) = x$ теорема Коши совпадает с теоремой Лагранжа.

Задачи для самостоятельного решения

Найдите y''' от функций:

1) $y = (3 - x^2)\ln^2 2x$;
2) $y = e^{1-2x}\sin(2 + 3x)$;
3) $y = \sin^2 6x$;
4) $y = \dfrac{\cos x}{x}$.

1.9. УСЛОВИЯ МОНОТОННОСТИ ФУНКЦИИ. НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ЭКСТРЕМУМА

1.9.1. Возрастающие и убывающие функции. Условия возрастания и убывания функции

[О] Функция $y = f(x)$ называется ***возрастающей*** на отрезке $[a;\ b]$, если из условия $x_2 > x_1$, где $x_1, x_2 \in [a;\ b]$, следует, что $f(x_2) > f(x_1)$.

[О] Функция $y = f(x)$ называется ***убывающей*** на отрезке $[a;\ b]$, если из условия $x_2 > x_1$, где $x_1, x_2 \in [a;\ b]$, следует, что $f(x_2) < f(x_1)$.

[О] Функция $y = f(x)$ называется ***монотонной*** на $[a;\ b]$, если она является возрастающей или убывающей на $[a;\ b]$.

Примеры. Исследовать на монотонность функции:

1) $y = 2x - 3$; 2) $y = -3x + 2$.

Решение. 1) Возьмем $x_2 > x_1$ и вычислим значения

$$y_1 = y(x_1) = 2x_1 - 3,\ y_2 = y(x_2) = 2x_2 - 3.$$

Составим разность $y_2 - y_1 = 2x_2 - 3 - (2x_1 - 3) = 2(x_2 - x_1)$.

Так как $x_2 > x_1$, то $x_2 - x_1 > 0$, следовательно, $y_2 - y_1 > 0$.

Отсюда $y_2 > y_1$, а это означает, что функция $y = 2x - 3$ является возрастающей.

2) При $x_2 > x_1$ вычислим разность

$$y_2 - y_1 = -3x_2 + 2 - (-3x_1 + 2) = -3x_2 + 3x_1 = 3(x_1 - x_2).$$

Так как $x_2 > x_1$, то $x_1 - x_2 < 0$, следовательно, $y_2 - y_1 < 0$. Отсюда $y_2 < y_1$, а это означает, что функция $y = 2x - 3$ является убывающей.

Аналитические признаки монотонности функции выражаются в следующих двух теоремах.

Т1 ***Необходимое и достаточное условие возрастания.*** *Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и имеет производную $f'(x)$ при всех $x \in (a; b)$. Для того чтобы данная функция на $[a; b]$ была возрастающей, необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) > 0$ при всех $x \in (a; b)$.*

Доказательство. 1. Необходимость условия возрастания. Пусть функция $y = f(x)$ является возрастающей на $[a; b]$. Докажем, что $f'(x) > 0$ при всех $x \in (a; b)$.

Возьмем любое $x \in (a; b)$ и дадим аргументу x приращение Δx. Возможны два случая.

1) Пусть $\Delta x > 0$. Так как функция $y = f(x)$ возрастающая, то $f(x + \Delta x) > f(x)$, откуда $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} > 0$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $\Delta x \to 0$, получим: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} > 0$, или $f'(x) > 0$.

2) Пусть $\Delta x < 0$, тогда $f(x) > f(x + \Delta x)$, т. е. $f(x + \Delta x) < f(x)$ и $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} > 0$, так как $\Delta x < 0$. Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} > 0$, или $f'(x) > 0$. ■

2. *Достаточность условия возрастания.* Пусть $f'(x) > 0$ при всех $x \in (a; b)$. Докажем, что функция $y = f(x)$ является возрастающей на $[a; b]$.

Возьмем $x_2 > x_1$ из $[a; b]$. По теореме Лагранжа получим

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(C)(x_2 - x_1),$$

где $x_1 < C < x_2$.

По условию имеем: $f'(C) > 0$ и $x_2 - x_1 > 0$, следовательно, $f(x_2) - f(x_1) > 0$, откуда $f(x_2) > f(x_1)$. Полученное означает, что функция $y = f(x)$ является возрастающей. ■

$\boxed{\text{Т2}}$ ***Необходимое и достаточное условие убывания.*** *Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a; b]$ и имеет производную $y' = f'(x)$ при всех $x \in (a; b)$. Для того чтобы эта функция была убывающей на $[a; b]$, необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) < 0$ при всех $x \in (a; b)$.*

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1 (см. $\boxed{\text{Т1}}$).

Примеры. **1.** Исследовать функции на монотонность:

$$1)\ y = 2x - 3; \qquad 2)\ y = -3x + 2.$$

Решение. 1) Находим производную $y' = (2x - 3)' = 2 > 0$ при всех $x \in \mathbf{R}$, следовательно, данная функция является возрастающей на всей числовой прямой.

2) $y' = (-3x + 2)' = -3 < 0$. Следовательно, данная функция $y = -3x + 2$ является убывающей на всей числовой прямой.

2. Найти интервалы возрастания и убывания функций:

$$1)\ y = x\sqrt{x} + x; \qquad 2)\ y = x^3 - 3x + 2.$$

Решение. 1) Областью определения функции является: $D(f) = [0; +\infty)$.

Найдем производную $y' = (x\sqrt{x} + x)' = (x^{\frac{3}{2}} + x)' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + 1 = \frac{3\sqrt{x}}{2} + 1$. Так как $y' > 0$ при всех $x \in [0; +\infty)$, то данная функция возрастает в своей области определения.

2) Областью определения функции является вся числовая прямая, т. е. $D(f) = (-\infty; +\infty)$. Найдем производную функции:

$$y' = (x^3 - 3x + 2)' = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1).$$

Определяем промежутки возрастания из условия $y' > 0$, т. е. $3(x - 1) \times (x + 1) > 0$. Решая это неравенство, получим: $x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$.

Функция убывает в промежутке $x \in (-1; 1)$, так как на этом промежутке $y' = 3(x - 1)(x + 1) < 0$.

1.9.2. Точки экстремума функции. Экстремумы функции. Необходимое и достаточное условие экстремума

$\boxed{\text{О}}$ Точка x_0 называется ***точкой локального (местного) максимума*** непрерывной функции $y = f(x)$, если значение функции в точке x_0 больше либо равно ее значению во всех точках некоторого интервала, содержащего точку x_0, т. е. $f(x_0) \geq f(x)$. Другими словами, точка x_0 называется точкой локального максимума непрерывной функции $y = f(x)$, если $f(x_0) \geq f(x_0 + \Delta x)$ при любых Δx, достаточно малых по модулю.

Значение функции в точке локального максимума называется *локальным максимумом функции* и обозначается $y_{\max} = f(x_0)$.

Аналогично определяется точка локального минимума функции.

$\boxed{\text{О}}$ Точка x_0' называется ***точкой локального минимума*** непрерывной функции $y = f(x)$, если $f(x_0') \leq f(x_0' + \Delta x)$ при любых Δx, достаточно малых по модулю.

Значение функции в точке локального минимума называется *локальным минимумом функции* и обозначается $y_{\min} = f(x_0')$.

Локальные максимумы и минимумы функции называются *экстремумами функции*, а точки локального максимума и минимума называются *точками экстремума* (рис. 1.49).

$\boxed{\text{Т}}$ ***Теорема Ферма (необходимое условие экстремума непрерывной функции).*** *Если непрерывная функция $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ имеет в точке $x_0 \in (a; b)$ экстремум (максимум или минимум), то ее первая производная в этой точке либо равна нулю, т.е. $f'(x_0) = 0$, либо не существует.*

$\boxed{\text{О}}$ Точки, принадлежащие области определения непрерывной функции, в которых производная функции равна нулю или не существует, называются ***критическими точками функции.***

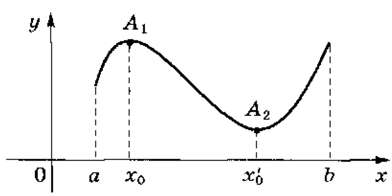


Рис. 1.49

Если в какой-либо точке функция имеет экстремум, то эта точка является критической. Однако обратное утверждение неверно, т. е. критическая точка необязательно является точкой экстремума (например, точка $x_0 = 0$ для $y = x^3$).

$\boxed{\text{Т}}$ ***Достаточное условие экстремума функции.*** *Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на $(a; b)$ и пусть x_0 — критическая точка функции, т.е. $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ не существует. Тогда если при переходе слева направо через точку x_0 производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус, то точка x_0 является точкой максимума функции. Если же при переходе слева направо через точку x_0 производная $f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс, то точка x_0 является точкой минимума функции.*

Доказательство. 1. Необходимое условие экстремума.

Пусть для определенности функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 максимум. Тогда при достаточно малых Δx по модулю имеем:

$$f(x_0) \geq f(x_0 + \Delta x),$$

откуда $f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \leq 0$, т. е. приращение функции $\Delta y \leq 0$ в точке x_0.

Составим отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

С учетом последнего неравенства будем иметь:

1) при $\Delta x < 0$ $\quad \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$;

2) при $\Delta x > 0$ $\quad \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0$.

По определению производной имеем

3) $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Из последних трех соотношений замечаем, что:

1) при $\Delta x \to 0$ и $\Delta x < 0$ $\quad f'(x_0) \geq 0$;

2) при $\Delta x \to 0$ и $\Delta x > 0$ $\quad f'(x_0) \leq 0$.

Так как $f'(x_0)$ есть определенное число и функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$, то из двух последних неравенств следует, что либо $f'(x_0) = 0$, либо $f'(x_0)$ не существует. ■

Аналогично доказывается теорема Ферма и для случая минимума функции.

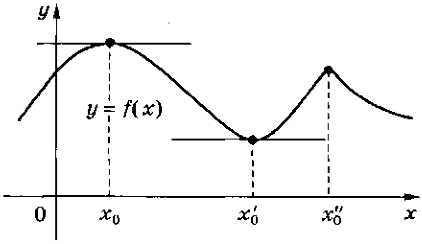


Рис. 1.50

Геометрический смысл теоремы выражается в том, что в точках экстремума график непрерывной функции либо имеет касательную, параллельную оси $0x$, так как $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha = k = 0$ (точки x_0 и x_0'), либо касательной не имеет (точка x_0'') (рис. 1.50).

2. *Достаточное условие экстремума.* Пусть производная $f'(x)$ при переходе через критическую точку x_0 меняет знак с плюса на минус, т.е. $f'(x < x_0) > 0$ и $f'(x > x_0) < 0$. Покажем, что в точке $x = x_0$ функция $y = f(x)$ имеет максимум.

Применим теорему Лагранжа к отрезку $[x; x_0]$:

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0), \quad \text{где } x < c < x_0.$$

1) Пусть $x < x_0$, тогда $c < x_0$ и $f'(c) > 0$. Из теоремы Лагранжа следует, что $f(x) - f(x_0) < 0$, откуда

$$f(x) < f(x_0). \tag{1}$$

2) Пусть $x > x_0$, тогда $c > x_0$ и $f'(c) < 0$. Из теоремы Лагранжа получим

$$f(x) < f(x_0). \tag{2}$$

Из неравенств (1) и (2) заключаем на основании определения точки максимума, что $x_0 = x_{max}$. ■

Аналогично доказывается достаточное условие минимума функции.

1.9.3. Экономические примеры, использующие понятие экстремума функции одной переменной

Пример 1. Сечение желоба для забора воды представляет собой перевернутую равнобедренную трапецию, у которой боковые стороны и меньшее основание (дно желоба) равны a (м). Определить ее большее основание, чтобы пропускная способность желоба (площадь его сечения) была наибольшей (рис. 1.51).

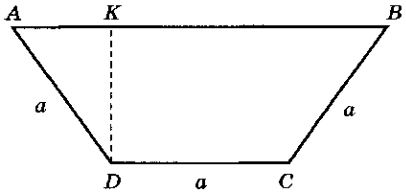


Рис. 1.51

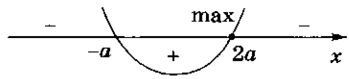


Рис. 1.52

Решение. 1) Пусть большее основание $|AB| = x$ (м), высота желоба $|DK| = h$ (м). Тогда площадь сечения

$$S_{\text{трап}} = \frac{1}{2}(a + x)h.$$

2) Из прямоугольного треугольника AKD будем иметь: $|AK| = \frac{x-a}{2}$; $|DK| = h = \sqrt{AD^2 - AK^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{x-a}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{3a^2 + 2ax - x^2}$.

Площадь сечения трапеции равна:

$$S_{\text{трап}} = \frac{1}{2}(a+x)\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3a^2+2ax-x^2} = \frac{1}{4}(a+x)\sqrt{3a^2+2ax-x^2}.$$

3) Для нахождения максимального значения площади сечения вначале возьмем производную:

$$S' = \frac{1}{4}\left[\sqrt{3a^2+2ax-x^2} + (a+x)\frac{2a-2x}{2\sqrt{3a^2+2ax-x^2}}\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\sqrt{3a^2+2ax-x^2} + \frac{a^2-x^2}{\sqrt{3a^2+2ax-x^2}}\right] = \frac{1}{4}\,\frac{4a^2+2ax-2x^2}{\sqrt{3a^2+2ax-x^2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{2a^2+ax-x^2}{\sqrt{3a^2+2ax-x^2}}.$$

Приравнивая затем производную S' нулю, получим

$$2a^2 + ax - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 - ax - 2a^2 = 0 \Rightarrow x = 2a$$

($x = -a$ не подходит, так как $x > 0$).

4) Поскольку при переходе слева направо через точку $x = 2a$ производная S' меняет знак с «+» на «–», то при $x = 2a$ значение S' максимально (рис. 1.52).

Пример 2. Из квадратного листа железа со стороной a нужно сделать открытый сверху ящик. Для этого по углам листа вырезают равные квадраты и из получившейся крестовины сгибают ящик. Найти длину стороны этих квадратов, чтобы получившийся ящик был наибольшей вместимости.

Решение. 1) Пусть длина стороны вырезаемого квадрата равна x (рис. 1.53). Тогда объем ящика: $V = (a - 2x)(a - 2x)x = x(a - 2x)^2$.

2) Для нахождения максимального значения объема вначале возьмем производную:

$$V' = (a - 2x)^2 + x \cdot 2(a - 2x)(-2) = (a - 2x)^2 - 4x(a-2x) = a^2 - 4ax + 4x^2 - 4ax + 8x^2 = 12x^2 - 8ax + a^2.$$

Приравняв производную V' нулю, получим

$$12x^2 - 8ax + a^2 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{6}a; \quad x_2 = \frac{1}{2}a.$$

3) Поскольку при переходе слева направо через точку $x = \frac{1}{6}a$ производная V' меняет знак с «+» на «–», то при $x = \frac{1}{6}a$ значение V' максимально (рис. 1.54).

Пример 3. Сечение тоннеля метро представляет собой прямоугольник с примыкающим к нему сверху полукругом. Диаметр полукруга равен основанию прямоугольника. Периметр сечения тоннеля должен быть равен 2π. Какими должны быть размеры сечения, чтобы пропускная способность (площадь сечения) тоннеля была наибольшей?

Решение.

1) Пусть $|OB| = |OK| = x$; $|BC| = |AD| = y$ (рис. 1.55). Тогда периметр сечения тоннеля равен: $P = 2x + 2y + \pi x = (\pi + 2)x + 2y$, площадь сечения тоннеля равна:

$$S_{\text{сеч}} = 2xy + \frac{1}{2}\pi x^2.$$

2) Из условия задачи имеем: $(\pi + 2)x + 2y = 2p$, откуда $y = \pi - \left(\frac{\pi}{2} + 1\right)x$.

Подставляя полученное выражение y в формулу для площади сечения, получим:

$$S_{\text{сеч}} = 2x\left[\pi - \left(\frac{\pi}{2} + 1\right)x\right] + \frac{1}{2}\pi x^2 =$$

$$= 2\pi x - (\pi + 2)x^2 + \frac{1}{2}\pi x^2 = 2\pi x - \left(\frac{\pi}{2} + 2\right)x^2.$$

3) Для нахождения максимального значения площади сечения вначале возьмем производную:

$$S' = 2\pi - 2\left(\frac{\pi}{2} + 2\right)x = 2\pi - (\pi + 4)x,$$

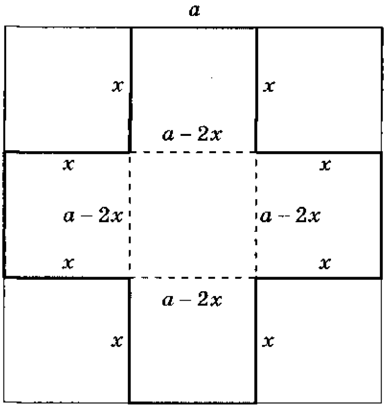


Рис. 1.53

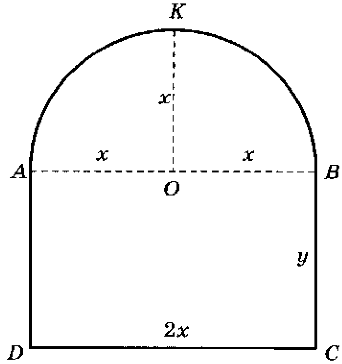


Рис. 1.55

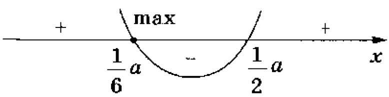


Рис. 1.54

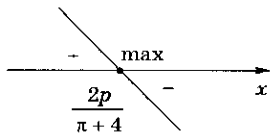


Рис. 1.56

затем приравняем ее нулю и получим:

$$2\,\pi - (\pi + 4)\,x = 0 \Rightarrow x = \frac{2\pi}{\pi + 4}.$$

4) Поскольку при переходе слева направо через точку $x = \dfrac{2\pi}{\pi + 4}$ (рис. 1.56) производная S' меняет знак с «+» на «–», то при $x = \dfrac{2\pi}{\pi + 4}$ величина S максимальна.

5) Получим соответствующее значение y:

$$y = \pi - \left(\frac{\pi}{2} + 1\right) \cdot \frac{2\pi}{\pi + 4} = \pi - \frac{\pi + 2}{\pi + 4} \cdot \pi = \pi\left(1 - \frac{\pi + 2}{\pi + 4}\right) = \frac{2\pi}{\pi + 4},\ \text{т. е. } y = x.$$

Итак, сечение тоннеля должно представлять собой прямоугольник со сторонами $|DC| = \dfrac{4\pi}{\pi + 4}$, $|BC| = \dfrac{2\pi}{\pi + 4}$ и примыкающим к нему полукругом радиусом $R = \dfrac{2\pi}{\pi + 4}$.

1.9.4. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, непрерывную на отрезке $[a;\ b]$.

$\boxed{\text{O}}$ ***Наибольшим значением функции*** $y = f(x)$ на отрезке $[a;\ b]$ называется число $M = \max\limits_{[a;b]} f(x)$ такое, что $M \geq f(x)$ для всех $x \in [a;\ b]$.

$\boxed{\text{O}}$ ***Наименьшим значением функции*** $y = f(x)$ на отрезке $[a;\ b]$ называется число $m = \min\limits_{[a;b]} f(x)$ такое, что $m \leq f(x)$ для всех $x \in [a;\ b]$.

Из теоремы Вейерштрасса известно, что непрерывная на отрезке $[a;\ b]$ функция $y = f(x)$ принимает на этом отрезке свои наибольшее и наименьшее значения.

Правило нахождения наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции на отрезке заключается в следующем:

1) находим критические точки функции, т.е. точки, в которых $f'(x) = 0$ либо не существует, и вычисляем значения функции $y = f(x)$ в них;

2) вычисляем значения функции на концах отрезка;

3) из всех найденных значений выбираем наибольшее и наименьшее.

Пример. $y = x^4 - 8x^2 - 9$, $x \in [-1;\ 1]$. Найти M и m.

Решение. 1) $y' = 4x^3 - 16x = 4x(x-2)(x+2)$;

$y' = 0$: $x_1 = 0$; $x_2 = -2$; $x_3 = 2$ — критические точки;

$y(0) = -9$, $y(-2) = y(2)$ не вычисляем, так как точки $x_2 = -2$; $x_3 = 2$ не принадлежат отрезку $[-1;\ 1]$;

2) $y(-1) = 1 - 8 - 9 = -16$, $y(1) = -16$;

3) $M = \max\limits_{[a;b]} f(x) = y(0) = -9$, $m = \min\limits_{[a;b]} f(x) = y(-1) = y(1) = -16$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Заготовлен материал для изгороди длиной l. Необходимо этой изгородью огородить прямоугольную площадку, имеющую наибольшую площадь. Какими должны быть размеры этой площадки?

2. Какими должны быть размеры цилиндрической закрытой цистерны заданного объема V, чтобы расход листового железа на ее изготовление был наименьшим?

3. Требуется изготовить коническую воронку с образующей, равной l. Какова должна быть высота воронки, чтобы ее объем был наибольшим?

4. Из заготовки проволоки длиной l сгибают круговой сектор. Каков должен быть центральный угол сектора (в радианах), чтобы его площадь была максимальной?

5. Страница книги имеет площадь S. По техническим условиям ширина полей сверху и снизу текста должна быть равной a, а слева и справа b. Каким должно быть отношение размеров страницы, чтобы площадь страницы, занятая текстом, была наибольшей?

6. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

а) $y = x - 4\sqrt{x+2} + 8$ на отрезке $[-1;\ 7]$;

б) $y = x^2 + \dfrac{16}{x} - 16$ на отрезке $[1;\ 4]$.

1.10. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА. АСИМПТОТЫ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

1.10.1. Выпуклость и вогнутость кривой (графика функции). Точки перегиба графика функции

Рассмотрим на координатной плоскости xOy кривую, являющуюся графиком непрерывной функции $y = f(x)$, определенной на отрезке $[a;\ b]$ (рис. 1.57).

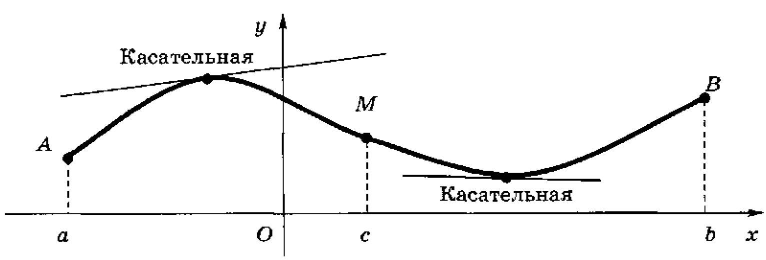


Рис. 1.57

$\boxed{О}$ Кривая называется ***выпуклой вверх*** (***выпуклой***) на отрезке $[a;\ c)$, если все точки кривой лежат ниже любой ее касательной на $[a;\ c)$, где $a < c < b$.

$\boxed{О}$ Кривая называется ***выпуклой вниз*** (***вогнутой***) на $(c;\ b]$, если все ее точки лежат выше любой ее касательной на $(c;\ b]$.

$\boxed{О}$ Точка M кривой, которая отделяет выпуклость от вогнутости, называется ***точкой перегиба*** графика функции.

Аналитический способ нахождения промежутков выпуклости и вогнутости графика функции выражается в следующей теореме.

$\boxed{Т}$ *Если во всех точках интервала* $(a;\ b)$:

а) $f''(x) < 0$, *то график функции на* $(a;\ b)$ *является выпуклым;*

б) $f''(x) > 0$, *то график функции на* $(a;\ b)$ *является вогнутым.*

При этом предполагается, что функция $y = f(x)$ *является непрерывной на* $[a;\ b]$ *и существуют производные* $f'(x)$ и $f''(x)$ *на* $(a;\ b)$.

Примеры. 1. Найти промежутки выпуклости и вогнутости графика функции $y = 2 - x^2$ (рис. 1.58).

Решение. Находим производные $y' = (2 - x^2)' = -2x$; $y'' = -2 < 0$. Следовательно, график функции $y = 2 - x^2$ всюду является выпуклым.

2. Найти промежутки выпуклости и вогнутости функции $y = x^3$.

Решение. Вычислим $y' = 3x^2$, $y'' = 6x$.

а) $y'' < 0$ при $x < 0$, следовательно, на интервале $(-\infty;\ 0)$ график выпуклый;

б) $y'' > 0$ при $x > 0$, следовательно, на интервале $(0;\ +\infty)$ график вогнутый (рис. 1.59).

Достаточный признак точек перегиба графика функции выражается в следующей теореме.

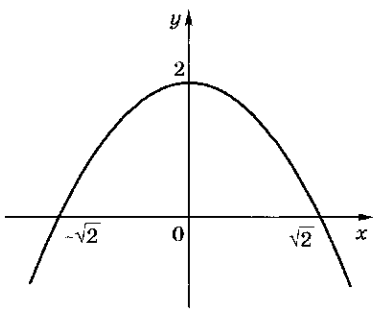


Рис. 1.58

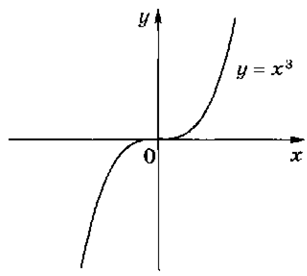


Рис. 1.59

Т ***Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на $(a;\ b)$. Если в точке $x_0 \in (a;\ b)$ $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0)$ не существует и при переходе через точку x_0 слева направо вторая производная $f''(x)$ меняет знак, то точка x_0 является точкой перегиба функции $f(x)$.***

Пример. Найти точки перегиба, промежутки выпуклости и вогнутости графика функции $y = e^{-x^2}$ (кривая Гаусса).

Решение. 1) Вычислим первую и вторую производные:

$$y' = (e^{-x^2})' = -2xe^{-x^2};$$

$$y'' = (-2xe^{-x^2})' = -2(e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2}) = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1).$$

2) Находим критические точки функции II рода (точки, подозреваемые на точки перегиба) из условия $y'' = 0$.

$$2e^{-x^2}(2x^2 - 1) = 0. \text{ Так как } 2e^{-x^2} > 0, \text{ то } 2x^2 - 1 = 0.$$

Отсюда $x_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ и $x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ — критические точки II рода.

3) Установим знаки производной $y'' = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1)$ в промежутках $\left(-\infty; -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}; \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right)$, рис. 1.60.

Следовательно, промежутки вогнутости: $\left(-\infty; -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right)$, промежуток выпуклости $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}; \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Так как при переходе через точки $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ вторая производная y'' меняет знак, то эти точки $x_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ и $x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ являются точками перегиба графика функции (рис. 1.61).

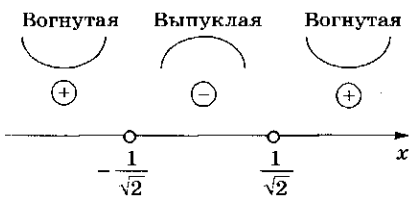


Рис. 1.60

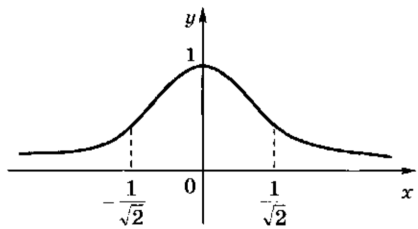


Рис. 1.61

1.10.2. Вертикальные и наклонные асимптоты графика функции

$\boxed{\text{О}}$ Прямая $x = x_0$, параллельная оси Oy, называется ***вертикальной асимптотой*** графика функции $y = f(x)$, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$.

Из этого определения следует, что для нахождения вертикальных асимптот графика функции надо найти такие значения x_0, при приближении к которым аргумента x соответствующие значения функции $f(x) \to \pm\infty$. Тогда прямая $x = x_0$ является вертикальной асимптотой графика функции.

Таким образом, в тех точках $x = x_0$, где функция $y = f(x)$ терпит разрыв II рода, она имеет вертикальные асимптоты с уравнением $x = x_0$.

Примеры. 1. Функция $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$ имеет две вертикальные асимптоты $x = -1$ и $x = 1$.

2. Функция $y = \dfrac{2x^2 + 3x - 5}{x(x-4)}$ имеет две вертикальные асимптоты $x = 0$ и $x = 4$.

3. Функция $y = \operatorname{tg} x$ имеет бесчисленное множество вертикальных асимптот $x = \pm\dfrac{\pi}{2}$; $x = \pm\dfrac{3\pi}{2}$; ... .

$\boxed{\text{О}}$ Прямая линия называется ***наклонной*** (***горизонтальной***) ***асимптотой*** графика функции $y = f(x)$, если расстояние от произвольной точки M графика до прямой стремится к нулю при неограниченном удалении этой точки от начала координат, т.е. $\lim\limits_{x \to \infty} |MF| = 0$ (рис. 1.62).

$\boxed{\text{О}}$ Асимптота графика функции $y = f(x)$ называется ***наклонной***, если она пересекает ось Ox под углом $\varphi \neq \dfrac{\pi}{2}$, т.е. не под прямым углом.

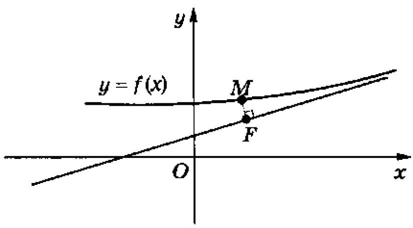
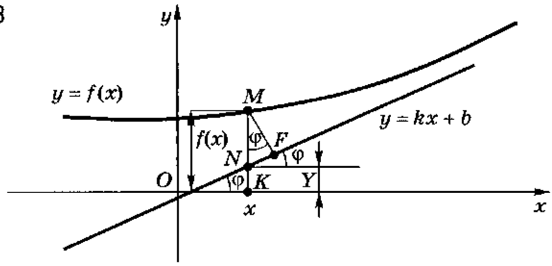


Рис. 1.62

Рис. 1.63



Частным случаем наклонной асимптоты является *горизонтальная асимптота,* параллельная оси Ox ($\varphi = 0$).

Отыскание наклонных асимптот графика функции выражается в следующей теореме.

$\boxed{\text{Т}}$ *Пусть график функции $y = f(x)$ имеет наклонную асимптоту $y = kx + b$. Тогда угловой коэффициент и свободный член асимптоты определяются по формулам*:

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}; \quad b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx).$$

Доказательство. Возьмем произвольную точку $M(x;\ y)$ на кривой $y = f(x)$ (рис. 1.63). Тогда $N(x;\ Y)$ — точка, лежащая на асимптоте с той же абсциссой x. По определению наклонной асимптоты можем записать:

$$\lim_{x\to\infty}|MF| = 0. \tag{1}$$

Пусть φ — угол наклона асимптоты к оси Ox; F — основание перпендикуляра, проведенного из точки M на асимптоту. Тогда из ΔMFN находим:

$$|MN| = \frac{|MF|}{\cos\varphi}. \tag{2}$$

Подставляя (2) в (1), получим: $\lim\limits_{x\to\infty}(|MN|\cos\varphi) = 0$, т. е.

$$\lim_{x\to\infty}|MN| = 0. \tag{3}$$

Из рис. 1.63 находим:

$$|MN| = |MK| - |NK| = f(x) - Y = f(x) - kx - b. \tag{4}$$

Подставим (4) в (3):

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx-b)=0 \qquad (5)$$

или $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}\right)=0$. Так как $x\to+\infty$ и, следовательно, $x\neq 0$, то $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}\right)=0$.

Отсюда $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$, так как $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{b}{x}=0$. Тогда из (5) находим $b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx]$. ■

1.10.3. Общая схема исследования функции и построение ее графика

При исследовании функции и изучении ее свойств в целях построения графика в следующей последовательности находят:

1) область определения функции $D(f)$ и, если возможно, область изменения $E(f)$;

2) точки разрыва функции и промежутки непрерывности;

3) промежутки знакопостоянства функции;

4) четность, нечетность, периодичность;

5) точки пересечения графика с осями координат;

6) критические точки функции, точки экстремума, экстремумы, промежутки монотонности;

7) промежутки выпуклости, вогнутости графика функции, точки перегиба;

8) асимптоты графика функции;

9) дополнительные точки (если это необходимо).

После этого строится график функции.

Пример. Исследовать с помощью производной и построить график функции $y=\frac{x^2+2x-1}{x}$.

Решение.

1) $D(f)=(-\infty;\ 0)$ и $(0;\ +\infty)$.

2) $x=0$ — точка разрыва II рода ($x=0$ — вертикальная асимптота).

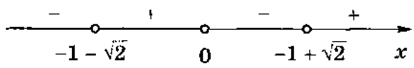


Рис. 1.64

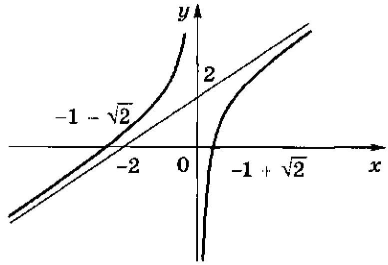


Рис. 1.65

3) $y>0$ при $\dfrac{x^2+2x-1}{x}>0 \Rightarrow x\in(-1-\sqrt{2};0)\cup(-1+\sqrt{2};+\infty)$, рис. 1.64.

В промежутках $x\in(-\infty;-1-\sqrt{2})\cup(0;-1+\sqrt{2})$ значения $y<0$.

4) Функция ни четная, ни нечетная, т.е. общего вида и непериодическая.

5) При $y=0$, $x=-1\pm\sqrt{2}$.

6) Находим производную: $y'=\dfrac{(2x+2)x-(x^2+2x-1)\cdot 1}{x^2}=\dfrac{x^2+1}{x^2}>0$ при всех $x\in D(f)$. Следовательно, всюду в $D(f)$ функция возрастает. Функция не имеет точек экстремума и экстремумов.

7) $y''=\left(\dfrac{x^2+1}{x^2}\right)'=-\dfrac{2}{x^3}$:

а) при $x<0$ $y''>0$, следовательно, при $x\in(-\infty;\ 0)$ график вогнутый;
б) при $x<0$ $y''<0$, следовательно, при $x\in(0;+\infty)$ график выпуклый.
8) а) прямая $x=0$ (ось $0y$) — вертикальная асимптота;
б) пусть наклонная асимптота имеет вид $y=kx+b$, тогда

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-1}{x^2}=1;\quad b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x-1}{x}-x\right)=2;$$

$y=x+2$ — наклонная асимптота.
График функции представлен на рис. 1.65.

Задачи для самостоятельного решения

Исследуйте средствами дифференциального исчисления функцию $y=f(x)$ и постройте ее график:

1) $y=x^3+x^2-5x+3$; 2) $y=2x^3+3x^2-5$;

3) $y = \dfrac{2x^2 - 6}{x - 2}$;

4) $y = \dfrac{2 - x^2}{\sqrt{9x^2 - 4}}$;

5) $y = \dfrac{9 + 6x - 3x^2}{x^2 - 2x + 13}$;

6) $y = \left(\dfrac{x - 1}{x}\right)^2$;

7) $y = \dfrac{(x - 2)^3}{(x - 2)^2 - 9}$;

8) $y = x^3 + 6x^2 + 9x + 4$;

9) $y = (x - 2)e^{x - 1}$;

10) $y = \ln\dfrac{x}{x - 1}$.

1.11. ЭЛАСТИЧНОСТЬ ФУНКЦИИ КАК ОДИН ИЗ ПРИМЕРОВ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ПОНЯТИЯ ПРОИЗВОДНОЙ В ЭКОНОМИКЕ

1.11.1. Понятие эластичности функции

Как известно, значение производной $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, характеризующей скорость изменения функции y, зависит от выбора единиц измерения y и x. Поэтому при исследовании различных экономических процессов, для определения чувствительности изменения функции к изменению аргумента, возникает необходимость введения безразмерного показателя, значение которого не зависит от того, в каких единицах заданы y и x.

Таким показателем является не отношение абсолютных изменений y и x, т. е. $\Delta y : \Delta x$, а отношение их относительных, или процентных, изменений, т. е. $\left(\dfrac{\Delta y}{y}100\%\right) : \left(\dfrac{\Delta x}{x}100\%\right)$.

Величина $\left(\dfrac{\Delta y}{y}100\%\right)$ показывает, на сколько процентов изменяется значение функции, а $\left(\dfrac{\Delta x}{x}100\%\right)$ дает соответствующее процентное изменение значения аргумента.

$\boxed{\text{О}}$ ***Эластичностью $E_x(y)$*** изменения переменной y при изменении переменной x, или эластичностью функции $y = f(x)$ в точке x, называется предел отношения относительных, или процентных, изменений y и x. Таким образом,

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\left(\frac{\Delta y}{y}100\%\right):\left(\frac{\Delta x}{x}100\%\right)\right] = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{y}:\frac{\Delta x}{x}\right) =$$

$$= \frac{x}{y}\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y}f'(x) = x\frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Эластичность $E_x(y)$ показывает, на сколько процентов изменится (увеличится или уменьшится) значение функции y при увеличении аргумента x на 1 % (с x до $1{,}01x$).

Пример. Найти эластичность функции $y = 3 - 2x$ и ее значения при $x = 1$; $1{,}2$.

Решение. 1) $y' = -2$; $E_x(y) = x\dfrac{-2}{3-2x} = \dfrac{-2x}{3-2x}$.

2) а) при $x = 1$: $E_1(y) = \dfrac{-2}{3-2} = -2$, т. е. при увеличении x на 1 % (с 1 до 1,01) значение функции уменьшится на 2 % (с 1 до 0,98);

б) при $x = 1{,}2$: $E_{1,2}(y) = \dfrac{-2{,}4}{3-2{,}4} = -4$, т. е. при увеличении x на 1 % (с 1,2 до 1,212) значение функции уменьшится на 4 % (с 0,6 до 0,576).

1.11.2. Эластичность спроса и предложения относительно цены

Как известно, функция спроса имеет вид: $q = f(p)$, где q — количество товара, которое потребители готовы купить по данной цене p за определенный промежуток времени.

Если надо установить, на сколько процентов изменится (увеличится или уменьшится) спрос на товар при увеличении цены на него на 1 %, то нужно найти соответствующее значение коэффициента эластичности спроса относительно цены, вычисляемого по формуле:

$$E_p(q) = p\frac{f'(p)}{f(p)}.$$

Поскольку в большинстве случаев спрос является убывающей функцией цены и, следовательно, $f'(p) < 0$, то $E_p(q) < 0$.

$\boxed{\text{О}}$ Говорят, что ***спрос эластичен*** (повышению цены на 1 % соответствует снижение спроса более чем на 1 %), если значение соответствующего коэффициента эластичности меньше минус единицы, т. е. $E_p(q) < -1$. ***Спрос неэластичен*** (повышению цены на 1 % соответствует снижение спроса менее чем на 1 %), если значение коэффициента эластичности находится в интервале (–1; 0), т. е. $-1 < E_p(q) < 0$. ***Спрос нейтрален*** (повышению цены на 1 % соответствует снижение спроса ровно на 1 %), если значение коэффициента эластичности равно минус единице, т. е.

$$E_p(q) = -1.$$

Примеры. **1.** Исследовать динамику выручки продавцов, т. е. функцию $u = pq$, где $q = f(p)$, при различных видах спроса.

Решение. 1) Найдем предельную выручку продавцов:

$$u' = (pq)' = \frac{du}{dp} = \frac{dp}{dp}f(p) + p\frac{df(p)}{dp} = 1 \cdot f(p) + p\frac{df(p)}{dp} = f(p) + pf'(p) =$$

$$= f(p)\left[1 + p\frac{f'(p)}{f(p)}\right] = f(p)\left[1 + E_p(q)\right].$$

2) Возможны случаи: а) если спрос эластичен, т. е. $E_p(q) < -1$, то $1 + E_p(q) < 0$, а так как $f(p) > 0$, то и $\frac{du}{dp} < 0$, откуда следует, что с увеличением цены выручка продавцов снижается;

б) если спрос неэластичен, т. е. $-1 < E_p(q) < 0$, то $1 + E_p(q) > 0$, а так как $f(p) > 0$, то и $\frac{du}{dp} > 0$, откуда следует, что с увеличением цены выручка продавцов увеличивается;

в) если спрос нейтрален, т. е. $E_p(q) = -1$, то $1 + E_p(q) = 0$ и $\frac{du}{dp} = 0$, откуда $u = c = \text{const}$, т. е. величина выручки не зависит от цены товара. Такое может быть в случае, если функция спроса имеет вид: $q = \frac{k}{p}$, где k — некоторое положительное число. Действительно, $q' = -\frac{k}{p^2}$ и $E_p(q) = p\frac{-k/p^2}{k/p} = -1$.

2. Исследовать динамику выручки продавцов для функции спроса $q = 10 - \frac{1}{2}p$, где p — цена единицы товара (руб.); q — количество товара (тыс. шт.).

Решение. 1) Найдем область определения и множество значений функции спроса: а) $D(f):\begin{cases} p \ge 0 \\ 10 - \dfrac{1}{2}p \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p \ge 0 \\ p \le 20 \end{cases} \Rightarrow p \in [0;20].$

Итак, $D(f) = [0; 20]$.

б) Для нахождения $E(f)$ выразим p через q : $p = 20 - 2q$. Будем иметь:

$$\begin{cases} q \ge 0 \\ 20 - 2q \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q \ge 0 \\ q \le 10 \end{cases} \Rightarrow q \in [0;10].$$

Итак, $E(f) = [0;10]$.

2) Найдем выражение для коэффициента эластичности: $q' = -\dfrac{1}{2}$;

$$E_p(q) = p\frac{-\frac{1}{2}}{10 - \frac{1}{2}p} = -\frac{p}{20 - p} = \frac{p}{p - 20}.$$

Возможны случаи:

а) спрос эластичен, если $\dfrac{p}{p-20} < -1 \Rightarrow \dfrac{p}{p-20} + 1 < 0 \Rightarrow \dfrac{2p-20}{p-20} < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (2p - 20)(p - 20) < 0$ (рис. 1.66).

Рис. 1.66

$p \in (10; 20)$.

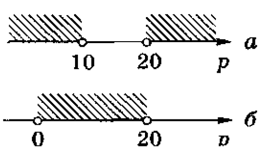
Итак, в ценовом диапазоне от 10 до 20 руб. увеличение цены ведет к уменьшению выручки продавцов.

Действительно, возьмем, например, $p_1 = 12$, тогда $q_1 = 4$ и $u_1 = p_1q_1 = 48$. При $p_2 = 16$: $q_2 = 2$ и $u_2 = p_2q_2 = 32$;

б) спрос неэластичен, если $-1 < \dfrac{p}{p-20} < 0 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{p}{p-20} + 1 > 0 \\ \dfrac{p}{p-20} < 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2p-20}{p-20} > 0, \text{ рис. 1.67, } а; \\ p(p-20) < 0, \text{ рис. 1.67, } б. \end{cases}$

Рис. 1.67



$p \in (0; 10)$

Итак, в ценовом диапазоне от 0 до 10 руб. увеличение цены ведет к увеличению выручки продавцов.

Действительно, возьмем, например, $p_1 = 2$, тогда $q_1 = 9$ и $u_1 = p_1 q_1 = 2 \cdot 9 = 18$.

При $p_2 = 6$: $q_2 = 7$ и $u_2 = p_2 q_2 = 42$;

в) спрос нейтрален, если $\dfrac{p}{p-20} = -1$, откуда $p = 10$.

В данной задаче значение $p = 10$ отделяет интервал эластичности от интервала неэластичности спроса.

3. Рассмотрим функцию нейтрального спроса $q = \dfrac{200}{p}$.

Действительно, $q' = -\dfrac{200}{p^2}$; $E_p(q) = p\dfrac{-200/p^2}{200/p} = -1$.

При $p_1 = 10$, $q_1 = 20$ и $u_1 = p_1 q_1 = 200$.

При $p_2 = 20$, $q_2 = 10$ и $u_2 = p_2 q_2 = 200$, т.е. выручка продавцов остается постоянной и не зависит от увеличения цены на товар.

Эластичность предложения определяется аналогично эластичности спроса по формуле $E_p(q) = p\dfrac{\varphi'(p)}{\varphi(p)}$, где $q = \varphi(p)$ — функция предложения, выражающая количество товара, которое производители готовы продать за определенный промежуток времени по цене p. Поскольку в большинстве случаев предложение является возрастающей функцией цены и, следовательно, $\varphi'(p) = 0$, то $E_p(q) > 0$.

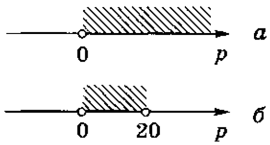
$\boxed{\text{О}}$ Предложение называется ***эластичным*** (повышению цены на 1 % соответствует повышение спроса более чем на 1 %), если $E_p(q) > 1$, ***неэластичным*** (повышению цены на 1 % соответствует повышение спроса менее чем на 1 %), если $0 < E_p(q) < 1$, ***нейтральным*** (повышению цены на 1 % соответствует повышение спроса ровно на 1 %), если $E_p(q) = 1$.

Пример. Исследовать динамику выручки продавцов для функции предложения $q = -\dfrac{1}{2}p^2 + 10p$, где p — цена единицы товара (руб.); q — количество товара (тыс. шт.).

Решение. 1) Найдем $D(f)$ и $E(f)$:

а) $D(f)$: $\begin{cases} p \ge 0 \\ -\dfrac{1}{2}p^2 + 10p \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p \ge 0 \\ -\dfrac{1}{2}p(p-20) \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p \ge 0, \text{ рис. } 1.68, a; \\ p(p-20) \le 0, \text{ рис. } 1.68, б. \end{cases}$

Рис. 1.68



$p \in [0; 20]$.

Кроме этого, функция предложения является возрастающей функцией, следовательно, ее производная $q' > 0$. Будем иметь

$$q' = -p + 10 \Rightarrow -p + 10 > 0 \Rightarrow p < 10.$$

Окончательно, $D(f) = [0;\ 10)$;

б) для нахождения $E(f)$ выразим p через q:

$$-\frac{1}{2}p^2 + 10p - q = 0 \Rightarrow p^2 - 20p + 2q = 0;\quad \frac{D}{4} = 100 - 2q;$$

$$p_1 = 10 - \sqrt{100 - 2q};\quad p_2 = 10 + \sqrt{100 - 2q}.$$

Из условия $p \in [0;\ 10)$ берем $p = 10 - \sqrt{100 - 2q}$.

Будем иметь

$$\begin{cases} q \ge 0 \\ 10 - \sqrt{100 - 2q} \ge 0 \\ 100 - 2q \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q \ge 0 \\ \sqrt{100 - 2q} \le 10 \\ q \le 50 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q \ge 0 \\ q \ge 0 \\ q \le 50 \end{cases} \Rightarrow q \in [0;50].$$

Итак, $E(f) = [0;\ 50]$.

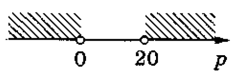
2) Найдем выражение для коэффициента эластичности:

$$q' = -p + 10;\quad E_p(q) = p\frac{-p + 10}{-\frac{1}{2}p^2 + 10p} = 2\frac{p - 10}{p - 20}.$$

Возможны случаи:

а) предложение эластично, если $2\frac{p-10}{p-20} > 1 \Rightarrow 2\frac{p-10}{p-20} - 1 > 0 \Rightarrow \frac{p}{p-20} > 0 \Rightarrow p(p-20) > 0$, рис. 1.69.

Рис. 1.69

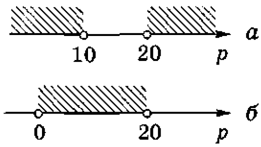


Возьмем $p \in (20;\ +\infty)$. Сравнивая с $p \in [0;\ 10)$, заключаем, что предложение эластичным быть не может;

б) предложение неэластично, если $0 < 2\frac{p-10}{p-20} < 1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{p-10}{p-20} > 0 \\ 2\frac{p-10}{p-20} - 1 < 0 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} (p - 10)(p - 20) > 0, \text{ рис. 1.70, } а; \\ p(p - 20) < 0, \text{ рис. 1.70, } б. \end{cases}$$

Рис. 1.70



Берем $p \in (0;\ 10)$. Итак, в ценовом диапазоне от 0 до 10 руб. увеличение цены ведет к увеличению выручки продавцов. Действительно, возьмем, например, $p_1 = 2$, тогда $q_1 = 18$ и $u_1 = p_1q_1 = 36$. При $p_2 = 6$: $q_2 = 42$ и $u_2 = p_2q_2 = 252$.

В заключение заметим, что при любых видах предложения с увеличением цены выручка продавцов всегда увеличивается, однако при эластичном предложении она возрастает быстрее, чем при неэластичном.

Задачи для самостоятельного решения

1. Функция спроса на некоторый товар имеет вид: $q = 100 - 4p$:

а) найдите выражение для коэффициента эластичности спроса и его значения при $p_1 = 10$; $p_2 = 20$. Прокомментируйте полученные результаты;

б) исследуйте динамику выручки продавцов.

2. Функция спроса на некоторый товар имеет вид: $q = 148 - 6p$:

а) найдите выражение для коэффициента эластичности спроса и его значения при $p_1 = 8$; $p_2 = 15$. Прокомментируйте полученные результаты;

б) исследуйте динамику выручки продавцов.

3. Функция спроса на некоторый товар имеет вид: $q = -1 + \dfrac{153}{2p+3}$;

а) найдите выражение для коэффициента эластичности спроса и его значения при $p_1 = 30$, $p_2 = 70$. Прокомментируйте полученные результаты;

б) исследуйте динамику выручки продавцов.

4. Функция спроса на некоторый товар имеет вид: $q = 60 - \sqrt{625 + p}$:

а) найдите выражение для коэффициента эластичности спроса и его значения при $p_1 = 100$, $p_2 = 1\,000$. Прокомментируйте полученные результаты;

б) исследуйте динамику выручки продавцов.

5. Функция предложения некоторого товара имеет вид: $q = \frac{1}{7}(p - 600)$:

а) найдите выражение для коэффициента эластичности предложения и его значения при $p_1 = 800$, $p_2 = 1500$. Прокомментируйте полученные результаты;

б) исследуйте динамику выручки продавцов.

6. Функция предложения некоторого товара имеет вид: $q = -2 + \sqrt{p-15}$:

а) найдите выражение для коэффициента эластичности предложения и его значения при $p_1 = 79$, $p_2 = 240$. Прокомментируйте полученные результаты;

б) исследуйте динамику выручки продавцов.

7. Функция предложения некоторого товара имеет вид: $q = \frac{30p-60}{p+4}$:

а) найдите выражение для коэффициента эластичности предложения и его значения при $p_1 = 8$, $p_2 = 56$. Прокомментируйте полученные результаты;

б) исследуйте динамику выручки продавцов.

8. Определите, на сколько процентов приблизительно изменится выручка от реализации товара, если цена на него увеличится на 5 %, а эластичность спроса составляет 0,4 %.

1.12. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1.12.1. Основная задача интегрального исчисления

Как известно, основной задачей дифференциального исчисления функций одного переменного является отыскание производной, или, иными словами, дифференцирование данной функции.

Но часто необходимо решать обратную задачу: по данной производной некоторой функции (т. е. скорости ее изменения) найти саму эту функцию. Это и есть основная задача интегрального исчисления.

1.12.2. Первообразная и неопределенный интеграл

$\boxed{\text{O}}$ Пусть функция $f(x)$ задана на некотором конечном или бесконечном промежутке Δ числовой оси R, т. е. на интервале, полуинтервале или на отрезке. Функция $F(x)$, определенная на этом же промежутке, называется ***первообразной функцией*** (или просто ***первообразной***) функции $f(x)$ на Δ, если:

1) функция $F(x)$ непрерывна на Δ;

2) во всех внутренних точках x промежутка Δ функция $F(x)$ имеет производную и $F'(x) = f(x)$.

Возникает вопрос: всякая ли функция $f(x)$ имеет на данном промежутке Δ первообразную?

Ответ. Всякая непрерывная на отрезке Δ функция $f(x)$ имеет на нем первообразную.

Далее необходимо ответить еще на один вопрос: если данная функция имеет первообразную функцию, то единственна ли эта последняя? Ответ будет отрицательным. Так, для функции $f(x) = 3x^2$ первообразной будет не только функция $F(x) = x^3$, но и функции $F_1(x) = x^3 + 1$ и $F_2(x)=x^3-\sqrt{3}$, и вообще всякая функция вида $\Phi(x) = x^3 + C$, где C — произвольное действительное число. Следовательно, если $F(x)$ — какая-либо первообразная для $f(x)$, то и всякая функция вида $\Phi(x) = F(x) + C$, где C — любое постоянное число, также является первообразной для $f(x)$, так как $(F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$.

Таким образом, если $f(x)$ имеет на данном промежутке Δ хотя бы одну первообразную $F(x)$, то она имеет на нем и бесчисленное множество первообразных, получающихся из $F(x)$ прибавлением любого постоянного числа C. Следовательно, операция отыскания первообразной данной функции, обратная к операции дифференцирования, есть операция *многозначная* (в тех случаях, когда она вообще выполнима).

$\boxed{\text{О}}$ Совокупность всех первообразных функции $f(x)$, определенных на некотором промежутке Δ, называется ***неопределенным интегралом*** от функции $f(x)$ на Δ и обозначается символом $\int f(x)dx$.

Исходя из определения неопределенного интеграла, можно теперь для данного промежутка написать, что: $\int f(x)dx = F(x) + C$, где $F(x)$ — любая из первообразных функций для $f(x)$ на рассматриваемом промежутке, а C — произвольная постоянная.

Примеры. 1. Если $x \in (-\infty; \infty)$, то $\int 3x^2dx = x^3 + C$.

2. Если $x \in (-1; 1)$, то $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$.

1.12.3. Простейшие свойства неопределенных интегралов

Свойство 1. Пусть функция $F(x)$ непрерывна на данном промежутке и дифференцируема во всех его внутренних точках. Тогда

$$\boxed{\int dF(x) = F(x) + C \text{ или } \int F'(x)dx = F(x) + C.}$$

Доказательство. Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, то $F'(x) = f(x)$ и, следовательно, $dF(x) = f(x)dx \Rightarrow \int dF(x) = \int f(x)dx = F(x) + C$. ■

В частности, $\boxed{\int dx = x + C.}$

Свойство 2. Пусть функция $f(x)$ имеет первообразную на данном промежутке. Тогда для любой внутренней точки этого промежутка имеет место равенство: $\boxed{d\int f(x)dx = f(x)dx.}$

Доказательство. Так как $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $d(F(x) + C) = dF(x) = F'(x)\,dx = f(x)\,dx$. ■

Свойство 3. Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют первообразные на данном промежутке, то и функция $f_1(x) + f_2(x)$ имеет на нем первообразную, причем $\boxed{\int [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx.}$

$\boxed{\text{C}}$ $\int [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx \pm \ldots \pm \int f_n(x)dx.$

Свойство 4. Если $k \neq 0$ — некоторое число и функция $f(x)$ имеет первообразную на данном промежутке, то функция $kf(x)$ также имеет на нем первообразную, причем $\boxed{\int kf(x)dx = k\int f(x)dx.}$

1.12.4. Интегрирование в конечном виде и таблица простейших неопределенных интегралов

Само определение производной дает возможность найти ее во всяком случае от любой простейшей элементарной функции, что, благодаря основным правилам дифференцирования и правилу дифференцирования сложной функции, позволяет отыскать производную и от любой элементарной функции в широком смысле этого слова (если, разумеется, эта производная существует).

По отношению к отысканию первообразной от данной функции аналогичное положение вещей не имеет смысла. Интеграл от некоторых элементарных функций может вообще быть неэлементарной функцией. Таковы, например, интегралы: $\int \frac{\sin x}{x} dx$; $\int \frac{dx}{\ln x}$; $\int x^x dx$.

Эти интегралы, как доказывается, существуют в соответствующих областях, но не могут быть выражены в конечном виде через первичные элементарные функции, т. е. не являются элементарными функциями.

О функциях, интегралы от которых не выражаются в конечном виде через элементарные функции, говорят, что они не интегрируются (не интегрируемы) в конечном виде.

Но даже в тех случаях, когда интеграл от данной элементарной функции выражается в конечном виде через элементарные функции, для отыскания этого выражения не существует в современной математике единого, удобного на практике приема.

Все это заставляет рассматривать классы простейших, часто встречающихся интегралов, создавать особые приемы и методы интегрирования.

Для облегчения вычисления неопределенных интегралов составляют также таблицу выражений для наиболее часто встречающихся простейших интегралов. Приведем некоторые из них.

- **1.** $\boxed{\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,}$ где $n \neq -1$, $x \neq 0$.

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a} + C.$$

Примеры. 1. $\int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + C$; 2. $\int \sqrt[3]{x} dx = \int x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + C$;

3. $\int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2} dx = -\frac{1}{x} + C$; 4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = 2\sqrt{x} + C$;

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-3x}} = \int (5-3x)^{-\frac{1}{2}} dx = -\frac{2}{3}\sqrt{5-3x} + C$.

- **2.** $\boxed{\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,}$ $x \neq 0$; $\int \frac{1}{ax \pm b} dx = \frac{1}{a} \ln|ax \pm b| + C$.

Пример. $\int\frac{dx}{3-2x}=-\frac{1}{2}\ln|3-2x|+C.$

- **3.** $\boxed{\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C,}$ $a>0; a\neq 1;$ $\int a^{kx+b}dx=\frac{a^{kx+b}}{k\ln a}+C.$

Пример. $\int 3^{5-4x}dx=-\frac{3^{5-4x}}{4\ln 3}+C.$

- **4.** $\boxed{\int e^x dx=e^x+C;}$ $\int e^{kx+b}dx=\frac{1}{k}e^{kx+b}+C.$

Пример. $\int e^{-2x}dx=-\frac{1}{2}e^{-2x}+C.$

- **5.** $\boxed{\int\cos x\,dx=\sin x+C;}$ $\int\cos ax\,dx=\frac{1}{a}\sin ax+C.$

Пример. $\int\cos 3x\,dx=\frac{1}{3}\sin 3x+C.$

- **6.** $\boxed{\int\sin x\,dx=-\cos x+C;}$ $\int\sin ax\,dx=-\frac{1}{a}\cos ax+C.$

Пример. $\int\sin\frac{1}{2}x\,dx=-2\cos\frac{1}{2}x+C.$

- **7.** $\boxed{\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg}x+C;}$ $\int\frac{dx}{\cos^2 ax}=\frac{1}{a}\operatorname{tg}ax+C.$

Пример. $\int\frac{dx}{\cos^2 5x}=\frac{1}{5}\operatorname{tg}5x+C.$

- **8.** $\boxed{\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg}x+C;}$ $\int\frac{dx}{\sin^2 ax}=-\frac{1}{a}\operatorname{ctg}ax+C.$

Пример. $\int\frac{dx}{\sin^2\frac{1}{3}x}=-3\operatorname{ctg}\frac{1}{3}x+C.$

- **9.** $\boxed{\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C\ (=-\arccos x+C),}$ $-1<x<1.$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C;\ \int\frac{dx}{\sqrt{a^2-b^2x^2}}=\frac{1}{b}\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-x^2}}=\frac{1}{b}\arcsin\frac{b}{a}x+C.$$

Примеры. 1. $\int\frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}=\arcsin\frac{x}{\sqrt5}+C;$ **2.** $\int\frac{dx}{\sqrt{9-5x^2}}=\frac{1}{\sqrt5}\arcsin\frac{\sqrt5}{3}x+C.$

• **10.** $\boxed{\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C (= -\operatorname{arcctg} x + C);}$ $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C;$

$$\int \frac{dx}{a^2+b^2x^2} = \frac{1}{b^2} \int \frac{dx}{\frac{a^2}{b^2} + x^2} = \frac{1}{b^2} \frac{b}{a} \operatorname{arctg} \frac{bx}{a} + C = \frac{1}{ab} \operatorname{arctg} \frac{bx}{a} + C.$$

Примеры. 1. $\int \frac{dx}{3+x^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} + C;$ 2. $\int \frac{dx}{4+9x^2} = \frac{1}{6} \operatorname{arctg} \frac{3x}{2} + C.$

• **11.** $\boxed{\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C;}$ $\boxed{\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right| + C.}$

Примеры. 1. $\int \frac{dx}{x^2-5} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \ln \left| \frac{x-\sqrt{5}}{x+\sqrt{5}} \right| + C;$ 2. $\int \frac{dx}{4-x^2} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x+2}{x-2} \right| + C.$

• **12.** $\boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm \alpha}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm \alpha} \right| + C.}$

Пример. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-7}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2-7} \right| + C.$

1.12.5. Непосредственное интегрирование

Метод непосредственного интегрирования применяется в случаях, когда с помощью формул интеграл можно свести к одному или нескольким табличным интегралам.

Примеры. 1. $\int \left(\sqrt{x} - \sqrt[3]{7x} + 2^{2x} \right) dx = \int \sqrt{x} dx - \int \sqrt[3]{7x} dx + \int 2^{2x} dx =$

$$= \int x^{\frac{1}{2}} dx - \sqrt[3]{7} \int x^{\frac{1}{3}} dx + \int 2^{2x} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \sqrt[3]{7} \cdot \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + \frac{2^{2x}}{2 \ln 2} + C;$$

2. $\int \frac{1+\sqrt{x}+x}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \int \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{x}{\sqrt[3]{x^2}} \right) dx = \int \left(x^{-\frac{2}{3}} + x^{-\frac{1}{6}} + x^{\frac{1}{3}} \right) dx =$

$$= 3x^{\frac{1}{3}} + \frac{6}{5} x^{\frac{5}{6}} + \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + C;$$

3. $\int (3-2\sqrt{x})^2 dx = \int (9 - 12\sqrt{x} + 4x) dx = 9x - 8x^{\frac{3}{2}} + 2x^2 + C;$

4. $\int \mathrm{ctg}^2 x dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) dx = -\mathrm{ctg} x - x + C;$

5. $\int \cos^2 x dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x \right) dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C;$

6. $\int \sin 2x \cos 5x dx = \int \frac{1}{2}(\sin 7x - \sin 3x) dx = -\frac{1}{14}\cos 7x + \frac{1}{6}\cos 3x + C;$

7. $\int \frac{x^4}{x^2+1} dx = \int \frac{(x^4-1)+1}{x^2+1} dx = \int \left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1} \right) dx = \frac{1}{3}x^3 - x + \mathrm{arctg}\, x + C.$

1.12.6. Интегрирование методом подстановки

Рассмотрим интеграл $I = \int f(x)dx$. Пусть $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — дифференцируемая функция. Тогда $dx = \varphi'(t)dt$ и $\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$.

Данный метод основан на удачно выбранной замене, после которой интеграл либо сразу, либо после нескольких действий сводится к табличному.

Примеры. 1. $\int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int e^t dt = \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$

(замена: $x^2 = t \Rightarrow 2xdx = dt;\ xdx = \frac{1}{2}dt$);

2. $\int \mathrm{ctg}\, x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln|\sin x| + C$

(замена: $\sin x = t \Rightarrow \cos x dx = dt$);

3. $\int \frac{3-2x}{\sqrt{5x-1}} dx = \int \frac{3 - 2\frac{1}{5}(t^2+1)}{t} \frac{2}{5} t dt = \frac{2}{25}\int (15 - 2t^2 - 2) dt =$

(замена: $5x - 1 = t^2 \Rightarrow x = \frac{1}{5}(t^2+1) \Rightarrow dx = \frac{2}{5}tdt;\ t = \sqrt{5x-1}$)

$= \frac{2}{25}\int (13 - 2t^2) dt = \frac{2}{25}(13t - \frac{2}{3}t^3) + C = \frac{2}{25}\left(13\sqrt{5x-1} - \frac{2}{3}\sqrt{(5x-1)^3} \right) + C.$

4. $\int \frac{x^2 dx}{1+x^6} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{3}\mathrm{arctg}\, t + C = \frac{1}{3}\mathrm{arctg}\, x^3 + C$

(замена: $x^3 = t \Rightarrow 3x^2 dx = dt; x^2 dx = \frac{1}{3}dt$).

5. $\int\frac{\ln^2(x-3)}{x-3}dx=\int t^2dt=\frac{1}{3}t^3+C=\frac{1}{3}\ln^3(x-3)+C$

(замена: $\ln(x-3)=t\Rightarrow\frac{1}{x-3}dx=dt$).

6. $\int\frac{\operatorname{arctg}^2 2x}{1+4x^2}dx=\frac{1}{2}\int t^2dt=\frac{1}{6}t^3+C=\frac{1}{6}\operatorname{arctg}^3 2x+C$

(замена: $\operatorname{arctg}2x=t\Rightarrow\frac{2}{1+4x^2}dx=dt;\ \frac{1}{1+4x^2}dx=\frac{1}{2}dt$).

7. $\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\int\frac{dx}{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a}}=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a^2}}=$

(замена: $x+\frac{b}{2a}=t\Rightarrow dx=dt$)

$=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^2-\frac{D}{4a^2}}$. Далее в зависимости от знака D.

Аналогично вычисляется интеграл вида $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

Рассмотрим числовые примеры.

7а. $\int\frac{dx}{2x^2-2x+3}=\int\frac{dx}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{2}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+\frac{5}{4}}=$

(замена: $x-\frac{1}{2}=t\Rightarrow dx=dt$)

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{2t}{\sqrt{5}}+C=\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{5}}+C.$

7б. $\int\frac{dx}{\sqrt{6-4x-2x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{-2(x^2+2x-3)}}=\int\frac{dx}{\sqrt{-2[(x+1)^2-4]}}=$

$=\int\frac{dx}{\sqrt{8-2(x+1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{4-(x+1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dt}{\sqrt{4-t^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{t}{2}+C=$

(замена: $x+1=t\Rightarrow dx=dt$)

$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{x+1}{2}+C.$

8. $\int\frac{xdx}{x^2\pm a^2}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\ln|t|+C=\frac{1}{2}\ln|x^2\pm a^2|+C$

(замена: $x^2\pm a^2=t\Rightarrow 2xdx=dt\Rightarrow xdx=\frac{1}{2}dt$).

9. Вычисление интеграла типа $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx$ покажем на конкретном примере: $\int \frac{3x-1}{x^2-4x+8}dx = \int \frac{3x-1}{(x-2)^2+4}dx = \int \frac{3t+5}{t^2+4}dt =$

(замена: $x-2=t \Rightarrow x=t+2 \Rightarrow dx=dt;\ 3x-1=3(t+2)-1=3t+5$)

$$= 3\int \frac{t}{t^2+4}dt + 5\int \frac{1}{t^2+4}dt = \frac{3}{2}\ln|t^2+4| + \frac{5}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} + C =$$

$$= \frac{3}{2}\ln|x^2-4x+8| + \frac{5}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{2} + C.$$

10. $\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \int a\cos t \cdot a\cos t dt = a^2\int \cos^2 t dt = a^2 \int \frac{1+\cos 2t}{2}dt =$

(замена: $x = a\sin t \Rightarrow dx = a\cos t dt;\ a^2-x^2 = a^2 - a^2\sin^2 t = a^2\cos^2 t$)

$= \frac{a^2}{2}\left(\int dt + \int \cos 2t dt\right) = \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C.$ Но $\sin t = \frac{x}{a}$. Тогда

$t = \arcsin\frac{x}{a};\ \cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a};\ \sin 2t = 2\sin t\cos t =$

$= 2\frac{x}{a}\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$. Окончательно: $\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{a^2}{2}(\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}) +$

$+C = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C.$

Рассмотрим числовой пример.

10а. $\int \sqrt{9-4x^2}dx = 2\int \sqrt{\frac{9}{4}-x^2}dx = 2\left(\frac{9}{8}\arcsin\frac{2x}{3} + \frac{x}{2}\sqrt{\frac{9}{4}-x^2}\right) + C.$

1.12.7. Интегрирование по частям

Этот метод интегрирования основан на тождестве:

$$d(uv) = udv + vdu \Rightarrow \boxed{udv = d(uv) - vdu,}$$

где $u = f(x)$ и $v = \varphi(x)$ — две функции, имеющие на данном промежутке производные. Взяв интеграл от обеих частей данного тождества, будем иметь:

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu, \text{ откуда } \boxed{\int udv = uv - \int vdu.}$$

В данном методе функции u и v выбирают так, чтобы $\int v d$ был для вычисления проще, чем исходный интеграл $\int u dv$.

Примеры. 1. $\int x\sin x dx = -x\cos x + \int \cos x dx = -x\cos x + \sin x + C$

$$\left(\begin{array}{ccc} u = x & & du = dx \\ & \Rightarrow & \\ dx = \sin x dx & & v = \int \sin x dx = -\cos x \end{array}\right);$$

2. $\int x\ln x dx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \int \frac{1}{2}x^2\frac{1}{x}dx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$

$$\left(\begin{array}{ccc} u = \ln x & & du = \frac{1}{x}dx \\ & \Rightarrow & \\ dv = x dx & & v = \int x dx = \frac{1}{2}x^2 \end{array}\right);$$

3. $\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C,$

$$\left(\begin{array}{ccc} u = x & & du = dx \\ & \Rightarrow & \\ dv = e^x dx & & v = \int e^x dx = e^x \end{array}\right);$$

4. $\int x^2 \operatorname{arctg} x dx = \frac{1}{3}x^3 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{1+x^2}dx$

$$\left(\begin{array}{ccc} u = \operatorname{arctg} x & & du = \frac{1}{1+x^2}dx \\ & \Rightarrow & \\ dv = x^2 dx & & v = \int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 \end{array}\right).$$

Рассмотрим интеграл:

$$\int \frac{x^3}{1+x^2}dx = \int x dx - \int \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + C;$$

$$\frac{x^3}{1+x^2} = x - \frac{x}{1+x^2}.$$

Окончательно: $\int x^2 \operatorname{arctg} x dx = \frac{1}{3}x^3 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}\ln|1+x^2| + C.$

Замечание. Для интегрирования *неправильной* дроби (когда старшая степень числителя больше либо равна старшей степени знаменателя — в нашем примере старшая степень числителя равна 3, а старшая степень знаменателя равна 2) нужно ее *обязательно* представить в виде алгебраической суммы целой части (в нашем случае это x) и правильной дроби (в нашем случае это $\frac{x}{1+x^2}$). Для этого разделим x^3 на x^2+1. Деление многочлена на многочлен проводят «уголком» по старшим степеням, до тех пор пока старшая степень остатка не окажется меньше старшей степени делителя:

$$\begin{array}{r|l} x^3 & x^2+1 \\ \cline{2-2} -\underline{x^3+x} & x \\ -x & \end{array} \Rightarrow \frac{x^3}{1+x^2} = x - \frac{x}{1+x^2}.$$

Для примера представим еще одну неправильную дробь $\frac{x^5-2}{2x^2+3}$ в виде алгебраической суммы целой части и правильной дроби. Разделим (x^5-2) на $(2x^2+3)$.

$$\begin{array}{r|l} x^5-2 & 2x^2+3 \\ \cline{2-2} -\underline{x^5+\frac{3}{2}x^3} & \frac{1}{2}x^3-\frac{3}{4}x \\ -\frac{3}{2}x^3-2 & \\ -\underline{-\frac{3}{2}x^3-\frac{9}{4}x} & \\ \frac{9}{4}x-2 & \end{array} \Rightarrow \frac{x^5-2}{2x^2+3} = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{\frac{9}{4}x-2}{2x^2+3}$$

Деление оканчивается после того, как старшая степень остатка оказывается меньше старшей степени делителя.

5. $I = \int e^{2x}\sin 3x\,dx = -\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x + \frac{2}{3}\int e^{2x}\cos 3x\,dx$

$$\left(\begin{array}{ccc} u = e^{2x} & & du = 2e^{2x}dx \\ & \Rightarrow & \\ dv = \sin 3x\,dx & & v = \int \sin 3x\,dx = -\frac{1}{3}\cos x \end{array}\right).$$

Вычислим теперь

$\int e^{2x}\cos 3x\,dx = \frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x - \frac{2}{3}\int e^{2x}\sin 3x\,dx = \frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x - \frac{2}{3}I$

$$\left(\begin{array}{ccc} u = e^{2x} & & du = 2e^{2x}dx \\ & \Rightarrow & \\ dv = \cos 3x\,dx & & v = \int \cos 3x\,dx = \frac{1}{3}\sin 3x \end{array}\right).$$

Имеем $I = -\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x + \frac{2}{9}e^{2x}\sin 3x - \frac{4}{9}I$.

Окончательно: $I = \frac{1}{13}e^{2x}(2\sin 3x - 3\cos 3x) + C$.

6. $I = \int (4-5x^2)\cos 3x\,dx = \frac{1}{3}(4-5x^2)\sin 3x + \frac{10}{3}\int x\sin 3x\,dx$

$$\left(\begin{array}{ccc} u = 4-5x^2 & & du = -10x\,dx \\ & \Rightarrow & \\ dv = \cos 3x\,dx & & v = \int \cos 3x\,dx = \frac{1}{3}\sin 3x \end{array}\right).$$

Вычислим теперь $\int x\sin 3x\,dx = -\frac{1}{3}x\cos 3x + \frac{1}{3}\int \cos 3x\,dx$

$$\left(\begin{array}{ccc} u = x & & du = dx \\ & \Rightarrow & \\ dv = \sin 3x\,dx & & v = \int \sin 3x\,dx = -\frac{1}{3}\cos 3x \end{array}\right) = -\frac{1}{3}x\cos 3x + \frac{1}{9}\sin 3x.$$

Имеем: $I = \frac{1}{3}(4-5x^2)\sin 3x - \frac{10}{9}x\cos 3x + \frac{10}{27}\sin 3x + C$.

1.12.8. Интегрирование рациональных функций

Вычисление интегралов вида $\int \frac{P(x)}{(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}(x-c)^{\gamma}}dx.$

1) Если старшая степень многочлена $P(x)$ больше либо равна суммарной старшей степени знаменателя, то дробь $\frac{P(x)}{(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}(x-c)^{\gamma}}$ представляют в виде алгебраической суммы целой части и правильной дроби, т. е. $\frac{P(x)}{(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}(x-c)^{\gamma}} =$

$= A(x) + \frac{P_1(x)}{(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}(x-c)^{\gamma}}$, где старшая степень многочлена $P_1(x)$ меньше суммарной старшей степени знаменателя.

2) Дробь $\frac{P_1(x)}{(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}(x-c)^{\gamma}}$ представляют в виде алгебраической суммы «элементарных» дробей, т. е.

$$\frac{P_1(x)}{(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}(x-c)^{\gamma}} = \frac{A_1}{(x-a)} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_{\alpha}}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{B_1}{(x-b)} + \cdots$$

$+\frac{B_{\beta}}{(x-в)^{\beta}} + \frac{C_1}{(x-c)} + \ldots + \frac{C_{\gamma}}{(x-c)^{\gamma}}$, где A_i, B_i, C_i — некоторые числовые коэффициенты.

Дальнейшие пояснения дадим на конкретных примерах.

Примеры. 1. $\int \frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-3)}dx.$

Решение. 1) Поскольку старшая степень числителя (она равна 2) меньше суммарной старшей степени знаменателя (она равна 3), то

$$5\ \frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}.$$

2) Найдем неизвестные числовые коэффициенты A, B, C. Для этого приведем сумму трех дробей правой части к общему знаменателю:

$$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3} = \frac{A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)} =$$

$$= \frac{Ax^2 - 5Ax + 6A + Bx^2 - 4Bx + 3B + Cx^2 - 3Cx + 2C}{(x-1)(x-2)(x-3)} =$$

$$=\frac{(A+B+C)x^2+(-5A-4B-3C)x+(6A+3B+2C)}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

Будем иметь

$$\frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{(A+B+C)x^2+(-5A-4B-3C)x+(6A+3B+2C)}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

3) Для равенства этих двух дробей необходимо, чтобы

$$\begin{cases}A+B+C=1\\-5A-4B-3C=2\\6A+3B+2C=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1-B-C\\-5+5B+5C-4B-3C=2\\6-6B-6C+3B+2C=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1-B-C\\B+2C=7\\-3B-4C=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A=1-B-C\\B=7-2C\\-21+6C-4C=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1-B-C\\B=7-2C\\2C=21\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=\dfrac{9}{2}\\B=-14.\\C=\dfrac{21}{2}\end{cases}$$

Итак, $\dfrac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\dfrac{9}{2}\cdot\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{14}{x-2}+\dfrac{21}{2}\cdot\dfrac{1}{x-3}.$

Окончательно,

$$\int\frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-3)}dx=\frac{9}{2}\int\frac{1}{x-1}dx-\int\frac{14}{x-2}dx+\frac{21}{2}\int\frac{1}{x-3}dx=$$

$$=\frac{9}{2}\ln|x-1|-14\ln|x-2|+\frac{21}{2}\ln|x-3|+C.$$

2. $\displaystyle\int\frac{4x^3+x^2-2}{(x-2)(x-1)x}dx.$

Решение. 1) Поскольку старшая степень числителя (она равна 3) равна старшей степени знаменателя (она тоже равна 3), то, разделив числитель на знаменатель, представим данную дробь в виде алгебраической суммы целой части и правильной дроби. Будем иметь:

$$\begin{array}{r|l} 4x^3+x^2-2 & x^3-3x^2+2x \\ \cline{2-2} -\underline{4x^3-12x^2+8x} & 4 \\ 13x^2-8x-2 & \end{array}$$

Деление происходит до тех пор, пока старшая степень остатка не окажется меньше старшей степени делителя.

Итак, $\dfrac{4x^3+x^2-2}{(x-2)(x-1)x} = 4+\dfrac{13x^2-8x-2}{(x-2)(x-1)x}$.

2) Правильную дробь $\dfrac{13x^2-8x-2}{(x-2)(x-1)x}$ представим в виде алгебраической суммы элементарных дробей: $\dfrac{13x^2-8x-2}{(x-2)(x-1)x}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{x}$.

3) Найдем неизвестные числовые коэффициенты A, B и C.

Для этого приведем сумму трех дробей правой части к общему знаменателю:

$$\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x}=\frac{A(x-1)x+B(x-2)x+C(x-2)(x-1)}{(x-2)(x-1)x}=$$

$$=\frac{Ax^2-Ax+Bx^2-2Bx+Cx^2-3Cx+2C}{(x-2)(x-1)x}=$$

$$=\frac{(A+B+C)x^2+(-A-2B-3C)x+2C}{(x-2)(x-1)x}.$$

Будем иметь

$$\frac{13x^2-8x-2}{(x-2)(x-1)x}=\frac{(A+B+C)x^2+(-A-2B-3C)x+2C}{(x-2)(x-1)x}.$$

4) Для равенства этих двух дробей необходимо, чтобы

$$\begin{cases}A+B+C=13\\-A-2B-3C=-8\\2C=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A+B=14\\-A-2B=-11\\C=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=14-B\\B=-3\\C=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=17\\B=-3.\\C=-1\end{cases}$$

Итак, $\dfrac{13x^2-8x-2}{(x-2)(x-1)x}=\dfrac{17}{x-2}-\dfrac{3}{x-1}-\dfrac{1}{x}$.

Окончательно,

$$\int\frac{4x^3+x^2-2}{(x-2)(x-1)x}dx=4\int dx+17\int\frac{dx}{x-2}-3\int\frac{dx}{x-1}-\int\frac{dx}{x}=$$

$$=4x+17\ln|x-2|-3\ln|x-1|-\ln|x|+C.$$

Вычисление интегралов вида $\displaystyle\int\frac{P(x)}{(ax^2+bx+c)^{\alpha}(x-m)^{\beta}}dx$ **(дискриминант квадратного трехчлена ax^2+bx+c меньше 0).**

1) Если старшая степень многочлена $P(x)$ больше либо равна суммарной старшей степени знаменателя, то дробь $\dfrac{P(x)}{(ax^2+bx+c)^\alpha (x-m)^\beta}$ представляют в виде алгебраической суммы целой части и правильной дроби, т.е.

$$\frac{P(x)}{(ax^2+bx+c)^\alpha (x-m)^\beta} = A(x) + \frac{P_1(x)}{(ax^2+bx+c)^\alpha (x-m)^\beta},$$

где старшая степень многочлена $P_1(x)$ меньше суммарной старшей степени знаменателя.

2) Дробь $\dfrac{P_1(x)}{(ax^2+bx+c)^\alpha (x-m)^\beta}$ представляют в виде алгебраической суммы следующих дробей:

$$\frac{P_1(x)}{(ax^2+bx+c)^\alpha (x-m)^\beta} = \frac{A_1x+B_1}{(ax^2+bx+c)} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \ldots$$

$$+ \frac{A_\alpha x+B_\alpha}{(ax^2+bx+c)^\alpha} + \frac{C_1}{(x-m)} + \frac{C_2}{(x-m)^2} + \ldots + \frac{C_\beta}{(x-m)^\beta},$$

где A_i, B_i, C_i — некоторые числовые коэффициенты. Дальнейшие пояснения дадим на конкретном примере.

Пример. $\displaystyle\int \frac{-3x^3+13x^2-13x+1}{(x^2-x+1)(x-2)^2}dx.$

Решение. 1) Поскольку старшая степень числителя (она равна 3) меньше суммарной старшей степени знаменателя (она равна 4), то

$$\frac{-3x^3+13x^2-13x+1}{(x^2-x+1)(x-2)^2} = \frac{Ax+B}{x^2-x+1} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{(x-2)^2}.$$

2) Найдем неизвестные числовые коэффициенты A, B, C и D. Для этого приведем сумму трех дробей правой части к общему знаменателю:

$$\frac{Ax+B}{x^2-x+1} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{(x-2)^2} = \frac{(Ax+B)(x-2)^2 + C(x^2-x+1)(x-2) + D(x^2-x+1)}{(x^2-x+1)(x-2)^2} =$$

$$= \frac{Ax^3+(-4A+B)x^2+(4A-4B)x+4B+Cx^3-3Cx^2+3Cx-2C+Dx^2-Dx+D}{(x^2-x+1)(x-2)^2} =$$

$$= \frac{(A+C)x^3+(-4A+B-3C+D)x^2+(4A-4B+3C-D)x+(4B-2C+D)}{(x^2-x+1)(x-2)^2}.$$

Будем иметь

$$\frac{-3x^3+13x^2-13x+1}{(x^2-x+1)(x-2)^2}=$$

$$=\frac{(A+C)x^3+(-4A+B-3C+D)x^2+(4A-4B+3C-D)x+(4B-2C+D)}{(x^2-x+1)(x-2)^2}.$$

3) Для равенства этих двух дробей необходимо, чтобы

$$\begin{cases}A+C=-3\\-4A+B-3C+D=13\\4A-4B+3C-D=-13\\4B-2C+D=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-3-C\\12+4C+B-3C+D=13\\-12-4C-4B+3C-D=-13\\4B-2C+D=1\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A=-3-C\\B+C+D=1\\-4B-C-D=-1\\4B-2C+D=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-3-C\\B=1-C-D\\-4+4C+4D-C-D=-1\\4-4C-4D-2C+D=1\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}A=-3-C\\B=1-C-D\\3C+3D=3\\-6C-3D=-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-3-C\\B=1-C-D\\C+D=1\\2C+D=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-3-C\\B=1-C-D\\C=1-D\\2-2D+D=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-3\\B=0\\C=0\\D=1.\end{cases}$$

Итак, $\dfrac{-3x^3+13x^2-13x+1}{(x^2-x+1)(x-2)^2}=\dfrac{-3x}{x^2-x+1}+\dfrac{1}{(x-2)^2}$. Тогда

$$\int\frac{-3x^3+13x^2-13x+1}{(x^2-x+1)(x-2)^2}dx=-3\int\frac{xdx}{x^2-x+1}+\int\frac{dx}{(x-2)^2}.$$

4) Рассмотрим отдельно интегралы:

а) $\displaystyle\int\frac{xdx}{x^2-x+1}=\int\frac{xdx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\int\frac{(t+\frac{1}{2})dt}{t^2+\frac{3}{4}}=$

{замена $x-\dfrac{1}{2}=t\Rightarrow x=t+\dfrac{1}{2}\Rightarrow dx=dt$}

$$=\int\frac{tdt}{t^2+\frac{3}{4}}+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}\ln\left|t^2+\frac{3}{4}\right|+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t}{\sqrt{3}}+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x^2-x+1|+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C;$$

б) $\int \frac{dx}{(x-2)^2} = \int (x-2)^{-2} dx = -\frac{1}{x-2} + C.$

Окончательно,

$$\int \frac{-3x^3+13x^2-13x+1}{(x^2-x+1)(x-2)^2} dx = -\frac{3}{2}\ln|x^2-x+1| - \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{x-2} + C.$$

1.12.9. Интегрирование простейших иррациональных функций

Пример 1. $\int \frac{dx}{(2x+1)^{\frac{2}{3}} - (2x+1)^{\frac{1}{2}}}.$

Решение. {Замена $2x+1 = t^6 \Rightarrow 2dx = 6t^5dt \Rightarrow dx = 3t^5dt$; $t = \sqrt[6]{2x+1}$ (число 6 является наименьшим общим знаменателем дробей $\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{2}$). }

Будем иметь

$$\int \frac{3t^5dt}{(t^6)^{\frac{2}{3}} - (t^6)^{\frac{1}{2}}} = 3\int \frac{t^5dt}{t^4-t^3} = 3\int \frac{t^5dt}{t^3(t-1)} = 3\int \frac{t^2dt}{t-1} =$$

$$= 3\int \frac{[(t^2-1)+1]dt}{t-1} = 3\left(\int (t+1)dt + \int \frac{dt}{t-1}\right) = 3\left(\frac{1}{2}t^2 + t + \ln|t-1|\right) + C =$$

$$= 3\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{2x+1} + \sqrt[6]{2x+1} + \ln|\sqrt[6]{2x+1} - 1|\right) + C.$$

Пример 2. $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx.$

В качестве числового примера рассмотрим $\int \frac{5x-3}{\sqrt{2x^2+8x+1}} dx.$

Решение. 1) $2x^2 + 8x + 1 = 2(x+2)^2 - 7.$

2) {Замена: $x+2 = t \Rightarrow x = t-2 \Rightarrow dx = dt.$} Будем иметь

$$\int \frac{5x-3}{\sqrt{2x^2+8x+1}} dx = \int \frac{5(t-2)-3}{\sqrt{2t^2-7}} dx = \int \frac{5t-13}{\sqrt{2}\sqrt{t^2-\frac{7}{2}}} dt = \frac{5}{\sqrt{2}} \int \frac{tdt}{\sqrt{t^2-\frac{7}{2}}} - \frac{13}{\sqrt{2}} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-\frac{7}{2}}}.$$

3) Вычислим отдельно каждый из интегралов:

а) $\int \frac{tdt}{\sqrt{t^2-\frac{7}{2}}} = \int \frac{udu}{u} = \int du = u + C = \sqrt{t^2-\frac{7}{2}} + C = \sqrt{(x+2)^2-\frac{7}{2}} + C$

{замена: $t^2 - \frac{7}{2} = u^2 \Rightarrow 2tdt = 2udu \Rightarrow tdt = udu$ };

б) $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-\frac{7}{2}}} = \ln\left|t+\sqrt{t^2-\frac{7}{2}}\right| + C = \ln\left|x+2+\sqrt{(x+2)^2-\frac{7}{2}}\right| + C.$

Окончательно:

$$\int \frac{5x-3}{\sqrt{2x^2+8x+1}}dx = \frac{5}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{(x+2)^2-\frac{7}{2}} - \frac{13}{\sqrt{2}}\cdot\ln\left|x+2+\sqrt{(x+2)^2-\frac{7}{2}}+C.\right.$$

Пример 3. $\int \frac{dx}{(x-d)\sqrt{ax^2+bx+c}}.$

В качестве числового примера рассмотрим $\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2-2x}}.$

Решение. 1) {Замена: $x+2=\frac{1}{t} \Rightarrow x=\frac{1}{t}-2 \Rightarrow dx=-\frac{1}{t^2}dt$}.

2) Будем иметь $\sqrt{x^2-2x} = \sqrt{\left(\frac{1}{t}-2\right)^2-2\left(\frac{1}{t}-2\right)} = \sqrt{\frac{1}{t^2}-\frac{4}{t}+4-\frac{2}{t}+4} =$

$$= \sqrt{\frac{1}{t^2}-\frac{6}{t}+8} = \sqrt{\frac{8t^2-6t+1}{t^2}} = \frac{\sqrt{8t^2-6t+1}}{t};$$

$$\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2-2x}} = \int \frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\cdot\frac{\sqrt{8t^2-6t+1}}{t}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{8t^2-6t+1}} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{8}}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-\frac{3}{4}t+\frac{1}{8}}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{dt}{\sqrt{\left(t-\frac{3}{8}\right)^2-\frac{7}{16}}} =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{du}{\sqrt{u^2-\frac{7}{16}}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln|\,u+\sqrt{u^2-\frac{7}{16}}\,|+C =$$

$= \{$замена: $t-\frac{3}{8}=u \Rightarrow t=u+\frac{3}{8} \Rightarrow dt=du\} =$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln|\,t-\frac{3}{8}+\sqrt{\left(t-\frac{3}{8}\right)^2-\frac{7}{16}}\,|+C =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln|\,\frac{1}{x+2}-\frac{3}{8}+\sqrt{\left(\frac{1}{x+2}-\frac{3}{8}\right)^2-\frac{7}{16}}\,|+C.$$

1.12.10. Интегрирование простейших тригонометрических функций

Вычисление интегралов вида $\int \sin^m kx \cos^n kx\,dx$. При этом возможны два варианта.

Вариант 1. Либо m, либо n — нечетное положительное число.

- Если m — нечетное положительное число, то делаем подстановку $\cos kx = t$.

Пример.

$$\int \sin^3 x \cos^5 x\,dx = \int \sin^2 x \cos^5 x \sin x\,dx = \int (1-\cos^2 x)\cos^5 x \sin x\,dx =$$

$$= (\text{замена: } \cos x = t \Rightarrow -\sin x\,dx = dt \Rightarrow \sin x\,dx = -dt) =$$

$$= -\int (1-t^2)t^5 dt = -\int t^5 dt + \int t^7 dt = -\frac{1}{6}t^6 + \frac{1}{8}t^8 + C = -\frac{1}{6}\cos^6 x + \frac{1}{8}\cos^8 x + C.$$

- Если n — нечетное положительное число, то делаем подстановку $\sin kx = t$.

Пример.

$$\int \sin^4 x \cos^3 x\,dx = \int \sin^4 x \cos^2 x \cos x\,dx = \int \sin^4 x(1-\sin^2 x)\cos x\,dx =$$

$$= (\text{замена: } \sin x = t \Rightarrow \cos x\,dx = dt) =$$

$$= \int t^4(1-t^2)dt = \int t^4 dt - \int t^6 dt = \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7 + C = \frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{1}{7}\sin^7 x + C.$$

Вариант 2. Если m и n — четные положительные числа, то нужно пользоваться формулами:

$$\sin kx \cos kx = \frac{1}{2}\sin 2kx;$$

$$\sin^2 kx = \frac{1}{2}(1-\cos 2kx);\quad \cos^2 kx = \frac{1}{2}(1+\cos 2kx).$$

Пример. $\int \cos^4 x\,dx = \int (\cos^2 x)^2 dx = \int \left[\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\right]^2 dx =$

$$= \frac{1}{4}\int (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x)dx = \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{4}\int \frac{1}{2}(1+\cos 4x)dx = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}\int dx + \frac{1}{8}\int \cos 4x\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x + C = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислите интегралы следующих функций:

1) $\int\sqrt[6]{3-4\cos 3x}\sin 3x\,dx$; 2) $\int e^{\sin 3x}\cos 3x\,dx$; 3) $\int\frac{3x^3dx}{\sqrt[5]{3-2x^4}}$;

4) $\int\frac{xdx}{9-x^4}$; 5) $\int\frac{\arcsin^2 2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$; 6) $\int\frac{\ln^3 x-\sqrt{\ln x}}{x}dx$;

7) $\int\frac{dx}{6-5x-2x^2}$; 8) $\int\frac{dx}{\sqrt{2x^2-4x+7}}$; 9) $\int\frac{x}{-2x^2+2x+5}dx$;

10) $\int\ln(x^2+x)dx$; 11) $\int x\ln^2 x\,dx$;

12) $\int(2x^2+4x-1)\cos\frac{x}{4}dx$; 13) $\int(3-2x^2)e^{-2x}dx$;

14) $\int\frac{\arccos 2x}{\sqrt{1-2x}}dx$; 15) $\int e^{\frac{x}{3}}\cos 3x\,dx$; 16) $\int x\cdot\mathrm{arctg}\,2x\,dx$;

17) $\int\frac{x^3+1}{x^2-x}dx$; 18) $\int\frac{3x^3+2x^2+1}{(x+2)(x-2)(x-1)}dx$;

19) $\int\frac{2x^3+6x^2+7x+2}{x(x+1)^3}dx$; 20) $\int\frac{2x^3+11x^2+16x+10}{(x+2)^2(x^2+2x+3)}dx$;

21) $\int\frac{dx}{x^5-x^2}$; 22) $\int\frac{dx}{\sqrt{1-2x}-\sqrt[4]{1-2x}}$;

23) $\int\frac{3x+4}{\sqrt{-x^2+6x-8}}dx$; 24) $\int\frac{dx}{x\sqrt{5x^2-2x+1}}$; 25) $\int\sin^3 2x\,dx$;

26) $\int\cos^5 3x\,dx$; 27) $\int\sin^2 3x\cos^2 3x\,dx$; 28) $\int\sin^2 x\cos^4 x\,dx$;

29) $\int\cos^4 2x\,dx$; 30) $\int\sin^4 3x\,dx$.

1.13. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1.13.1. Основные понятия

Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\,b]$ (рис. 1.71). Разделим отрезок $[a;\,b]$ на n произвольных частей точками

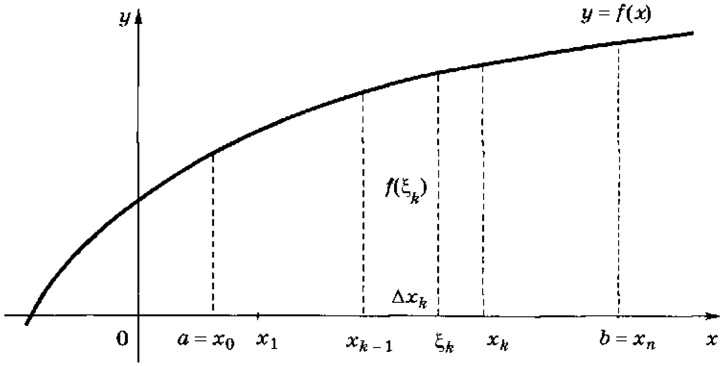


Рис. 1.71

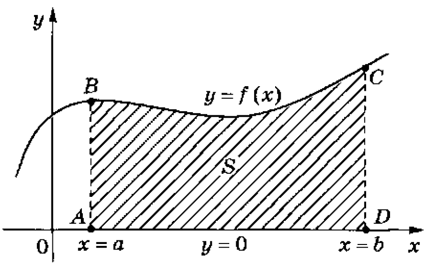


Рис. 1.72

$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b$, выберем на каждом элементарном отрезке $[x_{k-1}; x_k]$ произвольную точку ξ_k и найдем длину каждого такого отрезка $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

Интегральной суммой для функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ называется сумма вида:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n.$$

$\boxed{\text{О}}$ ***Определенным интегралом от функции*** $y = f(x)$ **на отрезке** $[a; b]$ (или в пределах от a до b) называется предел интегральной суммы при условии, что длина наибольшего из элементарных отрезков стремится к нулю

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Если $f(x) > 0$ на $[a; b]$, то определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ *геометрически* представляет собой *площадь* криволинейной трапеции $ABCD$: $S=\int\limits_a^b f(x)dx$ (рис. 1.72). Концы a, b отрезка (*промежутка интегрирования*) называются *пределами интегрирования* (a — нижний; b — верхний).

1.13.2. Свойства определенного интеграла

Свойство 1. При замене нижнего предела на верхний и наоборот, определенный интеграл меняет знак на противоположный, сохраняя при этом абсолютное значение, т. е.

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)dx=-\int\limits_b^a f(x)dx.}$$

Свойство 2. При равенстве верхнего и нижнего пределов определенный интеграл равен нулю:

$$\boxed{\int\limits_a^a f(x)dx=0.}$$

Свойство 3. Если взять точку c, лежащую внутри отрезка $[a;\ b]$, то получим

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^c f(x)dx+\int\limits_c^b f(x)dx.}$$

Свойство 4. Интеграл от алгебраической суммы слагаемых равен алгебраической сумме интегралов этих слагаемых, т. е.

$$\boxed{\int\limits_a^b [f_1(x)\pm f_2(x)]dx=\int\limits_a^b f_1(x)dx\pm\int\limits_a^b f_2(x)dx.}$$

Свойство 5. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\boxed{\int\limits_a^b Cf(x)dx=C\int\limits_a^b f(x)dx.}$$

Свойство 6. Если $m\le f(x)\le M$ на $[a;\ b]$, то

$$\boxed{m(b-a)<\int\limits_a^b f(x)dx<M(b-a).}$$

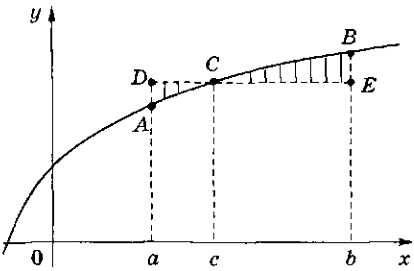


Рис. 1.73

Свойство 7. $\int\limits_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$, где $a < c < b$ ($S_{aABb} = S_{aDEb}$) (рис. 1.73).

1.13.3. Формула Ньютона—Лейбница

Формулу Ньютона — Лейбница можно представить в следующем виде:

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_b^a = F(b)-F(a),} \text{ где } F'(x) = f(x),$$

т. е. интеграл от дифференциала функции $F(x)$ равен приращению этой функции на промежутке интегрирования.

Примеры. **1.** $\int\limits_1^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int\limits_1^8 x^{-\frac{1}{3}}dx = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\Big|_1^8 = \frac{3}{2}\left(8^{\frac{2}{3}} - 1^{\frac{2}{3}}\right) = \frac{3}{2}(4-1) = \frac{9}{2} = 4{,}5.$

2. $\int\limits_0^\pi \cos x dx = \sin x\Big|_0^\pi = \sin\pi - \sin 0 = 0.$

3. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^2+x} = \int\limits_1^2 \frac{dx}{x} - \int\limits_1^2 \frac{dx}{x+1} = \ln|x|\Big|_1^2 - \ln|x+1|\Big|_1^2 =$

$$= \ln 2 - \ln 1 - (\ln 3 - \ln 2) = 2\ln 2 - \ln 3 = \ln\frac{4}{3}.$$

Примечание. $\frac{1}{x^2+x} = \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}.$

1.13.4. Методы интегрирования

Интегрирование по частям. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a; b]$, тогда

$$\int\limits_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du.$$

Доказательство. На отрезке $[a;\, b]$ имеем: $(uv)' = u'v + uv'$. Следовательно, функция uv есть первообразная для непрерывной функции $(u'v + uv')$. Но тогда по формуле Ньютона — Лейбница:

$$\int_a^b (u'v + uv')dx = uv\Big|_a^b \Rightarrow \int_a^b u'v\,dx + \int_a^b uv'dx = uv\Big|_a^b.$$

Но $u'dx = du$; $v'dx = dv$.

$$\int_a^b v\,du + \int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b \Rightarrow \int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du. \qquad \blacksquare$$

Пример. $\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x}dx = -x\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^1 + \int_0^1 \mathrm{e}^{-x}dx = -x\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^1 - \mathrm{e}^{-x}\Big|_0^1 =$

$$\begin{bmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \mathrm{e}^{-x}dx & v = \int \mathrm{e}^{-x}dx = -\mathrm{e}^{-x} \end{bmatrix}$$

$$= -(\mathrm{e}^{-1} - 0) - (\mathrm{e}^{-1} - 1) = 1 - 2\frac{1}{\mathrm{e}} = \frac{\mathrm{e} - 2}{\mathrm{e}}.$$

Замена переменного под знаком определенного интеграла. Пусть требуется найти $\int_a^b f(x)dx$ от непрерывной на отрезке $[a;\, b]$ функции $f(x)$.

Часто бывает удобно применить, как и в случае вычисления неопределенного интеграла, замену переменного путем введения вместо старого переменного x нового t, связанного со старым соотношением: $x = \varphi(t)$. Докажем относительно такой замены теорему.

$\boxed{\mathrm{T}}$ $\int_a^b f(x)dx = \int_{t_0}^T f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)dt$, *где*:

1) *уравнения* $\varphi(x) = a$ *и* $\varphi(t) = b$ *имеют решения (обозначим их соответственно через* t_0 *и* T*, так, что* $\varphi(t_0) = a$, $\varphi(T) = b$*)*;

2) *функция* $\varphi(t)$ *на отрезке, образованном точками* t_0 *и* T*, имеет непрерывную производную* $\varphi'(t)$;

3) *при изменении* t *на отрезке, образованном точками* t_0 *и* T*, значения функции* $x = \varphi(t)$ *не выходят за пределы отрезка* $[a;\, b]$ *(и, следовательно, сложная функция* $f[\varphi(t)]$ *определена на* $[t_0, T]$*)*.

Доказательство. Пусть функция $F(x)$ — какая-либо первообразная для функции $f(x)$ на $[a;\, b]$, так что $F'(x) = f(x)$. Тогда по формуле Ньютона — Лейбница имеем:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \qquad (1)$$

Рассмотрим на отрезке $[t_0,\, T\,]$ функцию $F\,[\varphi\,(t)]$

$$(F\,[\varphi(t)])' = F'[\varphi(t)]\varphi'(t) = f\,[\varphi(t)]\,\varphi'(t).$$

Отсюда следует, что функция $F[\varphi(\,t)]$ является первообразной для функции $f\,[\varphi(t\,)]\ \varphi'\,(t\,)$, а тогда по формуле Ньютона — Лейбница (она здесь применима, так как функция $f\,[\varphi(t\,)]\varphi'(t\,)$ непрерывна на $[t_0, T\,]$)

$$\int_{t_0}^{T} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F[\varphi(T)] - F[\varphi(t_0)].$$

Но $\varphi(T\,) = b$ и $\varphi(t_0) = a$, следовательно,

$$\int_{t_0}^{T} f\big[\varphi(t)\big]\varphi'(t)dt = F(b) - F(a). \qquad (2)$$

Сравнивая формулы (1) и (2), получим

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{t_0}^{T} f\big[\varphi(t)\big]\varphi'(t)dt. \qquad (3)\ \blacksquare$$

Замечания.

1. Пределы t_0 и T нового интеграла определяются из уравнений $\varphi(t\,) = a$ и $\varphi(t\,) = b$. Каждое из этих уравнений может иметь несколько корней, при этом за t_0 можно принять любой корень уравнения $\varphi(t\,) = a$, а за T — любой корень уравнения $\varphi(t\,) = b$, лишь бы выполнялись условия (2) и (3) теоремы (конечно же, $t_0 < T\,$). Условие (3) окажется наверняка выполнимым, если функция $x = \varphi(t\,)$ будет монотонной на $[a;\, b]$. Поэтому на практике замену переменного часто осуществляют с помощью монотонных функций, тем более что, применяя формулу (3), оперировать с такими функциями проще, чем с немонотонными.

2. Если функция $x = \varphi(t\,)$ не может принимать значений, равных пределам интегрирования a и b, то она не может служить для выполнения замены переменного в этом интеграле. Так, например, нельзя преобразовать в интеграле $\int_0^2 \sqrt[3]{1-x^2}\,dx$ подынте-

гральную функцию с помощью подстановки: $x = \sin t$ (так как уравнение $\sin x = 2$ решений не имеет).

3. Вычисляя неопределенный интеграл $\int f(x)dx$ с помощью замены переменного $x = \varphi(t)$, мы должны были, найдя интеграл $\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$, затем вернуться от переменного t к переменному x. При вычислении же определенного интеграла по формуле (3) надобность в этом отпадает, так как вычисление интеграла $\int\limits_{t_0}^{T} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$ дает число, которому и будет равен интеграл

$\int\limits_a^b f(x)dx.$

***Примеры.* 1.** $\int\limits_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx =$

$$\left\{\text{замена: } \ln x = t \Rightarrow \frac{1}{x}dx = dt;\ \ x = 1\text{: } t = 0; x = e\text{: } t = 1\right\}$$

$$= \int\limits_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}t^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}(1-0) = \frac{1}{3}.$$

2. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x + 2\sqrt{x-1}} =$

$$\left\{\begin{array}{c}\text{замена: } x - 1 = t^2 \Rightarrow x = t^2 + 1 \Rightarrow dx = 2t\,dt;\\ x = 1\text{: } t^2 + 1 = 1 \Rightarrow t = 0;\\ x = 2\text{: } t^2 + 1 = 2 \Rightarrow t^2 = 1 \Rightarrow t = 1\end{array}\right\}$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{2t\,dt}{t^2 + 1 + 2t} = \int\limits_0^1 \frac{2t\,dt}{(t+1)^2} =$$

$$\left\{\begin{array}{c}\text{замена: } t + 1 = z \Rightarrow t = z - 1 \Rightarrow dt = dz;\\ t = 0\text{: } z - 1 = 0 \Rightarrow z = 1;\\ t = 1\text{: } z - 1 = 1 \Rightarrow z = 2\end{array}\right\}$$

$$= 2\int\limits_1^2 \frac{(z-1)dz}{z^2} = 2\int\limits_1^2 \frac{dz}{z} - 2\int\limits_1^2 \frac{dz}{z^2} = 2\ln|z|\Big|_1^2 + \frac{2}{z}\Big|_1^2 = 2\ln 2 + (1-2) = 2\ln 2 - 1.$$

1.13.5. Интегрирование четных и нечетных функций

• Если функция $y = f(x)$ четная, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)dx.$

• Если функция $y = f(x)$ нечетная, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$

Доказательство. Рассмотрим интеграл $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx$:

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)dx.$$

Вычислим $\int\limits_{-a}^{0} f(x)dx$ с помощью подстановки $x = -t$: $dx = -dt$;

При $x = -a$: $t = a$; при $x = 0$: $t = 0$

$$\int\limits_{-a}^{0} f(x)dx = -\int\limits_{a}^{0} f(t)dt = \int\limits_{0}^{a} f(t)dt = \int\limits_{0}^{a} f(-x)dx.$$

Будем иметь: $\int\limits_{a}^{a} f(x)dx = \int\limits_{0}^{a} f(-x)dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)dx = \int\limits_{0}^{a} [f(-x) + f(x)]dx.$

Возможны случаи:

1) $y = f(x)$ — четная, т.е. $f(-x) = f(x)$, тогда

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)dx.$$

2) $y = f(x)$ — нечетная, т.е. $f(-x) = -f(x)$, тогда $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$ ■

Примеры. 1. $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x} = 2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}} =$ (так как функция $f(x) =$ $= \frac{1}{1+\cos x}$ четная) $= 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg}0\right) = 2.$

2. $\int\limits_{-1}^{1} e^{-x^2}\sin x dx = 0$, так как функция $f(x) = e^{-x^2}\sin x$ нечетная.

Задачи для самостоятельного решения

С помощью формулы Ньютона — Лейбница вычислите определенные интегралы:

1) $\int\limits_{3}^{8} \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$;
2) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin 2x dx$;
3) $\int\limits_{0}^{\pi} x\cos x dx$;
4) $\int\limits_{1}^{4} \frac{e^{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}}$;
5) $\int\limits_{0}^{\pi} \sin 2x\sqrt{\cos 2x+5}\, dx$;
6) $\int\limits_{0}^{1} \frac{\operatorname{arctg}^2 x dx}{1+x^2}$;
7) $\int\limits_{0}^{1} \frac{xdx}{1+x+x^2}$;
8) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$.

1.14. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

1.14.1. Площадь фигуры, ограниченной плоской кривой

Площадь фигуры, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$ и $x = b$, где $f(x) > 0$ на $[a; b]$, есть предел, к которому приближается сумма площадей прямоугольников $y_i\Delta x_i$ (рис. 1.74):

$$S = \lim_{\max\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} y_i \Delta x_i = \int\limits_a^b y dx = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Если $f(x) < 0$ на $[a; b]$, то

$$S = -\int\limits_a^b f(x)dx.$$

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = 4x - x^2$ и осью Ox.

Решение. Найдем точки пересечения параболы $y = 4x - x^2$ с осью Ox: $4x - x^2 = 0 \Rightarrow x(4 - x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$, $x_2 = 4$ — это и есть пределы

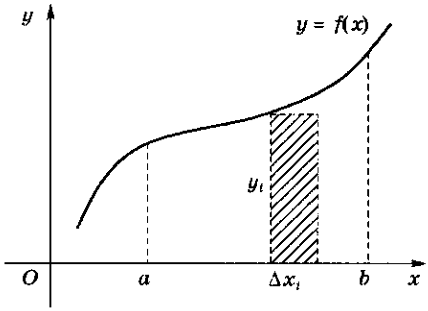


Рис. 1.74

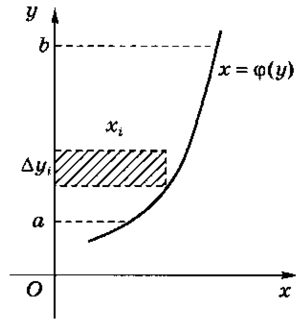


Рис. 1.75

интегрирования. Тогда $S = \int_0^4 (4x - x^2)dx = \left(2x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^4 = 2\cdot 4^2 - \frac{4^3}{3} =$ $= \frac{32}{3}$ (кв. ед.).

Площадь фигуры, ограниченной кривой $x = \varphi(y)$, осью Oy и прямыми $y = a$ и $y = b$, есть предел, к которому приближается сумма площадей прямоугольников $x_i \Delta y_i$ (рис. 1.75):

$$S = \lim_{\max \Delta y_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} x_i \Delta y_i = \int_a^b x dy = \int_a^b \varphi(y) dy.$$

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $x = 2 + y - y^2$ и осью Oy.

Решение. 1) Для того чтобы определить пределы интегрирования, найдем точки пересечения кривой $x = 2 + y - y^2$ с осью Oy. При $x = 0$ получим: $2 + y - y^2 = 0$ или $y^2 - y - 2 = 0 \Rightarrow y_1 = -1,\ y_2 = 2$.

2) $$S = \int_{-1}^{2} (2 + y - y^2)dy = \left(2y + \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{2} = \left(2\cdot 2 + \frac{2^2}{2} - \frac{2^3}{3}\right) -$$

$$-\left(2(-1) + \frac{(-1)^2}{2} - \frac{(-1)^3}{3}\right) = \left(6 - \frac{8}{3}\right) - \left(-2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = 4{,}5 \text{ (кв. ед.)}.$$

Площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ и прямыми $x = a$ и $x = b$, находится по формуле: $S = \int_a^b \left[f_2(x) - f_1(x)\right]dx$, (рис. 1.76).

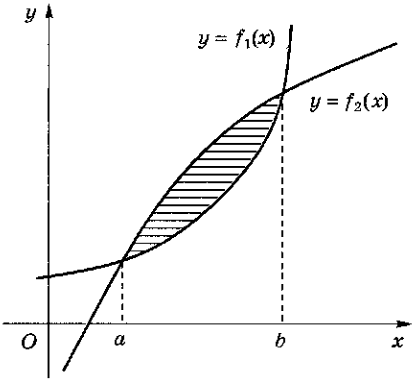


Рис. 1.76

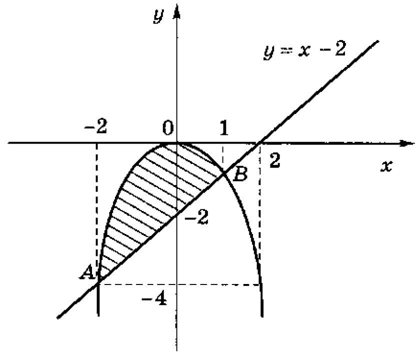


Рис. 1.77

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = -x^2$; $x = y + 2$.

Решение. 1) Для того чтобы определить пределы интегрирования, найдем точки пересечения кривых из системы уравнений

$$\begin{cases} y = -x^2 \\ y = x - 2 \end{cases} \Rightarrow -x^2 = x - 2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -2; x_2 = 1 \Rightarrow y_1 = -4; y_2 = -1.$$

Имеем две точки пересечения параболы и прямой $A(-2; -4)$ и $B(1; -1)$. Начертим график (рис. 1.77).

2) $$S = \int_{-2}^{1} \left[-x^2 - (x-2)\right] dx = \int_{-2}^{1} \left[-x^2 - x + 2\right] dx = \left(-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x\right)\Bigg|_{-2}^{1} =$$

$$= \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) - \left(-\frac{1}{3}(-8) - \frac{1}{2} \cdot 4 + 2(-2)\right) =$$

$$= -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \frac{8}{3} + 2 + 4 = 4{,}5 \text{ (кв. ед.).}$$

Если кривая задается параметрическими уравнениями $x = x(t)$; $y = y(t)$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной этой кривой, прямыми $x = a$ и $x = b$ и осью Ox, выражается формулой

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t) x'(t) dt,$$

где t_1 и t_2 определяются из уравнений $a = x(t_1)$ и $b = x(t_2)$ (причем $y(t) \geq 0$ при $t_1 \leq t \leq t_2$).

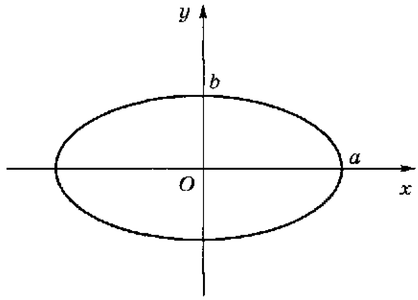


Рис. 1.78

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (рис. 1.78).

Решение. 1) В параметрическом виде эллипс можно описать системой уравнений

$$\begin{cases} x = a\sin t; \\ y = b\cos t, \end{cases}$$

откуда

$$dx = a\cos t\, dt; \quad x = 0 : t = 0; \quad x = a : t = \frac{\pi}{2}.$$

2) В силу симметрии $S = 4\int\limits_0^a y\,dx = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} b\cos t(a\cos t\,dt) = 4ab\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt =$

$$= 4ab\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt = 2ab\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt = 2ab\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}dt + 2ab\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2t\,dt =$$

$$= 2abt\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2ab\frac{\sin 2t}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2ab\frac{\pi}{2} + 0 = \pi ab.$$

1.14.2. Длина дуги плоской кривой

В дугу кривой AB впишем n хорд, т.е. ломаную линию (рис. 1.79). Длина одной из этих хорд (например, PQ) равна:

$$\Delta L_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{\left[1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2\right](\Delta x_i)^2} = \sqrt{\left[1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2\right]}\Delta x_i.$$

Аналогично: $\Delta L_i = \sqrt{\left[1+\left(\frac{\Delta x_i}{\Delta y_i}\right)^2\right]}\Delta y_i$. Тогда

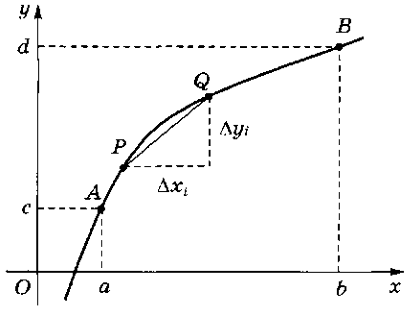


Рис. 1.79

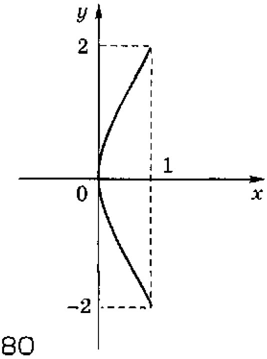


Рис. 1.80

$$L = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left[1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2\right]} \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + y_x'^2}\, dx \qquad (1)$$

или

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + x_y'^2}\, dy, \qquad (2)$$

или

$$L = \int_A^B \sqrt{dx^2 + dy^2}. \qquad (3)$$

Примеры. **1.** Вычислить длину дуги параболы $y^2 = 4x$ от $x = 0$ до $x = 1$.

Решение. Способ 1. Для нахождения длины дуги параболы (рис. 1.80) можно воспользоваться формулой (1) или (2):

$$L = 2\int_0^1 \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

или

$$L = 2\int_0^2 \sqrt{1 + x'^2}\, dy.$$

Так как $y = 2\sqrt{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow y'^2 = \frac{1}{x}$. Тогда по формуле (1) получим:

$L = 2\int_0^1 \sqrt{1 + \frac{1}{x}}\, dx$ — сложный интеграл, который непросто вычислить.

Способ 2. Воспользуемся формулой (2), для этого найдем:

$$x = \frac{1}{4}y^2;\ x_y' = \frac{1}{4} \cdot 2y = \frac{y}{2};\ x_y'^2 = \frac{y^2}{4}.$$

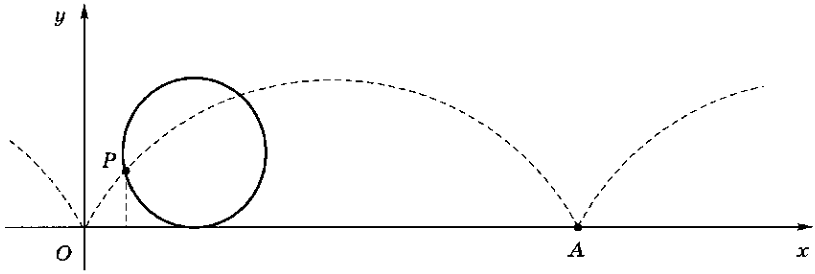


Рис. 1.81

Тогда длина дуги будет равна

$$L = 2\int_0^2 \sqrt{1+\frac{y^2}{4}}dy = \int_0^2 \sqrt{4+y^2}dy = \frac{1}{2}y\sqrt{4+y^2}\Big|_0^2 + 2\ln\left|y+\sqrt{4+y^2}\right|\Big|_0^2 =$$

$$= \frac{1}{2}(2\sqrt{8}-0) + 2(\ln\left|2+\sqrt{8}\right| - \ln 2) = 2\sqrt{2} + 2\ln(1+\sqrt{2}).$$

Таким образом, используя формулу (2), получили более простой интеграл для решения задачи.

Замечание. $\int\sqrt{a^2+x^2}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right| + C.$

2. Найти длину дуги OA одной «арки» циклоиды $x = a(t - \sin t)$; $y = a(1 - \cos t)$ $(0 \le t \le 2\pi)$. Эта кривая описывается произвольной точкой P окружности круга радиусом a, катящегося без трения и скольжения по некоторой неподвижной прямой Ox (рис. 1.81).

Решение. 1) $dx = a(1 - \cos t)dt$; $dy = a\sin t\,dt$;

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\,dt =$$

$$= a\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos t}\,dt = 2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt = -4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = -4a(\cos\pi - \cos 0) = 8a.$$

1.14.3. Объем тела вращения

Найдем объем тела, образованного вращением части кривой $y = f(x)$ (от a до b) вокруг оси Ox (рис. 1.82).

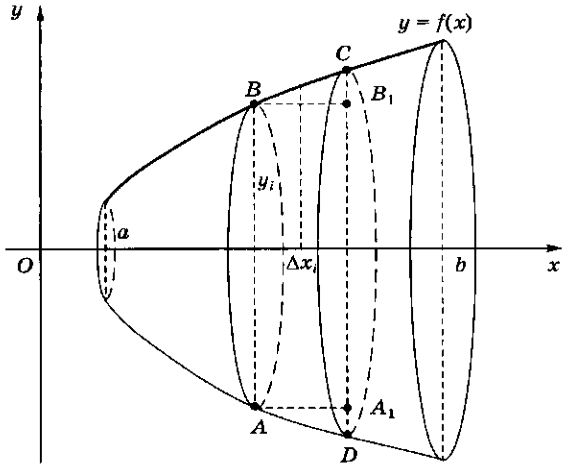


Рис. 1.82

Разобьем объем на части сечениями, перпендикулярными оси Ox, и рассмотрим, например, часть объема $ABCD$, расположенного между двумя сечениями, отстоящими друг от друга на расстоянии Δx_i. Если Δx_i мало, то V_{ABCD} приблизительно равен $V_{ABB_1A_1}$, т.е. объему цилиндра.

Но $V_{ABB_1A_1} = \pi R^2 H = \pi y_i^2 \Delta x_i$. Суммируя, получим

$$V = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi y_i^2 \Delta x_i = \int_a^b \pi y^2 dx.$$

Если необходимо найти объем между двумя вращающимися кривыми $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$ $(y_2 > y_1)$, то $V = \int_a^b \pi[y_2^2 - y_1^2]dx$.

Если часть кривой $x = \varphi(y)$ (от c до d) вращается вокруг оси Oy, то $V = \int_c^d \pi x^2 dy$.

Примеры. 1. Найти объем тела, образованного вращением окружности $x^2 + y^2 = R^2$ вокруг оси Ox (рис. 1.83).

Решение.

$$V = \int_{-R}^{R} \pi[R^2 - x^2]dx = \pi\left[R^2 x\Big|_{-R}^{R} - \frac{1}{3}x^3\Big|_{-R}^{R}\right] = \pi\left[R^3 + R^3 - \frac{1}{3}(R^3 + R^3)\right] =$$

$$= \pi(2R^3 - \frac{2}{3}R^3) = \frac{4}{3}\pi R^3 = V_{\text{шара}}.$$

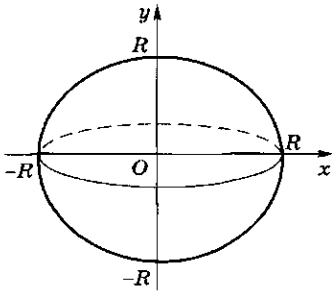


Рис. 1.83

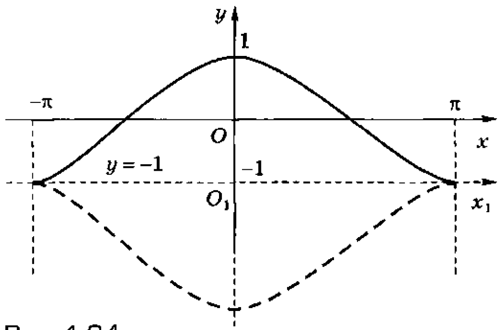


Рис. 1.84

2. Найти объем тела, образованного вращением вокруг прямой $y = -1$ фигуры, ограниченной линиями $y = \cos x$, $y = -1$, $x = -\pi$ и $x = \pi$ (рис. 1.84).

Решение. $V = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \pi(\cos x + 1)^2 dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \pi(\cos^2 x + 2\cos x + 1)dx =$

$$= \pi\left[\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos 2x}{2} dx + 2\sin x\Big|_{-\pi}^{\pi} + x\Big|_{\pi}^{\pi}\right] = \pi\left(\frac{1}{2}x\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{4}\sin 2x\Big|_{\pi}^{\pi} + 2\sin x\Big|_{-\pi}^{\pi} + x\Big|_{\pi}^{\pi}\right) =$$

$$= \pi\left[\left(\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi\right) + (\pi + \pi)\right] = \pi(\pi + 2\pi) = 3\pi^2 \text{ (куб. ед.).}$$

3. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox линий: $y^2 = x$ и $x^2 = y$ между их точками пересечения (рис. 1.85).

Решение. $V = \int\limits_0^1 \pi[x - x^4]dx = \pi\left(\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 - \frac{1}{5}x^5\Big|_0^1\right) = \pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) = \frac{3}{10}\pi$ (куб. ед.).

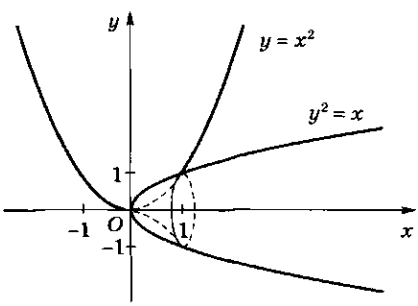


Рис. 1.85

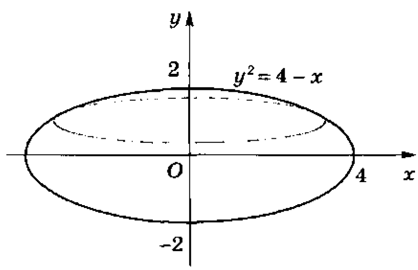


Рис. 1.86

4. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 4 - x$ и $x = 0$ (рис. 1.86).

Решение.

$$V = \int_{2}^{2} \pi[4 - y^2]^2 dy = \pi \int_{-2}^{2} (16 - 8y^2 + y^4) dy = \pi\left(16y\Big|_{-2}^{2} - \frac{8}{3}y^3\Big|_{2}^{2} + \frac{1}{5}y^5\Big|_{2}^{2}\right) =$$

$$= \pi\left(64 - \frac{128}{3} + \frac{64}{5}\right) = \frac{512}{15}\pi \text{ (куб.ед.)}$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите площадь фигуры, ограниченную указанными линиями, сделайте чертеж:

1) $y = x + 2,\ \ y^2 = 9x$; 2) $xy = 4,\ x + y - 5 = 0$;

3) $y = -x^2 + 4x - 1,\ y = -x - 1$; 4) $y = -x^2 + 2,\ y = x^2$;

5) $y = \sin x$ при $0 \le x \le \pi$.

2. Найдите объем тела вращения вокруг оси Ox фигуры, ограниченной указанными линиями, сделайте чертеж:

6) $y = \sin x$ при $0 \le x \le \pi$; 7) $y^2 = x,\ y = \frac{1}{2}x$;

8) $y = \sqrt{6x},\ y = \sqrt{16 - x^2}$; 9) $y = -x^2 + 2,\ y = x^2$.

3. Найдите длину дуги указанных линий:

10) $y = x\sqrt{x}, 0 \le x \le 4$; 11) $y = \ln(1 - x^2),\ 0 \le x \le \frac{1}{2}$.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Дайте определение и укажите способы задания функции одной переменной.
2. Выясните геометрический смысл коэффициентов k, b линейной функции $y = kx + b$.
3. Дайте определение и укажите основные свойства предела числовой последовательности.
4. Приведите определения по Коши и по Гейне предела функции. Укажите его геометрический смысл.
5. Перечислите основные свойства предела функции.
6. Приведите примеры непрерывных и разрывных функций.
7. Дайте определение и классификацию точек разрыва функции.

8. Укажите механический и геометрический смысл производной.
9. Перечислите основные правила дифференцирования.
10. Укажите границы применимости правила Лопиталя.
11. Укажите необходимые и достаточные условия возрастания и убывания функции. Приведите примеры.
12. Чем отличается задача нахождения наименьшего и наибольшего значений функции от задачи нахождения экстремума функции?
13. Дайте определение первообразной и неопределенного интеграла.
14. Проиллюстрируйте на примерах приемы вычисления простейших интегралов.
15. Дайте определение и укажите свойства определенного интеграла.
16. Проиллюстрируйте на примерах применение формулы Ньютона—Лейбница.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

Функция, последовательность, предел, монотонность, точки разрыва, график, неопределенный интеграл, определенный интеграл, формула Ньютона—Лейбница.

Глава 2

РЯДЫ

2.1. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

2.1.1. Понятие ряда и последовательности

Пусть дана бесконечная последовательность чисел a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...

$\boxed{\text{О}}$ Выражение $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$ называется ***бесконечным числовым рядом*** (или просто ***рядом***), а числа a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ... — *членами ряда*. Компактно ряд можно записать в виде $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Ряд считается заданным, если известно правило, по которому для любого номера n можно записать соответствующий член ряда, т.е. $a_n = f(n)$. Выражение a_n называется *общим членом ряда*. Если формула $a_n = f(n)$ дана, то можно сразу написать любой член ряда.

Примеры. 1. Если $a_n = \frac{1}{2^n}$, то ряд имеет вид: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{2^n} + ...$.

2. Если $a_n = \frac{1}{n!}$, то $1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!} + ...$.

Иногда ряд задается с помощью *рекуррентного соотношения*, связывающего последующий член ряда с предыдущим. При этом задается несколько первых членов ряда и формула, по которой находятся следующие члены ряда.

Пример. Пусть $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$ и $a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{1}{3}a_{n-2}$. Получим: $a_3 = \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{3}a_1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$; $a_4 = \frac{1}{2}a_3 + \frac{1}{3}a_2 = \frac{7}{24} + \frac{1}{6} = \frac{11}{24}$ и т.д.

Искомый ряд: $1+\frac{1}{2}+\frac{7}{12}+\frac{11}{24}+\dots$

Сумму первых n членов ряда обозначают через S_n и называют n-й частичной суммой ряда

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n.$$

Образуем теперь последовательность частичных сумм ряда:

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$\dots\dots\dots$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

$$\dots\dots\dots$$

О Если при $n \to +\infty$ существует ***конечный предел*** последовательности частичных сумм членов ряда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то ряд называется ***сходящимся***, а число S — его суммой ($S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$). Если последовательность S_n не имеет предела или этот предел равен $+\infty$, то ряд называется ***расходящимся*** (не имеющим суммы).

Таким образом, если числовой ряд сходится, то его можно просуммировать, т. е. он имеет ***конечную сумму***.

Если числовой ряд расходится, то он конечной суммы не имеет.

В качестве теоретического примера рассмотрим сумму членов бесконечной геометрической прогрессии:

$$b_1 + b_1q + b_1q^2 + \dots + b_1q^{n-1} + \dots \ (b_1 \neq 0).$$

Для нее $S_n = b_1\frac{1-q^n}{1-q}$.

Возможны случаи:

1) если $|q| < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{b_1}{1-q}$;

2) если $|q| > 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$;

3) если $q = 1$, то $S_n = n\,b_1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$;

4) если $q = -1$, то получим ряд: $b_1 - b_1 + b_1 - b_1 + \dots$

$S_1 = b_1;$
$S_2 = 0;$
$S_3 = b_1;$
$S_4 = 0$, т.е. S_n не стремится ни к какому пределу.

....

Окончательно, бесконечная геометрическая прогрессия представляет ряд, который сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \geq 1$.

Примеры. **1.** Исследовать на сходимость ряд:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \ldots$$

Решение. Это геометрическая прогрессия с $b_1 = 1$ и $q = \frac{1}{2}$.

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q} = 1 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right); \ \lim_{n \to \infty} S_n = 2 \Rightarrow \text{ ряд сходится.}$$

2. Исследовать на сходимость ряд:

$$1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^{n-1} + \ldots$$

Решение. Это геометрическая прогрессия с $b_1 = 1$ и $q = 2$.

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q} = 1 \cdot \frac{1-2^n}{1-2} = 2^n - 1; \ \lim_{n \to \infty} S_n = +\infty \Rightarrow \text{ ряд расходится.}$$

3. Исследовать на сходимость ряд: $3 - 3 + 3 - 3 + \ldots$

Решение.
$S_1 = 3;$
$S_2 = 0;$
$S_3 = 3$, т.е. не существует $\lim\limits_{n \to \infty} S_n \Rightarrow$ ряд расходится.

....

В рассмотренных примерах определялась сходимость или расходимость рядов, непосредственно с помощью определения сходимости и известной формулы для S_n.

Однако в большинстве случаев таким путем идти нельзя, так как очень трудно найти компактную формулу для S_n, а значит, и $\lim\limits_{n \to \infty} S_n$.

В дальнейшем будем выяснять сходимость ряда, не определяя фактически его суммы, а пользуясь признаками сходимости.

Начнем с самого простейшего типа числовых рядов — числовых рядов с положительными членами.

2.1.2. Необходимый признак сходимости числового ряда с положительными членами

Если ряд $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ сходится, то его общий член a_n стремится к нулю, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд расходится.

Таким образом, если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд расходится и дальнейшие его исследования прекращают.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то говорят, что выполнен необходимый признак сходимости ряда и нужно продолжать его исследование дальше. Сразу говорить о том, что ряд сходится, нельзя.

Примеры. 1. $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{8}+\frac{4}{11}+\ldots+\frac{n}{3n-1}+\ldots$; $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{3n-1}=\frac{1}{3}(\neq 0)$ — ряд расходится.

2. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$; $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ — выполнен необходимый признак.

3. $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots$ $S_n > \frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}$; $S_n > \sqrt{n}$;

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$ — ряд расходится, хотя $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

Только в том случае, когда выполнен необходимый признак сходимости, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, продолжают дальнейшее исследование числового ряда с положительными членами на сходимость с помощью достаточных признаков сходимости.

2.1.3. Достаточные признаки сходимости числовых рядов с положительными членами

Признак Даламбера. Если для числового ряда с положительными членами $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$, то ряд сходится при $r < 1$ и расходится при $r > 1$. При $r = 1$ ряд может как сходиться, так и расходиться.

Примеры. 1. Исследовать на сходимость ряд:

$$\frac{2}{5}+\frac{12}{25}+\frac{36}{125}+\frac{80}{625}+\ldots+\frac{n^2(n+1)}{5^n}+\ldots$$

Решение. 1) Применим необходимый признак сходимости и вычислим $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2(n+1)}{5^n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+n^2}{5^n} = \left\{\dfrac{+\infty}{+\infty}\right\} =$ (по правилу Лопиталя) =

$= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+2n}{5^n\ln 5} = \left\{\dfrac{+\infty}{+\infty}\right\} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n+2}{5^n\ln^2 5} = \left\{\dfrac{+\infty}{+\infty}\right\} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6}{5^n\ln^3 5} = 0$ — необходимый признак выполнен.

2) Применяем достаточный признак Даламбера:

$$a_n = \frac{n^2(n+1)}{5^n};\ a_{n+1} = \frac{(n+1)^2(n+2)}{5^{n+1}}.$$

Выражение для a_{n+1} получаем из a_n путем замены n на $n+1$. Вычислим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2(n+2)5^n}{5^{n+1}n^2(n+1)} = \frac{1}{5}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\frac{n+2}{n+1} =$$

$$= \frac{1}{5}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\left(1+\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{5}(<1) \text{ — ряд сходится.}$$

2. Исследовать на сходимость ряд:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$$

Решение. 1) Применим необходимый признак сходимости и вычислим $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2} = 0$ — необходимый признак выполнен.

2) Применяем достаточный признак Даламбера:

$$a_n = \frac{1}{n^2};\ a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Вычислим $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{(n+1)^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^2 = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)^2 = 1$ — вопрос открыт, т. е. для данного ряда признак Даламбера ответа не дает и нужно применять какой-то другой достаточный признак сходимости.

Замечание. Признак Даламбера хорошо применим к тем рядам, в общий член которых входит либо показательная функция, либо факториал.

Интегральный признак. Пусть дан ряд с положительными членами $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$, члены которого являются значениями непрерывной положительной функции $f(x)$ при целых значениях аргумента x: $a_1 = f(1)$, $a_2 = f(2)$, ..., $a_n = f(n)$, ..., и пусть $f(x)$

монотонно убывает в интервале $[1,+\infty)$. Тогда ряд сходится, если сходится несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$, и расходится, если этот интеграл расходится.

Таким образом, если $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx=+\infty$, то ряд расходится, если же $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ равен *любому конечному числу*, то ряд сходится.

Замечание. Функцию $f(x)$ можно получить из общего члена ряда a_n путем замены n на x.

Примеры **1.** Исследовать на сходимость ряд: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$

Решение. Данный ряд имеет специальное название — *гармонический ряд.* 1) Применим необходимый признак сходимости и вычислим $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ — необходимый признак выполнен.

2) Применяем достаточный интегральный признак: $a_n=\frac{1}{n}\Rightarrow f(x)=\frac{1}{x}$ — монотонно убывает в интервале $[1;+\infty)$.

Вычислим $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx=\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx=\ln x\Big|_1^{+\infty}=+\infty\Rightarrow$ ряд расходится.

2. Рассмотрим ряд из примера 2 (см. признак Даламбера), на сходимость которого не был дан ответ по признаку Даламбера :

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$$

Решение. Поскольку необходимый признак сходимости выполнен, применяем достаточный интегральный признак: $a_n=\frac{1}{n^2}\Rightarrow f(x)=\frac{1}{x^2}$.

Вычислим $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx=\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}\Big|_1^{+\infty}=1\Rightarrow$ ряд сходится.

Замечание. Интегральный признак хорошо применим к тем рядам, от общего члена которых можно взять интеграл.

Признак Коши. Если для числового ряда с положительными членами $a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=c$, то ряд сходится при $c < 1$ и расходится при $c > 1$. При $c = 1$ ряд может как сходиться, так и расходиться.

Пример. Исследовать на сходимость ряд:

$$\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{3}{7}\right)^3+\left(\frac{4}{9}\right)^4+\ldots+\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n+\ldots$$

Решение. 1) Применим необходимый признак сходимости:

вычислим $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2+\frac{1}{n}}\right)^n=0$ — необходимый признак выполнен.

2) Применим достаточный признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}\ (<1)\ \text{— ряд сходится.}$$

Замечание. Признак Коши хорошо применим к тем рядам, общий член которых является n-й степенью некоторого выражения.

Первый признак сравнения. Пусть даны два ряда с положительными членами

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots; \tag{1}$$

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots, \tag{2}$$

причем каждый член ряда (1) не превосходит соответствующего члена ряда (2), т. е. $a_n \le b_n$.

Тогда если сходится ряд (2), то сходится и ряд (1). Если расходится ряд (1), то расходится и ряд (2).

Замечание. При применении данного признака сравнивают исследуемый ряд с так называемым ***эталонным***, т. е. с рядом, для которого ***заранее*** известно, сходится он или расходится.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $a_n=\frac{1}{2^n+1}$.

Решение. Сравним два ряда: $a_n=\frac{1}{2^n+1}$ и $b_n=\frac{1}{2^n}$. Про ряд b_n заранее известно, что он сходится. Но $a_n<b_n$, следовательно, ряд a_n сходится.

Второй признак сравнения. Если существует конечный и отличный от нуля предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=k$, то оба ряда a_n и b_n одновременно сходятся или расходятся.

Пример. Исследовать на сходимость ряд: $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\frac{1}{11}+...+\frac{1}{3n+1}+...$

Решение. Сравним этот ряд $a_n = \frac{1}{3n+1}$ с гармоническим рядом $b_n = \frac{1}{n}$, про который заранее известно, что он расходится:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3n-1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n-1} = \frac{1}{3}$$ — ряд a_n также расходится.

Задачи для самостоятельного решения

1. Проверьте необходимое условие сходимости ряда:

1) $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{7}{8}+...;$ 2) $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+...;$

3) $\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{6}{27}+\frac{8}{81}+...;$ 4) $\frac{1}{1+1^4}+\frac{2}{1+2^4}+\frac{3}{1+3^4}+...$

2. Исследуйте сходимость ряда:

5) $1+\frac{2}{2!}+\frac{4}{3!}+\frac{8}{4!}+...;$ 6) $1+\frac{3}{2\cdot 3}+\frac{3^2}{2^2\cdot 5}+\frac{3^3}{2^3\cdot 7}+...;$

7) $1+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{10}}+...;$ 8) $\frac{1}{1+1^2}+\frac{1}{1+2^2}+\frac{1}{1+3^2}+...;$

9) $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+...;$ 10) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+...;$

11) $\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}+\frac{1}{\ln 5}+...;$ 12) $1+\frac{1}{101}+\frac{1}{201}+\frac{1}{301}+...;$

13) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(n+2)!\cdot 4^n};$ 14) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^7}};$ 15) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{n^n};$

16) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}};$ 17) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3^n(n+2)};$

18) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{6^n\sqrt[3]{n}};$ 19) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{3^n+4^n}.$

2.2. ЗНАКОПЕРЕМЕННЫЕ ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

2.2.1. Понятие знакопеременного ряда. Признак Лейбница

О ***Знакопеременным числовым рядом*** называется ряд вида $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + ... + (-1)^{n+1}\ u_n + ...$, где $u_n > 0$.

Множитель $(-1)^{n+1}$ отвечает за знак слагаемых.

Так, при $n = 1$: $(-1)^{1+1}\ u_1 = u_1$;

$n = 2$: $(-1)^{2+1}\ u_2 = -u_2$;

$n = 3$: $(-1)^{3+1}\ u_3 = u_3$ и т.д.

Для исследования знакопеременных числовых рядов на сходимость применяется всего один признак — признак Лейбница.

Признак Лейбница. Знакопеременный ряд сходится, если его члены по абсолютному значению убывают, а модуль общего члена стремится к нулю, т.е. если выполняются два условия:

1) члены ряда убывают по абсолютному значению:

$$|u_1| > |u_2| > |u_3| > ...;$$

2) предел модуля общего члена равен нулю: $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n| = 0$.

Если хотя бы одно из условий не выполняется, то ряд расходится.

О Если кроме сходимости первоначального знакопеременного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится и ряд, составленный из абсолютных значений его членов, т.е. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ называется ***абсолютно сходящимся***. Если же ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ расходится, то ряд $\sum\limits_{n-1}^{\infty} u_n$ называется ***условно сходящимся***.

Примеры. 1. Исследовать на сходимость знакопеременный числовой ряд:

$$1{,}1 - 1{,}01 + 1{,}001 - 1{,}0001 + ... + (-1)^{n-1}\left(1 + \frac{1}{10^n}\right) + ...$$

Решение. Проверим выполнение двух условий признака Лейбница:

1) $1{,}1 > 1{,}01 > 1{,}001 > 1{,}0001 > ...$ — члены ряда убывают по абсолютному значению, т.е. первое условие признака Лейбница выполняется;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{10^n}\right)=1(\neq 0)$, т.е. второе условие признака Лейбница не выполняется. Следовательно, данный ряд расходится.

2. Исследовать на сходимость знакопеременный ряд:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+\ldots$$

Решение. Проверим выполнение двух условий признака Лейбница:

а) $1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\frac{1}{4}>\ldots$ — члены ряда убывают по абсолютному значению, т.е. первое условие признака Лейбница выполняется;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, т.е. второе условие признака Лейбница также выполняется.

Следовательно, данный ряд сходится.

Дополнительно определим, как сходится данный ряд: абсолютно или условно.

Для этого составим ряд из абсолютных значений:

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$ — это гармонический ряд, он расходится, следовательно, первоначальный ряд сходится условно.

3. Исследовать на сходимость знакопеременный ряд:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots$$

Решение.

1) $1>\frac{1}{2}>\frac{1}{4}>\frac{1}{8}>\ldots$ — члены ряда убывают по абсолютному значению, т.е. первое условие признака Лейбница выполняется.

2) $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=0$, т.е. второе условие признака Лейбница также выполняется.

Следовательно, данный ряд сходится.

Дополнительно определим, как сходится данный ряд: абсолютно или условно.

Для этого составим ряд из абсолютных значений:

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots$ — это числовой ряд с положительными членами. Проверим его на сходимость. Так как необходимый признак выполняется, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=0$, то проверяем выполнение достаточного признака, в данном случае признака Даламбера, поскольку общий член ряда содержит показательную функцию

$$a_n = \frac{1}{2^{n-1}};\ a_{n+1} = \frac{1}{2^{(n+1)-1}} = \frac{1}{2^n};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2}(<1)$$ — ряд сходится.

Итак, первоначальный знакопеременный числовой ряд сходится абсолютно.

2.2.2. Оценки остатка знакопеременного сходящегося ряда

Поставим задачу: если в знакопеременном ***сходящемся*** ряде

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots (-1)^{n+1}u_n + (-1)^{n+2}u_{n+1} + (-1)^{n+3}u_{n+2} + \ldots$$

взять первые n членов, вычислить их сумму S_n, а остальные члены ряда, начиная с u_{n+1}, отбросить, то какую погрешность при этом получим?

Для этого найдем оценку остатка ряда (т. е. его отброшенной части):

$$R_n = (-1)^{n+2}u_{n+1} + (-1)^{n+3}u_{n+2} + (-1)^{n+4}u_{n+3} + (-1)^{n+5}u_{n+4} + \ldots$$

Преобразуем данное выражение:

$$R_n = (-1)^{n+2}[\, u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - u_{n+4} + u_{n+5} - u_{n+6} + \ldots] =$$

$$= (-1)^{n+2}[u_{n+1} - (u_{n+2} - u_{n+3}) - (u_{n+4} - u_{n+5}) - \ldots].$$

Величины, стоящие в круглых скобках, больше нуля из-за того, что члены сходящегося знакопеременного ряда убывают по абсолютному значению и, следовательно, $u_{n+2} > u_{n+3} > u_{n+4} > u_{n+5}$ и т. д. Отсюда можно заключить, что выражение, стоящее в квадратной скобке, меньше u_{n+1}, т. е. $|R_n| < |u_{n+1}|$.

Итак, если в знакопеременном сходящемся числовом ряде взять первые n членов и отбросить слагаемые, начиная с $(n+1)$-го, то погрешность по абсолютному значению будет меньше первого из отброшенных членов, т. е. $|R_n| < |u_{n+1}|$.

Пример. Сколько членов ряда $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} + \ldots$ необходимо взять, чтобы вычислить его сумму с точностью до 0,01.

Решение. Ранее было показано, что данный ряд является условно сходящимся, следовательно, для него можно применить формулу для оценки остатка ряда.

Предположим, что нужно взять n первых членов ряда, тогда $|R_n| <$ $< |u_{n+1}|$. В нашем случае $u_{n+1} = (-1)^{n+2}\dfrac{1}{n+1}$, следовательно, $|u_{n+1}| = \dfrac{1}{n+1}$. Для достижения заданной погрешности необходимо, чтобы $\dfrac{1}{n+1} < 0{,}01 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{100} \Rightarrow n+1 > 100 \Rightarrow n > 99.$$

Итак, нужно взять 100 первых членов ряда.

Замечание. Формула для оценки остатка знакопеременного сходящегося ряда имеет очень важное значение в приближенных вычислениях. К ней мы неоднократно будем обращаться при дальнейшем изложении степенных рядов.

Задачи для самостоятельного решения

Исследуйте следующие ряды на сходимость:

1) $1 - \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{5}} - \ldots;$

2) $\dfrac{1}{1\cdot 2} - \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} - \dfrac{1}{4\cdot 5} + \ldots;$

3) $\dfrac{1}{2\ln 2} - \dfrac{1}{3\ln 3} + \dfrac{1}{4\ln 4} - \ldots;$

4) $\dfrac{1}{3^2-1} - \dfrac{1}{5^2-1} + \dfrac{1}{7^2-1} - \ldots;$

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{2n-1}{3n};$

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{n+1}{\sqrt{n^3}};$

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\cdot 2^{2n}};$

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n.$

2.3. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

2.3.1. Функциональные ряды

$\boxed{\text{О}}$ Ряд $u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$, члены которого функции от x, называется ***функциональным***. Совокупность значений x, при которых функции $u_1(x)$, $u_2(x)$, $u_3(x)$, ..., $u_n(x)$ определены и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится, называют *областью сходимости* функционального ряда.

$\boxed{\text{О}}$ Функциональный ряд вида

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots,$$

где a_0, a_1, a_2, ..., a_n, x_0 ... — действительные числа, называется ***степенным.***

При $x_0 = 0$ степенной ряд имеет вид: $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots$

2.3.2. Теорема Абеля

$\boxed{\text{Т}}$ *Для каждого степенного ряда, имеющего как точки сходимости, так и точки расходимости, существует положительное число* $R = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ *такое, что для всех* $|x - x_0| < R$, *т.е.* $x_0 - R < x < x_0 + R$, *ряд абсолютно сходится, а для* $|x - x_0| > R$, *т.е.* $x < x_0 - R$ и $x > x_0 + R$, *— расходится. В точках* $x = x_0 \pm R$ *требуется дополнительное исследование.*

Примеры. 1. Найти область сходимости степенного ряда

$$x - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} - \frac{x^4}{4^2} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n^2} + \ldots$$

Решение. $|a_n| = \dfrac{1}{n^2}$; $|a_{n+1}| = \dfrac{1}{(n+1)^2}$. $R = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1\cdot(n+1)^2}{n^2\cdot 1} = 1$. Ряд сходится абсолютно при $-1 < x < 1$.

Рассмотрим сходимость ряда на концах интервала :

$x = 1$: $1 - \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} - \dfrac{1}{4^2} + \ldots + (-1)^{n+1}\dfrac{1}{n^2} + \ldots$ — ряд сходится абсолютно (определите самостоятельно);

$x = -1$: $-1 - \dfrac{1}{2^2} - \dfrac{1}{3^2} - \dfrac{1}{4^2} - \ldots - \dfrac{1}{n^2} - \ldots$ — ряд сходится (определите самостоятельно).

Окончательно получим: ряд сходится при $-1 \le x \le 1$.

2. Найти область сходимости ряда $x + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{3}x^3 + \ldots + \dfrac{1}{n}x^n + \ldots$.

Решение. $|a_n| = \frac{1}{n}$; $|a_{n-1}| = \frac{1}{n+1}$. $R = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n-1}|} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1.$

Ряд сходится абсолютно при $-1 < x < 1$.

Рассмотрим сходимость ряда на концах интервала :

$x = 1$: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$ — расходящийся гармонический ряд;

$x = -1$: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} + \ldots$ — знакопеременный числовой ряд, который сходится условно (см. подразд. 2.2).

Окончательно получим: ряд сходится абсолютно при $-1 < x < 1$; при $x = -1$ сходится условно.

3. Найти область сходимости ряда $\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$

Решение. $|a_n| = \frac{1}{n!}$; $|a_{n-1}| = \frac{1}{(n+1)!}$.

$R = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n-1}|} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!} = \lim\limits_{x\to\infty}(n+1) = +\infty$. Ряд сходится абсолютно при $-\infty < x < +\infty$, т.е. при любом действительном значении x.

Задачи для самостоятельного решения

Определите интервал сходимости ряда и исследуйте его сходимость на границах интервала:

1) $(x+1) + \frac{(x+1)^2}{2\cdot 4} + \frac{(x+1)^3}{3\cdot 4^2} + \frac{(x+1)^4}{4\cdot 4^3} + \ldots$;

2) $1 + \frac{2x}{3^2\sqrt{3}} + \frac{4x^2}{5^2\sqrt{3^2}} + \frac{8x^3}{7^2\sqrt{3^3}} + \ldots$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!x^n}{(n+1)^n}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(2n-1)\cdot 2^n}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n\cdot 2^{n-1}}$;

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{\sqrt{n}}$;

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{5^n(n+1)}$;

9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7^n x^n}{6^n\sqrt[3]{n}}$;

10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n x^n}{3^n + 4^n}$;

11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n4^n x^n}{(n+1)3^n}$.

2.4. РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ В СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

2.4.1. Формула Тейлора для многочлена

Пусть функция $f(x)$ есть многочлен n-й степени, т.е.

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + ... + a_n(x - x_0)^n. \quad (1)$$

Найдем коэффициенты $a_0, a_1, a_2, ... a_n$.

1) $x = x_0$: $a_0 = f(x_0)$.

2) $f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + ... + na_n(x - x_0)^{n-1}$.

При $x = x_0$: $a_1 = f'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)}{1!}$.

3) $f''(x) = 2a_2 + 6a_3(x - x_0) + ... + n(n - 1)a_n(x - x_0)^{n-2}$.

При $x = x_0$: $a_2 = \dfrac{f''(x_0)}{2} = \dfrac{f''(x_0)}{2!}$.

4) $f'''(x) = 6a_3 + ... + n(n - 1)(n - 2)a_n(x - x_0)^{n-3}$.

При $x = x_0$: $a_3 = \dfrac{f'''(x_0)}{6} = \dfrac{f'''(x_0)}{3!}$.

....

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

После подстановки выражений $a_0, a_1, a_2, ... a_n$ в формулу (1) будем иметь

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + $$

$$+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \quad (2)$$

Пусть $x - x_0 = \Delta x \Rightarrow x = x_0 + \Delta x$, тогда

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!}(\Delta x)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(\Delta x)^n. \quad (3)$$

Соотношения (2) и (3) носят название ***формулы Тейлора*** для многочленов.

При $x_0 = 0$ получим ***формулу Маклорена*** для многочленов:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n. \tag{4}$$

2.4.2. Формула Тейлора для функции, не являющейся многочленом

Возьмем какую-нибудь отличную от многочлена функцию $f(x)$, которая определена и имеет непрерывные производные до n-го порядка включительно на некотором промежутке $[x_0; x_0 + \Delta x]$, а $(n+1)$-я производная существует хотя бы в интервале $(x_0; x_0 + \Delta x)$.

Составим для этой функции многочлен

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!}(\Delta x)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(\Delta x)^n. \tag{5}$$

Так как по условию $f(x)$ не есть многочлен, то выражение (5) не может быть тождественно равно $f(x)$. Обозначим через $R_n(x)$ ту ошибку, которую мы сделаем, приравняв $f(x)$ многочлену $P_n(x)$, т.е.

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x). \tag{6}$$

Слагаемое $R_n(x)$ носит название *остаточного члена*. Оно очевидно зависит от x и n.

Для одной функции $f(x)$ остаточный член $R_n(x)$ (при фиксированном x и n) может оказаться сравнительно большим числом, для другой — малым. В том случае, когда $R_n(x)$ для рассматриваемых x достаточно мало, можно для этих x в качестве приближенного значения $f(x)$ брать значение многочлена $P_n(x)$.

Существуют различные формы записи остаточного члена $R_n(x)$. Представим $R_n(x)$ в самой простой форме — ***форме Лагранжа***:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta\Delta x)}{(n+1)!}(\Delta x)^{n+1}.$$

При $x_0 = 0$: $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$, где $0 < \theta < 1$.

$\boxed{\text{О}}$ 1. ***Рядом Тейлора*** для функции $f(x)$ называется ряд вида

$$f(x) = f(x_0) +$$
$$+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots.$$

2. При $x_0 = 0$ ряд Тейлора превращается в ***ряд Маклорена***

$$f(x) = f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots.$$

$\boxed{\text{Т}}$ *Для того чтобы ряд Тейлора (Маклорена) функции $f(x)$ сходился к ней в некотором интервале $x_0 - R < x < x_0 + R(-R < x < R)$, необходимо, чтобы остаточный член $R_n(x)$ формулы Тейлора (Маклорена) для функции $f(x)$ стремился к нулю для всех x из этого интервала при $n \to +\infty$.*

2.4.3. Применение формулы Маклорена к приближенному представлению некоторых элементарных функций

- 1. $f(x) = e^x$. Эта функция во всей своей области определения, т.е. на $(-\infty; +\infty)$, имеет производную любого порядка $f^{(n)}(x) = e^x$. Применим формулу Маклорена:

$$f(0) = 1 = f'(0) = \ldots = f^{(n)}(0);$$
$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+R_n(x),$$

где $R_n(x)=\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}$ — в форме Лагранжа.

При любом фиксированном значении $x = a$

$$\lim_{n\to\infty} R_n(a)=\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta a}=0$$

$$\left(\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{a}{n+1}\to 0 \text{ при } n\to+\infty;\ e^{\theta a}<3^a \text{ — ограничена}\right).$$

Следовательно, для любых действительных значений x функцию e^x можно представить в виде сходящегося ряда Маклорена

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

Пример. Вычислить $\int\limits_0^{0,4} e^{-2,2x^2}dx$ с точностью до 0,01, представив подынтегральную функцию в виде сходящегося ряда Маклорена.

Решение. $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$

$$e^{-2,2x^2} = e^{-\frac{11}{5}x^2} = 1 + \frac{-\frac{11}{5}x^2}{1!} + \frac{\left(-\frac{11}{5}x^2\right)^2}{2!} + \ldots = 1 - \frac{11}{5}x^2 + \frac{121}{2\cdot 5^2}x^4 - \ldots .$$

$$\int\limits_0^{0,4} e^{\;2,2x^2}dx = \int\limits_0^{0,4}\left(1 - \frac{11}{5}x^2 + \frac{121}{2\cdot 5^2}x^4 - \ldots\right)dx =$$

$$= x\Big|_0^{\frac{2}{5}} - \frac{11}{5}\cdot\frac{1}{3}x^3\Big|_0^{\frac{2}{5}} + \frac{121}{2\cdot 5^2}\cdot\frac{1}{5}x^5\Big|_0^{\frac{2}{5}} - \ldots = \frac{2}{5} - \frac{11}{5\cdot 3}\cdot\frac{2^3}{5^3} + \frac{121}{2\cdot 5^2}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{2^5}{5^5} - \ldots =$$

$$= 0,4 - 0,047 + 0,005 - \ldots .$$

Получен сходящийся знакопеременный числовой ряд (оба условия признака Лейбница выполняются).

Для достижения заданной точности необходимо взять сумму двух первых членов ряда, так как $0,005 < 0,01$.

Итак, $\int\limits_0^{0,4} e^{-2,2x^2}dx \approx 0,353$ с точностью до 0,01.

- 2. $f(x) = \sin x$. Эта функция во всей своей области определения, т.е. на $(-\infty; +\infty)$, имеет производную любого порядка. Применим формулу Маклорена:

$$f(0) = 0;\ f'(x) = \cos x;\ f'(0) = 1;$$

$$f''(x) = -\sin x;\ f''(0) = 0;$$

$$f'''(x) = -\cos x;\ f'''(0) = -1;$$

$$f^{\mathrm{IV}}(x) = \sin x;\ f^{\mathrm{IV}}(0) = 0;\ \ldots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_n(x),$$

где $R_n(x) \to 0$ при $n \to +\infty$.

Следовательно, для любых действительных значений x функцию $\sin x$ можно представить в виде сходящегося ряда Маклорена

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots$$

Пример. Вычислить $\int\limits_0^{0,2} \frac{\sin 5x}{x}dx$ с точностью до 0,001, представив подынтегральную функцию в виде сходящегося ряда Маклорена.

Решение. $\sin 5x = 5x - \frac{5^3}{3!}x^3 + \frac{5^5}{5!}x^5 - \frac{5^7}{7!}x^7 + \ldots$

$$\frac{\sin 5x}{x} = 5 - \frac{5^3}{3!}x^2 + \frac{5^5}{5!}x^4 - \frac{5^7}{7!}x^6 + \ldots$$

$$\int\limits_0^{0,2} \frac{\sin 5x}{x}dx = \int\limits_0^{0,2}\left(5 - \frac{5^3}{3!}x^2 + \frac{5^5}{5!}x^4 - \frac{5^7}{7!}x^6 + \ldots\right)dx =$$

$$= 5x\Big|_0^{\frac{1}{5}} - \frac{5^3}{3!}\cdot\frac{1}{3}x^3\Big|_0^{\frac{1}{5}} + \frac{5^5}{5!}\cdot\frac{1}{5}x^5\Big|_0^{\frac{1}{5}} - \frac{5^7}{7!}\cdot\frac{1}{7}x^7\Big|_0^{\frac{1}{5}} + \ldots =$$

$$= 5\cdot\frac{1}{5} - \frac{5^3}{3!\cdot 3}\cdot\frac{1}{5^3} + \frac{5^5}{5!\cdot 5}\cdot\frac{1}{5^5} - \frac{5^7}{7!\cdot 7}\cdot\frac{1}{5^7} + \ldots = 1 - \frac{1}{3!\cdot 3} + \frac{1}{5!\cdot 5} - \frac{1}{7!\cdot 7} + \ldots =$$

$$= 1 - \frac{1}{18} + \frac{1}{600} - \frac{1}{156\,400} + \ldots$$

Получен сходящийся знакопеременный числовой ряд (оба условия признака Лейбница выполняются).

Для достижения заданной точности необходимо взять сумму трех первых членов ряда, так как $\frac{1}{156\,400} < 0{,}001$.

Итак, $\int\limits_0^{0,2} \frac{\sin 5x}{x}dx \approx \frac{1703}{1800} \approx 0{,}946$ с точностью до 0,001.

- 3. $f(x) = \cos x$. Эта функция во всей своей области определения, т.е. на $(-\infty; +\infty)$, имеет производную любого порядка:
  $f'(x) = -\sin x$; $f'(0) = 0$;
  $f''(x) = -\cos x$; $f''(0) = -1$;
  $f'''(x) = \sin x$; $f'''(0) = 0$;

$f^{IV}(x) = \cos x$; $f^{IV}(0) = 1$; ...

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + R_n(x),$$

где $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

Следовательно, для любых действительных значений x функцию $\cos x$ можно представить в виде сходящегося ряда Маклорена

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + ...$$

- 4. $f(x) = \ln(1 + x)$. Эта функция во всей своей области определения, т.е. на $(-1; +\infty)$, имеет производную любого порядка. Применим формулу Маклорена:

$$f(0) = 0;\ f'(x) = \frac{1}{1+x};\ f'(0) = 1;$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2};\ f''(0) = -1;$$

$$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3};\ f'''(0) = 2;$$

$$f^{IV}(x) = -\frac{6}{(1+x)^4};\ f^{IV}(0) = -6;\ ...$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_n(x),$$

где $\lim\limits_{n\to\infty} R_x(x) = 0$ при $-1 < x \le 1$.

Следовательно, при $-1 < x \le 1$ функцию $\ln(1 + x)$ можно представить в виде сходящегося ряда Маклорена

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + ...$$

Пример. Вычислить с точностью до 0,01 значение $\ln 1{,}2$, представив функцию $\ln(1 + x)$ в виде сходящегося ряда Маклорена.

Решение.

$$\ln 1{,}2 = \ln(1+0{,}2) = 0{,}2 - \frac{(0{,}2)^2}{2} + \frac{(0{,}2)^3}{3} - \ldots = 0{,}2 - 0{,}02 + 0{,}0027 - \ldots$$

Получен сходящийся числовой ряд (оба условия признака Лейбница выполняются).

Для достижения заданной точности необходимо взять сумму двух первых членов ряда, так как $0{,}0027 < 0{,}01$.

Итак, $\ln 1{,}2 \approx 0{,}18$ с точностью до $0{,}01$.

- 5. $f(x) = (1 + x)^m$. Эта функция во всей своей области определения имеет производную любого порядка. Применим формулу Маклорена:
  $f(0) = 0$; $f'(x) = m\,(1 + x)^{m-1}$; $f'(0) = m$;
  $f''(x) = m\,(m - 1)(1 + x)^{m-2}$; $f''(0) = m(m - 1)$;
  $f'''(x) = m\,(m - 1)(m - 2)(1 + x)^{m-2}$; $f'''(0) = m(m - 1)(m - 2)$; ...

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots +$$

$$+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + R_n(x), \text{ где } R_n(x) \to 0 \text{ при } |x| < 1.$$

Следовательно, при $-1 < x < 1$ функцию $(1 + x)^m$ можно представить в виде сходящегося ряда Маклорена

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots +$$

$$+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots$$

Пример. Вычислить с точностью до $0{,}01$ значение $\sqrt[3]{36}$, представив функцию $(1 + x)^m$ в виде сходящегося ряда Маклорена.

Решение. $\sqrt[3]{36} = \sqrt[3]{27+9} = \sqrt[3]{27\left(1+\frac{1}{3}\right)} = 3\left(1+\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}} =$

$$= 3\left[1 + \frac{\frac{1}{3}}{1!}\cdot\frac{1}{3} + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \ldots\right] =$$

$$= 3\left(1 + \frac{1}{9} - \frac{1}{81} + \frac{5}{2187} - \ldots\right) = 3 + \frac{1}{3} - \frac{1}{27} + \frac{5}{729} - \ldots =$$

$$= 3 + 0{,}33 - 0{,}037 + 0{,}007 - \ldots$$

Получен сходящийся знакопеременный числовой ряд (оба условия признака Лейбница выполняются).

Для достижения заданной точности необходимо взять сумму трех первых членов ряда, так как $0{,}007 < 0{,}01$.

Итак, $\sqrt[3]{36} \approx 3{,}293$ с точностью до 0,01.

- 6) $f(x) = \operatorname{arctg} x$. Эта функция во всей своей области определения, т. е. на $(-\infty; +\infty)$, имеет производную любого порядка. Применим формулу Маклорена:

$$f(0) = 0; \; f'(x) = \frac{1}{1+x^2}; \; f'(0) = 1;$$

$$f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}; \; f''(0) = 0;$$

$$f'''(x) = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}; \; f'''(0) = -2; \; \ldots$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + R_n(x),$$

где $R_n(x) \to 0$ при $|x| \le 1$.

Следовательно, при $-1 \le x \le 1$ функцию $\operatorname{arctg} x$ можно представить в виде сходящегося ряда Маклорена

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots$$

В заключение рассмотрим ряд Маклорена для функции e^x и подставим в него вместо x выражение ix:

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \frac{(ix)^6}{6!} + \ldots$$

Напомним, что $i^2 = -1$, $i^3 = i \cdot i^2 = -i$, $i^4 = i^3 \cdot i = 1$, $i^5 = i^4 \cdot i = i$, $i^6 = i^5 \cdot i = -1$ и т. д.

Будем иметь: $e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$

Разделяя действительную и мнимую части, получим

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\right) + i\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\right)$$

или $e^{ix} = \cos x + i\sin x$. Эта формула выведена Л. Эйлером в XVIII в.

Задачи для самостоятельного решения

1. Разложите функцию $f(x)=\dfrac{x}{x+2}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0=3$.

2. Используя ряд Маклорена для функций $f(x)=a\sqrt[3]{1+x}$ и $f(x)=\ln(1+x)$, выразите величину A в виде сходящегося ряда. Найдите приближенное значение этой величины, ограничиваясь двумя первыми членами ряда. Оцените погрешность:

а) $A=\sqrt[3]{140}$; б) $A=\sqrt[3]{1{,}006}$; в) $A=\ln(1{,}25)$.

3. Выразите определенный интеграл в виде сходящегося ряда, используя ряд Маклорена для подынтегральной функции. Найдите приближенное значение этого интеграла с точностью до 10^{-3}:

а) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^3}dx$; б) $\int\limits_0^{\frac{3}{5}}\dfrac{\sin(x^2)}{x}dx$; в) $\int\limits_0^{0,1}\dfrac{\ln(1+x)}{x}dx$; г) $\int\limits_0^{1}\cos\sqrt{x}dx$;

д) $\int\limits_0^{\frac{1}{4}}\sqrt{1+x^3}dx$; е) $\int\limits_0^{0,2}\dfrac{\mathrm{arctg}x}{x}dx$; ж) $\int\limits_0^{0,2}\dfrac{\arcsin 5x}{x^2}dx$;

з) $\int\limits_0^{0,1}\sqrt[3]{1+3x}dx$; и) $\int\limits_0^{0,8}\dfrac{\mathrm{arctg}(1{,}25x)}{x}dx$; к) $\int\limits_0^{0,5}\dfrac{\arcsin 2x}{\sqrt{x}}dx$;

л) $\int\limits_0^{0,2}\dfrac{\ln(1+5x)}{x}dx$; м) $\int\limits_0^{0,25}\dfrac{\cos 4x}{\sqrt{x}}dx$.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Укажите необходимый и достаточные признаки сходимости числовых рядов.
2. Назовите различия между условно сходящимися и абсолютно сходящимися числовыми рядами.
3. Напишите разложение основных элементарных функций в ряд Маклорена.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

Числовой ряд, общий член, сумма ряда, знакочередующийся ряд, знакопеременный ряд, степенной ряд, формула Маклорена, формула Тейлора.

Глава 3

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

3.1. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ. ПРОИЗВОДНАЯ ПО НАПРАВЛЕНИЮ. ГРАДИЕНТ

3.1.1. Частные производные

Пусть задана функция двух переменных $u = f(x;\ y)$, определенная в некоторой области D.

Возьмем некоторую точку $M_0(x_0;\ y_0)$ в этой области и дадим x_0 приращение $\Delta x \neq 0$, оставляя y_0 аргумента y неизменным, т. е. перейдем от точки $M_0(x_0;\ y_0)$ к точке $M_1(x_0 + \Delta x;\ y_0)$ (при этом Δx таково, что точка M_1 принадлежит области D). Тогда и сама функция $f\ (x;\ y)$ получит некоторое частное приращение $\Delta_x u = f(x_0 + \Delta x;\ y_0) - f\ (x_0;\ y_0)$.

Составим отношение: $\dfrac{\Delta_x u}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0 + \Delta x; y_0) - f(x_0; y_0)}{\Delta x}$.

Может случиться, что существует предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x; y_0) - f(x_0; y_0)}{\Delta x}.$$

Тогда этот предел называют ***частной производной*** от функции $u = f(x;\ y)$ по аргументу x в точке $(x_0;\ y_0)$ и обозначают как

$$\left(\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0;y_0)} \quad \text{или} \quad \frac{\partial f(x_0;y_0)}{\partial x} \quad \text{или} \quad f'_x(x_0;y_0) \right).$$

Аналогично определяется частная производная данной функции по аргументу y в точке $(x_0;\ y_0)$.

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0;y_0)} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0)}{\Delta y}.$$

Так как при определении какой-либо частной производной все аргументы, кроме выбранного, считаются постоянными, соответствующая частная производная может быть найдена как обычная производная функции одной переменной, т. е. функции, которая получится из данной, если в ней все аргументы, кроме выбранного, считать постоянными.

Примеры. **1.** Найти частные производные первого порядка следующих функций:

1) $u = x^4 + y^4 - 4\sqrt{x}\sqrt[3]{y}$; 2) $u = xy + \dfrac{x}{y}$; 3) $u = \dfrac{\cos x^2}{y}$;

4) $u = x\sin(x+y)$; 5) $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

Решение. 1) При нахождении частной производной данной функции по аргументу x полагаем аргумент y постоянным. Будем иметь:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(x^4\right)'_x + \left(y^4\right)'_x - 4\left[\left(\sqrt{x}\right)'_x \sqrt[3]{y} + \sqrt{x}\left(\sqrt[3]{y}\right)'_x\right] =$$

$$= 4x^3 + 0 - 4\left[\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\sqrt[3]{y} + \sqrt{x}\cdot 0\right] = 4x^3 - \frac{2\sqrt[3]{y}}{\sqrt{x}}.$$

При нахождении частной производной данной функции по аргументу y полагаем аргумент x постоянным. Будем иметь:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(x^4\right)'_y + \left(y^4\right)'_y - 4\left[\left(\sqrt{x}\right)'_y \sqrt[3]{y} + \sqrt{x}\left(\sqrt[3]{y}\right)'_y\right] =$$

$$= 0 + 4y^3 - 4\left[0\cdot\sqrt[3]{y} + \sqrt{x}\cdot\frac{1}{3}\cdot y^{-\frac{2}{3}}\right] = 4y^3 - \frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{y^2}}.$$

2) $$\frac{\partial u}{\partial x} = (x)'_x y + x(y)'_x + \frac{(x)'_x y - x(y)'_x}{y^2} = 1\cdot y + x\cdot 0 + \frac{1\cdot y - x\cdot 0}{y^2} = y + \frac{1}{y}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (x)'_y y + x(y)'_y + \frac{(x)'_y y - x(y)'_y}{y^2} = 0\cdot y + x\cdot 1 + \frac{0\cdot y - x\cdot 1}{y^2} = x - \frac{x}{y^2}.$$

3) $$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\left(\cos x^2\right)'_x y - \cos x^2\,(y)'_x}{y^2} = \frac{-\sin x^2\cdot 2x\cdot y - \cos x^2\cdot 0}{y^2} = \frac{-2x\sin x^2}{y}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\left(\cos x^2\right)'_y y - \cos x^2 (y)'_y}{y^2} = \frac{0\cdot y - \cos x^2\cdot 1}{y^2} = -\frac{\cos x^2}{y^2}.$$

4) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = (x)'_x \sin(x+y) + x\,[\sin(x+y)\,]'_x =$

$$= 1\cdot\sin(x+y) + x\cos(x+y)(x+y)'_x =$$

$$= \sin(x+y) + x\cos(x+y)[(x)'_x + (y)'_x] = \sin(x+y) + x\cos(x+y)[1+0] =$$

$$= \sin(x+y) + x\cos(x+y).$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (x)'_y \sin(x+y) + x[\sin(x+y)]'_y =$$

$$= 0\cdot\sin(x+y) + x\cos(x+y)(x+y)'_y =$$

$$= x\cos(x+y)[(x)'_y + (y)'_y] = x\cos(x+y)(0+1) = x\cos(x+y).$$

5) $u = (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = [(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}]'_x = -\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}(x^2+y^2+z^2)'_x =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}[(x^2)'_x + (y^2)'_x + (z^2)'_x] =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}(2x+0+0) = -\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}.$$

Аналогично $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$; $\dfrac{\partial u}{\partial z} = -\dfrac{z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$.

2. Дана функция $z = x^3 + 4x^2y - 6xy^2 + y^3$. Найти ее частные производные второго порядка.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 8xy - 6y^2;\quad \frac{\partial z}{\partial y} = 4x^2 - 12xy + 3y^2;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 6x + 8y;\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = -12x + 6y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 8x - 12y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 8x - 12y.$$

Следует отметить, что если функция $z = f(x;\ y)$ и ее смешанные производные f''_{xy} и f''_{yx} определены в некоторой окрестности точки $M(x_0;\ y_0)$, причем производные непрерывны в этой точке, то $f''_{xy}(x_0;\ y_0) = f''_{yx}(x_0;\ y_0)$.

3.1.2. Дифференциал функции нескольких переменных

Для функции $u = f(x;\ y)$

$$du = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy;$$

$$d^2u = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy.$$

Для функции $u = f(x;\ y;\ z)$

$$du = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y} + dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz;$$

$$d^2u = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}dz^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}dxdz + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}dydz.$$

3.1.3. Скалярное поле

Если в каждой точке плоской или пространственной области определено значение некоторой величины, то говорят, что в данной области задано поле этой величины.

Поле может быть ***скалярным*** (например, поле температур), или ***векторным*** (например, поле скоростей, силовое поле). Плоское скалярное поле определяется функцией $u = u(x;\ y)$.

Множество точек, в которых эта функция принимает одно и то же значение, называется ***линией уровня***. Линии уровня определяются уравнением $u(x;\ y) = C$, где $C = \mathrm{const}$.

Пространственное скалярное поле задается функцией

$$u = u(x;\ y;\ z).$$

Множество точек, в которых эта функция принимает одно и то же значение, называется ***поверхностью уровня***. Поверхности уровня определяются уравнением $u\,(x;\ y;\ z) = C$, где $C = \mathrm{const}$.

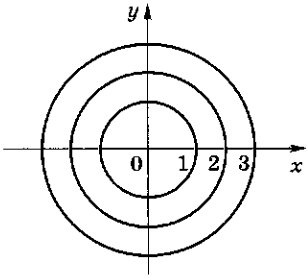


Рис. 3.1

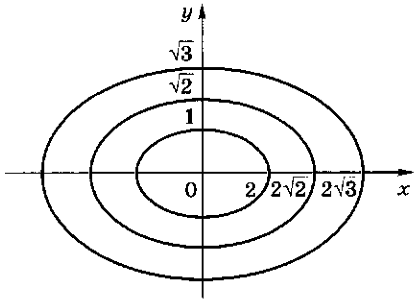


Рис. 3.2

Пример. Построить линии уровня функций: а) $u(x;\ y) = x^2 + y^2$;

б) $u(x;\ y) = \dfrac{x^2}{4} + y^2$.

Решение. а) Линиями уровня является семейство концентрических окружностей $x^2 + y^2 = C$ $(C > 0)$ с центром в начале координат (рис. 3.1). Так, например, при $C = 1$: $x^2 + y^2 = 1$; при $C = 4$: $x^2 + y^2 = 4$; при $C = 9$: $x^2 + y^2 = 9$ и т. д.

б) Линиями уровня является семейство концентрических эллипсов $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = C\,(C > 0)$ (рис. 3.2). Так, например, при $C = 1$: $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$, при $C = 2$: $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 2$ или $\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{2} = 1$; при $C = 3$: $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 3$ или $\dfrac{x^2}{12} + \dfrac{y^2}{3} = 1$ и т. д.

3.1.4. Производная по направлению

Пусть задано пространственное скалярное поле, т. е. задана функция $u = (x;\ y;\ z)$ (рис. 3.3). Возьмем точку $M_0\ (x_0;\ y_0;\ z_0)$ и какой-нибудь луч λ, из нее выходящий. Направление этого луча зададим углами α, β, γ, которые он образует с положительными направлениями осей Ox, Oy, Oz.

Единичный вектор $\vec{e}_\lambda$ направления λ имеет координаты $\vec{e}_\lambda(\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$, т. е. его проекциями будут направляющие косинусы $(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1)$.

Т *Если функция $u\ (x;\ y;\ z)$ непрерывно дифференцируема, то ее производная по любому направлению λ существует и равна*

$$\frac{\partial u}{\partial \lambda} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.$$

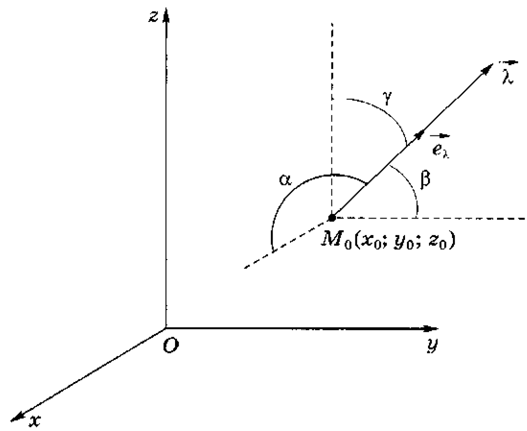


Рис. 3.3

***Замечание* 1.** Если направление вектора $\vec{\lambda}$ задано координатами, т.е. $\vec{\lambda}(l; m; n)$, то $\cos\alpha = \dfrac{l}{|\vec{\lambda}|} = \dfrac{l}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$; $\cos\beta = \dfrac{m}{|\vec{\lambda}|}$; $\cos\gamma = \dfrac{n}{|\vec{\lambda}|}$.

Производная по направлению, вычисленная в некоторой точке M_0 скалярного поля $u\left(\left.\dfrac{\partial u}{\partial\lambda}\right|_{M_0}\right)$, характеризует скорость изменения функции u в точке M_0 по направлению λ.

Абсолютное значение производной определяет величину скорости, а ее знак — характер изменения функции u («+» — возрастание, «−» — убывание).

Пример. Найти производную функции $u = x^2 - 2y^2 + 3z^2$ по направлению вектора $\vec{\lambda}(1; 2; -2)$ и ее значение в точке $M_0(9;\ 6;\ -1)$.

Решение. 1) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x$; $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -4y$; $\dfrac{\partial u}{\partial z} = 6z$.

2) $\vec{\lambda} = \sqrt{1+4+4} = 3$; $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$; $\cos\beta = \dfrac{2}{3}$; $\cos\gamma = -\dfrac{2}{3}$.

3) $\dfrac{\partial u}{\partial\lambda} = 2x\cdot\dfrac{1}{3} - 4y\cdot\dfrac{2}{3} + 6z\left(-\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{2x - 8y - 12z}{3}$.

4) $\left(\left.\dfrac{\partial u}{\partial\lambda}\right|_{M_0}\right) = \dfrac{2\cdot 9 - 8\cdot 6 - 12\cdot(-1)}{3} = \dfrac{18 - 48 + 12}{3} = -6$.

Знак «−» указывает, что в данном направлении функция u убывает.

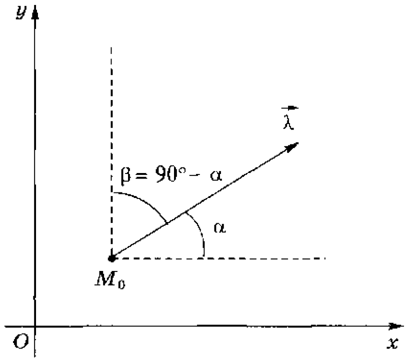


Рис. 3.4

Замечание **2.** Если скалярное поле плоское, то направление луча $\vec{\lambda}$ вполне определяется углом α его наклона к оси абсцисс (рис. 3.4).

Формулу для производной по направлению в случае плоского поля можно получить из общей формулы, положив $\gamma = \frac{\pi}{2}$; $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

$$\frac{\partial u}{\partial \lambda} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\frac{\pi}{2}$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial \lambda} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\alpha.$$

3.1.5. Градиент

Рассмотрим снова формулу для производной по направлению λ:

$$\frac{\partial u}{\partial \lambda} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.$$

Вторые множители в каждом слагаемом являются проекциями на оси координат единичного вектора $\vec{e}_\lambda$, направленного по лучу $\vec{\lambda}$, $\vec{e}_\lambda\,(\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$.

Введем вектор, проекциями которого на оси координат будут служить частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial z}$ в выбранной точке скалярного поля $M\,(x;\ y;\ z)$.

Назовем этот вектор ***градиентом скалярной функции*** $u(x; y; z)$ и будем обозначать его символами $\overline{\text{grad}\,u}$ или $\overline{\nabla u}$.

Итак, $\overline{\nabla u} = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$; $\overline{\nabla u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial z}\right)$.

Таким образом, каждой точке скалярного поля, определяемого функцией $u(x; y; z)$, соответствует определенный вектор — градиент этой функции.

Формуле для производной по направлению λ можно придать вид:

$$\frac{\partial u}{\partial \lambda} = (\overline{\nabla u}, \vec{e_\lambda}) = |\overline{\nabla u}||\vec{e_\lambda}|\cos\varphi = |\overline{\nabla u}|\cos\varphi,$$

так как $|\vec{e}_\lambda| = 1$; φ — угол между вектором $\overline{\nabla u}$ и лучом $\vec{\lambda}$. Таким образом, производная функции по направлению λ равна проекции градиента функции на направление дифференцирования $\frac{\partial u}{\partial \lambda} = \text{пр}_\lambda \overline{\nabla u}$ (рис. 3.5).

Отсюда сразу следует, что производная по направлению достигает наибольшего значения, когда $\cos\varphi = 1$, т.е. $\varphi = 0$.

Следовательно, производная функции в точке по направлению вектора $\vec{\lambda}$ имеет наибольшее значение, если направления $\vec{\lambda}$ и градиента данной функции совпадают. Это наибольшее значение равно модулю вектора $|\overline{\nabla u}|$.

Итак, при $\varphi = 0$ $\frac{\partial u}{\partial \lambda} = |\overline{\nabla u}| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}$.

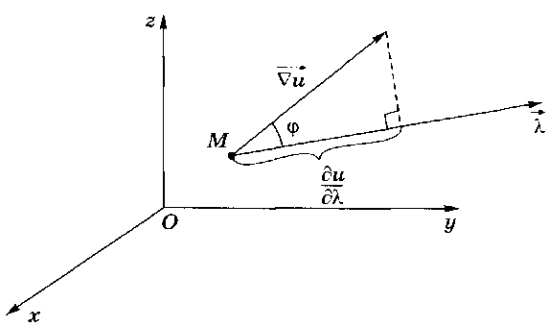


Рис. 3.5

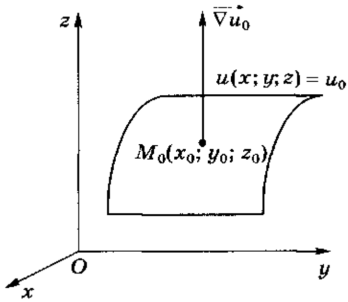


Рис. 3.6

Таким образом, направление градиента есть направление наискорейшего возрастания функции. Ясно, что в противоположном направлении функция u будет скорее всего убывать.

[Т] *Направление градиента функции $u(x; y; z)$ в каждой точке совпадает с направлением нормали к поверхности уровня скалярного поля, проходящей через эту точку* (рис. 3.6).

Уравнение нормали к поверхности уровня $u(x; y; z) = u_0(x_0; y_0; z_0)$ в точке M_0 записывается в виде

$$\frac{x - x_0}{\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}} = \frac{y - y_0}{\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0}} = \frac{z - z_0}{\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0}}.$$

Уравнение касательной плоскости в точке M_0 имеет вид

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}(x - x_0) + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0}(y - y_0) +$$

$$+\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0}(z - z_0).$$

Свойства градиента функции: 1) $\vec{\nabla}(u_1 + u_2) = \vec{\nabla} u_1 + \vec{\nabla} u_2$; 2) $\vec{\nabla}(Cu) = C\,\vec{\nabla} u$; 3) $\vec{\nabla}(u_1 u_2) = u_2 \vec{\nabla} u_1 + u_1 \vec{\nabla} u_2$; 4) $\vec{\nabla}[f(u)] = f'(u)\vec{\nabla} u$.

3.1.6. Матрица Гёссе

[О] ***Матрицей Гёссе*** $\mathrm{H}(M_0)$, дважды непрерывно дифференцируемой в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$ функции $u(x; y; z)$, называется матрица частных производных второго порядка, вычисленных в данной точке,

$$
\mathrm{H}(M_0) = \begin{Bmatrix} \left.\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{M_0} & \left.\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right|_{M_0} & \left.\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\right|_{M_0} \\ \left.\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}\right|_{M_0} & \left.\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{M_0} & \left.\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\right|_{M_0} \\ \left.\dfrac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}\right|_{M_0} & \left.\dfrac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}\right|_{M_0} & \left.\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right|_{M_0} \end{Bmatrix}.
$$

Для функции $u(x;\, y)$

$$
\mathrm{H}(M_0) = \begin{pmatrix} \left.\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{M_0} & \left.\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right|_{M_0} \\ \left.\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}\right|_{M_0} & \left.\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{M_0} \end{pmatrix}.
$$

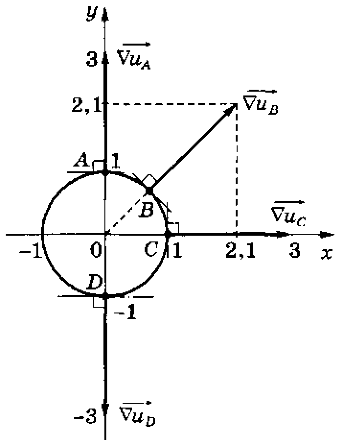


Рис. 3.7

Замечание. Матрица Гёссе является симметрической ($a_{ik} = a_{ik}$, $i \neq k$).

Пример. Для функции $u(x;\, y) = x^2 + y^2$ (рис. 3.7):

1) вычислить и построить градиент в точках $A(0;\, 1)$; $B\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}};\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $C(1;\, 0)$; $D(0;\, -1)$;

2) вычислить матрицу Гёссе в этих точках.

Решение.

1) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x$; $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2y$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 0$.

$$\overline{\nabla u} = 2x\bar{i} + 2y\bar{j};\quad \overline{\nabla u} = (2x; 2y).$$

$$\overrightarrow{\nabla u}_A = (0;2);\ \overrightarrow{\nabla u}_B = (\sqrt{2};\sqrt{2});\ \overrightarrow{\nabla u}_C = (2;0);\ \overrightarrow{\nabla u}_D = (0;-2).$$

2) Матрица Гёссе не зависит от x:

$$\mathrm{H}(M_0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}; \dfrac{\partial z}{\partial y}; \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ следующих функций:

а) $z = (x-2)^2 y^3 + x^2 (y+3)^3 + 6$; б) $z = \mathrm{e}^{\frac{x-2}{y-3}}$.

2. Найдите дифференциал dz функций:

а) $z=\sin^2(2x^2-3y^2)$; б) $z=2xy^3+4x^3y-y^4$.

3. Покажите, что функция $z=y\ln(2x^2-3y^2)$ удовлетворяет уравнению $\frac{3}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{2}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2z}{y^2}$.

4. Покажите, что функция $z=\sin\frac{2x^2+2y^2}{3x^2}$ удовлетворяет уравнению $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

5. Дана функция $u = xyz$. Найдите ее производную в точке $M_0(5;\ 1;\ 2)$ в направлении к точке $M_1(7;\ -1;\ 3)$.

6. Для функции $z=\ln(2x^2+3y^2)$ в точке $A(-3;\ 2)$ найдите градиент и производную по направлению $\vec{\lambda}=2\vec{i}-3\vec{j}$.

7. Для функции $z=\arccos\sqrt{xy}$ в точке $A\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ найдите градиент и производную по направлению $\vec{\lambda}=\vec{i}-\vec{j}$.

8. Для функции $z=\sqrt{1-x^2y^3}$ в точке $A(3;\ 1)$ найдите градиент и производную по направлению $\vec{\lambda}=-2\vec{i}+3\vec{j}$.

9. Для функции $u(x;\ y)=x^2+y^4$ вычислите градиент и матрицу Гёссе в точках $A(0;\ 0)$; $B(1;\ 1)$.

3.2. НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

3.2.1. Необходимые условия первого порядка экстремума функции

Пусть точка $M(x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n)$ есть точка локального минимума (максимума) функции $u\ (x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n)$ и функция u дифференцируема в точке M. Тогда $\left.\overline{\nabla u}\right|_M=0$ или $\left.\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_M=0,\ i=1,2,\ \ldots,\ n.$

Точки, удовлетворяющие этому условию, называются *стационарными.*

Для случая функции одной переменной $y = f(x)$ можно сформулировать следующее достаточное правило:

если функция $f(x)$ и ее производные непрерывны, то стационарная точка M является точкой экстремума тогда и только тогда, когда число m — четное, где m — порядок первой не обращающейся в нуль в точке M производной.

Если кроме этого $f^{(m)}(M) > 0$, то в точке M локальный минимум, если же $f^{(m)}(M) < 0$, то в точке M локальный максимум.

Если же число m — нечетное, то в точке M нет экстремума.

Примеры. **1.** Найти экстремум функции $y = (x-1)^6$.

Решение. 1) Найдем стационарные точки:

$y' = 6(x-1)^5$; $y' = 0 \Rightarrow x = 1$. Точка $x = 1$ — стационарная.

2) $y'' = 6\cdot 5(x-1)^4 = 30(x-1)^4$; $y''(1) = 0$;

$y''' = 120(x-1)^3$; $y'''(1) = 0$;

$y^{\mathrm{IV}} = 360(x-1)^2$; $y^{\mathrm{IV}}(1) = 0$;

$y^{\mathrm{V}} = 720(x-1)$; $y^{\mathrm{V}}(1) = 0$;

$y^{\mathrm{VI}} = 720 > 0$ — в точке $x = 1$ — минимум.

В точке минимума $y(1) = 0$.

2. Найти экстремум функции $y = 5x^6 - 36x^5 + \dfrac{165}{2}x^4 - 60x^3 + 36.$

Решение. 1) Найдем стационарные точки:

$y' = 30x^5 - 180x^4 + 330x^3 - 180x^2 = 30x^2(x^3 - 6x^2 + 11x - 6)$;

$y' = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ и $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$;

$x_2 = 1 \Rightarrow$

$$\begin{array}{l|l}
x^3 - 6x^2 + 11x - 6 & x - 1 \\ \cline{2-2}
-\underline{x^3 - x^2} & x^2 - 5x + 6 \\
\qquad -5x^2 + 11x - 6 & \\
\qquad -\underline{-5x^2 + 5x} & \\
\qquad\qquad 6x - 6 & \\
\qquad\quad -\underline{6x - 6} & \\
\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x_3 = 2$; $x_4 = 3$.

$y' = 30x^2(x-1)(x-2)(x-3)$.

Точки $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = 2$; $x_4 = 3$ являются стационарными.

2) $y''(x) = 150x^4 - 720x^3 + 990x^2 - 360x$;

$y''(0) = 0$;

$y''(1) = 60$ (>0) — локальный минимум;

$y(1) = 5 - 36 + \dfrac{165}{2} - 60 + 36 = 27{,}5$;

$y''(2) = -120$ (<0) — локальный максимум;

$$y(2) = 5\cdot 64 - 36\cdot 32 + \frac{165}{2}\cdot 16 - 60\cdot 8 + 6 = 320 - 1152 + 1320 - 480 + 6 = 14;$$

$y'''(3) = 540$ (>0) — локальный минимум;

$$y(3) = 5\cdot 729 - 36\cdot 243 + \frac{165}{2}\cdot 81 - 60\cdot 27 + 36 =$$

$$= 3\,645 - 8\,748 + \frac{13\,365}{2} - 1\,620 + 36 = -4{,}5.$$

3) Продолжаем проверять точку $x = 0$:

$y'''(x) = 600x^3 - 2\,160\,x^2 + 1\,980\,x - 360;$

$y'''\,(0) = -360$ (< 0) — нет экстремума, так как $m = 3$.

Продолжаем рассмотрение экстремума функций нескольких переменных.

3. Найти стационарные точки функции $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$.

Решение. 1) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 6x^2 + y^2 + 10x;\quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2xy + 2y.$

2) Решим систему: $\begin{cases} 6x^2 + y^2 + 10x = 0 \\ 2xy + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x^2 + y^2 + 10x = 0 \\ 2y(x+1) = 0. \end{cases}$

а) $\begin{cases} 6x^2 + 10x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x(3x+5) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0; x_2 = -\dfrac{5}{3} \\ y = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 6 + y^2 - 10 = 0 \\ x = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = -2; y_2 = 2 \\ x = -1. \end{cases}$

Имеем четыре стационарные точки

$M_1\left(-\dfrac{5}{3}; 0\right)$; $M_2(-1; -2)$; $M_3(-1; 2)$; $M_4(0; 0)$.

3.2.2. Достаточные условия первого порядка экстремума функции

Пусть функция $u\,(x_1;\, x_2;\, s;\, x_n)$ в стационарной точке M дважды дифференцируема, а матрица Гёссе в этой точке является положительно определенной (отрицательно определенной), т. е. $\mathrm{H}(M) > 0$ ($\mathrm{H}(M) < 0$). Тогда точка M есть точка локального минимума (максимума) функции $u(x_1;\, x_2;\, s;\, x_n)$.

Для проверки выполнения достаточных условий используются два способа.

Способ 1 (с применением угловых миноров — критерий Сильвестра).

1) Для того чтобы матрица Гёссе $H(M)$ была положительно определенной ($H(M) > 0$) и точка M являлась точкой локального минимума, необходимо и достаточно, чтобы знаки угловых миноров были строго положительны: $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, ..., $\Delta_n > 0$.

2) Для того чтобы матрица Гёссе $H(M)$ была отрицательно определенной ($H(M) < 0$) и точка M являлась точкой локального максимума, необходимо и достаточно, чтобы знаки угловых миноров чередовались, начиная с отрицательного:

$$\Delta_1 < 0,\ \Delta_2 > 0,\ \Delta_3 < 0,\ \dots,\ (-1)^n\Delta_n > 0.$$

$\boxed{\text{О}}$ Пусть дан определитель n-го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\dots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\dots a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3}\dots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

а) Определители $\Delta_1 = a_{11}$; $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$; $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$; ... называются ***угловыми минорами***.

б) Определители m-го порядка ($m \le n$), получающиеся из определителя n-го порядка вычеркиванием каких-либо $(n - m)$ строк и $(n - m)$ столбцов с одними и теми же номерами, называются ***главными минорами*** m-го порядка.

Например, для определителя порядка $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

главными минорами 1-го порядка будут:

$$\Delta_1 = a_{33};\ \Delta_2 = a_{22};\ \Delta_3 = a_{11};$$

главными минорами 2-го порядка будут:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_5 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_6 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix};$$

главным минором 3-го порядка будет $\Delta_7 = \Delta$.

Для определителя 2-го порядка $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ главными минорами 1-го порядка будут $\Delta_1 = a_{22}$; $\Delta_2 = a_{11}$; главным минором 2-го порядка — $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

Продолжим решение *примера* 3 (см. подразд. 3.2.1). Найдем матрицу Гёссе:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x + 10; \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2y, \ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x + 2;$$

$$\mathrm{H}(x;y) = \begin{pmatrix} 12x+10 & 2y \\ 2y & 2x+2 \end{pmatrix};$$

а) в точке M_1: $\mathrm{H}(M_1) = \begin{pmatrix} 12\left(-\frac{5}{3}\right)+10 & 0 \\ 0 & 2\left(-\frac{5}{3}\right)+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}.$

Найдем знаки угловых миноров: $\Delta_1 = -10 < 0$; $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3} \end{vmatrix} = \frac{40}{3} > 0$,

следовательно, в точке M_1 локальный максимум;

$$\mathrm{H}(M_1) = 2\left(-\frac{5}{3}\right)^3 + \left(-\frac{5}{3}\right)0 + 5\left(-\frac{5}{3}\right)^2 + 0 = -\frac{250}{27} + \frac{125}{9} = \frac{125}{27};$$

б) в точке M_2: $\mathrm{H}(M_2) = \begin{pmatrix} -12+10 & -4 \\ -4 & -2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix};$

$\Delta_1 = -2 < 0$; $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0$ — достаточное условие не выполняется;

в) в точке M_3: $H(M_3)=\begin{pmatrix}-12+10 & 4\\ 4 & -2+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 4 & 0\end{pmatrix}$;

$\Delta_1=-2<0$; $\Delta_2=\begin{vmatrix}-2 & 4\\ 4 & 0\end{vmatrix}=-16<0$ — достаточное условие не выполняется;

г) в точке M_4: $H(M_4)=\begin{pmatrix}10 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$; $\Delta_1=10>0$; $\Delta_2=\begin{vmatrix}10 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}=20>0$, следовательно, в точке M_4 локальный минимум; $H(M_4)=0$.

Способ 2 (с помощью собственных значений матрицы Гёссе). Если все собственные значения матрицы Гёссе в стационарной точке M:

1) строго положительны, т.е. $\lambda_1>0$, $\lambda_2>0$, ..., $\lambda_n>0$, то в этой точке локальный минимум;

2) строго отрицательны, т.е. $\lambda_1<0$, $\lambda_2<0$, ..., $\lambda_n<0$, то в этой точке локальный максимум;

3) λ_i имеют разные знаки, то в этой точке нет экстремума;

4) $\lambda_1\ge 0$, $\lambda_2\ge 0$, ..., $\lambda_n\ge 0$ — ***может быть*** локальный минимум (требуется дополнительное исследование);

5) $\lambda_1\le 0$, $\lambda_2\le 0$, ..., $\lambda_n\le 0$ — ***может быть*** локальный максимум (требуется дополнительное исследование);

6) $\lambda_1=0$, $\lambda_2=0$, ..., $\lambda_n=0$ — требуется дополнительное исследование.

Замечание. Собственные значения матрицы Гёссе находятся из условия равенства нулю определителя матрицы $(H-\lambda E)$, т.е. из уравнения $|H-\lambda E|=0$, где E — единичная матрица.

Продолжаем решение *примера 3* (см. подразд. 3.2.1):

а) для точки M_1:

$$\begin{vmatrix}-10-\lambda & 0\\ 0 & -\frac{4}{3}-\lambda\end{vmatrix}=0\Rightarrow(10+\lambda)\left(\frac{4}{3}+\lambda\right)=0\Rightarrow\lambda_1=-10<0;\ \lambda_2=-\frac{4}{3}<0\Rightarrow$$

в точке M_1 локальный максимум;

б) для точки M_2:

$$\begin{vmatrix}-2-\lambda & -4\\ -4 & 0-\lambda\end{vmatrix}=0\Rightarrow(-2-\lambda)(-\lambda)-16=0;$$

$\lambda(\lambda+2)-16=0\ \Rightarrow\ \lambda^2+2\lambda-16=0$;

$\frac{D}{4}=1+16=17$; $\lambda_1=-1-\sqrt{17}<0$; $\lambda_2=-1+\sqrt{17}>0$ — нет экстремума;

в) для точки M_3:

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 4 \\ 4 & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (-2-\lambda)(-\lambda) - 16 = 0;$$

$$\lambda(\lambda + 2) - 16 = 0 \ \Rightarrow \ \lambda^2 + 2\lambda - 16 = 0;$$

$\dfrac{D}{4} = 1 + 16 = 17;\ \lambda_1 = -1 - \sqrt{17} < 0;\ \lambda_2 = -1 + \sqrt{17} > 0$ — нет экстремума;

г) для точки M_4:

$\begin{vmatrix} 10-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (10-\lambda)(2-\lambda) = 0 \Rightarrow \ \lambda_1 = 10 > 0;\ \lambda_2 = 2 > 0 \Rightarrow$ в точке M_4 локальный минимум.

3.2.3. Необходимые условия второго порядка экстремума функции

Если в стационарной точке M достаточные условия первого порядка экстремума функции не выполняются, то проверяются *необходимые условия* второго порядка экстремума функции:

• пусть точка M есть точка локального минимума (максимума) функции $u(x_1; x_2; ...; x_n)$ и функция u дважды дифференцируема в этой точке. Тогда матрица Гёссе $\mathrm{H}(M)$ является положительно полуопределенной (отрицательно полуопределенной), т.е. $\mathrm{H}(M) \geq 0$ ($\mathrm{H}(M) \leq 0$);

• для того чтобы матрица Гёссе $\mathrm{H}(M)$ была положительно полуопределенной ($\mathrm{H}(M) \geq 0$) и точка M ***может быть*** являлась точкой локального минимума, необходимо и достаточно, чтобы главные миноры определителя матрицы Гёссе были неотрицательны;

• для того чтобы матрица Гёссе $\mathrm{H}(M)$ была отрицательно полуопределенной ($\mathrm{H}(M) \leq 0$) и точка M ***может быть*** являлась точкой локального максимума, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры четного порядка были неотрицательны, а все главные миноры нечетного порядка — положительны.

Примеры. **1.** Найти экстремум функции $u(x; y) = x^2 - y^2$.

1) Найдем стационарные точки функции $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x;\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -2y$. Имеем систему $\begin{cases} 2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow M(0;\ 0)$ — стационарная точка.

2) Проверяем достаточные условия первого порядка экстремума функции. Составляем матрицу Гёссе: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 0$; $\mathrm{H}(M) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$:

а) проверим знаки угловых миноров:

$\Delta_1 = 2 > 0$; $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 < 0$ — достаточные условия не выполняются;

б) вычислим собственные значения матрицы Гёссе:

$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (2-\lambda)(-2-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2$; $\lambda_2 = -2 \Rightarrow$ в точке $M(0; 0)$ нет экстремума.

2. Найти экстремум функции $u(x; y) = x^2 + y^4$.

1) Найдем стационарные точки функции $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$; $\frac{\partial u}{\partial y} = 4y^3$. Имеем систему $\begin{cases} 2x = 0 \\ 4y^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow M(0; 0)$ — стационарная точка.

2) Проверяем выполнение достаточных условий первого порядка экстремума функции. Составляем матрицу Гёссе: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 12y^2$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 0$; $\mathrm{H}(X) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix}$. В стационарной точке $\mathrm{H}(M) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$:

а) проверим знаки угловых миноров

$\Delta_1 = 2 > 0$; $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ — достаточные условия не выполняются;

б) вычислим собственные значения матрицы Гёссе:

$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (2-\lambda)(-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2$; $\lambda_2 = 0 \Rightarrow$ в точке $M(0; 0)$ может быть локальный минимум (требуется дополнительное исследование).

3) Проверим выполнение необходимых условий второго порядка экстремума функции. Для этого вычислим главные миноры матрицы Гёссе $\mathrm{H}(M)$:

$\Delta_1 = 0$; $\Delta_2 = 2$; $\Delta_3 = 0$ — может быть локальный минимум и требуется дополнительное исследование.

4) Вычислим значение функции в точке M: $u(M) = 0$. Так как $u(M) \leq u(M \pm \varepsilon)$, то в точке M локальный и глобальный минимум.

Задачи для самостоятельного решения

1. Исследуйте на экстремум следующие функции:

1) $u(x;\ y) = 2x^2 + xy + y^2$;

2) $u(x;\ y) = (1 - x)^2 + 10(y - x^2)^2$;

3) $u(x;\ y;\ z) = -x^2 - y^2 - z^2 - x + xy + 2z$;

4) $u(x;\ y;\ z) = x^3 + y^2 + z^2 + yz - 3x + 6y + 2$.

2. Найдите экстремум следующих функций:

5) $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$;

6) $u(x;\ y) = 4x^2 + 3y^2 - 4xy + x$;

7) $u(x;\ y) = 2x^3 + 4xy^2 - 10xy + y^2$;

8) $u(x;\ y) = x^3 - xy + y^2 - 2x + 3y - 4$;

9) $u(x;\ y) = 3xy - xy^2 - x^2y$.

3.3. УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

3.3.1. Необходимые условия первого порядка экстремума функции

- 1. Найдем экстремум функции $z = f(x;\ y)$ при условии, что переменные x и y связаны соотношением $\varphi(x, y) = 0$, которое называют ***уравнением связи*** (число уравнений связи меньше, чем число аргументов исследуемой функции).

Введем вспомогательную функцию $F(x;\ y;\ \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$, где λ — параметр, называемый ***множителем Лагранжа***.

Из системы уравнений $\begin{cases} F'_x(x;y;\lambda)=0 \\ F'_y(x;y;\lambda)=0 \\ \varphi(x;y)=0 \end{cases}$ определяют значения x, y, λ, где x, y — координаты точки возможного условного экстремума (условно-стационарные точки).

- 2. Найдем экстремум функции $u = f(x, y, z)$ при условиях $\varphi(x, y, z) = 0$ и $\psi(x, y, z) = 0$. Введем ***функцию Лагранжа*** $F(x;\ y;\ z;\ \lambda;\ \mu) = f(x;\ y;\ z) + \lambda\,\varphi(x;\ y;\ z) + \mu\psi(x;\ y;\ z)$.

Из системы уравнений $\begin{cases} F'_x(x;y;z;\lambda;\mu)=0 \\ F'_y(x;y;z;\lambda;\mu)=0 \\ F'_z(x;y;z;\lambda;\mu)=0 \\ \varphi(x;y;z)=0 \\ \phi(x;y;z)=0 \end{cases}$ определяют значения x, y, z, λ, μ, где x, y, z — координаты точки возможного условного экстремума.

Пример. Найти условно-стационарные точки функции $f(x;\, y) = x^2 + y^2$ при ограничении $x + y - 2 = 0$ ($\varphi(x,\, y) = 0$).

Решение. Составим функцию Лагранжа $F(x;\, y;\, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 2)$;

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + \lambda, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y + \lambda.$$

Решим систему:

$$\begin{cases} 2x+\lambda=0 \\ 2y+\lambda=0 \\ x+y-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda=-2x \\ 2y-2x=0 \\ x+y-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda=-2x \\ y=x \\ 2x-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda=-2 \\ \left.\begin{matrix} y=1 \\ x=1 \end{matrix}\right\} \end{cases}$$ — координаты условно-стационарной точки M (1; 1).

3.3.2. Достаточные условия первого порядка экстремума функции

Если в условно-стационарной точке M второй дифференциал функции Лагранжа, вычисленный при условии $d\varphi(M) = 0$ для всех ненулевых dx, dy, строго положителен (отрицателен), т.е. $d^2F(M) > 0$ ($d^2F(M) < 0$), то точка M является ***точкой локального минимума (максимума)***.

Продолжим решение *примера* (см. подразд. 3.3.1.).

Найдем d^2F: $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2$; $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0$; $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2$; $d^2F = 2dx^2 + 2dy^2$.

Найдем $d\varphi = 0 \Rightarrow dx + dy = 0 \Rightarrow dy = -dx$. С учетом этого условия $d^2F = 2dx^2 + 2(-dx)^2 = 4dx^2$ (> 0 при $dx \neq 0$) $\Rightarrow$ в точке $M(1;\, 1)$ — локальный минимум; $f_{\min} = 2$.

- Если достаточные условия первого порядка экстремума функции не выполняются, то следует проверить выполнение ***необходимых условий второго порядка экстремума функции***.

- Если в условно-стационарной точке M второй дифференциал функции Лагранжа, вычисленный при условии $d\varphi(M) = 0$ для всех ненулевых dx, dy, неотрицателен (неположителен), т.е. если $d^2F(M) \geq 0$ ($d^2F(M) \leq 0$), то в точке M может быть локальный минимум (максимум).
- Если $d^2F(M) = 0$ — требуется дополнительное исследование.
- Если $d^2F(M) \gtrless 0$ — нет экстремума.

Пример. Найти условный экстремум функции $f(x; y) = x + y$ при ограничении $\varphi(x; y) = x^2 + y^2 - 2 = 0$.

Решение. 1) Составим функцию Лагранжа

$F(x; y) = x + y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 2)$.

2) Найдем условно-стационарные точки: $\dfrac{\partial F}{\partial x} = 1 + 2\lambda x$, $\dfrac{\partial F}{\partial y} = 1 + 2\lambda y$.

3) Решим систему:

$$\begin{cases} 1 + 2\lambda x = 0 \\ 1 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -\dfrac{1}{2x} \\ 1 + 2\left(-\dfrac{1}{2x}\right)y = 0 \\ x^2 + y^2 - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -\dfrac{1}{2x} \\ 1 - \dfrac{y}{x} = 0 \\ x^2 + y^2 - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ y_1 = -1 \\ \lambda_1 = \dfrac{1}{2} \\ \quad (M_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = 1 \\ \lambda_2 = -\dfrac{1}{2} \\ \quad (M_2) \end{cases}.$$

4) Найдем d^2F и $d\varphi$:

$\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2\lambda$; $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2\lambda$; $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0$.

$d^2F = 2\lambda dx^2 + 2\lambda dy^2$; $d\varphi = 2x\ dx + 2ydy$.

$d\varphi = 0 \Rightarrow 2xdx + 2ydy = 0$.

В точке M_1: $d\varphi\,(M_1) = -2dx - 2\,dy$.

$d\varphi\,(M_1) = 0 \Rightarrow -2dx - 2dy = 0 \Rightarrow dy = -dx$.

$d^2F(M_1) = dx^2 + dy^2 = 2dx^2$ (>0 при $dx \neq 0$) $\Rightarrow$ в точке $M_1 \Rightarrow$ локальный минимум; $f_{\min} = -2$.

В точке M_2 : $d\varphi\,(M_2) = 2\,dx + 2\,dy$.

$d\varphi\,(M_2) = 0 \Rightarrow 2\,dx + 2\,dy = 0 \Rightarrow dy = -dx$.

$d^2F(M_2) = -dx^2 - dy^2 = -2dx^2$ (< 0 при $dx \neq 0$) $\Rightarrow$ в точке M_2 локальный максимум; $f_{\max} = 2$.

Задачи для самостоятельного решения

Найдите условный экстремум следующих функций:

1) $f(x;\ y) = x$ при $\varphi(x;\ y) = y^2 - x^3 = 0$;

2) $f(x;\ y) = x^2 + y^2$ при $\varphi(x;\ y) = (x-1)^2 + y^2 - 4 = 0$;

3) $f(x;\ y) = x^2 - y^2$ при $\varphi(x;\ y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$;

4) $f(x;\ y;\ z) = x^2 + y^2 + z^2$ при $\varphi(x;\ y;\ z) = x^2 + y^2 - z = 0$, $\psi(x;\ y;\ z) = x + y + z - 4 = 0$;

5) $f(x;\ y) = x + y$ при $\varphi(x;\ y) = x^2 + y^2 - 8 = 0$;

6) $f(x;\ y) = x^2 + y^2$ при $\varphi(x;\ y) = x^2 + 2y^2 - 8 = 0$;

7) $f(x;\ y) = x^2 + y^2$ при $\varphi(x;\ y) = y^2 - x = 0$;

8) $f(x;\ y) = 2x^2 - 4x + y^2 - 8y + 3$ при $\varphi(x;\ y) = x + y + 6 = 0$;

9) $f(x;\ y) = -4x^2 - 4x - y^2 + 8y - 5$ при $\varphi(x;\ y) = 2x - y - 6 = 0$.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Дайте определения частных производных, градиента, производной по направлению.
2. Какое поле называют скалярным?
3. Какую матрицу называют матрицей Гёссе?
4. Какие точки называют стационарными?
5. Дайте определения угловых и главных миноров.
6. Укажите необходимые и достаточные условия безусловного и условного экстремума функций нескольких переменных.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

Частная производная, градиент, матрица Гёссе, минор, экстремум, локальный экстремум.

Глава 4

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

4.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ. ЗАДАЧА КОШИ

$\boxed{\text{О}}$ ***Дифференциальным уравнением*** называется уравнение, связывающее независимые переменные, их функцию и производные (или дифференциалы) этих функций. Если независимая переменная одна, то уравнение называется *обыкновенным*; если же независимых переменных две или больше, то уравнение называется *уравнением в частных производных.*

Наивысший порядок производной, входящей в уравнение, называется порядком дифференциального уравнения.

Примеры. 1. $x+yy'=0$ — обыкновенное дифференциальное уравнение 1-го порядка.

2. $\dfrac{d^2y}{dx^2}-4xy\dfrac{dy}{dx}=x^2$ — обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка.

3. $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ — дифференциальное уравнение в частных производных 1-го порядка.

В дальнейшем будем рассматривать только обыкновенные дифференциальные уравнения.

Начнем с дифференциальных уравнений 1-го порядка. Если дифференциальное уравнение разрешено относительно производной, то его можно представить в виде $y'=f(x;\ y)$; если нет, то $F(x;\ y;\ y')=0$.

$\boxed{\text{О}}$ ***Решением*** дифференциального уравнения называется такая дифференцируемая функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке в уравнение вместо неизвестной функции обращает его в тождество.

$\boxed{\text{О}}$ ***Общим решением*** дифференциального уравнения 1-го порядка $y' = f(x; y)$ в области D называется функция $y = \varphi(x, C)$, обладающая следующими свойствами:

1) она является решением данного уравнения при любых действительных значениях произвольной постоянной C;

2) для любого начального условия $y(x_0) = y_0$ такого, что $(x_0; y_0) \in D$, существует единственное значение $C = C_0$, при котором решение $y = \varphi(x; C_0)$ удовлетворяет заданному начальному условию.

$\boxed{\text{О}}$ Всякое решение $y = \varphi(x; C_0)$, получающееся из общего решения $y = \varphi(x; C)$ при конкретном значении $C = C_0$, называется ***частным решением***.

$\boxed{\text{О}}$ Задача, в которой требуется найти частное решение уравнения $y' = f(x; y)$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$, называется ***задачей Коши***.

Построенный на плоскости xOy график всякого решения $y = \varphi(x)$ данного дифференциального уравнения называется *интегральной кривой* этого уравнения. Таким образом, общему решению $y = \varphi(x; C)$ на плоскости xOy соответствует семейство интегральных кривых, зависящее от одного параметра — произвольной постоянной C, а частному решению, удовлетворяющему начальному условию $y(x_0) = y_0$, — кривая этого семейства, проходящая через точку $(x_0; y_0)$.

Однако встречаются дифференциальные уравнения, имеющие такие решения, которые не получаются из общего решения ни при каких значениях C (в том числе и при $C = \pm\infty$). Такие решения называются ***особыми***.

Пример. Дифференциальное уравнение $y' = \sqrt{1 - y^2}$ имеет общее решение $y = \sin(x + C)$ (убедитесь проверкой).

В то же время функция $y = 1$ также является решением этого уравнения, но это решение не может быть получено из общего ни при каких значениях C, т. е. является особым.

Графиком особого решения является интегральная кривая, которая в каждой своей точке имеет общую касательную с одной из интегральных кривых, определяемых общим решением. Такая кривая называется *огибающей* семейства интегральных кривых.

Процесс нахождения решений дифференциального уравнения называется *интегрированием* дифференциального уравнения.

4.2. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

$\boxed{\text{О}}$ Дифференциальное уравнение вида

$$f_1(x)\,\varphi_1(y)\,dx + f_2(x)\,\varphi_2(y)\,dy = 0$$

называется ***уравнением с разделяющимися переменными***. Если $f_2(x) \neq 0$ и $\varphi_1(y) \neq 0$, то его можно представить в виде

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy = 0.$$

В результате почленного интегрирования получаем

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \int \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy = C.$$

Примеры. **1.** Найти общее решение дифференциального уравнения $(1 + e^{2x})y^2dy = e^x dx$ и частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 0$.

Решение. Разделим переменные: $y^2dy = \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$. Почленно интегрируя, получим: $\frac{1}{3}y^3 = \operatorname{arctg} e^x + \frac{1}{3}C$, или $y^3 = 3\operatorname{arctg} e^x + C$, или $y = \sqrt[3]{3\operatorname{arctg} e^x + C}$ — общее решение дифференциального уравнения. Найдем постоянную интегрирования C из условия $y(0) = 0$: $0 = 3\frac{\pi}{4} + C$ или $C = -\frac{3\pi}{4}$. Частное решение имеет вид $y^3 = 3\operatorname{arctg} e^x - 3\frac{\pi}{4}$, или $y = \sqrt[3]{3\operatorname{arctg} e^x - \frac{3\pi}{4}}$.

2. Найти общее решение дифференциального уравнения $x + yy' = 0$ и частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 2$.

Решение. Разделяя переменные и обозначая $y' = \frac{dy}{dx}$, получим

$$y\frac{dy}{dx} = -x \Rightarrow ydy = -xdx.$$

Почленно интегрируя, будем иметь $\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}C$ или $x^2 + y^2 = C$ — общее решение дифференциального уравнения. Найдем постоянную интегрирования C из условия $y(0) = 2$: $0 + 4 = C \Rightarrow C = 4$. Частное решение имеет вид $x^2 + y^2 = 4$.

Замечание. Геометрической интерпретацией общего решения данного уравнения является семейство концентрических окружностей $x^2 + y^2 = C$ с центром в начале координат. Частное решение представляет собой конкретную окружность $x^2 + y^2 = 4$, проходящую через точку с координатами $(0; 2)$.

Задачи для самостоятельного решения

Найдите общее решение следующих дифференциальных уравнений:

1) $y' = e^{x-y}$; 2) $y' - xy + y = 0$;

3) $y' = x\frac{\sqrt{4y^2 - 1}}{(x-1)(x+2)}$; 4) $(x-1)(y+1)y' - (2x-1)(2y+1) = 0$;

5) $dy(x^2 - 1) = yx\ln y dx$; 6) $\frac{x-1}{y+1}dx + \frac{x+1}{y-1}dy = 0$;

7) $ye^x dy = e^y dx$; 8) $(y+1)\operatorname{arctg} x dy = (y^2 + 4)\frac{dx}{1+x^2}$.

4.3. ОДНОРОДНЫЕ ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Уравнение вида $P(x; y)dx + Q(x; y)dy = 0$ называется *однородным*, если $P(x; y)$ и $Q(x; y)$ — однородные функции одного измерения.

$\boxed{\text{О}}$ Функция $f(x; y)$ называется ***однородной*** измерения m, если $f(ux; uy) = u^m f(x; y)$.

С помощью подстановки $y = tx$ однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными.

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'.$$

Решение. Заменяя y' на $\frac{dy}{dx}$, получим

$$(xy + y^2)dx - (2x^2 + xy)dy = 0.$$

Рассмотрим функции:
$P(x;\ y) = xy + y^2$; $P(ux;\ uy) = u^2xy + u^2y^2 = u^2P(x;\ y)$;
$Q(x;\ y) = 2x^2 + xy$; $Q(ux;\ uy) = 2u^2x^2 + u^2\,xy = u^2\,Q(x;\ y)$.

Следовательно, функции $P(x;\ y)$ и $Q(x;\ y)$ являются однородными второго измерения. После замены $y = tx \Rightarrow dy = x\,dt + tdx$ получим уравнение $(tx^2 + t^2x^2)dx - (2x^2 + tx^2)(xdt + tdx) = 0$; $tdx + t^2\,dx - 2xdt - 2tdx - txdt - t^2\,dx = 0$; $-tdx = x(2 + t)dt$; $\frac{dx}{x} = -\frac{2+t}{t}dt$.

Почленно интегрируя, будем иметь $\ln x = -2\ln t - t + C$.

Заменяя $t = \frac{y}{x}$, окончательно получим $\ln x = -2\ln\frac{y}{x} - \frac{y}{x} + C$ — общее решение дифференциального уравнения.

Задачи для самостоятельного решения

Решите следующие уравнения:

1) $(2x + 5y)dx + (5x + 3y)dy = 0$;

2) $(2xy + 3y^2)dx + (x^2 + 6xy - 3y^2)dy = 0$;

3) $xy' = \frac{3y^3 + 2x^2y}{x^2 + 2y^2}$; 4) $xy' = 2\sqrt{x^2 + y^2} + y$.

4.4. ЛИНЕЙНЫЕ ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

О Дифференциальное уравнение вида $y' + P(x)y = Q(x)$ называется ***линейным***. Если $Q(x) \neq 0$, то уравнение называется линейным неоднородным, а если $Q(x) = 0$, то — линейным однородным.

- Общее решение линейного однородного уравнения $y' + P(x)y = 0$ легко получается разделением переменных

$$\frac{dy}{dx} = -P(x)y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -P(x)dx \Rightarrow \ln y = -\int P(x)dx + \ln C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln\frac{y}{C} = -\int P(x)dx \Rightarrow y = Ce^{-\int P(x)dx}.$$

Общее решение линейного неоднородного уравнения можно найти исходя из общего решения соответствующего однородного уравнения ***методом Лагранжа***, варьируя произвольную постоянную C, т.е. полагая $y = C(x)e^{-\int P(x)dx}$, где $C(x)$ — некоторая, подлежащая определению, дифференцируемая функция от x. Для нахождения $C(x)$ нужно подставить y и y' в исходное неоднородное уравнение:

$$y' = C'(x)e^{-\int P(x)dx} + C(x)[-P(x)e^{-\int P(x)dx}].$$

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx} - C(x)P(x)e^{\int P(x)dx} + C(x)P(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x).$$

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x);\quad C'(x) = e^{-\int P(x)dx}Q(x).$$

Заменяя $C'(x)$ на $\dfrac{dC(x)}{dx}$, будем иметь

$$dC(x) = e^{\int P(x)dx}Q(x)dx.$$

После интегрирования $C(x) = \int[Q(x)e^{\int P(x)dx}]dx + C.$

Окончательно получим $y = e^{-\int P(x)dx}[\int(Q(x)e^{\int P(x)dx})dx + C].$

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'\sin x - y\cos x = 1$ и частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y = \left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0.$

Решение. Найдем общее решение однородного уравнения $y'\sin x - y\cos x = 0$:

$$\frac{dy}{dx}\sin x = y\cos x \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{\cos x}{\sin x}dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln y = \ln\sin x + \ln C \Rightarrow y = C\sin x.$$

Для нахождения общего решения неоднородного уравнения применим метод вариации произвольного постоянного C.

Пусть $C = C(x)$. Тогда $y = C(x)\sin x$, $y' = C'(x)\sin x + C(x)\cos x$.

Подставим y и y' в неоднородное уравнение:

$(C'(x)\sin x + C(x)\cos x)\sin x - C(x)\sin x\cos x = 1;$

$C'(x)\sin^2 x + C(x)\sin x\cos x - C(x)\sin x\cos x = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow C'(x)\sin^2 x = 1 \Rightarrow \frac{dC}{dx}\sin^2 x = 1 \Rightarrow dC = \frac{dx}{\sin^2 x} \Rightarrow C(x) = -\mathrm{ctg}\, x + C.$$

Окончательно $y = (-\mathrm{ctg}\, x + C)\sin x = C\sin x - \cos x$ — общее решение.

Найдем частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$: $0 = C\sin\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{2} \Rightarrow C = 0 \Rightarrow y = -\cos x$ — частное решение.

- Линейное уравнение первого порядка также можно решить ***методом Бернулли***. Сделаем подстановку $y = uv$.

Тогда $y' = u'v + uv'$. Получим $u'v + uv' + P(x)uv = Q(x)$ или $u(v' + P(x)v) + u'v = Q(x)$.

Пользуясь тем, что одна из неизвестных функций (например, v) может быть выбрана совершенно произвольно (поскольку лишь произведение uv должно удовлетворять исходному уравнению), за v принимают любое частное решение уравнения

$$v' + P(x)v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = -P(x)v \Rightarrow \frac{dv}{v} = -P(x)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln v = -\int P(x)dx + \ln C;\ \ln\frac{v}{C} = -\int P(x)dx;\ \frac{v}{C} = e^{-\int P(x)dx} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = Ce^{-\int P(x)dx} \Rightarrow \text{Возьмем } C = 1 \Rightarrow v = e^{-\int P(x)dx}.$$

Поскольку $v' + P(x)v = 0$, то останется уравнение $u'v = Q(x)$ или $\frac{du}{dx}e^{-\int P(x)dx} = Q(x) \Rightarrow du = Q(x)e^{\int P(x)dx}dx \Rightarrow u = \int[Q(x)e^{\int P(x)dx}]dx + C.$

Общее решение будет иметь вид

$$y = e^{-\int P(x)dx}[\int(Q(x)e^{\int P(x)dx})dx + C].$$

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения $xy' + 2y = \frac{1}{x}$ и частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(3) = 1$.

Решение. Пусть $y = uv \Rightarrow y' = u'v + v'u$.

Подставляя y и y' в исходное уравнение, будем иметь

$$xvu' + xuv' + 2uv = \frac{1}{x};\; u(xv' + 2v) + xvu' = \frac{1}{x}.$$

Решим уравнение $xv' + 2v = 0 \Rightarrow x\dfrac{dv}{dx} = -2v \Rightarrow \dfrac{dv}{v} = -2\dfrac{dx}{x} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \ln v = -2\ln x + \ln C \Rightarrow \ln v = \ln\frac{C}{x^2} \Rightarrow v = \frac{C}{x^2} \text{ (при } C = 1\text{: } v = \frac{1}{x^2}).$$

Решим оставшееся уравнение:

$$xvu' = \frac{1}{x} \Rightarrow xv\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow x\frac{1}{x^2}\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow du = dx \Rightarrow u = x + C.$$

Общее решение уравнения имеет вид $y = uv = \dfrac{x+C}{x^2}$.

Найдем частное решение: $1 = \dfrac{3+C}{9} \Rightarrow C = 6 \Rightarrow y = \dfrac{x+6}{x^2}$.

Задачи для самостоятельного решения

Найдите общее решение следующих дифференциальных уравнений и частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$:

1) $y' - 4xy = x,\;\; y_{(0)} = \dfrac{3}{4}$; 2) $y' - y\sin x = e^{-\cos x},\;\; y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 3$;

3) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2},\;\; y(0) = 5$; 4) $y' + y = \dfrac{e^{-x}}{1+x^2},\;\; y(0) = 2$;

5) $xy' - 3y = x^4e^{-x},\;\; y(1) = e$; 6) $xy' + 2y = \dfrac{1}{x},\;\; y(3) = 1$;

7) $xy' + y = \dfrac{2x}{1+x^2},\;\; y(1) = 0$; 8) $y'\cos x - 2y\sin x = 2,\;\; y(0) = 3$.

4.5. УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ

O Уравнение вида $y' + P(x)y = Q(x)y^m$, где $m \neq 0$; $m \neq 1$, называется ***уравнением Бернулли***. Его можно преобразовать в линейное, произведя замену неизвестной функции с помощью подстановки $z = y^{1-m}$.

Тогда $y = z^{\frac{1}{1-m}}$; $y' = \frac{1}{1-m} z^{\frac{1}{1-m}-1} z' = \frac{1}{1-m}\frac{z^{\frac{1}{1-m}}}{z} z'$.

Подставляя значения y и y' в исходное уравнение, получим

$$\frac{1}{1-m}\frac{z^{\frac{1}{1-m}}}{z} z' + P(x) z^{\frac{1}{1-m}} = Q(x)\frac{z^{\frac{1}{1-m}}}{z};$$

$\frac{1}{1-m}\frac{z'}{z} + P(x) = \frac{Q(x)}{z} \Rightarrow \frac{1}{1-m} z' + P(x) z = Q(x)$ — линейное неоднородное уравнение, которое можно решить двумя вышеперечисленными методами (см. подразд. 4.4).

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения $2(xy' + y) = xy^2$ и частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 2$.

Решение. Сделаем замену $z = y^{1-2} = y^{-1} = \frac{1}{y}$, откуда $y = \frac{1}{z}$. Тогда $y' = -1 \cdot z^{-2} z' = -\frac{1}{z^2} z'$.

Подставляя значения y и y' в исходное уравнение, получим

$2\left(-x\frac{1}{z^2} z' + \frac{1}{z}\right) = x\frac{1}{z^2}$; $2\frac{-xz' + z}{z^2} = \frac{x}{z^2}$; $2(-xz' + z) = x$; $-xz' + z = \frac{1}{2}x$;

$z' - \frac{1}{x} z = -\frac{1}{2}$ — линейное неоднородное уравнение.

Пусть $z = uv \Rightarrow z' = u'v + uv'$.

Подставляя z и z' в уравнение, будем иметь

$$u'v + uv' - \frac{1}{x}uv = -\frac{1}{2};\quad u\left(v' - \frac{1}{x}v\right) + u'v = -\frac{1}{2}.$$

Решим уравнение $v' - \frac{1}{x}v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{1}{x}v \Rightarrow \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln v = \ln x + \ln C \Rightarrow$
$\Rightarrow \ln v = \ln(Cx) \Rightarrow v = Cx$.

Возьмем $C = 1$, тогда $v = x$.

Решим оставшееся уравнение $u'v = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{du}{dx}v = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{du}{dx}x = -\frac{1}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow du = -\frac{1}{2}\frac{dx}{x} \Rightarrow u = -\frac{1}{2}\ln x + C$.

Общее решение имеет вид $z=\left(-\frac{1}{2}\ln x+C\right)x.$

Но $z=\frac{1}{y}$, откуда $y=\frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\ln x+C\right)x}$ — общее решение дифференциального уравнения.

Найдем частное решение: $2=\frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\ln 1+C\right)1}\Rightarrow C=\frac{1}{2}.$

Частное решение имеет вид $y=\frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{2}\right)x}=\frac{2}{(-\ln x+1)x}.$

Задачи для самостоятельного решения

Решите задачу Коши для следующих дифференциальных уравнений:

1) $(x+1)(y'+y^2)=-y,\ \ y(0)=1;$

2) $y'x+y=-3x^2y^2,\ \ y(1)=1;$

3) $y'x-y=y^2\cos x,\ \ y(\pi)=\pi;$

4) $y'x-y=y^2\ln x,\ \ y(1)=1;$

5) $y'+y=e^{\frac{x}{2}}\sqrt{y},\ \ y(0)=1;$

6) $y'-\frac{y}{x-1}=\frac{y^2}{x-1},\ \ y(2)=1.$

4.6. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Пусть функции $y_1(x)$, $y_2(x)$ непрерывны вместе со своими первыми производными на некотором отрезке $[a;\ b]$. Составим определитель

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$ — определитель Вронского*.

---

* Ю.М. Вронский (1778—1853) — польский философ и математик.

Достаточным условием линейной независимости этих двух функций является то, что определитель Вронского $W(y_1, y_2)$ не равен нулю ни в одной точке отрезка $[a; b]$.

Примеры. 1. Показать, что функции $y_1 = e^{k_1 x}$; $y_2 = e^{k_2 x}$; $(k_1 \neq k_2)$ линейно независимы на $(-\infty; +\infty)$.

Решение.

$$W = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} \end{vmatrix} = k_2 e^{(k_1 - k_2)x} - k_1 e^{(k_1 - k_2)x} = e^{(k_1 + k_2)x}(k_2 - k_1) \quad (\neq 0),$$ следовательно, y_1 и y_2 — линейно независимы на $x \in (-\infty; +\infty)$.

2. Показать, что функции $y_1 = e^{\alpha x} \sin \beta x$; $y_2 = e^{\alpha x} \cos \beta x$ $(\beta \neq 0)$ линейно независимы на $(-\infty; +\infty)$.

Решение.

$$y_1' = \alpha e^{\alpha x} \sin \beta x + \beta e^{\alpha x} \cos \beta x = e^{\alpha x}(\alpha \sin \beta x + \beta \cos \beta x),$$

$$y_2' = \alpha e^{\alpha x} \cos \beta x - \beta e^{\alpha x} \sin \beta x = e^{\alpha x}(\alpha \cos \beta x - \beta \sin \beta x),$$

$$W = \begin{vmatrix} e^{\alpha x} \sin \beta x & e^{\alpha x} \cos \beta x \\ e^{\alpha x}(\alpha \sin \beta x + \beta \cos \beta x) & e^{\alpha x}(\alpha \cos \beta x - \beta \sin \beta x) \end{vmatrix} =$$

$$= e^{2\alpha x}[\alpha \sin\beta x \cos\beta x - \beta \sin^2 \beta x - \alpha \sin\beta x \cos\beta x - \beta \cos^2 \beta x] = e^{2\alpha x}(-\beta) \neq 0.$$

Следовательно, y_1 и y_2 — линейно независимы на $x \in (-\infty; +\infty)$.

4.6.1. Линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

$\boxed{\text{О}}$ Уравнение вида $a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$, где коэффициенты a_0, a_1 и a_2 — некоторые постоянные действительные числа, называется ***линейным однородным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами***.

$\boxed{\text{Т}}$ *Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — два линейно независимых частных решения уравнения $a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$, то $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ есть общее решение этого уравнения (C_1 и C_2 — произвольные постоянные).*

Таким образом, задача интегрирования линейного однородного уравнения второго порядка сводится к нахождению его двух линейно независимых частных решений.

Примеры. 1. Показать, что $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}$ является общим решением уравнения $y'' - 9y = 0$.

Решение. Рассмотрим две функции: $y_1(x) = e^{3x}$; $y_2(x) = e^{-3x}$.

Нужно показать, что:

1) эти функции являются решениями уравнения $y'' - 9y = 0$.

Для функции $y_1(x) = e^{3x}$ будем иметь $y_1'(x) = 3e^{3x}$; $y_1''(x) = 9e^{3x}$.

После подстановки в уравнение получим $9e^{3x} - 9e^{3x} = 0$.

Для функции $y_2(x) = e^{-3x}$ будем иметь $y_2'(x) = -3e^{-3x}$; $y_2''(x) = 9e^{-3x}$. После подстановки в уравнение получим $9e^{-3x} - 9e^{-3x} = 0$;

2) они линейно независимые.

Для этого вычислим: $W = \begin{vmatrix} e^{3x} & e^{-3x} \\ 3e^{3x} & -3e^{-3x} \end{vmatrix} = -3 - 3 = -6 \ (\neq 0)$.

2. Показать, что $y = C_1\sin 2x + C_2\cos 2x$ является общим решением уравнения $y'' + 4y = 0$.

Решение. 1) $y_1 = \sin 2x$; $y_2 = \cos 2x$.

$y_1' = 2\cos 2x$; $y_2' = -2\sin 2x$.

$y_1'' = -4\sin 2x$; $y_2'' = -4\cos 2x$.

$-4\sin 2x + 4\sin 2x = 0$; $-4\cos 2x + 4\cos 2x = 0$.

2) $W = \begin{vmatrix} \sin 2x & \cos 2x \\ 2\cos 2x & -2\sin 2x \end{vmatrix} = -2\sin^2 2x - 2\cos^2 2x = -2 \ (\neq 0)$.

$\boxed{\text{Т}}$. ***Частное решение линейного однородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами $a_0y'' + a_1 y' + a_2y = 0$ может быть найдено в виде $y = e^{kx}$.***

Доказательство. После нахождения $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2e^{kx}$ и подстановки в уравнение, получим

$$a_0k^2 e^{kx} + a_1k\, e^{kx} + a_2e^{kx} = 0 \Rightarrow e^{kx}\,(a_0k^2 + a_1k + a_2) = 0.$$

Поскольку $e^{kx} \neq 0$, то $a_0k^2 + a_1k + a_2 = 0$.

Это квадратное уравнение определит те значения k, при которых $y = e^{kx}$ будет решением дифференциального уравнения. Оно называется *характеристическим уравнением*. ■

Возможны следующие случаи.

Случай 1. Корни k_1 и k_2 квадратного уравнения действительны и различны ($k_1 \neq k_2$) ($D > 0$). Получим два частных линейно независимых решения $y_1 = e^{k_1x}$; $y_2 = e^{k_2x}$ (то, что они линейно независимые, было показано ранее). Общее решение исходного однородного дифференциального уравнения будет иметь вид: $y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$.

Пример. Найти общее решение уравнения $y'' - 3y' + 2y = 0$.

Решение. $k^2 - 3k + 2 = 0$; $k_1 = 1$; $k_2 = 2 \Rightarrow y = C_1e^{x} + C_2e^{2x}$.

Случай 2. Корни k_1 и k_2 квадратного уравнения действительны и одинаковы $\left(k_1 = k_2 = k = -\dfrac{a_1}{2a_0}\right)$ ($D = 0$).

Покажем, что в этом случае общее решение имеет вид

$$y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx} = (C_1 + C_2 x)e^{kx}.$$

а) Подставим функцию y в уравнение, предварительно вычислив y' и y'': $y' = C_1 k e^{kx} + C_2 e^{kx} + C_2 kx e^{kx} = (C_1 k + C_2 + C_2 kx)e^{kx}$.

$$y'' = C_2 k e^{kx} + (C_1 k + C_2 + C_2 kx)k e^{kx} = (2C_2 k + C_1 k^2 + C_2 k^2 x)e^{kx}.$$

Будем иметь

$$a_0(2C_2 k + C_1 k^2 + C_2 k^2 x)e^{kx} + a_1(C_1 k + C_2 + C_2 kx)e^{kx} + a_2(C_1 + C_2 x)e^{kx} = 0,$$

$$e^{kx}(2a_0 C_2 k + a_0 C_1 k^2 + a_0 C_2 k^2 x + a_1 C_1 k + a_1 C_2 + a_1 C_2 kx + a_2 C_1 + a_2 C_2 x) = 0.$$

Поскольку $e^{kx} \neq 0$, то

$$[C_1(a_0 k^2 + a_1 k + a_2) + C_2 x\,(a_0 k^2 + a_1 k + a_2) + 2a_0 C_2 k + a_1 C_2] = 0.$$

Так как $a_0 k^2 + a_1 k + a_2 = 0$, то $2a_0 C_2 k + a_1 C_2 = 0 \Rightarrow C_2(2a_0 k + a_1) = 0 \Rightarrow$ либо $C_2 = 0$, либо $k = -\dfrac{a_1}{2a_0}$. Действительно, если $D = 0$, то $k_1 = k_2 = -\dfrac{a_1}{2a_0}$, следовательно, функция $y = (C_1 + C_2\,x)e^{kx}$ является решением уравнения.

б) Вычислим определитель Вронского от функций $y_1 = e^{kx}$ и $y_2 = xe^{kx}$:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{kx} & xe^{kx} \\ ke^{kx} & e^{kx} + kxe^{kx} \end{vmatrix} = e^{2kx} + kxe^{2kx} - kxe^{2kx} = e^{2kx} \neq 0 \text{ —}$$

частные решения $y_1 = e^{kx}$ и $y_2 = xe^{kx}$ — линейно независимы.

Пример. Найти общее решение уравнения $y'' + 4y' + 4y = 0$.

Решение. $k^2 + 4k + 4 = 0 \Rightarrow (k+2)^2 = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = -2 \Rightarrow y = (C_1 + C_2\,x)e^{-2x}$.

Корни k_1 и k_2 — комплексные ($D < 0$) $k_1 = \alpha - \beta i$; $k_2 = \alpha + \beta i$. Тогда $y_1 = e^{(\alpha - \beta i)x} = e^{\alpha x}e^{-\beta i\,x}$; $y_2 = e^{(\alpha + \beta i)x} = e^{\alpha x}e^{\beta i\,x}$. Но по формуле Эйлера

$$e^{-\beta i\,x} = [\cos(-\beta x) + i\sin(-\beta x)] = \cos\beta x - i\sin\beta x;$$

$$e^{\beta i\,x} = \cos\beta x + i\sin\beta x.$$

Следовательно,

$$y_1 = e^{\alpha x}\,(\cos\beta x - i\sin\beta x);\; y_2 = e^{\alpha x}\,(\cos\beta x + i\sin\beta x).$$

Т *Если линейное неоднородное уравнение имеет комплексное частное решение $y = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$, то его вещественная и мнимая части также являются линейно независимыми ($\beta \neq 0$) частными решениями этого же уравнения.*

Пусть $y = u(x) + iv(x)$ — комплексное решение однородного уравнения $a_0y'' + a_1y' + a_2y = 0$. Требуется доказать, что каждая из функций $u(x)$ и $v(x)$ является решением того же однородного уравнения.

Доказательство. Подставим $y = u + iv$ в однородное уравнение, учитывая, что $y' = u' + iv'$; $y'' = u'' + iv''$.

Получим

$$a_0(u'' + iv'') + a_1(u' + iv') + a_2(u + iv) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (a_0u'' + a_1u' + a_2u) + i\,(a_0v'' + a_1v' + a_2v) = 0.$$

Величины, стоящие в скобках, действительные. Из равенства нулю комплексной величины следует, что отдельно действительная и мнимая части равны нулю, следовательно,

$$a_0u'' + a_1u' + a_2u = 0 \text{ и } a_0v'' + a_1v' + a_2v = 0,$$

т.е. $u(x)$ и $v(x)$ являются решениями исходного уравнения. ■

В силу доказанной теоремы, функции $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$ являются линейно независимыми частными решениями однородного уравнения $a_0y'' + a_1y' + a_2y = 0$ (при $\beta \neq 0$).

Составляем общее решение однородного уравнения

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 = C_1e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2e^{\alpha x}\sin\beta x = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x).$$

Второе решение в комплексной форме $e^{(\alpha-\beta i)x}$ не понадобилось, поскольку, составив общее решение по его действительной ($e^{\alpha x}\cos\beta x$) и мнимой ($-e^{\alpha x}\sin\beta x$) частям, мы, очевидно, получим то же самое.

Пример. Найти общее решение уравнения $y'' - 4y' + 13y = 0$.

Решение. $k^2 - 4k + 13 = 0$; $k_1 = 2 - 3i$; $k_2 = 2 + 3i$; $y = e^{2x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x)$.

4.6.2. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Пусть дано линейное уравнение второго порядка с правой частью $a_0y'' + a_1y' + a_2y = f(x)$. Докажем теорему о структуре общего решения линейного неоднородного уравнения.

$\boxed{\text{Т}}$ *Общее решение неоднородного уравнения можно составить как сумму общего решения соответствующего однородного уравнения и какого-нибудь частного решения неоднородного уравнения.*

Доказательство. Обозначим через $\Phi(x)$ общее решение однородного уравнения, а через $\varphi(x)$ — какое-нибудь частное решение неоднородного уравнения. Возьмем функцию $y = \Phi(x) + \varphi(x)$. Имеем $y' = \Phi'(x) + \varphi'(x)$; $y'' = \Phi''(x) + \varphi''(x)$. Подставляя значения для y, y' и y'' в неоднородное уравнение, получим

$$a_0[\Phi''(x) + \varphi''(x)] + a_1[\Phi'(x) + \varphi'(x)] + a_2[\Phi(x) + \varphi(x)] = f(x),$$

$$[a_0\Phi''(x) + a_1\Phi'(x) + a_2\Phi(x)] + [a_0\varphi''(x) + a_1\varphi'(x) + a_2\varphi(x)] = f(x).$$

Выражение в первой квадратной скобке равно нулю, так как $\Phi(x)$ — общее решение однородного уравнения; выражение во второй квадратной скобке равно $f(x)$, так как $\varphi(x)$ — частное решение неоднородного уравнения.

Следовательно, функция $y = \Phi(x) + \varphi(x)$ действительно есть общее решение неоднородного уравнения. Его можно записать в виде $y = C_1y_1 + C_2y_2 + \varphi(x)$, где y_1 и y_2 — линейно независимые частные решения однородного уравнения, а $\varphi(x)$ — какое-нибудь частное решение неоднородного уравнения. ■

Поскольку общее решение однородного уравнения мы находить умеем, то остается найти только частное решение неоднородного уравнения.

Рассмотрим некоторые случаи, в которых решение находится методом неопределенных коэффициентов.

Случай 1. Пусть правая часть неоднородного уравнения имеет вид $f(x) = P(x)e^{mx}$, где $P(x)$ — многочлен. Тогда неоднородное уравнение имеет частное решение вида $\varphi(x) = x^nQ(x)e^{mx}$, где $Q(x)$ — многочлен той же степени, что и $P(x)$, причем, если число m не является корнем характеристического уравнения $a_0k^2 + a_1k + a_2 = 0$, то $n = 0$, а если является, то n — кратность этого корня. Правило сохраняет свою силу и тогда, когда $m = 0$, т.е. в правой части стоит только многочлен. В этом случае надо проверить, не является ли число 0 корнем характеристического уравнения. В частных случаях многочлен $P(x)$ может быть нулевой степени, т.е. постоянной величиной.

Примеры. 1. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 2y' + y = x + 1$ и частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 2$; $y'(0) = -3$.

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид $k^2 - 2k + 1 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow k_1 = k_2 = 1$. Получим общее решение однородного уравнения $\Phi(x) = (C_1 + C_2x)e^x$. Для нахождения частного решения неоднородного уравнения правую часть запишем в виде $(x + 1)e^{0\cdot x}$. Поскольку $m = 0$ не является корнем характеристического уравнения, частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде $\varphi(x) = Ax + B$:

$\varphi'(x) = A$; $\varphi''(x) = 0$. Подставляя в неоднородное уравнение, получим

$$-2A + Ax + B = x + 1 \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ -2A + B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 3, \end{cases}$$

следовательно, $\varphi(x) = x + 3$. Общее решение неоднородного уравнения имеет вид $y = (C_1 + C_2x)e^x + x + 3$.

Найдем частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям: $y(0) = 2 \Rightarrow C_1 + 3 = 2 \Rightarrow C_1 = -1$;

$$y' = C_2e^x + (C_1 + C_2x)e^x + 1;$$

$$y'(0) = -3 \Rightarrow C_1 + C_2 + 1 = -3 \Rightarrow C_2 = -4 - C_1 = -3.$$

Частное решение имеет вид: $y = (-1 - 3x)e^x + x + 3$.

2. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 3y = 3e^{2x}$.

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид

$$k^2 - 4k + 3 = 0 \Rightarrow k_1 = 1;\ k_2 = 3.$$

Получим решение однородного уравнения: $\Phi(x) = C_1e^x + C_2e^{3x}$.

Поскольку $P(x) = 3$ и $m = 2$ — не является корнем характеристического уравнения, то частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде $\varphi(x) = Ae^{2x}$:

$$\varphi'(x) = 2Ae^{2x};\ \varphi''(x) = 4Ae^{2x}.$$

Подставляя в неоднородное уравнение, получим

$4Ae^{2x} - 8Ae^{2x} + 3Ae^{2x} = 3e^{2x} \Rightarrow -Ae^{2x} = 3e^{2x} \Rightarrow A = -3$, следовательно, $\varphi(x) = -3e^{2x}$.

Общее решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y = C_1e^x + C_2e^{3x} - 3e^{2x}.$$

3. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 3y = xe^x$.

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид

$$k^2 - 4k + 3 = 0 \Rightarrow k_1 = 1;\ k_2 = 3.$$

Получим решение однородного уравнения: $\Phi(x) = C_1e^x + C_2e^{3x}$.

Поскольку $P(x) = x$ и $m = 1$ является корнем характеристического уравнения, то частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде $\varphi(x) = x(Ax + B)e^x = (Ax^2 + Bx)e^x$:

$$\varphi'(x) = (2Ax + B)e^x + (Ax^2 + Bx)e^x = [Ax^2 + (2A + B)x + B]e^x.$$

$$\varphi''(x) = (2Ax + 2A + B)e^x + [Ax^2 + (2A + B)x + B]e^x = [Ax^2 + (4A + B)x + 2A + 2B]e^x.$$

Подставим полученное в неоднородное уравнение

$$[Ax^2 + (4A + B)x + 2A + 2B]e^x - 4[Ax^2 + (2A + B)x + B]e^x + 3(Ax^2 + Bx)e^x = xe^x.$$

$$-4Ax+2A-2B=x \Rightarrow \begin{cases} -4A=1 \\ 2A-2B=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-\dfrac{1}{4} \\ B=A \end{cases} \Rightarrow A=-\frac{1}{4};\ B=-\frac{1}{4},$$

следовательно, $\varphi(x)=-\dfrac{1}{4}x(x+1)e^x$. Общее решение неоднородного уравнения имеет вид $y=Ce^x+C_2e^{3x}-\dfrac{1}{4}x(x+1)e^x$.

Случай 2. Пусть правая часть неоднородного уравнения имеет вид

$$f(x)=a\cos qx+b\sin qx.$$

1) Если числа $\pm qi$ не являются корнями характеристического уравнения, то частное решение неоднородного уравнения имеет вид

$$\varphi(x)=A\cos qx+B\sin qx.$$

2) Если же числа $\pm qi$ служат корнями характеристического уравнения, то частное решение неоднородного уравнения имеет вид

$$\varphi(x)=x(A\cos qx+B\sin qx).$$

В некоторых случаях, когда $a=0$ или $b=0$, частное решение неоднородного уравнения все равно следует искать в указанном полном виде.

Примеры. **1.** Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''+4y'+13y=5\sin 2x.$$

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид

$$k^2+4k+13=0 \Rightarrow k_{1,2}=-2\pm\sqrt{4-13}=-2\pm 3i \Rightarrow k_1=-2-3i;\ k_2=-2+3i.$$

Получим решение однородного уравнения

$$\Phi(x)=e^{-2x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x).$$

Так как числа $\pm 2i$ не являются корнями характеристического уравнения, то частное решение неоднородного уравнения ищем в виде $\varphi(x)=A\cos 2x+B\sin 2x$:

$$\varphi'(x)=-2A\sin 2x+2B\cos 2x;\ \varphi''(x)=-4A\cos 2x-4B\sin 2x.$$

Подставляя эти значения в неоднородное уравнение, будем иметь

$$-4A\cos 2x-4B\sin 2x-8A\sin 2x+8B\cos 2x+13A\cos 2x+13B\sin 2x=$$
$$=5\sin 2x.$$

$$(9A + 8B)\cos 2x + (-8A + 9B)\sin 2x = 5\sin 2x.$$

$$\begin{cases} 9A + 8B = 0 \\ -8A + 9B = 5 \end{cases} \Rightarrow A = -\frac{8}{29};\ \ B = \frac{9}{29},$$

следовательно,

$$\varphi(x) = -\frac{8}{29}\cos 2x + \frac{9}{29}\sin 2x.$$

Общее решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y = e^{-2x}\,(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x) - \frac{8}{29}\cos 2x + \frac{9}{29}\sin 2x.$$

2. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + 9y = 2\cos 3x + 3\sin 3x.$$

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид

$$k^2 + 9 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = \pm 3i.$$

Получим решение однородного уравнения

$$\Phi(x) = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x.$$

Так как числа $\pm 3i$ являются корнями характеристического уравнения, то частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде $\varphi(x) = x(A\cos 3x + B\sin 3x)$:

$$\varphi'(x) = A\cos 3x + B\sin 3x + x(-3A\sin 3x + 3B\cos 3x) =$$
$$= (A + 3Bx)\cos 3x + (B - 3Ax)\sin 3x.$$

$$\varphi''(x) = 3B\cos 3x + (A + 3Bx)(-3\sin 3x) + (-3A)\sin 3x + (B - 3Ax)3\cos 3x =$$
$$= (6B - 9Ax)\cos 3x + (-6A - 9Bx)\sin 3x.$$

Подставляя эти значения в неоднородное уравнение, будем иметь

$$(6B - 9Ax)\cos 3x + (-6A - 9Bx)\sin 3x + 9Ax\cos 3x + 9Bx\sin 3x =$$
$$= 2\cos 3x + 3\sin 3x$$

или

$$6B\cos 3x - 6A\sin 3x = 2\cos 3x + 3\sin 3x.$$

$$\begin{cases} 6B = 2 \\ -6A = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = \dfrac{1}{3} \\ A = -\dfrac{1}{2}, \end{cases}$$ следовательно,

$$\varphi(x) = x\left(-\frac{1}{2}\cos 3x + \frac{1}{3}\sin 3x\right).$$

Общее решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x + x\left(-\frac{1}{2}\cos 3x + \frac{1}{3}\sin 3x\right).$$

Общий случай. Если в неоднородном уравнении правая часть имеет вид

$$y = e^{\alpha x}[M(x)\cos\beta x + N(x)\sin\beta x],$$

где $M(x)$ и $N(x)$ — многочлены, а числа $\alpha \pm \beta i$ не являются корнями характеристического уравнения, то частное решение неоднородного уравнения будет иметь вид

$$\varphi(x) = e^{\alpha x}[A(x)\cos\beta x + B(x)\sin\beta x],$$

где $A(x)$ и $B(x)$ — многочлены степени, равной высшей из степеней $M(x)$ и $N(x)$. Если же числа $\alpha \pm \beta i$ являются корнями характеристического уравнения, то вышеуказанное частное решение следует умножить на x.

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + y = 4x\sin x.$$

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид

$$k^2 + 1 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = \pm i.$$

Получим решение однородного уравнения

$$\Phi(x) = C_1\cos x + C_2\sin x.$$

Так как числа $\pm i$ являются корнями характеристического уравнения, то частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде $\varphi(x) = x[(Ax+B)\cos x + (Cx+D)\sin x] = (Ax^2+Bx)\cos x + (Cx^2+Dx)\sin x$:

$$\varphi'(x) = (2Ax+B)\cos x - (Ax^2+Bx)\sin x + (2Cx+D)\sin x +$$

$$+ (Cx^2+Dx)\cos x = [Cx^2 + (2A+D)x + B]\cos x + [-Ax^2 + (2C-B)x + D]\sin x.$$

$$\varphi''(x) = (2Cx + 2A + D)\cos x - [Cx^2 + (2A+D)x + B]\sin x +$$

$$+ (-2Ax + 2C - B)\sin x + [-Ax^2 + (2C-B)x + D]\cos x =$$

$$= [-Ax^2 + (4C-B)x + 2A + 2D]\cos x + [-Cx^2 + (-4A-D)x + 2C - 2B]\sin x.$$

Имеем

$$(4Cx + 2A + 2D)\cos x + (-4Ax + 2C - 2B)\sin x = 4x\sin x;$$

$$(2Cx + A + D)\cos x + (-2Ax + C - B)\sin x = 2x\sin x;$$

$$[2Cx + (A+D)]\cos x + [-2Ax + (C-B)]\sin x = 2x\sin x;$$

$$\begin{cases} 2C = 0; \\ A + D = 0; \\ -2A = 2; \\ C - B = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} C = 0; \\ D = 1; \\ A = -1; \\ B = 0, \end{cases}$$

следовательно,

$$\varphi(x) = -x^2 \cos x + x \sin x.$$

Общее решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x(\sin x - x \cos x).$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите общее решение следующих однородных дифференциальных уравнений второго порядка:

1) $y'' - 6y' + 9y = 0$; 2) $y'' - 5y' + 4y = 0$; 3) $2y'' + y' = 0$;

4) $2y'' - 3y' + 4y = 0$; 5) $y'' + 4y = 0$.

2. Найдите общее решение следующих неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка:

6) $y'' + 2y' - 3y = e^{-3x}$; 7) $y'' - 5y' - 6y = \cos x + \sin x$;

8) $y'' + 4y' + 4y = x + 1$; 9) $y'' - y' = x^2 - x$;

10) $y'' + 4y' + 5y = 5x^2 - 32x + 5$; 11) $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x}$.

3. Найдите общее решение следующих неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка и частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y = y_0, y' = y_0$ при $x_0 = 0$:

12) $y'' + 4y' + 4y = 2e^{x}$; $y_0 = -2, y' = -2$;

13) $y'' - 2y' + 5y = x^2 + 1$; $y_0 = -3, y' = -\frac{1}{5}$;

14) $y'' + 2y' + 10y = -\sin 6x$; $y_0 = 0, y' = \frac{3}{4}$.

4. Решите задачу Коши для следующих дифференциальных уравнений:

15) $y'' + y' - 2y = 4x$; $y(0) = 2, y'(0) = -2$;

16) $y'' + 9y = \sin 2x$; $y(0) = 0, y'(0) = 5$;

17) $y'' - 6y' + 9y = (x + 2)e^{5x}$; $y(0) = 2, y'(0) = 3$.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Дайте определение обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка.
2. Что называют общим и частным решением дифференциального уравнения?
3. Какое дифференциальное уравнение называют линейным?
4. Покажите на примерах приемы решения линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка.
5. Запишите общий вид уравнения Бернулли.
6. Укажите вид частного решения линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами в зависимости от числа корней характеристического уравнения.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

Дифференциальное уравнение, задача Коши, метод Лагранжа, уравнение Бернулли, однородное дифференциальное уравнение, неоднородное дифференциальное уравнение.

Глава 5

ОСНОВЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

5.1. МНОЖЕСТВА И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

5.1.1. Понятие множества

О Под ***множеством*** понимают совокупность объектов любой природы, обладающих общим свойством.

Рассмотрим некоторые примеры множеств:

1) множество студентов в группе;
2) множество книг на полке;
3) множество людей в мире;
4) множество действительных чисел.

О Объекты (числа), составляющие множество, называются его ***элементами***.

Введем обозначения: множества будем обозначать прописными буквами латинского алфавита A, B, C, ..., а элементы множеств — строчными a, b, c, ...

Запись $a \in A$ означает, что элемент a принадлежит множеству A. Запись $a \notin A$ означает, что элемент b не принадлежит множеству A.

Пример. Рассмотрим множество $A = \{1;\ 2;\ 3;\ 5;\ 8\}$, состоящее из пяти чисел. Ясно, что, например, $3 \in A$, $8 \in A$, $0 \notin A$, $\frac{1}{3} \notin A$.

О Множество, состоящее из конечного числа элементов, называется ***конечным***, из бесконечного числа элементов — ***бесконечным***.

Примеры. 1. Множество дней в году — конечное множество.
2. Множество целых чисел — бесконечное множество.

О Множество, не имеющее ни одного элемента, называется ***пустым множеством*** и обозначается $\varnothing$.

Примеры. 1. Множество детей до 5 лет в данной группе студентов.
2. Множество четных чисел в множестве $A = \{1;\ 3;\ 5;\ 7\}$.

О Если каждый элемент множества A есть элемент множества B, то говорят, что A есть ***подмножество*** множества B, и пишут $A \subseteq B$.

Если $A \subseteq B$ и $A \neq B$, то пишут, что $A \subset B$.

Примеры. 1. $A = \{3;\ 4;\ 7;\ 9;\ 11;\ 35\}$; $B = \{7;\ 35\}$. Имеем: $B \subset A$, т.е. B является подмножеством A.

2. $\mathbf{N}$ — множество натуральных чисел; $\mathbf{Z}$ — множество целых чисел; $\mathbf{Q}$ — множество рациональных чисел. Имеем: $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$.

Принято считать, что пустое множество является подмножеством любого множества.

Замечание. Число подмножеств любого конечного множества, содержащего n элементов, равно 2^n.

Пример. Пусть $A = \{1;\ 3;\ 5\}$. Образуем все возможные подмножества этого множества. Будем иметь: $A_1 = \{1;\ 3;\ 5\}$; $A_2 = \{1;\ 3\}$; $A_3 = \{1;\ 5\}$; $A_4 = \{3;\ 5\}$; $A_5 = \{1\}$; $A_6 = \{3\}$; $A_7 = \{5\}$; $A_8 = \{\varnothing\}$.

Итак, число подмножеств равно $8(2^3)$.

О Множество A ***равно*** множеству B, если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$.

Если множества A и B конечны, то в случае равенства они состоят из одних и тех же элементов.

5.1.2. Способы задания множеств

Существует три способа задания множеств.

- 1. Перечислением его элементов.

Так можно задавать лишь конечные множества.

Пример. $A = \{2;\ 4;\ 6;\ 8;\ 10\}$.

- 2. Описанием характеристических свойств, которыми обладают его элементы.

Пример. $A = \{x \in \mathrm{N} \mid x \vdots 2\}$ — множество натуральных чисел, делящихся на 2.

- 3. Порождающей процедурой, которая описывает способ получения элементов множества из уже имеющихся элементов либо других объектов. В этом случае элементами множества являются все объекты, которые могут быть построены с помощью такой процедуры.

Примеры. 1. Задать с помощью порождающей процедуры множество N всех натуральных чисел: 1, 2, 3, ...

Решение. В данном случае порождающая процедура содержит два правила: а) $1 \in \mathrm{N}$; б) если $x \in \mathrm{N}$, то $x + 1 \in \mathrm{N}$.

2. Задать с помощью порождающей процедуры множество A всех четных чисел, не превышающих 100: $A = \{2; 4; 6; ...; 100\}$.

Решение. В данном случае порождающая процедура содержит три правила:

а) $2 \in A$; б) если $x \in \mathrm{N}$; то $x + 2 \in A$; в) $x \leq 98$.

5.1.3. Операции над множествами. Диаграммы Эйлера—Венна

О ***Универсальным множеством*** U называется множество ***всех*** элементов, которые могут встретиться в данном исследовании.

Диаграмма Эйлера — Венна представляет собой изображение прямоугольника, обозначающего универсальное множество U, а внутри него — кругов (или каких-нибудь других замкнутых фигур), соответствующих рассматриваемым множествам. Фигуры должны быть соответствующим образом обозначены и могут схематически пересекаться или не пересекаться в наиболее общем случае, требуемом в задаче.

Точки, лежащие внутри различных областей диаграммы, можно рассматривать как элементы соответствующих множеств.

Заштриховав определенные области диаграммы, можно получать наглядное геометрическое представление (образы) требуемых в задаче множеств и их комбинаций.

О ***Объединением*** двух множеств A и B (обозначается $A \cup B$) называется множество, состоящее из элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A и B (рис. 5.1):

$$A \cup B = \{x\colon x \in A \text{ или } x \in B\}.$$

О ***Пересечением*** двух множеств A и B (обозначается $A \cap B$) называется множество, состоящее из элементов, принадлежащих и множеству A, и множеству B (рис. 5.2):

$$A \cap B = \{x\colon x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

Очевидно, что $A \cap B \subseteq A \subseteq (A \cup B)$ и $A \cap B \subseteq B \subseteq (A \cup B)$.

О ***Дополнением*** (до U) множества A (обозначается $\overline{A}$) называется множество всех элементов, не принадлежащих A (но принадлежащих U) (рис. 5.3):

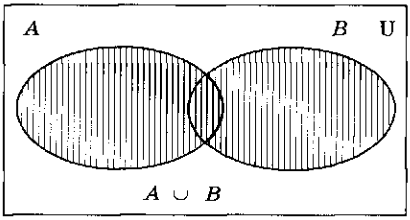


Рис. 5.1

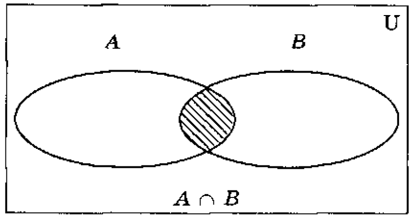


Рис. 5.2

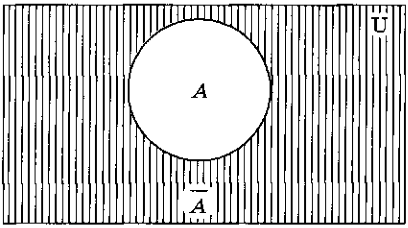


Рис. 5.3

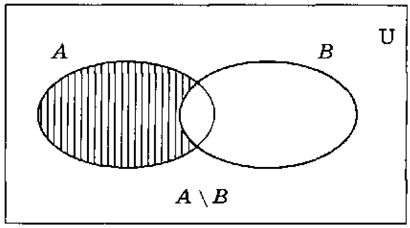


Рис. 5.4

$$\overline{A} = U \setminus A = \{x : x \in U \text{ и } x \notin A\}.$$

О ***Разностью*** множеств A и B (обозначается $A \setminus B$) называется множество тех элементов множества A, которые не содержатся в множестве B (рис. 5.4):

$$A \setminus B = \{x\colon x \in A \text{ и } x \notin B\}.$$

В общем случае $A \setminus B \neq B \setminus A$.

Замечание. $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

О ***Симметрической разностью*** $A \,\Delta\, B$ множеств A и B называется объединение множеств $A \setminus B$ и $B \setminus A$, т.е. $A \,\Delta\, B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ (рис. 5.5):

$$A \,\Delta\, B = \{x\colon x \in A \setminus B \text{ или } x \in B \setminus A\}.$$

Замечание. $A \,\Delta\, B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

О ***Декартовым произведением*** $A \times B$ множеств A и B является множество всех упорядоченных пар $< a_i, b_i >$, где $a_i \in A$ и $b_i \in B$, т.е. $A \times B = \{< a_i, b_i > : a_i \in A \text{ и } b_i \in B\}$.

Пример. Если $A = \{1; 3\}$ $B = \{2; 4; 6\}$, то

$$A \times B = \{< 1, 2 >; < 1, 4 >; < 1, 6 >; < 3, 2 >; < 3, 4 >; < 3, 6 >\}.$$

5.1.4. Основные тождества алгебры множеств

Для любых подмножеств A, B и C универсального множества U выполняются следующие тождества:

1) $A \cup U = U$	$A \cap U = A$
2) $A \cup \varnothing = A$	$A \cap \varnothing = \varnothing$
3) $A \cup A = A$	$A \cap A = A$
4) $A \cup \overline{A} = U$	$A \cap \overline{A} = \varnothing$
5) $A \cup B = B \cup A$ — коммутативность операции $\cup$	$A \cap B = B \cap A$ — коммутативность операции $\cap$
6) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ — ассоциативность операции $\cup$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ — ассоциативность операции $\cap$
7) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ — дистрибутивность операции $\cup$ относительно $\cap$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ — дистрибутивность операции $\cap$ относительно $\cup$
8) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ — закон де Моргана	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ — закон де Моргана
9) $A \cup (A \cap B) = A$ — закон поглощения	$A \cap (A \cup \overline{B}) = A$ — закон поглощения
10) $(A \cap B) \cup (A \cap B) = A$ — закон склеивания	$(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$ — закон склеивания
11) $A \cup (\overline{A} \cap B) = A \cap B$ — закон Порецкого	$A \cap (\overline{A} \cup B) = A \cap B$ — закон Порецкого
12) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$ — закон дистрибутивности пересечения относительно разности	
13) $\overline{\overline{A}} = A$ — закон двойного отрицания	
14) $A \Delta B = B \Delta A$ — закон коммутативности симметрической разности	
15) $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$ — закон ассоциативности симметрической разности;	
16) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$ — закон дистрибутивности пересечения относительно симметрической разности	

Операции объединения ($\cup$), пересечения ($\cap$), разности ($\setminus$) являются двуместными.

Операция дополнения ($^{-}$) — одноместная.

Используя эти операции, можно выражать одни множества через другие, при этом сначала выполняется одноместная операция дополнения, затем пересечения и только затем операция

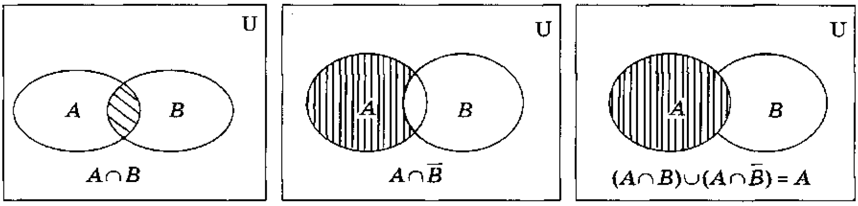


Рис. 5.6

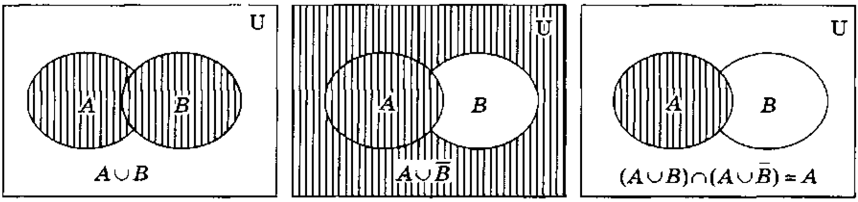


Рис. 5.7

объединения и разности. Для изменения этого порядка в выражении используют скобки.

Примеры. **1.** Даны множества: $U = \{a, b, c, d, e, f, p, q\}$, $A = \{a, c, e, p\}$, $B = \{b, d, f, p\}$, $C = \{a, d, f, q\}$. Показать, что $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$.

Решение. 1) $B \cup C = \{a, b, d, f, p, q\}$, $A \setminus (B \cup C) = \{c, e\}$.

2) $(A \setminus B) = \{a, c, e\}$; $(A \setminus B) \setminus C = \{c, e\}$.

Итак, $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$.

2. С помощью диаграммы Эйлера—Венна показать, что

$(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = (A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A$.

Решение. 1) Левая часть равенства представлена на рис. 5.6.

2) Правая часть равенства представлена на рис. 5.7.

5.1.5. Разбиение множества на классы

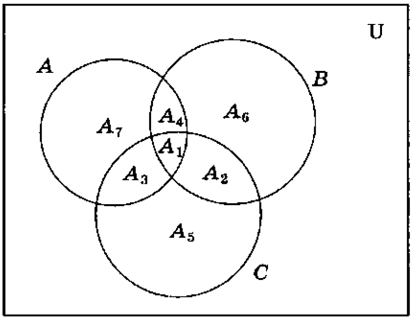
$\boxed{\text{O}}$ ***Разбиением*** множества M на классы A_i называется представление данного множества в виде суммы попарно непересекающихся его подмножеств A_i, $i = 1, 2, ..., n$, таких, что каждый элемент множества M является в то же время и элементом множества A_i (в точности одного подмножества A_i), т.е.

$$M = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n,$$

где

$$A_i \cap A_j = 0 \text{ при } i \neq j \text{ и } A_i \cap A_j = A_i \text{ при } i = j;\ i, j = 1, 2, ..., n.$$

Рис. 5.8



Пусть, в частности, $M = A \cup B \cup C$, где A, B, C — пересекающиеся множества. Тогда разбиение множества M на классы можно представить в следующем виде (рис. 5.8):

$$M = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 + A_7,$$

где

$$A_1 = A \cap B \cap C;\ A_2 = \bar{A} \cap B \cap C;\ A_3 = A \cap \bar{B} \cap C;\ A_4 = A \cap B \cap \bar{C};$$

$$A_5 = \bar{A} \cap \bar{B} \cap C;\ A_6 = \bar{A} \cap B \cap \bar{C};\ A_7 = A \cap \bar{B} \cap \bar{C}.$$

Иногда в задачах возникает необходимость нахождения множества $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$. Оно определяется из соотношения $A \cup B \cup C + \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C} = \mathrm{U}$.

О Число элементов ***конечного*** множества называется его ***мощностью*** и обозначается $m(A)$. Если пересечение конечных множеств A и B ($A \cap B$) пусто, то $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$.

В общем случае $m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$.

Пример. На фирме работают 40 человек. Из анкетных данных известно, что 20 человек владеют английским языком, 20 человек — компьютером, 14 человек — делопроизводством. Английским языком и компьютером владеют 9 человек; английским языком и делопроизводством — 7 человек; компьютером и делопроизводством — 5 человек; английским языком, компьютером и делопроизводством — 2 человека. Сколько человек не владеют ни английским языком, ни компьютером, ни делопроизводством?

Решение. 1) Введем обозначения:

U — множество человек, работающих на фирме;

A — множество человек, владеющих английским языком;

B — множество человек, владеющих компьютером;

C — множество человек, владеющих делопроизводством.

Тогда мощности этих множеств равны:

$$m(\mathrm{U}) = 40;\ m(A) = 20;\ m(B) = 20;\ m(C) = 14.$$

Кроме того, известно, что английским языком и компьютером владеют 9 человек, следовательно, $m(A \cap B) = 9$; английским языком и делопроизводством — 7 человек, следовательно, $m(A \cap C) = 7$; компьютером и делопроизводством — 5 человек, следовательно, $m(B \cap C) = 5$; английским языком, компьютером и делопроизводством — 2 человека, следовательно, $m(A \cap B \cap C) = 2$.

Необходимо определить $m(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C})$.

2) Разобьем множество $M = A \cup B \cup C$ на 7 попарно непересекающихся множеств $A_1, A_2, \ldots, A_7$, изобразим это разбиение на диаграмме Эйлера — Венна (рис. 5.9) и найдем мощности каждого из этих множеств;

а) $A_1 = A \cap B \cap C$ — множество человек, владеющих английским языком, компьютером и делопроизводством, $m(A_1) = m(A \cap B \cap C) = 2$;

б) $A_2 = \bar{A} \cap B \cap C$ — множество человек, не владеющих английским языком и владеющих компьютером и делопроизводством. Нетрудно заметить, что $B \cap C = A_1 \cup A_2$, следовательно, $m(B \cap C) = m(A_1) + m(A_2)$, откуда $m(A_2) = m(B \cap C) - m(A_1) = 5 - 2 = 3$;

в) $A_3 = A \cap \bar{B} \cap C$ — множество человек, владеющих английским языком и делопроизводством и не владеющих компьютером. Нетрудно заметить, что $A \cap C = A_1 \cup A_3$, следовательно, $m(A \cap C) = m(A_1) + m(A_3)$, откуда $m(A_3) = m(A \cap C) - m(A_1) = 7 - 2 = 5$;

г) $A_4 = A \cap B \cap \bar{C}$ — множество человек, владеющих английским языком и компьютером и не владеющих делопроизводством. Нетрудно заметить, что $A \cap B = A_1 \cup A_4$, следовательно, $m(A \cap B) = m(A_1) + m(A_4)$, откуда $m(A_4) = m(A \cap B) - m(A_1) = 9 - 2 = 7$;

д) $A_5 = \bar{A} \cap \bar{B} \cap C$ — множество человек, не владеющих английским языком и компьютером и владеющих делопроизводством. Нетрудно заметить, что $C = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_5$, следовательно, $m(C) = m(A_1) + m(A_2) + m(A_3) + m(A_5)$, откуда $m(A_5) = m(C) - m(A_1) - m(A_2) - m(A_3) = 14 - 2 - 3 - 5 = 4$;

е) $A_6 = \bar{A} \cap B \cap \bar{C}$ — множество человек, не владеющих английским языком и делопроизводством и владеющих компьютером. Не-

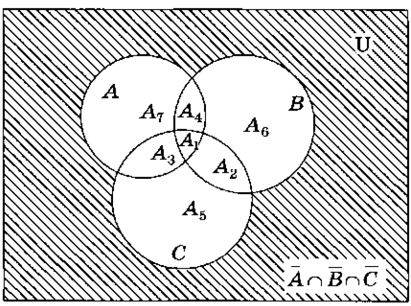


Рис. 5.9

трудно заметить, что $B = A_1 \cup A_2 \cup A_4 \cup A_6$, следовательно, $m(B) = m(A_1) + m(A_2) + m(A_4) + m(A_6)$, откуда $m(A_6) = m(B) - m(A_1) - m(A_2) - m(A_4) = 20 - 2 - 3 - 7 = 8$;

ж) $A_7 = A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$ — множество человек, владеющих английским языком и не владеющих компьютером и делопроизводством. Нетрудно заметить, что $A = A_1 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_7$, следовательно, $m(A) = m(A_1) + m(A_3) + m(A_4) + m(A_7)$, откуда $m(A_7) = m(A) - m(A_1) - m(A_3) - m(A_4) = 20 - 2 - 5 - 7 = 6$.

Окончательно $M = A \cup B \cup C = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6 \cup A_7$, следовательно, $m(M) = m(A_1) + m(A_2) + m(A_3) + m(A_4) + m(A_5) + m(A_6) + m(A_7) = 2 + 3 + 5 + 7 + 4 + 8 + 6 = 35$.

3) Так как $U = M + \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$, то $m(U) = m(M) + m(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C})$, откуда $m(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = m(U) - m(M) = 40 - 35 = 5$.

Следовательно, 5 человек не владеют ни английским языком, ни компьютером, ни делопроизводством.

Задачи для самостоятельного решения

1. Даны множества : $U = \{a, b, c, d, e, f, p, q\}$, $A = \{a, c, e, p\}$, $B = \{b, d, f, p\}$, $C = \{a, d, f, q\}$. Выполните следующие операции:

1) упростите выражения:

а) $(\overline{A \setminus B} \setminus B \cap C) \setminus \overline{\overline{C} \cup A}$;

б) $(A \cup A \cap \overline{B} \cup \overline{A} \cap C) \cap \overline{A} \cap B \setminus C$;

в) $\overline{\overline{A} \setminus \overline{B \cup C}} \setminus \overline{A} \cap \overline{B} \cap C \cup A \cap B \cap C$;

г) $(\overline{\overline{A} \cap B \cap \overline{C}}) \cup (B \cap \overline{C}) \cup A$;

д) $(\overline{A} \cap (\overline{\overline{A} \cap B}) \cap (\overline{B \cap C})) \cup B \cup C$;

е) $\overline{A} \setminus \overline{B \cap C} \setminus A \cap \overline{B} \cap C \cup A \cup B \cap C$;

ж) $A \cup B \cap \overline{\overline{B} \cup \overline{C}} \setminus \overline{B}$;

з) $(A \cup \overline{A} \cap B \cup \overline{A} \cap C) \cap \overline{A} \cap B \cap \overline{C}$;

и) $(A \cup B \cap C) \setminus (\overline{B} \cup \overline{C} \cup A \cap \overline{B} \cap C) \cup (\overline{A \cup B \cup C})$;

к) $(A \cup (B \setminus A) \cup \overline{A} \cap C) \cap \overline{A} \cap C \setminus C$;

2) проверьте тождества:

л) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus B) \setminus (B \setminus C)$;

м) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (B \cap C)$.

2. С помощью диаграмм Эйлера — Венна упростите выражения:

а) $\overline{A} \cup (A \setminus \overline{B}) \cup (\overline{A} \setminus \overline{B})$;

б) $A \cup (\overline{A \cup \overline{B}}) \cup \overline{B}$;

в) $(\overline{A}\cap B)\cup(\overline{A}\cap\overline{B})\cup(A\cap\overline{B})$;

г) $(\overline{A}\cup\overline{B})\cap(\overline{A}\cup B)\cap(A\cap\overline{B})\cap(A\cup B)$.

3. Из 276 отобранных студентов экономического вуза 83 изучают математику, 95 — право, 102 — финансы. Кроме того, известно, что 27 из них изучают математику и право, 24 — математику и финансы, 20 — право и финансы, а 11 — все три предмета. Сколько учащихся не изучают ни одного из этих предметов? Сколько из них изучают финансы, но не изучают ни математику, ни право?

4. Проверочный экзамен по математике содержал три задачи: предел, производная и интеграл. Из 800 студентов задачу с пределом решили 250 человек; с пределом или интегралом — 660 человек. По две задачи решили 400 человек, из них две задачи на предел и на производную решили 150 человек, на предел и интеграл — 50 человек. Ни один студент не решил все задачи; 20 студентов не решили ни одной задачи. Только задачу на интеграл решили 120 человек. Сколько студентов решили только одну задачу? Сколько человек решили задачу на производную?

5. Кафедра математики обслуживает три факультета: экономический, финансовый и товароведный. Преподаватели кафедры могут работать на нескольких факультетах. На финансовом факультете работают 22 преподавателя, на экономическом — 23 преподавателя, на экономическом и товароведном — 36 преподавателей. Только на финансовом факультете работают 10 преподавателей, только на экономическом и товароведном факультетах — 5 преподавателей. Два преподавателя работают на трех факультетах. Число преподавателей, работающих только на экономическом и финансовом факультетах, равно числу преподавателей, работающих на финансовом и товароведном факультетах. Сколько преподавателей работает на кафедре? Сколько преподавателей работает только на одном факультете?

5.2. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

5.2.1. Общие понятия

Математическая логика представляет собой область математики, изучающую различные способы логических рассуждений с помощью математических методов.

Поскольку любое логическое рассуждение состоит из высказываний, основным понятием математической логики является понятие высказывания.

[О] Под ***высказыванием*** будем понимать любое повествовательное предложение, о котором имеет смысл говорить, что оно истинно или ложно. Повелительные, вопросительные и бессмысленные предложения не являются высказываниями.

Приведем примеры высказываний:

1) река Волга впадает в Каспийское море;

2) Берлин — столица России;

3) число 9 делится на 3;

4) курица не птица.

Высказывания 1 и 3 истинны, а высказывания 2 и 4 — ложны.

Предложения типа: «Будь здоров!», «Который час?» не относятся к высказываниям.

[О] Высказывания, представляющие собой одно утверждение, называются ***простыми***, или ***элементарными***. Из элементарных высказываний по определенным логическим правилам составляются сложные высказывания.

Все высказывания рассматриваются только с точки зрения логического значения, отвлекаясь от их житейского содержания. Считается, что каждое высказывание либо истинно, либо ложно и ни одно высказывание не может быть одновременно истинным и ложным.

Элементарные высказывания, как правило, обозначаются латинскими буквами A, B, C, ..., X, Y, Z, ...

Истинные значения высказываний обозначаются буквой И или цифрой 1, а ложные — буквой Л или цифрой 0.

Рассмотрим простейшие логические операции (связки), позволяющие строить сложные высказывания из элементарных.

5.2.2. Логические операции над высказываниями

[О] ***Конъюнкция*** (операция «и», логическое произведение) двух элементарных высказываний A и B — новое высказывание, которое считается истинным, если оба высказывания A и B истинны и ложным — во всех других случаях.

Обозначается $A \wedge B$ и читается «A и B».

Логические значения конъюнкции описываются таблицей истинности:

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Пример. Высказывание A: 8 делится на 2.

Высказывание B: 8 делится на 4.

Высказывание $A \wedge B$: 8 делится на 2 и на 4.

В данном примере высказывание $A \wedge B$ истинно, так как истинны высказывания A и B.

$\boxed{\text{О}}$ ***Дизъюнкция*** (операция «или», логическая сумма) двух элементарных высказываний A и B — новое высказывание, которое считается ложным, если оба высказывания ложны и истинным — во всех других случаях.

Обозначается $A \vee B$ и читается «A или B», при этом разделительный смысл слова «или» исключается.

Логические значения дизъюнкция описываются таблицей истинности:

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Пример. Высказывание A: Москва — столица России.

Высказывание B: Киев — столица России.

Высказывание $A \vee B$: Москва — столица России или Киев — столица России.

В данном примере высказывание $A \vee B$ является истинным, так как истинно высказывание A.

$\boxed{\text{О}}$ ***Неравнозначность*** (исключающее, разделительное «или») двух элементарных высказываний A и B — новое высказывание, которое ложно, если оба высказывания либо одновременно истинны, либо одновременно ложны и истинно — в противном случае.

Обозначается $A \oplus B$ и читается: «либо A, либо B», «или A, или B».

Понимается в разделительном смысле.

Логические значения неравнозначности описываются таблицей истинности:

A	B	$A \oplus B$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Пример. Высказывание A: юноша — школьник.

Высказывание B: юноша — студент.

Высказывание $A \oplus B$: юноша или школьник, или студент. В данном примере связка «или» понимается очевидно в разделительном смысле.

[О] ***Отрицание*** (инверсия) высказывания A — новое высказывание, которое считается истинным, если высказывание A ложно, и ложным, если высказывание A истинно. Обозначается символом $\overline{A}$ и читается «не A» или «неверно, что A».

Логические значения отрицания описываются таблицей истинности:

A	$\overline{A}$
1	0
0	1

Можно образовать также отрицание высказывания $\overline{A}$, т.е. высказывание $\overline{\overline{A}}$, которое называется двойным отрицанием высказывания A. Ясно, что $\overline{\overline{A}}$ совпадает с самим высказыванием A.

Пример. Высказывание A: река Волга впадает в Каспийское море.

Высказывание $\overline{A}$: река Волга не впадает в Каспийское море.

Высказывание $\overline{\overline{A}}$: неверно, что река Волга не впадает в Каспийское море.

[О] ***Импликация*** (логическое следование) двух высказываний A и B — новое высказывание, которое считается ложным, если A истинно, а B — ложно и истинным — во всех остальных случаях. Обозначается символом $A \to B$ и читается «если A, то B» или «из A следует B».

При этом высказывание A называют условием или посылкой, а высказывание B — следствием или заключением.

Логические значения импликации описываются таблицей истинности:

A	B	$A \to B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Пример. Высказывание A: Москва — столица России.

Высказывание B: Москва — столица США.

Высказывание $A \to B$ ложно, так как высказывание A истинно, а высказывание B ложно.

O ***Двойная импликация*** (эквивалентность) двух высказываний A и B — новое высказывание, которое считается истинным, когда оба высказывания A и B либо одновременно истинны, либо одновременно ложны, и ложным — во всех остальных случаях.

Обозначается символом $A \leftrightarrow B$ ($A \sim B$, $A \equiv B$) и читается «A тогда и только тогда, когда B» или «A эквивалентно B» или «для того чтобы A необходимо и достаточно, чтобы B».

Логические значения двойной импликации описываются таблицей истинности:

A	B	$A \leftrightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Пример. Высказывание A: четырехугольник — параллелограмм.

Высказывание B: в четырехугольнике противолежащие стороны попарно параллельны.

Высказывание A эквивалентно высказыванию B ($A \sim B$) и читается так: для того чтобы четырехугольник был параллелограммом, необходимо и достаточно, чтобы в четырехугольнике противолежащие стороны были попарно параллельны.

5.2.3. Формулы алгебры логики

С помощью алгебры логики над высказываниями можно выполнять следующие операции:

- 1) из заданной совокупности элементарных высказываний строить различные сложные высказывания;
- 2) сложные высказывания представлять в виде цепочки элементарных высказываний;
- 3) упрощать сложные высказывания с помощью равносильных формул;
- 4) проверять (доказывать) истинность или ложность цепочек сложных высказываний.

Порядок выполнения операций указывается скобками, которые можно опускать, придерживаясь следующего порядка действий: конъюнкция выполняется раньше, чем все остальные операции, дизъюнкция — раньше, чем импликация и эквивалентность. Если над формулой стоит знак отрицания, то скобки также опускаются.

Приведем основные законы, определяющие логические операции:

1) $A \vee A = A$ — закон идемпотентности дизъюнкции	$A \wedge A = A$ — закон идемпотентности конъюнкции
2) $A \vee B = B \vee A$ — закон коммутативности дизъюнкции	$A \wedge B = B \wedge A$ — закон коммутативности конъюнкции
3) $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$ — закон ассоциативности дизъюнкции	$A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$ — закон ассоциативности конъюнкции
4) $A \vee B \wedge C = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ — закон дистрибутивности дизъюнкции относительно конъюнкции	$A \wedge (B \vee C) = A \wedge B \vee A \wedge C$ — закон дистрибутивности
5) $\overline{A} \vee \overline{B} = \overline{A \wedge B}$ — закон де Моргана	$\overline{A} \wedge \overline{B} = \overline{A \vee B}$ — закон де Моргана
6) $A \wedge B \vee A \wedge \overline{B} = A$ — закон склеивания	$(A \vee B) \wedge (A \vee \overline{B}) = A$ — закон склеивания
7) $A \vee A \wedge B = A$ — закон поглощения	$A \wedge (A \vee B) = A$ — закон поглощения
8) $A \vee \overline{A} \wedge B = A \vee B$ — закон Порецкого	$A \wedge (\overline{A} \vee B) = A \wedge B$ — закон Порецкого
9) $A \vee 0 = A$	$A \wedge 0 = 0$
10) $A \vee 1 = 1$	$A \wedge 1 = A$

11) $A \vee \overline{A} = 1$ — закон исключенного третьего	$A \wedge \bar{A} = 0$ — закон противоречия
12) $A \vee B = \overline{\overline{A} \wedge \overline{B}}$	$A \wedge B = \overline{\overline{A} \vee \overline{B}}$
13) $\overline{A \vee B} = \bar{A} \wedge \bar{B}$	$\overline{A \wedge B} = \bar{A} \vee \bar{B}$
14) $\overline{\overline{A}} = A$ — закон снятия двойного отрицания	
15) $A \rightarrow B = \bar{A} \vee B = \overline{A \wedge \bar{B}}$	
16) $\bar{A} \rightarrow B = A \vee B = \overline{\bar{A} \wedge \bar{B}}$	
17) $\overline{A \rightarrow \bar{B}} = A \wedge B = \overline{\bar{A} \wedge \bar{B}}$	
18) $A \leftrightarrow B = (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) = (\bar{A} \vee B) \wedge (A \vee \bar{B}) = (A \wedge B) \vee (\bar{A} \wedge \bar{B})$	

Примеры. **1.** Записать логической цепочкой следующее сложное высказывание:

«Если спортсмен интенсивно тренируется и при этом принимает запрещенные стимуляторы, то он либо достигает высоких спортивных результатов, либо попадается на допинге».

Решение. Данное сложное высказывание состоит из следующих простых:

A — спортсмен интенсивно тренируется;

B — спортсмен принимает запрещенные стимуляторы;

C — спортсмен достигает высоких результатов;

D — спортсмен попадается на допинге.

С учетом введенных обозначений, сложное высказывание может быть представлено следующей логической цепочкой: $(A \wedge B) \rightarrow (C \oplus D)$.

2. С помощью таблиц истинности проверить справедливость следующих логических законов:

1) $A = A \vee (A \wedge B)$; 2) $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$;

3) $A \rightarrow B = \overline{A \wedge \bar{B}}$; 4) $A \leftrightarrow B = (A \wedge B) \vee (\bar{A} \wedge \bar{B})$.

Решение. 1) $A = A \vee (A \wedge B)$

A	B	$A \wedge B$	$A \vee (A \wedge B)$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	0
0	0	0	0

Как видно из таблицы, истинные и ложные значения первой и последней колонок совпадают.

2) $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

A	B	C	$B \wedge C$	$A \vee (B \wedge C)$	$A \vee B$	$A \vee C$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Как видно из таблицы, истинные и ложные значения пятой и последней колонок совпадают.

3) $A \to B = \overline{A \wedge \overline{B}}$

A	B	$\overline{B}$	$A \to \overline{B}$	$A \wedge B$	$\overline{A \wedge \overline{B}}$
	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	1

Как видно из таблицы, истинные и ложные значения четвертой и последней колонок совпадают.

4) $A \leftrightarrow B = (A \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B})$

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$A \leftrightarrow B$	$A \wedge B$	$\overline{A} \wedge \overline{B}$	$(A \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B})$
1	1	0	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	1	1

Как видно из таблицы, истинные и ложные значения пятой и последней колонок совпадают.

Задачи для самостоятельного решения

1. Даны два высказывания: A — спортсмен участвовал в авторалли; B — спортсмен разбил машину. Дайте словесную формулировку высказываний, соответствующих следующим логическим операциям:

а) $A \wedge B$; б) $A \vee B$; в) $A \wedge \bar{B}$; г) $\overline{A \wedge B}$.

2. Переведите в символическую форму следующие сложные высказывания: а) «Если ваза упадет, то она разобьется. Ваза разбита, значит, она упала»; б) «Этот человек или джентльмен, или студент. Но он не джентльмен, значит, он студент»; в) «Если A и B истинны, то C истинно. Но C ложно: значит, A или B ложны».

3. С помощью таблиц истинности проверьте правильность следующих логических законов:

а) $\bar{A} \vee \bar{B} = \overline{A \wedge B}$; б) $\overline{A \wedge B} = \bar{A} \vee \bar{B}$;

в) $\overline{A \to \bar{\bar{B}}} = \overline{A \wedge \bar{\bar{B}}}$; г) $A \leftrightarrow B = (\bar{A} \vee B) \wedge (A \vee \bar{B})$;

д) $A \wedge (B \vee C) = A \wedge B \vee A \wedge C$.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Перечислите способы задания множеств и приведите примеры, иллюстрирующие применение основных операций над множествами (с помощью диаграмм Эйлера—Венна).
2. Назовите способы задания множеств.
3. Какие операции алгебры множеств вам известны?
4. Что называют мощностью конечного множества?

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

Множество, элементы, диаграмма Эйлера—Венна, пустое множество, логические операции.

Глава 6

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ АЛГЕБРЫ

6.1. АБСОЛЮТНАЯ И ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ПОГРЕШНОСТИ

Практическая деятельность человека неразрывно связана с числами, которые можно получать тремя способами: в результате измерений, счета и выполнения различных математических операций. Однако необходимо заметить, что:

- любое измерение нельзя выполнить абсолютно точно: ошибку дает либо сам прибор, либо наблюдатель;
- счет дает точные результаты, только если количество пересчитываемых предметов невелико и если оно постоянно во времени;
- далеко не все математические операции можно выполнить абсолютно точно.

Поэтому первым в теории численных методов является вопрос о способах определения погрешности данного числа и о приемах определения погрешности чисел, полученных в результате ряда простейших арифметических действий с приближенными числами.

[О] Величина $\Delta_a = |A - a|$, где A — точное значение числа; a — его приближенное значение, называется ***абсолютной погрешностью*** числа a.

Границей абсолютной погрешности (ее предельным значением) называется возможно меньшее число Δ, про которое известно, что $|A - a| \leq \Delta$.

На практике мы вынуждены брать число Δ с запасом, так как точное значение A, как правило, остается неизвестным и, следовательно, невозможно вычислить $\Delta_a = |A - a|$. Знание a и Δ позволяет установить границы, в которых лежит точное число A, так как из неравенства $|A - a| \le \Delta$ следует, что $a - \Delta \le A \le a + \Delta$. Так, например, запись $A = 2{,}21 \pm 0{,}01$ означает, что $2{,}21 - 0{,}01 \le A \le$ $\le 2{,}21 + 0{,}01$, или $2{,}2 \le A \le 2{,}22$.

Замечание. Если a есть приближенное значение числа A, причем предельная абсолютная погрешность равна Δ, то говорят, что a есть приближенное значение числа A с точностью до Δ.

Попробуем теперь ответить на следующий *вопрос*:

пусть нам известно, что точное значение A некоторого числа находится в интервале $A_1 \le A \le A_2$. Если взять за его приближенное значение a полусумму $\frac{A_1 + A_2}{2}$, т. е. $a = \frac{A_1 + A_2}{2}$, то какая при этом будет предельная абсолютная погрешность?

Решение данного вопроса вытекает из серии неравенств.

Пусть $A_1 \le A \le A_2$. Но, с другой стороны, $a - \Delta \le A \le a + \Delta$, следовательно $\begin{cases} a - \Delta = A_1 \\ a + \Delta = A_2 \end{cases}$, откуда $\Delta = a - A_1$ или $\Delta = A_2 - a$.

Если же $a = \frac{A_1 + A_2}{2}$, то $\Delta = \frac{A_1 + A_2}{2} - A_1 = \frac{A_2 - A_1}{2}$.

Таким образом, предельная абсолютная погрешность числа $a = \frac{A_1 + A_2}{2}$ равна $\frac{A_2 - A_1}{2}$.

Пример. Известно, что $3{,}14 \le \pi \le 3{,}15$.

Если взять за приближенное значение числа π число $a = \frac{3{,}14 + 3{,}15}{2} = 3{,}145$, то предельная абсолютная погрешность равна: $\Delta = \frac{3{,}15 - 3{,}14}{2} = 0{,}005$.

Таким образом, $\pi \approx 3{,}145$ с точностью до $0{,}005$.

Однако абсолютная погрешность сама по себе не характеризует точность вычислений, поскольку она выражается в тех же единицах, что и измеряемая величина, и, следовательно, ее значение будет меняться, когда изменяются единицы, с помощью которых мы измеряем изучаемую величину.

Так, если измерять расстояние между двумя городами, которое равно 100 км, с точностью до 1 м, то это будет очень точное измерение с погрешностью $\frac{1}{100\,000} = 0{,}001\ \%$ измеряемой величины, а если же с точностью до 1 м измерена длина участка земли, которая равна 10 м, то это будет грубое измерение с погрешностью $\frac{1}{10} = 10\ \%$ измеряемой величины.

Поэтому для характеристики точности приближенных вычислений вводят понятие ***относительной погрешности числа*** a, являющегося приближенным значением величины A, которая определяется как отношение абсолютной погрешности к абсолютному значению числа a, т.е. $\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|}$.

Границей относительной погрешности (ее предельным значением) будем называть возможно меньшее число δ, про которое известно, что

$$\delta_a \le \delta, \text{ т.е. } \frac{\Delta_a}{|a|} \le \delta \text{ или } |A - a| \le \delta|a|,$$

откуда следует, что

$$a - \delta|a| \le A \le a + \delta|a|.$$

В отличие от абсолютной, относительная погрешность всегда величина безразмерная, обычно выражаемая в процентах.

Пример. При взвешивании купленных яблок получено число 5,5 кг, причем известно, что предельная абсолютная погрешность равна 50 г. Определить предельную относительную погрешность и границы истинного значения (A) массы купленных яблок.

Решение. 1) $a = 5{,}5$ кг $= 5500$ г; $\Delta = 50$ г; $\delta = \frac{\Delta}{|a|} = \frac{50}{5500} = \frac{1}{110} = 0{,}009 = (0{,}9\%)$.

2) Истинное значение массы $A = 5500$ г ($\pm$ 50 г) или $A = 5500$ г ($\pm$ 0,9 %).

6.2. ОКРУГЛЕНИЕ ЧИСЕЛ. ПОГРЕШНОСТИ ПРОСТЕЙШИХ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ДЕЙСТВИЙ

$\boxed{\text{О}}$ ***Округлить число*** — значит сохранить в нем одну или несколько цифр, считая слева направо, а остальные отбросить.

$\boxed{\text{О}}$ ***Значащими цифрами*** приближенного числа называются все цифры в его записи начиная с первой *ненулевой* слева.

Правило округления. Чтобы округлить число до n значащих цифр, отбрасывают все цифры, стоящие справа от n-й значащей цифры, или, если это нужно для сохранения разрядов, заменяют их нулями.

При этом если первая из отброшенных цифр больше или равна 5, то последнюю оставшуюся цифру увеличивают на единицу.

Если же отбрасывается только одна цифра 5, то последнюю из сохраняемых цифр оставляют без изменения, если она четная, и увеличивают на единицу, если она нечетная.

$\boxed{\text{О}}$ Цифра какого-либо разряда в приближенном числе считается ***верной***, если число имеет абсолютную погрешность не больше половины единицы этого разряда.

Если же абсолютная погрешность больше половины единицы какого-нибудь разряда, то цифра этого разряда и цифры следующих справа разрядов считаются сомнительными.

Справедливо и следующее ***утверждение***: если десятичная форма записи приближенного числа содержит только верные цифры, то его абсолютная погрешность не превышает половины единицы низшего разряда.

Пример. Округляя число $A = 3{,}647$ до приближенного значения $a = 3{,}65$, мы получаем абсолютную погрешность округления $\Delta_a = |A - a| = 0{,}003$. Цифра 5 в записи приближенного значения является верной, так как $\Delta_a = \frac{1}{2} \cdot 10^{-2} (= 0{,}005)$.

Замечание. Можно положить, что в этом примере предельная абсолютная погрешность приближенного числа $a = 3{,}65$ равна 0,005.

Пример. Найти предельные абсолютные погрешности приближенных чисел, записанных в десятичной форме верными цифрами: $a = 2{,}7$; $b = 0{,}0373$; $c = 5472$.

Решение. $\Delta_a = \frac{1}{2} \cdot 10^{-1} = 0{,}05$; $\Delta_b = \frac{1}{2} \cdot 10^{-4} = 0{,}00005$; $\Delta_c = \frac{1}{2} \cdot 10^{0} = 0{,}5$.

Запишем теперь без доказательства формулировки ряда положений, позволяющих определять абсолютные и относительные погрешности величин, полученных в результате арифметических действий над исходными приближенными числами, погрешности которых известны.

Положение 1. Предельная абсолютная погрешность *суммы* нескольких приближенных чисел, записанных в десятичной форме верными цифрами, равна сумме предельных абсолютных погрешностей слагаемых.

Замечание. При сложении приближенных чисел в полученном результате нужно отбрасывать по правилам округления цифры тех разрядов справа, которых нет хотя бы в одном из данных приближенных чисел.

Пример. $u = 7{,}3 + 3{,}62 + 9{,}678 = 20{,}598$.

Будем иметь: $\Delta_u = 0{,}05 + 0{,}005 + 0{,}0005 = 0{,}0555$.

Если мы хотим округлить число u до приближенного значения $a = 20{,}6$, то абсолютная погрешность округления

$$\Delta_a = |u - a| = |20{,}598 - 20{,}6| = 0{,}002.$$

Цифра 6 в записи приближенного значения является верной, так как

$$\Delta_a < \frac{1}{2}\cdot 10^{-1} (= 0{,}05).$$

Учитывая погрешность округления, можно записать, что

$$u = 20{,}6\ (\pm\ 0{,}0575).$$

Положение 2. Предельная абсолютная погрешность *разности* двух приближенных чисел, записанных в десятичной форме верными цифрами, равна сумме предельных абсолютных погрешностей уменьшаемого и вычитаемого.

Замечание. При вычитании приближенных чисел в полученном результате нужно отбрасывать по правилам округления цифры тех разрядов справа, которых нет хотя бы в одном из данных приближенных чисел.

Пример. $u = 8{,}1 - 2{,}87 = 5{,}23$.

Будем иметь: $\Delta_u = 0{,}05 + 0{,}005 = 0{,}055$.

Если мы хотим округлить число u до приближенного значения $a = 5{,}2$, то абсолютная погрешность округления

$$\Delta_a = |u - a| = |5{,}23 - 5{,}2| = 0{,}03.$$

Цифра 2 в записи приближенного значения является верной, так как

$$\Delta_a < \frac{1}{2}\cdot 10^{-1} (= 0{,}05).$$

Учитывая погрешность округления, можно записать, что

$$u = 5{,}2\ (\pm\ 0{,}085).$$

Положение 3. Предельная относительная погрешность *произведения* нескольких приближенных чисел, записанных в десятичной форме верными цифрами, равна сумме предельных относительных погрешностей сомножителей.

Замечание. При умножении приближенных чисел в результате нужно сохранять столько значащих цифр, сколько имеет приближенное данное с наименьшим количеством значащих цифр (самое «короткое» из данных приближенных чисел).

Пример. $a = 5{,}42$; $b = 0{,}638$; $u = ab = 3{,}45796$.

Будем иметь: $\Delta_a = 0{,}005$; $\delta_a = \dfrac{\Delta_a}{|a|} = 0{,}0009\,(= 0{,}09\%)$.

$$\Delta_b = 0{,}0005;\ \delta_b = \frac{\Delta_b}{|b|} = 0{,}0008\,(= 0{,}08\%).$$

$$\delta_u = \delta_a + \delta_b = 0{,}0017\ (= 0{,}17\ \%).$$

Но $\delta_u = \dfrac{\Delta_u}{|u|}$, откуда $\Delta_u = \delta_u |u| = 0{,}0017 \cdot 3{,}45796 = 0{,}0059$.

Если мы хотим округлить число u до приближенного значения $v = 3{,}46$, то абсолютная погрешность округления

$$\Delta_v = |u - v| = |3{,}45796 - 3{,}46| = 0{,}00204.$$

Цифра 6 в записи приближенного значения является верной, так как

$$\Delta_v < \frac{1}{2} \cdot 10^{-2}\ (= 0{,}005).$$

Учитывая погрешность округления, можно записать, что

$$u = 3{,}46\ (\pm\ 0{,}00794).$$

Положение 4. Предельная относительная погрешность от *деления* двух приближенных чисел, записанных в десятичной форме верными цифрами, равна сумме предельных относительных погрешностей делимого и делителя.

Замечание. При делении приближенных чисел в результате нужно сохранять столько значащих цифр, сколько их имеет приближенное данное с наименьшим количеством значащих цифр (самое «короткое» из данных приближенных чисел).

Пример. $a = 1{,}73$; $b = 3{,}142$; $u = \dfrac{a}{b} = 0{,}5506$.

Будем иметь: $\Delta_a = 0{,}005$; $\delta_a = \dfrac{\Delta_a}{|a|} = 0{,}0029\,(= 0{,}29\%)$.

$$\Delta_b = 0{,}0005;\ \delta_b = \frac{\Delta_b}{|b|} = 0{,}0002\,(= 0{,}02\%).$$

$$\delta_u = \delta_a + \delta_b = 0{,}0031\ (= 0{,}31\ \%).$$

Но $\delta_u = \frac{\Delta_u}{|u|}$, откуда $\Delta_u = \delta_u\,|u| = 0{,}0031 \cdot 0{,}5506 = 0{,}0017$.

Если мы хотим округлить число u до приближенного значения $v = 0{,}55$, то абсолютная погрешность округления

$$\Delta_v = |u - v| = |0{,}5506 - 0{,}55| = 0{,}0006.$$

Цифра 5 в записи приближенного значения является верной, так как

$$\Delta_v < \frac{1}{2} \cdot 10^{-2}\,(= 0{,}005).$$

Учитывая погрешность округления, можно записать, что

$$u = 0{,}55\ (\pm\ 0{,}0023).$$

Положение 5. Предельная относительная погрешность *степени* приближенного числа, записанного в десятичной форме верными цифрами, равна произведению показателя степени на предельную относительную погрешность основания.

Замечание. При *возведении* приближенного числа *в квадрат и куб* в результате нужно сохранять столько значащих цифр, сколько их имеет возводимое в степень число.

Пример. Вычислить объем куба со стороной $a = 1{,}27$ м.
Решение. $V = a^3 = (1{,}27)^3 = 2{,}0484$ (м^3).

$$\Delta_a = 0{,}005;\ \delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|} = 0{,}0039\,(= 0{,}39\%).$$

$$\delta_V = 3\delta_a = 0{,}0117\ (= 1{,}17\ \%).$$

Но $\delta_V = \frac{\Delta_V}{V}$, откуда $\Delta_V = \delta_V V = 0{,}0117 \cdot 2{,}0484 = 0{,}024$.

Если мы хотим округлить число V до приближенного значения $v = 2{,}05$, то абсолютная погрешность округления

$$\Delta_v = |V - v| = |2{,}0484 - 2{,}05| = 0{,}0016.$$

Цифра 5 в записи приближенного значения является верной, так как

$$\Delta_v < \frac{1}{2} \cdot 10^{-2}\,(= 0{,}005).$$

Учитывая погрешность округления, можно записать, что

$$V = 2{,}05\ (\pm\ 0{,}0256).$$

Положение 6. Предельная относительная погрешность *корня из приближенного числа*, записанного в десятичной форме верными цифрами, равна предельной относительной погрешности подкоренного числа, деленной на показатель корня.

Замечание. При извлечении квадратного и кубического корня из приближенного числа в результате нужно сохранять столько значащих цифр, сколько их имеет подкоренное число.

Пример. При извлечении квадратного корня из приближенного числа $a = 1{,}27$ получили значение $u = \sqrt{1{,}27} = 1{,}1269$, записанное верными цифрами. Какую абсолютную погрешность мы будем иметь, если после округления запишем, что $\sqrt{1{,}27} = v = 1{,}13$?

Решение. $\Delta_a = 0{,}005$; $\delta_a = \dfrac{\Delta_a}{|a|} = 0{,}0039\,(= 0{,}39\%)$.

$$\delta_u = \delta_{\sqrt{a}} = \frac{1}{2}\delta_a = 0{,}00195.$$

Но $\delta_{\sqrt{a}} = \dfrac{\Delta_{\sqrt{a}}}{\sqrt{a}}$, откуда $\Delta_{\sqrt{a}} = \delta_{\sqrt{a}}\sqrt{a} = 0{,}00195 \cdot 1{,}1269 = 0{,}0022.$

Если мы хотим округлить число $u = 1{,}1269$ до приближенного значения $v = 1{,}13$, то абсолютная погрешность округления

$$\Delta_v = |u - v| = |1{,}1269 - 1{,}13| = 0{,}0031.$$

Цифра 3 в записи приближенного значения является верной, так как

$$\Delta_v < \frac{1}{2} \cdot 10^{-2}\ (= 0{,}005).$$

Учитывая погрешность округления, можно записать, что

$$\sqrt{1{,}27} = 1{,}13\,(\pm 0{,}0053).$$

6.3. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

6.3.1. Основные определения и теоремы

Будем рассматривать уравнение вида $f(x) = 0$, где $f(x)$ — некоторая функция действительного аргумента, определенная и непрерывная в некотором конечном или бесконечном интервале $(a; b)$.

$\boxed{\text{О}}$ Число x_0 из области определения функции $f(x)$ называется ***корнем уравнения*** $f(x) = 0$, если $f(x_0) = 0$.

Наша задача состоит в описании элементарных приемов, позволяющих находить корни уравнения $f(x) = 0$ с достаточной для практики степенью точности.

Процесс нахождения корней уравнения распадается на несколько этапов:

1) определяются границы интервала, в котором находятся ***все*** корни уравнения $f(x) = 0$;

2) устанавливаются возможно малые промежутки, в каждом из которых содержится ***ровно один корень***;

3) каждый из корней вычисляется с заданной точностью.

К сожалению, определение в общем виде границ интервала, в котором находятся ***все*** корни уравнения $f(x) = 0$, можно дать только для алгебраического уравнения в каноническом виде, т. е. для уравнения вида:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0, \text{ где } a_n \neq 0. \qquad (1)$$

В дальнейшем будем находить только ***действительные корни*** алгебраических уравнений.

- **Первый этап.** Начиная первый этап, приведем без доказательства ряд теорем, позволяющих определять количество и границы корней алгебраических уравнений (1).

$\boxed{\text{Т1}}$ ***Основная теорема алгебры.*** *Уравнение вида* (1) *имеет ровно n корней, действительных или комплексных, если корень кратности k считать за k корней.*

$\boxed{\text{О}}$ Число x_0 называется ***корнем*** кратности k уравнения (1), если при $x = x_0$ обращается в нуль сама функция $f(x)$ и ее производные до $(k-1)$-го порядка включительно, т. е.

$$f(x_0) = f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(k-1)}(x_0) = 0, \text{ а } f^{(k)}(x_0) \neq 0.$$

Корень кратности $k = 1$ называется *простым*.

$\boxed{\text{Т2}}$ 1. *Число действительных корней уравнения* (1) *четной степени с действительными коэффициентами всегда четно (в том числе может равняться нулю).*

Если кроме этого $\dfrac{a_n}{a_0} < 0$, *то уравнение четной степени имеет по крайней мере два действительных корня разного знака.*

2. Уравнение (1) нечетной степени имеет по крайней мере один действительный корень того же знака, что и $-\frac{a_n}{a_0}$.

$\boxed{\text{Т3}}$ ***Теорема Декарта****. *Число положительных корней уравнения (1) равно или на четное число меньше числа перемен знака в ряду коэффициентов a_0, a_1, ..., a_n уравнения. Так как при замене x на $-y$ корни уравнения (1) меняют знаки, то с помощью этой теоремы можно оценить и число отрицательных корней.*

Примеры. **1.** В уравнении нечетной степени $3x-2=0$ $\left(x_0=\frac{2}{3}\right)$ коэффициенты $a_0=3$, $a_n=-2$ и $-\frac{a_n}{a_0}=-\frac{-2}{3}=\frac{2}{3}>0$.

Кроме этого, число перемен знаков равно 1.

Следовательно, по теоремам 2 и 3 (см. $\boxed{\text{Т 2}}$ и $\boxed{\text{Т 3}}$), оно имеет один действительный положительный корень.

2. В уравнении нечетной степени $x^3-2x^2-x+2=0$ ($x_1=-1$; $x_2=1$; $x_3=2$) коэффициенты $a_0=1$, $a_n=2$ и $-\frac{a_n}{a_0}=-\frac{2}{1}<0$. Следовательно, по теореме 2, оно имеет по крайней мере один действительный отрицательный корень.

Число перемен знаков в данном уравнении равно двум, следовательно, по теореме 3, оно имеет либо два, либо 0 положительных действительных корней.

Оценим число действительных отрицательных корней. Для этого заменим x на $-y$. Получим уравнение $(-y)^3-2(-y)^2-(-y)+2=0$, или $-y^3-2y^2+y+2=0$, или $y^3+2y^2-y-2=0$. Число перемен знаков в этом уравнении равно 1, следовательно, исходное уравнение имеет один действительный отрицательный корень.

3. В уравнении четной степени $x^2-2x-3=0$ ($x_1=-1$; $x_2=3$) коэффициенты $a_0=1$, $a_n=-3$ и $\frac{a_n}{a_0}=\frac{-3}{1}=-3<0$. Следовательно, по теореме 2, оно имеет два действительных корня разного знака.

4. В уравнении четной степени $x^4+3x^2-4=0$ ($x_1=-1$; $x_2=1$) коэффициенты $a_0=1$, $a_n=-4$ и $\frac{a_n}{a_0}=\frac{-4}{1}=-4<0$. Следовательно, по теореме 2, оно имеет по крайней мере два действительных корня разного знака.

---

* Р. Декарт (1596 — 1650) — французский философ, математик, физик и физиолог.

Число перемен знаков в данном уравнении равно 1, следовательно, по теореме 3, оно имеет один положительный действительный корень.

Оценим число действительных отрицательных корней. Для этого заменим x на $-y$. Получим уравнение $(-y)^4 + 3(-y)^2 - 4 = 0$, или $y^4 + 3y^2 - 4 = 0$. Число перемен знаков в этом уравнении равно 1, следовательно, исходное уравнение имеет один действительный отрицательный корень.

Дадим теперь формулировку теоремы, позволяющей достаточно грубо определять границы интервала, в котором находятся ***все*** действительные корни уравнения (1).

$\boxed{\text{T4}}$ 1. *Если* $A = \max|a_i|$, где $0 \le i \le n-1$; $B = \max|a_i|$, *где* $1 \le i \le n$,

и $r = \dfrac{|a_n|}{A + |a_n|}$; $R = 1 + \dfrac{B}{|a_0|}$, то $r \le |x| \le R$.

2. ***Все*** *положительные действительные корни уравнения* (1) *находятся в промежутке* $r \le x \le R$, *а* ***все*** *отрицательные действительные корни уравнения* (1) *находятся в промежутке* $-R \le x \le -r$.

Примеры. 1. В уравнении $x^2 - 2x - 3 = 0$ ($x_1 = -1$; $x_2 = 3$) коэффициенты $a_0 = 1$, $a_1 = -2$, $a_2 = a_n = -3$.

Найдем числа A, B, r, R:

$A = \max(|a_0|, |a_1|) = \max(1;\ 2) = 2$; $B = \max(|a_1|;\ |a_2|) = \max(2;\ 3) = 3$;

$r = \dfrac{3}{2+3} = \dfrac{3}{5}$; $R = 1 + \dfrac{3}{1} = 4$.

Все положительные действительные корни уравнения находятся в промежутке $\dfrac{3}{5} \le x \le 4$ (значение $x_2 = 3$ попадает в этот промежуток).

Все отрицательные действительные корни уравнения находятся в промежутке $-4 \le x \le -\dfrac{3}{5}$ (значение $x_1 = -1$ попадает в этот промежуток).

2. В уравнении $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ ($x_1 = -1$; $x_2 = 1$; $x_3 = 2$) коэффициенты $a_0 = 1$, $a_1 = -2$, $a_2 = -1$, $a_3 = a_n = 2$. Найдем числа A, B, r, R:

$$A = \max(|a_0|, |a_1|, |a_2|) = \max(1;\ 2;\ 1) = 2;\ B = \max(|a_1|;\ |a_2|;\ |a_3|) =$$
$$= \max(2;\ 1;\ 2) = 2;\ r = \frac{2}{2+2} = \frac{1}{2};\ R = 1 + \frac{2}{1} = 3.$$

Все положительные действительные корни уравнения находятся в промежутке $\dfrac{1}{2} \le x \le 3$ (значения $x_2 = 1$ и $x_3 = 2$ попадают в этот промежуток).

Все отрицательные действительные корни уравнения находятся в промежутке $-3 \le x \le -\dfrac{1}{2}$ (значение $x_1 = -1$ попадает в этот промежуток).

3. В уравнении $x^4 + 3\,x^2 - 4 = 0$ ($x_1 = -1$; $x_2 = 1$) коэффициенты $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 3$, $a_3 = 0$, $a_4 = a_n = -4$.

Найдем числа A, B, r, R:

$$A = \max\,(|a_0|,|a_1|,|a_2|,|a_3|) = \max\,(1;\ 0;\ 3;\ 0) = 3;$$

$$B = \max\,(|a_1|;\ |a_2|;\ |a_3|;\ |a_4|) = \max\,(0;\ 3;\ 0;4) = 4;\ \ r = \frac{4}{3+4} = \frac{4}{7};\ \ R = 1 + \frac{4}{1} = 5.$$

Все положительные действительные корни уравнения находятся в промежутке $\dfrac{4}{7} \le x \le 5$ (значение $x_2 = 1$ попадает в этот промежуток).

Все отрицательные действительные корни уравнения находятся в промежутке $-5 \le x \le -\dfrac{4}{7}$ (значение $x_1 = -1$ попадает в этот промежуток).

Итак, мы научились находить количество действительных корней алгебраического уравнения и достаточно грубые интервалы, в которых они все содержатся.

- **Второй этап.** На этом этапе устанавливаются возможно малые промежутки, содержащие ровно один действительный корень алгебраического уравнения.

  Дадим формулировку следующей теоремы.

$\boxed{\text{Т5}}$ *Если непрерывная и дифференцируемая функция $f(x)$, определяющая алгебраическое уравнение $f(x) = 0$, на концах отрезка $[a;\ b]$ принимает значения разных знаков, т.е. $f(a)\,f(b) < 0$, и ее первая производная сохраняет знак внутри этого отрезка, то на $[a;\ b]$ находится ровно один действительный корень данного уравнения.*

Примеры. 1. Для уравнения $x^2 - 2x - 3 = 0$ найдем интервалы знакопостоянства непрерывной функции $f(x) = x^2 - 2x - 3$. Для этого вычислим ее производную: $f'(x) = 2x - 2$; $f'(x) = 0$ при $2x - 2 = 0$, т.е. $x = 1$.

При $x > 1$ $f'(x) > 0$, т.е. функция возрастает.

При $x < 1$ $f'(x) < 0$, т.е. функция убывает.

Сравним эти интервалы с ранее найденными промежутками, в которых содержатся все положительные и отрицательные действительные корни уравнения (рис. 6.1).

Из сравнения получим три промежутка: $-4 \le x \le -\dfrac{3}{5}$, $\dfrac{3}{5} \le x < 1$ и $1 < x \le 4$.

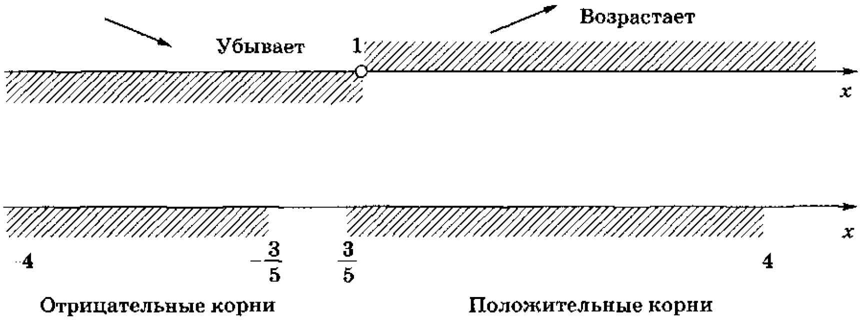


Рис. 6.1

Найдем знаки функции на концах этих промежутков:

$$f(-4) = (-4)^2 - 2(-4) - 3 = 16 + 8 - 3 > 0;$$

$$f\left(-\frac{3}{5}\right) = \left(-\frac{3}{5}\right)^2 - 2\left(-\frac{3}{5}\right) - 3 = \frac{9}{25} + \frac{6}{5} - 3 < 0,$$

следовательно, согласно теореме 5 (см. $\boxed{\text{Т 5}}$), уравнение $x^2 - 2x - 3 = 0$ на промежутке $-4 \le x \le -\frac{3}{5}$ имеет ровно один отрицательный действительный корень.

$$f\left(\frac{3}{5}\right) = \left(\frac{3}{5}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right) - 3 = \frac{9}{25} - \frac{6}{5} - 3 < 0;$$

$f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 - 3 < 0$, следовательно, согласно теореме 5, уравнение $x^2 - 2x - 3 = 0$ на промежутке $-\frac{3}{5} \le x < 1$ не имеет действительных корней;

$$f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 - 3 < 0;$$

$$f(4) = 4^2 - 2 \cdot 4 - 3 = 16 - 8 - 3 > 0,$$

следовательно, согласно теореме 5, уравнение $x^2 - 2x - 3 = 0$ на промежутке $1 < x \le 4$ имеет ровно один положительный действительный корень.

2. Для уравнения $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ найдем интервалы знакопостоянства непрерывной функции $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$. Для этого вычислим ее производную: $f'(x) = 3x^2 - 4x - 1$; $f'(x) = 0$ при $3x^2 - 4x - 1 = 0$, т. е.

$$x_1 = \frac{2 - \sqrt{7}}{3} \approx -0{,}215; \quad x_2 = \frac{2 + \sqrt{7}}{3} \approx 1{,}549.$$

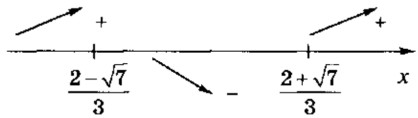


Рис. 6.2

При $x \in \left(-\infty; \frac{2-\sqrt{7}}{3}\right) \cup \left(\frac{2+\sqrt{7}}{3}; +\infty\right)$ $f'(x) > 0$, т.е. функция возрастает; при $x \in \left(\frac{2-\sqrt{7}}{3}; \frac{2+\sqrt{7}}{3}\right)$ $f'(x) < 0$, т.е. функция убывает (рис. 6.2).

Сравним эти интервалы с ранее найденными промежутками, в которых содержатся все положительные и отрицательные действительные корни уравнения (рис. 6.3).

Из сравнения получим три промежутка: $-3 \le x \le \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} \le x < \frac{2+\sqrt{7}}{3}$ и $\frac{2+\sqrt{7}}{3} < x \le 3$.

Найдем знаки функции на концах этих промежутков:

$$f(-3) = (-3)^3 - 2(-3)^2 - (-3) + 2 = -27 - 18 + 3 + 2 < 0;$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) + 2 = -\frac{1}{8} - 2\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 2 > 0,$$

следовательно, согласно теореме 5, уравнение $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ на промежутке $-3 \le x \le -\frac{1}{2}$ имеет ровно один отрицательный действительный корень;

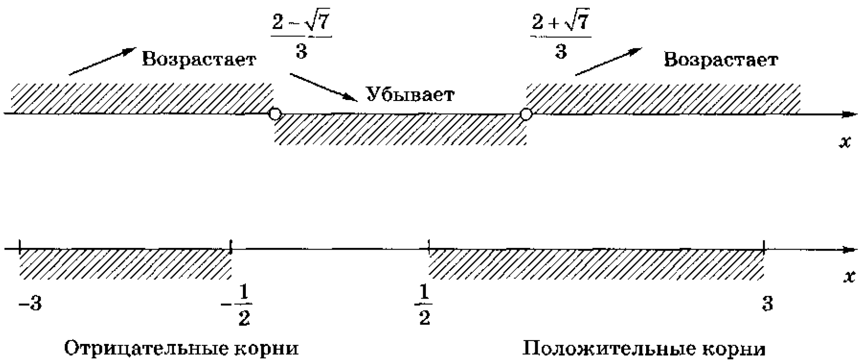


Рис. 6.3

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^3-2\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)+2=\frac{1}{8}-2\cdot\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+2>0;$$

$f(1{,}549)=(1{,}549)^3-2(1{,}549)^2-1{,}549+2\approx 3{,}717-4{,}799-1{,}549+2<0,$

следовательно, согласно теореме 5, уравнение $x^3-2x^2-x+2=0$ на промежутке $\frac{1}{2}\le x<\frac{2+\sqrt{7}}{3}$ имеет ровно один положительный действительный корень;

$f(1{,}549)=(1{,}549)^3-2(1{,}549)^2-1{,}549+2\approx 3{,}717-4{,}799-1{,}549+2<0,$

$$f(3)=3^3-2\cdot 3^2-3+2=27-18-3+2>0,$$

следовательно, согласно теореме 5, уравнение $x^3-2x^2-x+2=0$ на промежутке $\frac{2+\sqrt{7}}{3}<x\le 3$ имеет ровно один положительный действительный корень.

3. Для уравнения $x^4+3x^2-4=0$ найдем интервалы знакопостоянства непрерывной функции $f(x)=x^4+3x^2-4$. Для этого вычислим ее производную: $f'(x)=4x^3+6x$; $f'(x)=0$ при $4x^3+6x=0$ или $2x(2x^2+3)=0$, откуда $x=0$.

При $x<0$ $f'(x)<0$, т.е. функция убывает; при $x>0$ $f'(x)>0$, т.е. функция возрастает (рис. 6.4).

Сравним эти интервалы с ранее найденными промежутками, в которых содержатся все положительные и отрицательные действительные корни уравнения (рис. 6.5).

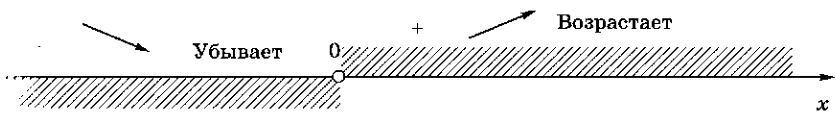


Рис. 6.4

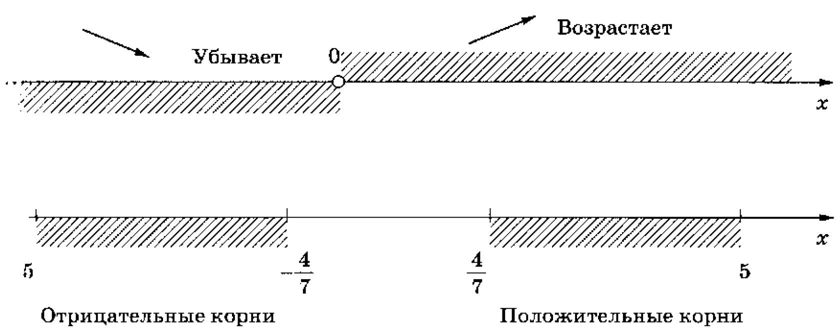


Рис. 6.5

Из сравнения получим два промежутка: $-5 \le x \le -\frac{4}{7}$ и $\frac{4}{7} \le x \le 5$.

Найдем знаки функции на концах этих промежутков:

$$f(-5) = (-5)^4 + 3(-5)^2 - 4 = 625 + 75 - 4 > 0;$$

$$f\left(-\frac{4}{7}\right) = \left(-\frac{4}{7}\right)^4 + 3\left(-\frac{4}{7}\right)^2 - 4 = \frac{256}{2401} + \frac{48}{49} - 4 < 0,$$

следовательно, согласно теореме 5, уравнение $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$ на промежутке $-5 \le x \le -\frac{4}{7}$ имеет ровно один отрицательный действительный корень;

$$f\left(\frac{4}{7}\right) = \left(\frac{4}{7}\right)^4 + 3\left(\frac{4}{7}\right)^2 - 4 = \frac{256}{2401} + \frac{48}{49} - 4 < 0;$$

$$f(5) = 5^4 + 3 \cdot 5^2 - 4 = 625 + 75 - 4 > 0,$$

следовательно, согласно теореме 5, уравнение $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$ на промежутке $\frac{4}{7} \le x \le 5$ имеет ровно один положительный действительный корень.

Замечание. Для алгебраических уравнений (1), степень которых больше трех, трудно аналитически находить интервалы знакопостоянства функции $f(x)$. Поэтому для нахождения возможно малых промежутков, содержащих ровно один действительный корень, можно на практике использовать следующие способы:

1) средствами компьютерной графики функция $f(x)$ представляется на дисплее и приближенно определяются возможно малые промежутки, содержащие ровно один корень (т.е. промежутки, содержащие одну точку пересечения графика функции $f(x)$ с осью Ox);

2) если график функции $f(x)$ построить трудно, то формируют простые функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, такие, что уравнение $f(x) = 0$ преобразуется в виде $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$. Затем строятся графики функций $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$ и приближенно определяются промежутки, содержащие абсциссы точек пересечения этих графиков.

Так, например, уравнение $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ можно преобразовать к виду $x^3 = 2x^2 + x - 2$ и затем построить графики функций $y = x^3$ и $y = 2x^2 + x - 2$.

- **Третий этап.** Вначале дадим формулировку теоремы, позволяющей оценивать погрешность приближенного решения.

$\boxed{\text{Т6}}$ *Если x_1 точный, а x_2 приближенный корни уравнения* (1), *принадлежащие одному и тому же промежутку* $[a;\ b]$, *то справедлива оценка:* $|x_2 - x_1| \le \dfrac{|f(x_2)|}{m}$, *где m — наименьшее значение модуля производной функции $f(x)$ на промежутке* $[a;\ b]$.

Пример. Ранее мы установили, что уравнение $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ в промежутке $-3 \le x \le -\dfrac{1}{2}$ имеет ровно один отрицательный действительный корень.

Предположим, что его приближенное значение $x_2 = -1{,}1$. Оценим абсолютную погрешность $|x_2 - x_1|$, где x_1 — неизвестное точное значение корня.

Для этого вычислим $|f(x_2)|$ и m:

а) $f(x_2) = f(-1{,}1) = (-1{,}1)^3 - 2\cdot(-1{,}1)^2 + 1{,}1 + 2 = -1{,}331 - 2{,}42 + 1{,}1 + 2 = 0{,}651$,

$$|f(x_2)| = |-0{,}651| = 0{,}651;$$

б) в промежутке $-3 \le x \le -\dfrac{1}{2}$ производная $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$, оставаясь положительной, изменяется от $f'(-3) = 3(-3)^2 - 4(-3) + 1 = 40$ до $f'\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 3\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 - 4\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right) + 1 = \dfrac{15}{4}$. Следовательно, минимальное значение ее модуля равно $\dfrac{15}{4}$, т.е. $m = \dfrac{15}{4}$.

Согласно теореме 6 (см. $\boxed{\text{Т 6}}$) имеем: $|-1{,}1 - x_1| \le \dfrac{0{,}651}{\dfrac{15}{4}} \approx 0{,}17$.

Далее на конкретных примерах будет представлено несколько способов нахождения приближенных значений действительных корней уравнения (1).

6.3.2. Метод половинного деления

Поставим *задачу*: методом половинного деления найти приближенное значение положительного действительного корня x_0 алгебраического уравнения $f(x) = 0$ с точностью до ε.

Решение. 1) Предположим, что удалось найти достаточно малый промежуток $[x_1;\ x_2]$, содержащий ровно один действительный корень x_0 алгебраического уравнения $f(x) = 0$. Тогда, согласно теореме 5 (см. $\boxed{\text{Т5}}$ в подразд. 6.3.1), непрерывная и дифференцируемая функция $y = f(x)$ принимает на его концах значения разных знаков, т. е. $f(x_1)f(x_2) < 0$.

2) Разделим промежуток $[x_1;\ x_2]$ точкой $x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}$ на два одинаковых: $[x_1;\ x_3]$ и $[x_3;\ x_2]$.

Если $f(x_1)f(x_3) < 0$, то корень x_0 содержится в промежутке $[x_1;\ x_3]$.

Если же $f(x_3)\ f(x_2) < 0$, то корень x_0 содержится в промежутке $[x_3;\ x_2]$.

Предположим, для определенности, что корень x_0 находится в промежутке $[\ x_1;\ x_3]$.

3) Рассмотрим абсолютное значение разности $|x_1 - x_3|$.

Если $|x_1 - x_3| < 2\varepsilon$, то процесс нахождения приближенного значения следует закончить и в качестве x_0 взять величину $x_0 = \frac{x_1 + x_3}{2}$.

Если же $|x_1 - x_3| > 2\varepsilon$, то следует разделить промежуток $[x_1;\ x_3]$ точкой $x_4 = \frac{x_1 + x_3}{2}$ на два одинаковых: $[x_1;\ x_4]$ и $[x_4;\ x_3]$ и повторить действия, указанные в пп. 2 и 3, до достижения заданной точности ε.

Пример. Методом половинного деления найти приближенное значение положительного действительного корня уравнения $x^3 - 2x - 1 = 0$ с точностью до 0,1.

Решение. 1) Приблизительные границы интервала, содержащего один положительный действительный корень данного уравнения, определим графическим методом. Для этого преобразуем уравнение к виду $x^3 = 2x + 1$. Далее начертим графики функций $y = x^3$, $y = 2x + 1$ и найдем абсциссы их точек пересечения.

Из сравнения двух графиков (рис. 6.6) видно, что положительный действительный корень x_0 уравнения $x^3 - 2x - 1 = 0$ расположен в промежутке $1 \le x_0 \le 2$, причем функция $f(x) = x^3 - 2x - 1$ непрерывна и дифференцируема во всех точках этого промежутка (ее производная $f'(x) = 3x^2 - 2$ положительна при $x \in [1;\ 2]$), а на его концах принимает значения разных знаков, т. е. $f(1) = 1^3 - 2 \cdot 1 - 1 = -2 < 0$ и $f(2) = 2^3 - 2 \cdot 2 - 1 = 3 > 0$.

2) Разделим промежуток $1 \le x \le 2$ на два одинаковых:

$$1 \le x \le 1{,}5 \text{ и } 1{,}5 \le x \le 2.$$

Найдем значение функции $f(x)$ в точке $x = 1{,}5$:

$$f(1{,}5) = (1{,}5)^3 - 2 \cdot 1{,}5 - 1 = 3{,}375 - 3 - 1 = -0{,}625 < 0.$$

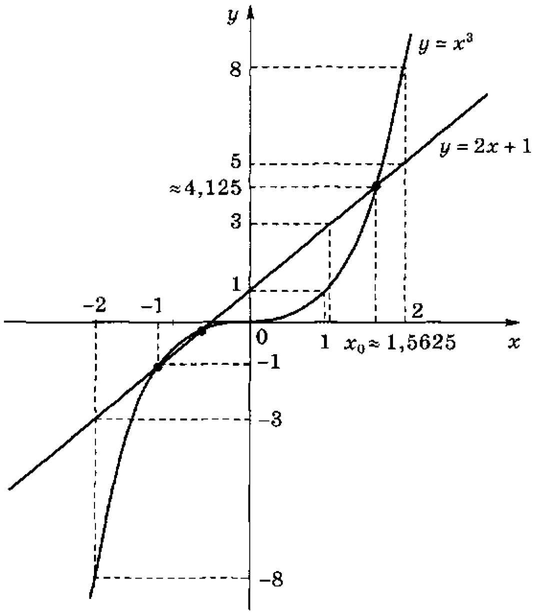


Рис. 6.6

Следовательно, по теореме 5 (см. п. 6.3.1), корень уравнения расположен в интервале $1{,}5 \le x \le 2$, так как $f(1{,}5) < 0$, а $f(2) > 0$.

Рассмотрим абсолютное значение разности $|2 - 1{,}5| = 0{,}5$. Так как оно больше 0,2, вычисления продолжаем.

3) Разделим промежуток $1{,}5 \le x \le 2$ на два одинаковых:

$$1{,}5 \le x \le 1{,}75 \text{ и } 1{,}75 \le x \le 2.$$

Найдем значение функции $f(x)$ в точке $x = 1{,}75$:

$$f(1{,}75) = (1{,}75)^3 - 2 \cdot 1{,}75 - 1 = 5{,}359375 - 3{,}5 - 1 = 0{,}859375 > 0.$$

Следовательно, по теореме 5 (см. $\boxed{\text{Т 5}}$ в подразд. 6.3.1), корень уравнения расположен в интервале $1{,}5 \le x \le 1{,}75$, так как $f(1{,}5) < 0$, а $f(1{,}75) > 0$.

Рассмотрим абсолютное значение разности $|1{,}75 - 1{,}5| = 0{,}25$. Так как оно больше 0,2, вычисления продолжаем.

4) Разделим промежуток $1{,}5 \le x \le 1{,}75$ на два одинаковых:

$$1{,}5 \le x \le 1{,}625 \text{ и } 1{,}625 \le x \le 1{,}75.$$

Найдем значение функции $f(x)$ в точке $x = 1{,}625$:

$$f(1{,}625) = (1{,}625)^3 - 2 \cdot 1{,}625 - 1 > 0.$$

Следовательно, по теореме 5, корень уравнения расположен в интервале $1{,}5 \le x \le 1{,}625$, так как $f(1{,}5) < 0$, а $f(1{,}625) > 0$.

Рассмотрим абсолютное значение разности $|1{,}625 - 1{,}5| = 0{,}125$. Так как оно меньше 0,2, можно сделать вывод о том, что необходимая точность достигнута. В качестве x_0 возьмем величину $x_0 = \dfrac{1{,}5+1{,}625}{2} = 1{,}5625$.

Итак, с точностью до 0,1, положительный действительный корень уравнения $x^3 - 2x - 1 = 0$ равен 1,5625.

6.3.3. Метод хорд

Предположим, что удалось найти достаточно малый промежуток $[x_1; x_2]$, содержащий ровно один действительный корень уравнения (1).

Тогда, согласно теореме 5 (см. $\boxed{\text{T5}}$ в подразд. 6.3.1), непрерывная и дифференцируемая функция $y = f(x)$ принимает на его концах значения разных знаков, т. е. $f(x_1)f(x_2) < 0$.

Предположим также, что промежуток $[x_1; x_2]$ столь мал, что во всех его точках $f'(x)$ и $f''(x)$ сохраняют постоянный знак.

На рис. 6.7 — 6.10 изображены схематические графики четырех типов расположения дуги кривой.

Отдельно рассмотрим и опишем два случая.

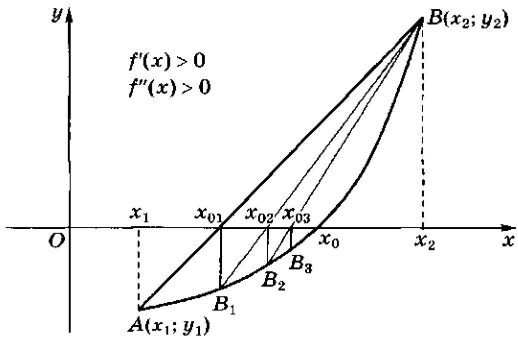


Рис. 6.7

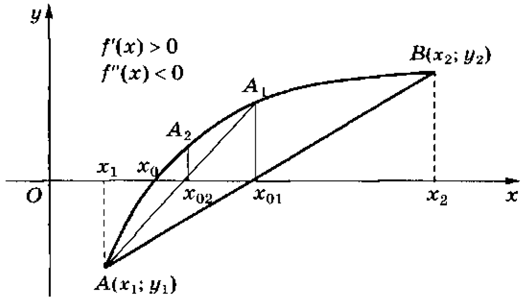


Рис. 6.8

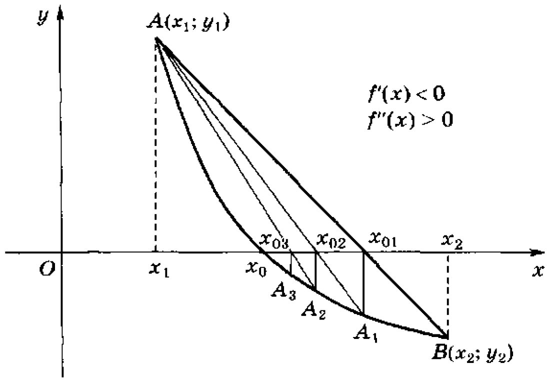


Рис. 6.9

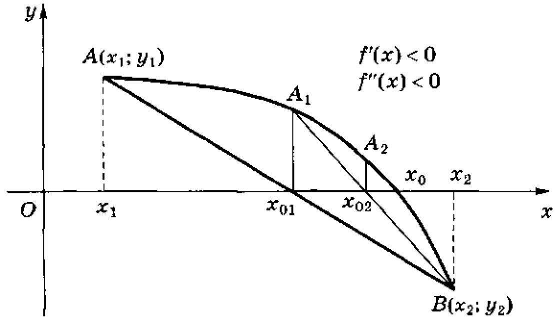


Рис. 6.10

Случай 1. $f'(x)\,f''(x) > 0$ на $[x_1;\ x_2]$ (см. рис. 6.7 и 6.10), т. е. либо $f'(x) > 0$ и $f''(x) > 0$ на $[x_1;\ x_2]$ (см. рис. 6.7), либо $f'(x) < 0$ и $f''(x) < 0$ на $[x_1;\ x_2]$ (см. рис. 6.10).

Случай 2. $f'(x)f''(x) < 0$ на $[x_1;\ x_2]$ (см. рис. 6.8 и 6.9), т. е. либо $f'(x) > 0$ и $f''(x) < 0$ на $[x_1;\ x_2]$ (см. рис. 6.8), либо $f'(x) < 0$ и $f''(x) > 0$ на $[x_1;\ x_2]$ (см. рис. 6.9).

- Приведем алгоритм решения задачи в первом случае:

а) через точки $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$ кривой $y = f(x)$ проведем хорду AB. Ее уравнение имеет вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad \text{или} \quad x = x_1 + \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}(y - y_1);$$

б) найдем абсциссу точки пересечения хорды AB с осью Ox.

Положив $y = 0$, получим $x_{01} = x_1 - \dfrac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} y_1;$

в) подставив значение x_{01} в уравнение кривой $y = f(x)$, получим: $y_{01} = f(x_{01})$. Точка B_1 имеет координаты $B_1(x_{01};\ y_{01})$;

г) через точки $B_1(x_{01};\ y_{01})$ и $B\ (x_2;\ y_2)$ кривой $y = f(x)$ проведем хорду B_1B. Ее уравнение имеет вид

$$\frac{x - x_{01}}{x_2 - x_{01}} = \frac{y - y_{01}}{y_2 - y_{01}} \quad \text{или} \quad x = x_{01} + \frac{x_2 - x_{01}}{y_2 - y_{01}}(y - y_{01});$$

д) найдем абсциссу точки пересечения хорды B_1B с осью Ox. Положив $y = 0$, будем иметь:

$$x_{02} = x_{01} - \frac{x_2 - x_{01}}{y_2 - y_{01}} y_{01};$$

е) в результате получим последовательность значений x_{01}, x_{02}, x_{03}, ..., сходящуюся к x_0.

После выполнения неравенства $|x_{0i+1} - x_{0i}| < \varepsilon$, где ε — выбранная нами точность приближения, процесс следует закончить.

Итак, в первом случае вычисления производятся по формулам:

$$x_{01} = x_1 - \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} y_1; \quad y_{0i} = f(x_{0i});$$

$$x_{0_i+1} = x_{0i} - \frac{x_2 - x_{0i}}{y_2 - y_{0i}} y_{0i}, \text{ где } i = 1,\ 2,\ 3,\ ... \tag{2}$$

- Приведем алгоритм решения задачи во втором случае:

а) значения x_{01} и y_{01} находятся так же, как и в первом случае. Точка A_1 имеет координаты $A_1(x_{01};\ y_{01})$;

б) через точки A и A_1 кривой $y = f(x)$ проведем хорду AA_1. Ее уравнение имеет вид: $\dfrac{x - x_1}{x_{01} - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_{01} - y_1}$ или $x = x_1 + \dfrac{x_{01} - x_1}{y_{01} - y_1}(y - y_1)$;

в) найдем абсциссу точки пересечения хорды AA_1 с осью Ox. Положив $y = 0$, будем иметь: $x_{02} = x_1 - \dfrac{x_{01} - x_1}{y_{01} - y_1} y_1$;

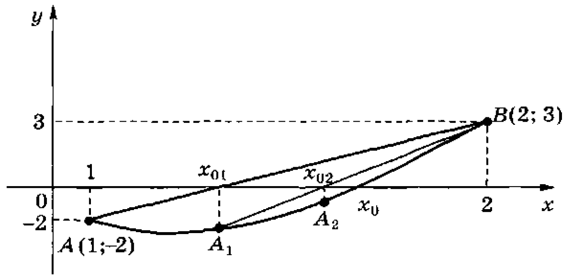
г) дальнейшие действия такие же, как и в первом случае.

Итак, во втором случае вычисления производятся по формулам:

$$x_{01} = x_1 - \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} y_1; \quad y_{0i} = f(x_{0i});$$

$$x_{0i+1} = x_1 - \frac{x_{0i} - x_1}{y_{0i} - y_1} y_1, \text{ где } i = 1,\ 2,\ 3,\ ... \tag{3}$$

Рис. 6.11



Пример. Методом хорд найти приближенное значение положительного действительного корня уравнения $x^3 - 2x - 1 = 0$ с точностью до 0,1.

Решение. 1) Ранее были найдены приблизительные границы интервала, содержащего один положительный действительный корень данного уравнения: $1 \le x_0 \le 2$.

2) $f'(x) = 3x^2 - 2$; $f''(x) = 6x$.

Так как $f'(x)$ и $f''(x) > 0$ при $x \in [1; 2]$, то вычисления проводим по формулам (2). Сделаем схематический чертеж (рис. 6.11).

3) Координаты точек A и B: A (1; –2), B(2; 3).

Итак, $A(x_1; y_1) = (1; -2)$; $B(x_2; y_2) = (2; 3)$, следовательно,

$$x_1 = 1,\ y_1 = -2 \text{ и } x_2 = 2,\ y_2 = 3.$$

4) Из формул (2) будем иметь: $x_{01} = 1 - \dfrac{2-1}{3-(-2)}(-2) = 1 + \dfrac{2}{5} = 1{,}4.$

$$y_{01} = f(x_{01}) = (1{,}4)^3 - 2 \cdot 1{,}4 - 1 = 2{,}744 - 2{,}8 - 1 = -1{,}056.$$

$$x_{02} = x_{01} - \frac{x_2 - x_{01}}{y_2 - y_{01}} y_{01}$$

или

$$x_{02} = 1{,}4 - \frac{2-1{,}4}{3-(-1{,}056)}(-1{,}056) = 1{,}4 + \frac{0{,}6}{4{,}056}1{,}056 \approx 1{,}4 + 0{,}1562 \approx 1{,}5562;$$

$$y_{02} = f(x_{02}) = (1{,}5562)^3 - 2 \cdot 1{,}5562 - 1 \approx 3{,}7687 - 3{,}1124 - 1 \approx -0{,}3437.$$

5) Составим разность $|x_{02} - x_{01}| = |1{,}5562 - 1{,}4| = 0{,}1562$.

Так как $0{,}1562 > 0{,}1$, продолжаем процесс приближений.

6) Из формул (2) имеем: $x_{03} = x_{02} - \dfrac{x_2 - x_{02}}{y_2 - y_{02}} y_{02}$

или $x_{03} = 1{,}5562 - \dfrac{2-1{,}5562}{3-(-0{,}3437)}(-0{,}3437) \approx 1{,}5562 + \dfrac{0{,}1525}{3{,}3437} \approx 1{,}6018.$

7) Составим разность $|x_{03} - x_{02}| = |1{,}6018 - 1{,}5562| = 0{,}0456$. Так как $0{,}0456 < 0{,}1$, процесс приближений закончен.

Итак, с точностью до 0,1 приближенное значение положительного действительного корня уравнения $x^3 - 2x - 1 = 0$ равно 1,6018.

6.3.4. Метод касательных (метод Ньютона)

При тех же предположениях, что и в методе хорд, изобразим схематически графики четырех типов расположения дуги кривой (рис. 6.12 — 6.15).

Отдельно рассмотрим и опишем два случая.

Случай 1. $f'(x)\ f''(x) > 0$ на $[x_1;\ x_2]$ (см. рис. 6.12 и 6.15), т. е. либо $f'(x) > 0$ и $f''(x) > 0$ на $[x_1;\ x_2]$ (см. рис. 6.12), либо $f'(x) < 0$ и $f''(x) < 0$ на $[x_1;\ x_2]$ (см. рис. 6.15).

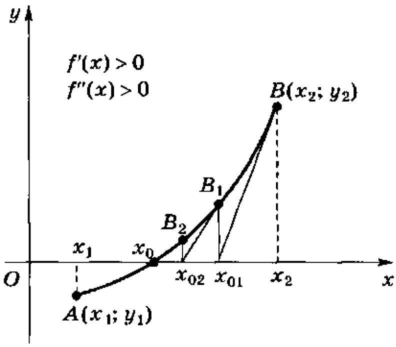


Рис. 6.12

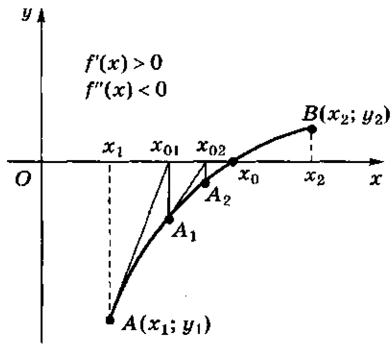


Рис. 6.13

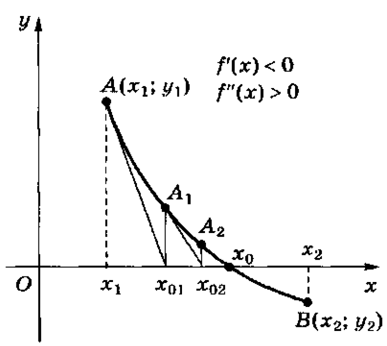


Рис. 6.14

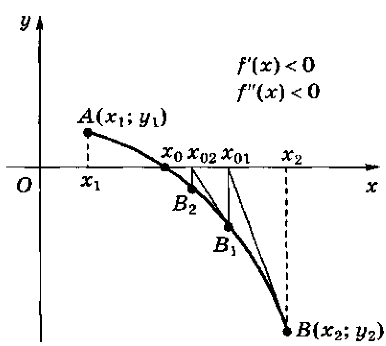


Рис. 6.15

Случай 2. $f'(x)\,f''(x) < 0$ на $[x_1;\ x_2]$ (см. рис. 6.13 и 6.14), т.е. либо $f'(x) > 0$ и $f''(x) < 0$ на $[x_1;\ x_2]$ (см. рис. 6.13), либо $f'(x) < 0$ и $f''(x) > 0$ на $[x_1;\ x_2]$ (см. рис. 6.14).

- Приведем алгоритм решения задачи в первом случае:

а) через точку $B\,(x_2;\ y_2)$ проведем касательную к кривой $y = f(x)$. Ее уравнение имеет вид:

$$y - y_2 = f'(x_2)(x - x_2) \text{ или } x = x_2 + \frac{1}{f'(x_2)}(y - y_2);$$

б) найдем абсциссу точки пересечения этой касательной с осью Ox. Положив $y = 0$, получим $x_{01} = x_2 - \dfrac{y_2}{f'(x_2)}$;

в) подставив значение x_{01} в уравнение кривой $y = f(x)$, получим: $y_{01} = f\,(x_{01})$. Точка B_1 имеет координаты $B_1(x_{01};\ y_{01})$;

г) через точку B_1 проведем касательную к кривой $y = f(x)$. Ее уравнение имеет вид:

$$y - y_{01} = f'(x_{01})\,(x - x_{01}) \text{ или } x = x_{01} + \frac{1}{f'(x_{01})}(y - y_{01});$$

д) найдем абсциссу точки пересечения этой касательной с осью Ox. Положив $y = 0$, получим $x_{02} = x_{01} - \dfrac{y_{01}}{f'(x_{01})}$;

е) в результате получим последовательность значений x_{01}, x_{02}, x_{03}, ..., сходящуюся к x_0.

После выполнения неравенства $|x_{0i+1} - x_{0i}| < \varepsilon$, где ε — выбранная нами точность приближения, процесс следует закончить.

Итак, в первом случае вычисления производятся по формулам:

$$x_{01} = x_2 - \frac{y_2}{f'(x_2)};\quad y_{0i} = f\,(x_{0i});$$
$$x_{0i+1} = x_{0i} - \frac{y_{0i}}{f'(x_{0i})},\ \text{где } i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \tag{4}$$

- Алгоритм решения задачи во втором случае будет таким же, как и в первом случае, только первая касательная будет проводиться через точку $A(x_1;\ y_1)$.

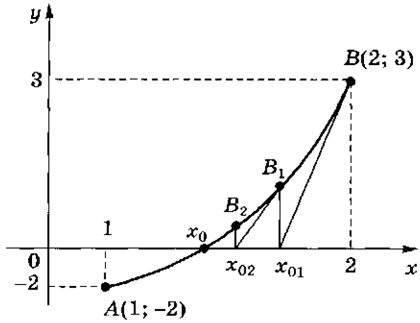


Рис. 6.16

Итак, во втором случае вычисления производятся по формулам:

$$x_{01} = x_1 - \frac{y_1}{f'(x_1)};\ y_{0i} = f\ (x_{0i});$$

$$x_{0i+1} = x_{0i} - \frac{y_{0i}}{f'(x_{0i})},\ \text{где } i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \tag{5}$$

Пример. Методом касательных найти приближенное значение положительного действительного корня уравнения $x^3 - 2x - 1 = 0$ с точностью до 0,1.

Решение. 1) Ранее были найдены приблизительные границы интервала, содержащего один положительный действительный корень данного уравнения: $1 \le x_0 \le 2$.

2) $f'(x) = 3x^2 - 2$; $f''(x) = 6x$.

Так как $f'(x)$ и $f''(x) > 0$ при $x \in [1;\ 2]$, то вычисления проводим по формулам (4). Сделаем схематический чертеж (рис. 6.16).

3) Координаты точек A и B: $A(1;\ -2)$; $B(2;\ 3)$.

Итак, $A(x_1;\ y_1) = (1;\ -2)$; $B(x_2;\ y_2) = (2;\ 3)$, следовательно, $x_1 = 1$, $y_1 = -2$ и $x_2 = 2$, $y_2 = 3$.

4) Из формул (4) будем иметь:

$$f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 2 = 10,\ x_{01} = 2 - \frac{3}{10} = 1{,}7;$$

$$y_{01} = f(x_{01}) = (1{,}7)^3 - 2 \cdot 1{,}7 - 1 = 4{,}913 - 3{,}4 - 1 = 0{,}513.$$

$$x_{02} = x_{01} - \frac{y_{01}}{f'(x_{01})};\ f'(x_{01}) = f'(1{,}7) = 3 \cdot (1{,}7)^2 - 2 = 6{,}67;$$

$$x_{02} = 1{,}7 - \frac{0{,}53}{6{,}67} \approx 1{,}7 - 0{,}0795 \approx 1{,}6205.$$

$$y_{02} = f(x_{02}) = (1{,}6205)^3 - 2 \cdot 1{,}6205 - 1 \approx 4{,}2555 - 3{,}241 - 1 = 0{,}0145.$$

5) Составим разность $|x_{02} - x_{01}| = |1{,}6205 - 1{,}7| = 0{,}0795$.

Так как $0{,}0795 < 0{,}1$, процесс приближений закончен.

Итак, с точностью до 0,1 приближенное значение положительного действительного корня уравнения $x^3 - 2x - 1 = 0$ равно 1,6205.

6.3.5. Метод последовательных приближений (метод итераций)

Предположим, что нам удалось найти достаточно малый промежуток $[x_1; x_2]$, содержащий ровно один действительный корень уравнения (1), и что функция $f(x)$ непрерывна и дифференцируема во всех точках данного промежутка.

Заменим уравнение (1) уравнением вида: $x = \varphi(x)$, равносильным данному. Это всегда можно сделать и притом многими способами.

Так, например, уравнение $x^3 - 2x - 1 = 0$ легко заменяется следующими равносильными уравнениями:

$$x = x^3 - x - 1 \text{ (здесь } \varphi(x) = x^3 - x - 1);$$

$$x = \frac{1}{2}(x^3 - 1) \text{ (здесь } \varphi(x) = \frac{1}{2}(x^3 - 1));$$

$$x = \sqrt[3]{2x+1} \text{ (здесь } \varphi(x) = \sqrt[3]{2x+1}).$$

Приведем без доказательства формулировку теоремы, определяющую условия применимости метода итераций.

$\boxed{\text{Т}}$ *Если уравнение $f(x) = 0$ и равносильное ему уравнение $x = \varphi(x)$ имеет ровно один действительный корень на промежутке $[x_1; x_2]$ и, кроме этого, выполняются условия:*

1) $|\varphi'(x)| \le q < 1$ на $[x_1; x_2]$;

2) $x_1 \le \varphi(x) \le x_2$ на $[x_1; x_2]$,

то метод итераций имеет решение, причем в качестве начального приближения корня можно брать любое действительное значение x_{01} из отрезка $[x_1; x_2]$.

Геометрическая иллюстрация метода итераций. 1) Для того чтобы приближенно, с заданной точностью, найти действительный корень x_0 уравнения $x = \varphi(x)$, содержащийся в промежутке $[x_1; x_2]$, построим графики функций $y = x$ и $y = \varphi(x)$ на этом промежутке и определим абсциссу x_0 их точки пересечения (рис. 6.17).

2) В качестве начального приближения возьмем ***любое*** действительное значение x_{01} из промежутка $[x_1; x_2]$. Подставляя его в функцию $y = \varphi(x)$, получим величину $y_{01} = \varphi(x_{01})$. Геометрически этому действию соответствует точка A_1 кривой $y = \varphi(x)$. Подставляя затем y_{01} в функцию $y = x$, получаем значение $x_{02} = y_{01}$.

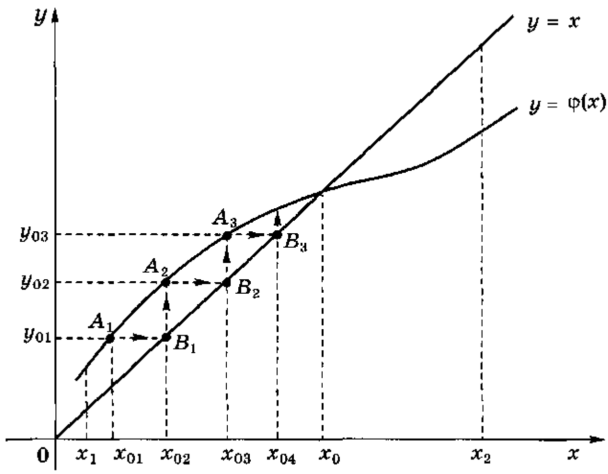


Рис. 6.17

Геометрически этому действию соответствует точка B_1 прямой $y = x$.

3) Подставляя значение x_{02} в функцию $y = \varphi(x)$, получим величину $y_{02} = \varphi(x_{02})$. Геометрически этому действию соответствует точка A_2 кривой $y = \varphi(x)$. Подставляя затем y_{02} в функцию $y = x$, получаем значение $x_{03} = y_{02}$. Геометрически этому действию соответствует точка B_2 прямой $y = x$.

4) В результате получим последовательность значений x_{01}, x_{02}, x_{03}, ..., сходящуюся к x_0, причем $x_{02} = \varphi(x_{01})$, $x_{03} = \varphi(x_{02})$, ..., $x_{0i} = \varphi(x_{0i-1})$.

5) После выполнения неравенства $|x_{0i+1} - x_{0i}| < \varepsilon$, где ε — выбранная нами точность приближения, процесс следует закончить.

Дальнейшие пояснения дадим на конкретном примере.

Пример. Методом итераций найти приближенное значение положительного действительного корня уравнения $x^3 - 2x - 1 = 0$ с точностью до 0,1.

Решение. 1) Ранее были найдены приблизительные границы интервала, содержащего один положительный действительный корень данного уравнения: $1 \le x_0 \le 2$.

2) Представим уравнение $x^3 - 2x - 1 = 0$ в виде $x = \sqrt[3]{2x+1}$, где $\varphi(x) = \sqrt[3]{2x+1}$, и проверим выполнение двух условий теоремы, определяющей применимость метода итераций:

а) $\varphi'(x) = \frac{1}{3}(2x+1)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2 = \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x+1)^2}}$.

Нетрудно заметить, что $\varphi'(x) > 0$ на [1; 2] и ее значения убывают на [1; 2]. Так как $\varphi'(1) = \frac{2}{3\sqrt[3]{9}}$, то $|\varphi'(x)| \le \frac{2}{3\sqrt[3]{9}} < 1$ на [1; 2] — первое условие выполнено;

б) Выполнение второго условия теоремы, т.е. условия $x_1 \le \varphi(x) \le x_2$ на $[x_1; x_2]$, в данном случае должно сводиться к выполнению неравенства $1 \le \sqrt[3]{2x+1} \le 2$ на [1; 2]. Его решение эквивалентно решению системы двух неравенств

$$\begin{cases} \sqrt[3]{2x+1} \ge 1 \\ \sqrt[3]{2x+1} \le 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+1 \ge 1 \\ 2x+1 \le 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x \le 3{,}5 \end{cases} \Rightarrow x \in [0; 3{,}5].$$

Таким образом, неравенство $1 \le \sqrt[3]{2x+1} \le 2$ справедливо на промежутке [0; 3,5] и, следовательно, справедливо на промежутке [1; 2], который содержится в [0; 3,5] — второе условие теоремы выполнено.

3) В качестве начального приближения возьмем значение $x_{01} = 1{,}5$, которое является серединой промежутка [1; 2].

Найдем последующие приближения:

$$x_{02} = \varphi(x_{01}) = \sqrt[3]{2 \cdot 1{,}5 + 1} = \sqrt[3]{3+1} = \sqrt[3]{4}.$$

Величину $\sqrt[3]{4}$ можно также вычислить методом итераций. Покажем как это делается.

Итак, пусть требуется вычислить $\sqrt[n]{a}$, где a — некоторое положительное действительное число. Эта задача равносильна отысканию положительного действительного корня алгебраического уравнения $x^n - a = 0$.

Преобразуем это уравнение к виду $x = \varphi(x)$. Для этого к обеим частям прибавим слагаемое nx^n. Будем иметь: $nx^n + x^n - a = nx^n$ или $nx^n = a + (n-1)x^n$. Разделив обе части на nx^{n-1}, получим

$$x = \frac{1}{n}\left(\frac{a}{x^{n-1}} + (n-1)x\right).$$

Таким образом, $\varphi(x) = \frac{1}{n}\left(\frac{a}{x^{n-1}} + (n-1)x\right)$.

Два условия теоремы применимости метода итераций будут также выполняться вблизи искомого корня.

Если за начальное приближение x_{01} взять грубое приближенное значение искомого корня (в данном случае можно взять $x_{01} = 1$), то последующие приближения x_{02}, x_{03}, ... вычисляют по формуле

$$x_{0i+1} = \frac{1}{n}\left(\frac{a}{x_{0i}^{\,n-1}} + (n-1)x_{0i}\right), \; i = 1, 2, \ldots$$

Процесс следует остановить после выполнения неравенства $|x_{0i+1} - x_{0i}| < \varepsilon$, где ε — заданная точность приближения.

Вычислим теперь $\sqrt[3]{4}$ с точностью до 0,1. В данном случае $a = 4$; $n = 3$. За начальное приближенное принимаем $x_{01} = 1$.

Найдем последующие приближения:

$$x_{02} = \frac{1}{3}\left(\frac{4}{1^2} + 2 \cdot 1\right) = 2; \ |x_{02} - x_{01}| = |2 - 1| = 1 > 0,1;$$

$$x_{03} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4}{2^2} + 2 \cdot 2\right) = \frac{5}{3} \approx 1,6667; \ |x_{03} - x_{02}| = |1,6667 - 2| = 0,3333 > 0,1;$$

$$x_{04} = \frac{1}{3}\left(\frac{4}{(1,6667)^2} + 2 \cdot 1,6667\right) \approx 1,5911; \ |x_{04} - x_{03}| = |1,5911 - 1,6667| =$$

$$= 0,0756 < 0,1.$$

Таким образом, $\sqrt[3]{4} \approx 1,5911$ с точностью до 0,1.

Продолжим решение примера.

Приближение $x_{02} = \sqrt[3]{4} \approx 1,5911$.

Вычислим разность $|x_{02} - x_{01}| = |1,5911 - 1,5| = 0,0911$.

Так как $0,0911 < 0,1$, процесс приближений закончен.

Итак, с точностью до 0,1 приближенное значение положительного действительного корня уравнения $x^3 - 2x - 1 = 0$ равно 1,5911.

Задачи для самостоятельного решения

1. В результате измерения получены приближенные значения величин: $x = 34,8\ (\pm 0,2)$; $y = 0,00464(\pm 0,00004)$; $z = 4327\ (\pm 30)$. Найдите предельную относительную погрешность каждого из данных чисел.

2. Вычислите: а) $x = a + b - c$, если $a = 8,14(\pm 0,01)$; $2,13 < b < 2,16$; $c = 3,5\ (\pm 0,05)$;

б) $x = a\,b$, если $3,141 < a < 3,142$; $0,0781 < b < 0,0784$;

в) $x = \frac{a}{b}$, если $3,85 < a < 3,88$; $b = 25,7\ (\pm 0,1)$;

г) $x = \frac{ab^2}{c^3}$, если $a = 4,378(\pm 0,002)$; $b = 3,42(\pm 0,005)$; $c = 2,941(\pm 0,001)$;

д) $x = \frac{a\sqrt{b}}{c}$, если $a = 85,39(\pm 0,01)$; $b = 45,1(\pm 0,05)$; $708,5 < c < 709,0$.

3. Методом половинного деления с точностью до 0,01 найдите приближенное значение наибольшего действительного корня следующих алгебраических уравнений:

а) $x^5 - 3x^3 + 6x - 3 = 0$; б) $x^5 + 0{,}2x - 0{,}84 = 0$;
в) $x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4 = 0$; г) $x^3 - 0{,}2x^2 - 0{,}2x - 1{,}2 = 0$;
д) $4x^3 + 3x^2 - 9x + 2 = 0$; е) $x^3 - 3x^2 - 7x + 4 = 0$.

4. Методом хорд с точностью до 0,01 найдите приближенное значение наибольшего действительного корня следующих алгебраических уравнений:

а) $x^4 - 4x - 1 = 0$; б) $x^3 - 3x^2 + 5x - 4 = 0$;
в) $x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$; г) $x^3 + 2x^2 - 3x - 7 = 0$;
д) $x^3 + 3x^2 + 2x + 5 = 0$; е) $x^3 - 2x^2 + 3x - 5 = 0$.

5. Методом касательных с точностью до 0,01 найдите приближенное значение наибольшего действительного корня следующих алгебраических уравнений:

а) $2x^3 - 5x^2 + 1 = 0$; б) $x^3 - 2x^2 - 4x - 7 = 0$;
в) $x^3 - x^2 - 9x + 9 = 0$; г) $5x^3 - x - 1 = 0$;
д) $x^3 + x^2 - 3 = 0$; е) $3x^3 - 0{,}9x - 6 = 0$.

6. Методом итераций с точностью до 0,01 найдите приближенное значение следующих выражений: а) $\sqrt[3]{30}$; б) $\sqrt[10]{5}$.

7. Методом итераций с точностью до 0,01 найдите приближенное значение наибольшего действительного корня следующих алгебраических уравнений:

а) $2x^4 - x - 2 = 0$; б) $x^3 - 4x - 1 = 0$;
в) $x^3 + 12x - 2 = 0$; г) $x^3 - x + 1 = 0$;
д) $x^3 - 2x - 3 = 0$.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Дайте определения абсолютной и относительной погрешностей приближенного числа.
2. Определите на примерах абсолютную и относительную погрешности величин, полученных в результате арифметического действия над исходными и приближенными числами.
3. Перечислите основные приемы численного решения алгебраических уравнений с одной переменной.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

Абсолютная погрешность, относительная погрешность, округление чисел, значащие цифры, основная теорема алгебры, теорема Декарта.

Глава 7

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

7.1. СОБЫТИЯ И ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ. КЛАССИЧЕСКОЕ И СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ СЛУЧАЙНОГО СОБЫТИЯ

7.1.1. Понятие события

Известно, что любая наука, развивающая общую теорию какого-либо круга явлений, содержит ряд основных понятий, на которых она базируется. Таковы, например, в геометрии понятия точки, прямой линии; в механике — понятия силы, массы, скорости, ускорения и т.д. Естественно, что не все основные понятия могут быть строго определены, так как определить понятие — это значит свести его к другим, более известным. Очевидно, процесс представления одних понятий через другие должен где-то заканчиваться, дойдя до самых первичных понятий, к которым сводятся все остальные и которые сами строго не определяются, а только поясняются. Такие основные понятия существуют и в теории вероятностей. В качестве первого из них введем понятие «событие».

O Результат произведенного (или могущего быть произведенным) испытания называется ***событием***.

Наблюдаемые нами события можно подразделить на три вида: достоверные события, невозможные события и случайные события.

O Событие называется ***достоверным***, если в результате данного испытания оно обязательно произойдет.

Пример. Извлечение белого шара из урны, содержащей только белые шары.

O Событие называется ***невозможным***, если в результате данного испытания оно произойти не может.

Пример. Выпадение 7 очков при однократном бросании игрального кубика.

О Событие называется ***случайным***, если в результате данного испытания оно может произойти или не произойти.

Пример. Попадание в цель при выстреле из орудия.

Каждое случайное событие есть следствие действия очень многих причин, учесть влияние которых на результат испытания не представляется возможным.

Задачей теории вероятностей является не предсказание того, произойдет или нет единичное случайное событие, а установление закономерностей многократно наблюдаемых при одних и тех же условиях случайных событий, поскольку достаточно большое число однородных случайных событий, независимо от их конкретной природы, подчиняется определенным закономерностям (называемым вероятностными).

7.1.2. Виды случайных событий

О Два события A и B называются ***несовместными***, если появление одного из них исключает возможность появления другого.

Пример. В урне находятся белые и черные шары. Вынимаем один шар. Событие A — шар белый, событие B — шар черный. События A и B несовместны.

О Два события A и B называются ***совместными***, если появление одного из них не исключает возможности появления другого.

Пример. Бросаются два игральных кубика. Событие A — выпадение шестерки на первом кубике, событие B — выпадение шестерки на втором кубике. События A и B совместны.

О Группа событий $A_1, A_2, ..., A_n$ называется ***группой несовместных событий***, если события, входящие в группу, попарно несовместны.

Пример. Производится выстрел по мишени. Событие A_1 — попадание в десятку, A_2 — попадание в пятерку, A_3 — промах. События A_1, A_2, A_3 образуют группу несовместных событий.

О Группа событий называется ***группой совместных событий***, если совместны хотя бы два события из этой группы.

Пример. Производится три выстрела по мишени. Событие A_1 — попадание в мишень при первом выстреле, A_2 — попадание в мишень при втором выстреле, A_3 — попадание в мишень при третьем выстреле. События A_1, A_2, A_3 образуют группу совместных событий.

$\boxed{\text{О}}$ События $A_1, A_2, ..., A_n$ называют ***единственно возможными***, если при испытании неизбежно произойдет хотя бы одно из этих событий.

Пример. Монету подбросили два раза. Единственно возможными будут события: A_1 — ГГ, A_2 — РР, A_3 — ГР, A_4 — РГ (Г — выпадение герба, Р — выпадение решки).

$\boxed{\text{О}}$ События $A_1, A_2, ..., A_n$ образуют ***полную группу событий***, если они являются единственно возможными и несовместными исходами некоторого испытания.

Пример. Стрелок стреляет в цель. Событие A_1 — попадание, событие A_2 — промах. События A_1 и A_2 образуют полную группу событий.

$\boxed{\text{О}}$ Если полную группу образуют только два несовместных события, то они называются ***противоположными.***

Пример. Производится однократное бросание монеты. Событие A_1 — выпадение герба, событие A_2 — выпадение решки. События A_1 и A_2 — противоположные (обозначаются A и $\bar{A}$).

$\boxed{\text{О}}$ События A_1, A_2, ..., A_n называются ***равновозможными***, если имеются основания полагать, что ни одно из этих событий не является более возможным, чем другие.

Пример. Бросается игральный кубик. События $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ являются равновозможными, где A_1 — появление 1, A_2 — появление 2, ..., A_6 — появление 6.

7.1.3. Классическое определение вероятности события

Для определения большей или меньшей возможности появления того или иного события вводится понятие вероятности события.

Пусть в результате испытания произошло n простых, попарно несовместных, единственно возможных и равновозможных исходов, при которых интересующее нас событие A может произойти или не произойти (эти исходы образуют полную группу событий). В m из этих исходов появление события A достоверно, в $n - m$ исходах — невозможно ($m \le n$). Исходы, при которых событие A происходит обязательно, называются ***благоприятствующими*** появлению события A.

$\boxed{\text{О}}$ ***Вероятностью*** события A называется отношение числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех простых, попарно несовместных, единственно возможных и равновозможных исходов испытания:

$$\boxed{P(A)=\frac{m}{n}.}$$

Возможны случаи:

1) $m=n \Rightarrow P(A)=1$ — вероятность достоверного события равна 1;

2) $m=0 \Rightarrow P(A)=0$ — вероятность невозможного события равна 0;

3) $m \neq n, m \neq 0 \Rightarrow 0<P(A)<1$.

Окончательно: вероятность события есть неотрицательное число $0 \leq P(A) \leq 1$.

Примеры. 1. Игральный кубик подбросили один раз. Какова вероятность появления шестерки?

Решение. $n=6,\ m=1 \Rightarrow P(A)=\frac{1}{6}$.

2. В урне 3 белых и 7 черных шаров. Случайным образом вынули один шар. Какова вероятность того, что он белый?

Решение. $n=10,\ m=3 \Rightarrow P(A)=\frac{3}{10}$.

3. Бросили один раз два игральных кубика. Какова вероятность того, что на обеих гранях в сумме выпадет 7 очков?

Решение. Найдем m (см. таблицу): $m=6 \Rightarrow P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$.

Кубик № 1	1	2	3	4	5	6
Кубик № 2	6	5	4	3	2	1

Классическое определение вероятности дает возможность рассматривать лишь события, которые распадаются на ***конечное*** число ***равновероятных*** исходов. Это — недостаток классического определения вероятности. Построим понятие вероятности события для случаев с ***бесконечным*** множеством равновероятных исходов испытания. В общем виде задачу, которая приводит к расширению понятия вероятности и к другому ее определению, можно сформулировать следующим образом.

Пусть на плоскости имеется область G и некоторая область g в ней. Их площади равны соответственно S_G и S_g. В область G бросается наугад точка. Вероятность того, что точка окажется в области g, принимается равной $P = \frac{S_g}{S_G}$. При этом предполагается, что точка может попасть в любую часть области G, а вероятность попадания в область g пропорциональна лишь ее площади и не зависит ни от расположения, ни от формы области. Аналогично могут быть определены вероятности попадания точки в объем v, находящийся в объеме $V(P = v/V)$, на отрезок l, расположенный на отрезке $L(P = l/L)$. Вероятности, определенные по такой схеме, получили название *геометрических*.

7.1.4. Статистическое определение вероятности события

В основу классического и геометрического определений вероятности положено понятие *равновероятности* (которое является далеко не очевидным). Кроме того, часто бывает трудно подобрать конечную (или бесконечную) группу единственно возможных, равновозможных и несовместных исходов испытания, а в большинстве случаев этого сделать нельзя. Например, если игральный кубик – неправильный шестигранник из неоднородного металла, то предположение о равновероятности выпадения граней становится ошибочным. Однако опыты с такими игральными кубиками показывают, что в сериях из достаточно большого числа подбрасываний частоты появлений граней очень устойчивы и незначительно колеблются около некоторых постоянных для каждой грани величин (*частотой события A* в данной серии испытаний называется отношение числа испытаний, в которых произошло событие A, к общему числу испытаний). При рассмотрении экономических задач, задач естественно-научного характера часто встречаются события, которые также обладают свойством устойчивости частоты, но к ним не применимо классическое определение вероятности, так как каждое из них не распадается на конечное число единственно-возможных, равновозможных и несовместных исходов. Учитывая вышеизложенное, можно предположить, что вероятности таких событий все же существуют как числовые характеристики возможного появления каждого из них. Полный произвол в выборе равновероятных событий, невозможность применения понятия вероятности к статистическим фактам заставляют нас не считать классическое определение вероятности основным. Эти принципиальные трудности преодолеваются при статистическом определении вероятности.

Если о событии A известно, что оно может наступить в определенных условиях, которые могут повторяться неограниченное число раз, а в результате большого числа наблюдений установлено, что частота его почти всегда колеблется около некоторой (вообще говоря неизвестной) постоянной величины P, то будем считать, что событие A имеет вероятность, которая равна P.

О За ***приближенное значение вероятности*** события принимается его частота в серии из достаточно большого числа наблюдений. Подчеркнем, что в этом случае не определяется вероятность события, а лишь постулируется ее существование и указывается способ для приближенного ее определения.

Можно показать, что вероятности, определенные статистически, обладают теми же свойствами, как и вероятности, полученные с помощью классического определения. Частота любого события, вероятность которого можно найти, пользуясь классическим определением вероятности, колеблется около этой вероятности. Поэтому статистическое определение вероятности является обобщением классического и относится как к событиям, к которым применимо классическое определение вероятности (и дает тот же результат), так и ко многим другим.

7.2. КОМБИНАТОРИКА. ВЫБОРКИ ЭЛЕМЕНТОВ

7.2.1. Общие правила комбинаторики

О ***Комбинаторикой*** называется область математики, в которой изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из элементов, принадлежащих данному множеству.

Правило суммы. Если некоторый объект A можно выбрать m способами, а объект B – k способами (не такими, как для объекта A), то объект «либо A, либо B» можно выбрать $(m + k)$ способами.

Пример. В одном ящике m шаров, в другом — k шаров. Произвольно из какого-нибудь ящика извлекаем шар. Сколькими способами это можно сделать? *Ответ*: $(m + k)$ способами.

Правило произведения. Если объект A можно выбрать m способами, а после каждого такого выбора другой объект B можно выбрать k способами (независимо от выбора объекта A), то пары объектов A и B можно выбрать mk способами.

Пример. Из первого ящика, в котором m шаров, берем один шар и независимо от этого из второго ящика, в котором k шаров, берем один шар. Сколько различных пар шаров при этом образуется? *Ответ*: mk пар.

7.2.2. Выборки элементов

Пусть имеется некоторое множество из n элементов a_1, a_2, ..., a_n. Из этого множества можно образовать разные выборки, каждая из которых содержит m элементов $(0 \le m \le n)$.

Выборки могут быть упорядоченными — *размещениями* и неупорядоченными — *сочетаниями*.

О ***Размещениями*** из n элементов по m называют такие выборки, которые, имея по m элементов, выбранных из числа данных n элементов, отличаются одна от другой либо составом элементов, либо порядком их расположения.

Число размещений из n элементов по m элементов вычисляется по формуле:

$$\boxed{A_n^m = n(n-1)(n-2)\dots[n-(m-1)] = \frac{n!}{(n-m)!}.}$$

Примеры. 1. В высшей лиге чемпионата страны по футболу 16 команд. Борьба идет за золотые, серебряные и бронзовые медали. Сколькими способами медали могут быть распределены между командами?

Решение. $A_{16}^3 = 16 \cdot 15 \cdot 14 = 3360$ способами.

2. В классе 10 учебных предметов и 5 разных уроков в день. Сколькими способами могут быть распределены уроки в один день?

Решение. $A_{10}^5 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30\,240$ способами.

О Если размещения из n элементов взяты по n (т.е. отличаются *только порядком расположения элементов*), то такие размещения называются ***перестановками***.

Число перестановок вычисляется с помощью соотношения:

$$\boxed{P_n = A_n^n = n(n-1)(n-2)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!}$$

Пример. Сколькими способами можно разместить 12 лиц за столом, на котором поставлено 12 приборов?

Решение. $P_{12}=12!=479\,001\,600$ способами.

О Если из всех размещений, которые можно составить из n элементов по m, отобрать только те, которые одно от другого отличаются, *по крайней мере одним элементом*, то получим выборки, которые называются ***сочетаниями***.

Если в каждом из сочетаний сделать всевозможные перестановки, то получим всевозможные размещения. Таким образом, число всех размещений из n элементов по m равно числу всех сочетаний из n элементов по m, умноженному на число всех перестановок, какие можно сделать из m элементов, т.е. $A_n^m=C_n^m P_m$. Отсюда:

$$\boxed{C_n^m=\frac{A_n^m}{P_m}=\frac{n!}{(n-m)!m!}}.$$

7.2.3. Свойства числа сочетаний

Свойства числа сочетаний можно выразить следующими формулами:

1) $C_n^0=1$; 2) $C_n^1=n$; 3) $C_n^m=C_n^{n-m}$; 4) $C_n^n=C_n^0=1$.

Примеры. 1. В спортивной секции занимаются 12 баскетболистов. Сколько может быть организовано тренером разных стартовых пятерок?

Решение. $C_{12}^5=\dfrac{12!}{7!5!}=792$.

2. Из группы, насчитывающей 25 человек, выбирают троих для поездки на соревнование. Сколькими способами это может быть сделано?

Решение. $C_{25}^3=\dfrac{25!}{22!3!}=2\,300$.

3. В партии из N деталей имеется n стандартных. Наудачу отобраны l деталей. Найти вероятность того, что среди отобранных деталей ровно k стандартных.

Решение. 1) $P(A)=\dfrac{m}{n}$. Найдем m и n.

2) Общее число элементарных исходов равно C_N^l. Подсчитаем число благоприятствующих исходов. Происходит сложное событие: из l де-

талей должно быть k стандартных (стандартные детали можно отобрать только из стандартных; число способов отбора равно C_n^k) и $l-k$ нестандартных (нестандартные детали можно отобрать только из нестандартных; число способов отбора равно C_{N-n}^{l-k}). В итоге имеем $m = C_n^k C_{N-n}^{l-k}$. Искомая вероятность равна $P(A) = \frac{C_n^k C_{N-n}^{l-k}}{C_N^l}$. Система вероятностей, задаваемая этой формулой, называется ***гипергеометрическим распределением***.

Задачи для самостоятельного решения

1. Германн из повести А. С. Пушкина «Пиковая дама» вынимает 3 карты из колоды в 52 листа. Найдите вероятность того, что это будут: тройка, семерка, туз.

2. В ящике лежат 15 красных, 9 синих и 6 зеленых шаров, одинаковых на ощупь. Наудачу вынимают 6 шаров. Какова вероятность того, что вынуты 1 зеленый, 2 синих и 3 красных шара?

3. Владелец одной карточки лотереи «Спортлото» (6 из 49) зачеркивает 6 номеров. Какова вероятность того, что им будет угадано 5 номеров в очередном тираже?

4. В партии из 10 деталей имеются 4 бракованных. Какова вероятность того, что среди наудачу отобранных 5 деталей окажутся 2 бракованные?

5. В урне 10 шаров, из которых 2 белых, 3 черных и 5 синих. Наудачу извлечены 3 шара. Какова вероятность того, что все 3 шара разного цвета?

6. Коллектив, включающий четырех женщин и троих мужчин, разыгрывает 4 билета в театр. Какова вероятность того, что среди обладателей билетов окажется 2 женщины и 2 мужчины?

7. В группе из 25 студентов, среди которых 10 девушек, разыгрываются 5 билетов. Определите вероятность того, что среди обладателей билетов окажутся две девушки.

8. В урне 6 белых, 4 черных и 5 красных шаров. Из урны наугад вынимают 5 шаров. Найдите вероятность того, что среди них окажутся 1 черный и 2 белых шара.

9. Юноша забыл две последние цифры телефонного номера своей знакомой и, помня лишь, что они различны, набрал их наудачу. Какова вероятность того, что номер будет набран правильно?

7.3. СУММА И ПРОИЗВЕДЕНИЕ СОБЫТИЙ. ВЕРОЯТНОСТЬ ПОЯВЛЕНИЯ ХОТЯ БЫ ОДНОГО СОБЫТИЯ

7.3.1. Сумма и произведение событий

[О] ***Суммой*** $A + B$ двух событий A и B называется событие, состоящее в появлении либо события A, либо события B, либо обоих этих событий вместе (рис. 7.1).

[Т1] *Вероятность* ***суммы двух несовместных событий*** *A и B равна сумме вероятностей этих событий:* $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

[Т2] *Вероятность* ***суммы*** *конечного или бесконечного множества* ***несовместных событий*** *равна сумме вероятностей этих событий:* $P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n)$.

[С1] Если события $A_1, A_2, ..., A_n$ образуют полную группу несовместных событий, то сумма их вероятностей равна единице: $P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) = 1$.

[С2] Сумма вероятностей противоположных событий равна единице: $P(A) + P(\bar{A}) = 1$ или $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Примеры. 1. В урне 10 красных, 15 синих и 5 белых шаров. Из нее вынимается наугад один шар. Какова вероятность того, что этот шар не белый?

Решение. Пусть событие A — вынутый шар не белый. Покажем три способа решения задачи.

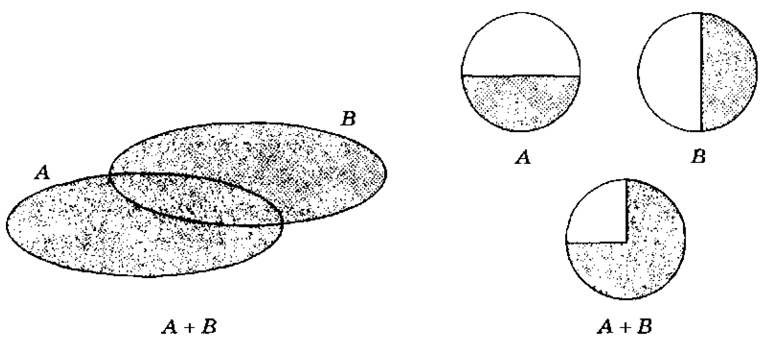


Рис. 7.1

Решение. Рассмотрим события: A — первый раз выпадет герб, $P(A) = \frac{1}{2}$ и B — второй раз выпадет герб, $P(B) = \frac{1}{2}$.

События A и B независимы. Тогда $P(AB) = P(A)P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

2. В первой урне 7 белых и 3 черных шара, во второй – 3 белых и 7 черных шаров. Из каждой урны наудачу вынимают один шар. Какова вероятность того, что оба вынутых шара белые?

Решение. Обозначим события: A — вынутый из первой урны шар белый; B — вынутый из второй урны шар белый. События A и B — независимы, поэтому $P(AB) = P(A)P(B) = \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{10} = 0{,}21$.

3. Три стрелка независимо друг от друга стреляют по цели. Вероятность попадания в цель первым стрелком равна 0,7; вторым — 0,8; третьим — 0,9. Найти вероятность того, что: 1) все три стрелка попадут в цель; 2) все три стрелка промахнутся; 3) только один стрелок попадет в цель; 4) только два стрелка попадут в цель; 5) не более двух стрелков попадут в цель; 6) хотя бы один стрелок попадет в цель.

Решение. 1) Пусть событие A — все три стрелка попадут в цель.

Обозначим вероятность того, что первый стрелок попадет в цель $P(1) = 0{,}7$; второй — $P(2) = 0{,}8$; третий — $P(3) = 0{,}9$. Тогда

$$P(A) = P(1)P(2)P(3) = 0{,}7 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}9 = 0{,}504.$$

2) Обозначим вероятность того, что первый стрелок промахнется $P(\bar{1}) = 0{,}3$; второй — $P(\bar{2}) = 0{,}2$; третий — $P(\bar{3}) = 0{,}1$. Тогда

$$P(A) = P(\bar{1}) \cdot P(\bar{2}) \cdot P(\bar{3}) = 0{,}3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}006.$$

3) Только один стрелок попадет в цель, если произойдет либо событие $A_1 : 1 \cdot \bar{2} \cdot \bar{3}$, либо событие $A_2 : \bar{1} \cdot 2 \cdot \bar{3}$, либо событие $A_3 : \bar{1} \cdot \bar{2} \cdot 3$. Переходя к вероятностям, получим

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = P(1)P(\bar{2})P(\bar{3}) + P(\bar{1})P(2)P(\bar{3}) + P(\bar{1})P(\bar{2})P(3) =$$
$$= 0{,}7 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 + 0{,}3 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}1 + 0{,}3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}9 = 0{,}014 + 0{,}024 + 0{,}054 = 0{,}092.$$

4) Из соображений, аналогичных предыдущему случаю, получим

$$P(A) = P(1)P(2)P(\bar{3}) + P(1)P(\bar{2})P(3) + P(\bar{1})P(2)P(3) = 0{,}7 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}1 +$$
$$+ 0{,}7 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}9 + 0{,}3 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}9 = 0{,}056 + 0{,}126 + 0{,}216 = 0{,}398.$$

5) Не более двух стрелков попадут в цель, если произойдет либо событие A_1 — все три стрелка промахнутся, либо событие A_2 — только один стрелок попадет в цель, либо событие A_3 — только два стрелка

попадут в цель. Вероятности событий A_1, A_2, A_3 у нас уже известны: $P(A_1)=0{,}006$; $P(A_2)=0{,}092$; $P(A_3)=0{,}398$. Будем иметь:

$$P(A)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=0{,}496.$$

б) Рассмотрим два события: A — хотя бы один стрелок попадет в цель; $\bar{A}$ — все трое промахнутся. Эти события являются противоположными, следовательно, $P(A)=1-P(\bar{A})=1-0{,}006=0{,}994$.

4. Товар завозится в магазин с трех баз. Вероятности того, что нужный товар находится на первой, второй и третьей базах, равны соответственно: 0,6; 0,7; 0,8. Найти вероятность того, что нужный товар есть: а) только на одной базе; б) не менее чем на двух базах; в) хотя бы на одной базе.

Решение. Задачи такого типа решаются с помощью теорем сложения и умножения вероятностей. Обозначим через A_1, A_2, A_3 — события, состоящие в том, что нужный товар есть соответственно на первой, второй и третьей базах. Тогда событие B_1, обозначающее наличие товара только на одной базе, будет равно сумме несовместных событий $A_1\overline{A_2}\overline{A_3}+\overline{A_1}A_2\overline{A_3}+\overline{A_1}\overline{A_2}A_3$ (товар есть на одной и отсутствует на двух других базах).

Пусть событие B_2 — наличие товара только на двух базах: $B_2=A_1A_2\overline{A_3}+A_1\overline{A_2}A_3+\overline{A_1}A_2A_3$. Через B_3 обозначим событие — товар есть на всех трех базах, тогда $B_3=A_1\,A_2\,A_3$. По условию задачи A_1, A_2, A_3 независимы и $P(A_1)=0{,}6$; $P(A_2)=0{,}7$; $P(A_3)=0{,}8$.

Вероятности противоположных событий $P(\overline{A_1})=1-0{,}6=0{,}4$; $P(\overline{A_2})=1-0{,}7=0{,}3$; $P(\overline{A_3})=1-0{,}8=0{,}2$.

а) Вероятность того, что товар есть только на одной базе, равна:

$$P(B_1)=P(A_1\overline{A_2}\overline{A_3}+\overline{A_1}A_2\overline{A_3}+\overline{A_1}\overline{A_2}A_3)=$$
$$=P(A_1\overline{A_2}\overline{A_3})+P(\overline{A_1}A_2\overline{A_3})+P(\overline{A_1}\overline{A_2}A_3)=$$
$$=0{,}6\cdot 0{,}3\cdot 0{,}2+0{,}4\cdot 0{,}6\cdot 0{,}2+0{,}4\cdot 0{,}3\cdot 0{,}8=0{,}026+0{,}056+0{,}096=0{,}188.$$

б) Наличие товара не менее чем на двух базах означает, что он может быть либо на двух базах, либо на всех трех.

Вероятность такого события равна:

$$P(B_2+B_3)=P(B_2)+P(B_3)=P(A_1A_2\overline{A_3})+P(A_1\overline{A_2}A_3)+P(\overline{A_1}A_2A_3)+$$
$$+P(A_1A_2A_3)=0{,}6\cdot 0{,}7\cdot 0{,}2+0{,}6\cdot 0{,}3\cdot 0{,}8+0{,}4\cdot 0{,}7\cdot 0{,}8+0{,}6\cdot 0{,}7\cdot 0{,}8=$$
$$=0{,}084+0{,}144+0{,}224+0{,}336=0{,}788.$$

в) Найдем вероятность того, что товар есть хотя бы на одной базе. Пусть B_4 — событие, состоящее в том, что товара нет ни на одной из баз, тогда $B_4=\overline{A_1}\overline{A_2}\overline{A_3}$. Искомая вероятность равна:

$$P(A)=1-P(B_4)=1-P(\overline{A_1}\overline{A_2}\overline{A_3})=1-0{,}024=0{,}976.$$

Выполним проверку полученных результатов. Легко видеть, что события B_1, B_2, B_3, B_4 образуют полную группу. Следовательно, сумма их вероятностей должна быть равна единице. Действительно:

$$P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) + P(B_4) = 0{,}188 + 0{,}788 + 0{,}024 = 1.$$

Задача решена правильно.

7.3.4. Теорема сложения вероятностей для совместных событий

Т *Вероятность появления* ***хотя бы одного*** *из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:*

$$\boxed{P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).}$$

Примеры. 1. Производится два выстрела по одной и той же мишени. Вероятность попадания в мишень при первом выстреле равна 0,6, при втором — 0,8. Найти вероятность того, что в мишени будет хотя бы одна пробоина.

Решение. Первый способ. Рассмотрим события: A — попадание в мишень при первом выстреле $P(A) = 0{,}6$; B — попадание в мишень при втором выстреле $P(B) = 0{,}8$. События A и B являются совместными и независимыми, следовательно,

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) =$$
$$= 0{,}6 + 0{,}8 - 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}92.$$

Второй способ. Рассмотрим два события: C — в мишени будет хотя бы одна пробоина; $\bar{C}$ — в мишени нет пробоин. Эти события являются противоположными, следовательно, $P(C) = 1 - P(\bar{C})$, но $P(\bar{C}) = P(\bar{A})P(\bar{B}) =$ $=$ (т. е. промах и при первом и при втором выстрелах) $= 0{,}4 \cdot 0{,}2 = 0{,}08$. Окончательно: $P(\bar{C}) = 1 - 0{,}08 = 0{,}92$.

2. Бросают два игральных кубика. Какова вероятность появления хотя бы одной шестерки?

Решение. Первый способ. Рассмотрим события: A — появление шестерки на первом кубике; $P(A) = \frac{1}{6}$; B — появление шестерки на втором кубике; $P(B) = \frac{1}{6}$. События A и B — совместны и независимы, следовательно, $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{11}{36}$.

Второй способ решения задачи аналогичен предыдущему примеру. Рассмотрим события: C — появление хотя бы одной шестерки, $\bar{C}$ — шесторок нет ни на одном кубике. Эти события являются противоположными, следовательно, $P(C)=1-P(\overline{C})$, но $P(\overline{C})=P(\overline{A})P(\overline{B})=\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{25}{36}$.

Окончательно, $P(C)=1-\frac{25}{36}=\frac{11}{36}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Известно, что 96 % выпускаемых заводом изделий отвечает стандарту. Упрощенная схема контроля признает пригодной стандартную продукцию с вероятностью 0,98 и нестандартную — с вероятностью 0,05. Определите вероятность того, что изделие, прошедшее контроль, отвечает стандарту.

2. Брак в продукции завода из-за дефекта A составляет 5 %, причем среди этого количества брака в 10 % случаев встречается дефект B. В продукции, свободной от дефекта A, дефект B встречается в 1 % случаев. Найдите вероятность того, что дефект B не встретится во всей продукции.

3. Из букв разрезной азбуки составлено слово «ананас». Ребенок, не умеющий читать, перемешал буквы и разложил их вновь в произвольном порядке. Найдите вероятность того, что снова получится слово «ананас».

4. Абонент забыл две последние цифры номера и набрал их наудачу, помня только, что эти числа нечетные и разные. Найдите вероятность того, что номер набран правильно.

5. В лифт семиэтажного дома вошло три человека. Каждый из них с одинаковой вероятностью выходит на любом этаже, начиная со второго. Найдите вероятность того, что все пассажиры выйдут на четвертом этаже.

6. В ящик, содержащий три детали, брошена стандартная деталь, а затем наудачу извлечена одна деталь. Найдите вероятность того, что извлечена стандартная деталь. Первоначальный состав деталей в ящике неизвестен.

7. В один прекрасный весенний вечер Дюпон и Дюран играли в кости на террасе кафе. Они по очереди бросали две кости. Если сумма оказывалась равной семи, то очко выигрывал Дюран, если сумма равнялась восьми, то выигрывал Дюпон. На кого из них вы бы поставили, если бы вам пришлось держать пари?

8. Абонент забыл последнюю цифру номера телефона и поэтому набирает его наудачу. Найдите вероятность того, что ему придется сделать не более чем две неудачные попытки.

9. Три стрелка производят по одному выстрелу по цели, вероятности попадания в которую равны: для первого стрелка — 0,6; для второго — 0,7; для третьего — 0,8. Найдите вероятность одного попадания в цель.

10. Из колоды в 32 карты наугад одна за другой вынимаются две карты. Найдите вероятность того, что вынуты валет и дама.

11. Ребенок играет с четырьмя буквами разрезной азбуки А, А, М, М. Какова вероятность того, что при случайном расположении букв в ряд он получит слово «мама»?

12. Произведен залп из двух орудий по мишени. Вероятность попадания из первого орудия равна 0,85, из второго — 0,91. Найдите вероятность поражения цели.

13. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка – 0,8, а для второго — 0,6. Стрелки независимо друг от друга сделали по одному выстрелу. Какова вероятность того, что в мишень попадет только один из стрелков?

14. Рабочий обслуживает 4 станка. Вероятность того, что в течение часа первый станок не потребует внимания рабочего, равна 0,7; для второго станка эта вероятность равна 0,8; для третьего — 0,9; для четвертого — 0,85. Найдите вероятность того, что в течение часа по крайней мере один станок потребует внимания рабочего.

15. Нестандартных изделий в партии 5 %. Какова вероятность того, что два наугад взятых изделия будут стандартными?

16. В команде из 12 спортсменов 5 мастеров спорта. По жеребьевке из команды выбирают 3 спортсменов. Какова вероятность того, что все выбранные спортсмены являются мастерами спорта?

17. Экзаменационный билет содержит 3 вопроса. Вероятности того, что студент ответит на первый и второй вопросы билета, равны 0,9; на третий — 0,8. Найдите вероятность того, что студент сдаст экзамен, если для этого необходимо ответить хотя бы на два вопроса.

18. На десяти карточках написаны буквы А, А, А, М, М, Т, Т, Е, И, К. После тщательного перемешивания вынимают наугад одну карточку за другой и раскладывают их в том порядке, в каком они вынуты. Найдите вероятность того, что на карточках будет написано слово «МАТЕМАТИКА».

19. В лотерее выпущено 20 билетов, 10 из которых выигрывают. Куплено 5 билетов. Какова вероятность того, что по крайней мере один из купленных билетов выигрышный?

20. Из партии, в которой 30 деталей без дефекта и 5 с дефектом, берут наудачу 3 детали. Найдите вероятность того, что по крайней мере одна деталь без дефекта.

7.4. ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ. ФОРМУЛА БЕЙЕСА

7.4.1. Формула полной вероятности

Пусть интересующее нас событие A может наступить или не наступить с одним из ряда несовместных событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$, составляющих полную группу событий. События такого рода обычно называются *гипотезами*. Вероятности всех гипотез известны, т. е. даны $P(A_1), P(A_2), \ldots, P(A_n)$. Известны также условные вероятности наступления события A при осуществлении каждой из указанных гипотез, т. е. $P_{A_1}(A), P_{A_2}(A), \ldots, P_{A_n}(A)$. Тогда вероятность интересующего нас события A определяется из ***формулы полной вероятности***:

$$\boxed{P(A) = P(A_1)P_{A_1}(A) + P(A_2)P_{A_2}(A) + \ldots + P(A_n)P_{A_n}(A).}$$

Примеры. 1. В первой урне находится 6 белых и 4 черных шара, во второй — 3 белых и 7 черных шаров. Из первой урны наугад извлекается один шар и перекладывается во вторую урну. Затем из второй урны наугад достается один шар. Какова вероятность того, что он белый?

Решение. Обозначим событие A — вынутый шар из второй урны — белый. Возможны гипотезы: A — вынутый шар из первой урны белый; $P(A_1) = \frac{6}{10}$; A_2 — вынутый шар из первой урны черный; $P(A_2) = \frac{4}{10}$. Найдем условные вероятности наступления события A при осуществлении каждой из гипотез, т. е. $P_{A_1}(A)$ (вероятность того, что шар, вынутый из второй урны, белый, при условии, что в нее из первой урны положили белый шар) $= \frac{4}{11}$ и $P_{A_1}(A)$ (вероятность того, что шар, вынутый из второй урны, белый, при условии, что в нее из первой урны положили черный шар) $= \frac{3}{11}$. Окончательно, по формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(A_1)P_{A_1}(A) + P(A_2)P_{A_2}(A) = \frac{6}{10}\cdot\frac{4}{11} + \frac{4}{10}\cdot\frac{3}{11} = \frac{36}{110} = \frac{18}{55}.$$

2. Часы одной марки изготовляются на трех заводах и поступают в магазин. Первый завод производит 20 % всей продукции, второй — 30 %, третий — 50 %. В продукции первого завода спешат 5 % всех

часов, второго — 3 %, третьего — 2 %. Какова вероятность того, что купленные в магазине часы спешат?

Решение. Обозначим событие A — купленные часы спешат. Возможны гипотезы: A_1 — часы изготовлены на первом заводе, $P(A_1)=0{,}2$; A_2 — часы изготовлены на втором заводе, $P(A_2)=0{,}3$; A_3 — часы изготовлены на третьем заводе, $P(A_3)=0{,}5$. Найдем условные вероятности наступления события A при осуществлении каждой из гипотез, т.е. $P_{A_1}(A), P_{A_2}(A), P_{A_3}(A)$; $P_{A_1}(A)$ (вероятность того, что купленные часы спешат, при условии, что они изготовлены на первом заводе) $=$ $=0{,}05$. Аналогично, $P_{A_2}(A)=0{,}03, P_{A_3}(A)=0{,}02$. Окончательно, по формуле полной вероятности:

$$P(A)=P(A_1)P_{A_1}(A)+P(A_2)P_{A_2}(A)+P(A_3)P_{A_3}(A)=$$
$$=0{,}2\cdot0{,}05+0{,}3\cdot0{,}03+0{,}5\cdot0{,}02=0{,}01+0{,}009+0{,}01=0{,}029.$$

3. На базу поступают изделия с трех заводов. Первый завод поставляет продукции в полтора раза больше, чем второй, и на одну треть меньше, чем третий. В продукции первого завода изделия высшего качества составляют 90 %, в продукции второго — 85 % и в продукции третьего — 80 %. Найти вероятность того, что наудачу взятые на базе изделия будут высшего качества.

Решение. Событие A означает, что взятое изделие высшего качества. Через B_1, B_2 и B_3 обозначим события, состоящие в том, что изделия изготовлены на первом, втором и третьем заводах. Вычислим вероятности событий B_1, B_2, B_3. Пусть первый завод поставляет x изделий, тогда второй — $\frac{x}{1{,}5}=\frac{2}{3}x$, третий — $x+\frac{1}{3}x=\frac{4}{3}x$. Вместе они поставляют $x+\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}x=\frac{9}{3}x=3x$ изделий. Следовательно, доля в поставках первого завода равна $\frac{x}{3x}=\frac{1}{3}$, второго — $\frac{\frac{2}{3}x}{3x}=\frac{2}{9}$, третьего — $\frac{\frac{4}{3}x}{3x}=\frac{4}{9}$. Вероятности $P(B_i)$ равны вычисленным долям в поставках, т.е.

$$P(B_1)=\frac{1}{3}, P(B_2)=\frac{2}{9}, P(B_3)=\frac{4}{9}.$$

Так как события B_i (гипотезы) образуют полную группу, то нетрудно убедиться в том, что сумма их вероятностей равна 1. Найдем условные вероятности $P_{B_i}(A)$ того, что изделие будет высшего качества. Эти вероятности равны долям изделий высшего качества всей продукции данного завода, т.е.

$$P_{B_1}(A)=0{,}9; P_{B_2}(A)=0{,}85; P_{B_3}(A)=0{,}8.$$

Подсчитаем искомую вероятность того, что наудачу взятое изделие будет высшего качества по формуле полной вероятности:

$$P(A)=P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_2}(A)+P(B_3)P_{B_3}(A)=\frac{1}{3}\cdot 0{,}9+\frac{2}{9}\cdot 0{,}85+\frac{4}{9}\cdot 0{,}80=$$

$$=\frac{1}{9}(2{,}7+1{,}7+3{,}2)=\frac{6{,}6}{9}=\frac{66}{90}=\frac{11}{15}\approx 0{,}73.$$

7.4.2. Формула Бейеса

Ранее мы рассматривали вероятности событий до испытаний, т.е. в комплексе условий не фигурировал *результат проведенного опыта*. Обратимся теперь к следующей схеме. Пусть условия испытания содержат некоторый неизвестный элемент, относительно которого может быть выдвинуто n различных «гипотез» $A_1, A_2, \ldots, A_n$, образующих полную группу событий; по тем или иным причинам нам известны вероятности $P(A_i)$ этих гипотез до испытания; известно также, что гипотеза A_i «сообщает» некоторому событию A вероятность $P_{A_i}(A) (1 \le i \le n)$ ($P_{A_i}(A)$ — вероятность события A, вычисленная при условии, что справедлива гипотеза A_i). Если в результате опыта событие A наступило, то это вызывает переоценку вероятностей гипотез A_i, и задача состоит в том, чтобы найти новые вероятности $P_A(A_i)$ этих гипотез. Ответ дается формулой Бейеса.

[Т] ***Теорема гипотез (теорема Бейеса). Вероятность гипотезы после испытания** равна произведению вероятности гипотезы до испытания на соответствующую ей условную вероятность события, которое произошло при испытании, деленному на полную вероятность этого события:*

$$\boxed{\begin{aligned}P_A(A_i)&=\frac{P(A_i)P_{A_i}(A)}{P(A)}=\\&=\frac{P(A_i)P_{A_i}(A)}{P(A_1)P_{A_1}(A)+P(A_2)P_{A_2}(A)+\ldots+P(A_n)P_{A_n}(A)}.\end{aligned}}$$

Возвратимся теперь к примеру с часами (см. пример 2 из подразд. 7.4.1) и сформулируем его следующим образом.

Примеры. 1. Часы одной марки изготовляются на трех заводах и поступают в магазин. Первый завод производит 20 % всей продукции, второй — 30 %, третий — 50 %. В продукции первого завода спешат 5 % всех часов, второго — 3 %, третьего — 2 %. *Купленные часы спе-*

шат. (Это ключевая фраза, говорящая о том, что наступило некоторое событие A. Такие фразы есть в каждой задаче, решаемой по формуле Бейеса.) Какова вероятность того, что они изготовлены на первом заводе?

Решение. Пусть событие A — купленные часы спешат. В обозначениях, аналогичных предыдущему подразделу, будем иметь:

$$P_A(A_1)=\frac{P(A_1)P_{A_1}(A)}{P(A_1)P_{A_1}(A)+P(A_2)P_{A_2}(A)+P(A_3)P_{A_3}(A)}=$$

$$=\frac{0{,}2\cdot 0{,}05}{0{,}01+0{,}009+0{,}01}=\frac{0{,}01}{0{,}029}=\frac{10}{29}\approx 0{,}345.$$

Итак, несмотря на то, что продукция первого завода составляет 20 %, его доля в браке (т.е. в том, что купленные часы спешат) — 34,5 %.

2. Два охотника независимо друг от друга одновременно стреляют одинаковыми пулями в лося. В результате лось был убит одной пулей. Как охотники должны поделить тушу убитого лося, если известно, что вероятность попадания у первого охотника 0,3, а у второго — 0,6?

Решение. Обозначим событие A — лось убит одной пулей. Возможны гипотезы: A_1 — попал первый охотник, а второй промахнулся; A_2 — первый охотник промахнулся, а второй попал. События A_1 и A_2 несовместны, однако не составляют полной группы событий. Поэтому введем еще две гипотезы: A_3 — попали оба охотника, A_4 — оба охотника промахнулись. Заметим, что событие A может произойти тогда и только тогда, когда произошла либо гипотеза A_1, либо гипотеза A_2, т.е. $P_{A_1}(A)=P_{A_2}(A)=1$ и $P_{A_3}(A)=P_{A_4}(A)=0$. Кроме того, $P(A_1)=P(1\cdot\bar{2})=$ $=0{,}3\cdot 0{,}4=0{,}12$; $P(A_2)=P(\bar{1}\cdot 2)=0{,}7\cdot 0{,}6=0{,}42$; $P(A_3)=P(1\cdot 2)=0{,}3\cdot 0{,}6=0{,}18$; $P(A_4)=P(\bar{1}\cdot\bar{2})=0{,}7\cdot 0{,}4=0{,}28$, где события $1,\bar{2}$ — первый попал, а второй промахнулся и т.д. Применяя формулу Бейеса, получим

$$P_A(A_1)=\frac{P(A_1)P_{A_1}(A)}{P(A_1)P_{A_1}(A)+P(A_2)P_{A_2}(A)+P(A_3)P_{A_3}(A)+P(A_4)P_{A_4}(A)}=$$

$$=\frac{0{,}12\cdot 1}{0{,}12\cdot 1+0{,}42\cdot 1+0{,}18\cdot 0+0{,}28\cdot 0}=\frac{2}{9}.$$

$$P_A(A_2)=\frac{P(A_2)P_{A_2}(A)}{P(A_1)P_{A_1}(A)+P(A_2)P_{A_2}(A)+P(A_3)P_{A_3}(A)+P(A_4)P_{A_4}(A)}=$$

$$=\frac{0{,}42\cdot 1}{0{,}12\cdot 1+0{,}42\cdot 1+0{,}18\cdot 0+0{,}28\cdot 0}=\frac{7}{9}.$$

Итак, при справедливом дележе первый охотник должен получить 2/9 туши, т.е. меньше 1/4, в то время как, на первый взгляд, казалось, что ему причитается 1/3 туши.

Задачи для самостоятельного решения

1. Среди поступающих на сборку деталей с первого станка 0,1 % бракованных, со второго — 0,2 %, с третьего — 0,25 %, с четвертого — 0,5 %. Производительности станков относятся как 4:3:2:1. Найдите вероятность поступления на сборку годного изделия.

2. Два консервных завода поставляют продукцию в магазин в пропорции 3:2. Доля продукции высшего сорта на первом заводе составляет 80 %, а на втором – 60 %. Найдите вероятность приобретения продукции не высшего сорта.

3. Два консервных завода поставляют в магазин мясные и овощные консервы, причем первый поставляет в три раза больше второго. Доля овощных консервов в продукции первого завода составляет 60 %, а второго — 50 %. Для контроля в магазине наудачу взято одно изделие. Какова вероятность того, что это мясные консервы?

4. Два товароведа проверяют партию изделий. Производительности их труда относятся как 2:1,5. Первый товаровед бракует 10 % изделий, а второй — 15 %. Из проверенных изделий наудачу взято одно изделие, которое оказалось годным. Найдите вероятность того, что изделие проверено вторым товароведом.

5. На склад от трех поставщиков поступило 200, 300 и 500 изделий соответственно. Продукция первого поставщика имеет 5 % брака, второго — 6 %, третьего — 4 %. Найдите вероятность получения со склада годного изделия.

6. На распределительной базе находятся электрические лампочки, изготовленные на двух заводах. Среди них 60 % изготовлены на первом заводе и 40 % — на втором. Известно, что из каждых 100 лампочек, изготовленных на первом заводе, 90 соответствуют стандарту, а из 100 лампочек, изготовленных на втором заводе, соответствуют стандарту 80 лампочек. Определите вероятность того, что взятая наугад лампочка будет соответствовать стандарту.

7. На торговой базе находятся костюмы, изготовленные на трех фабриках. Из них 30 % изготовлено на первой фабрике, 50 % — на второй, 20 % — на третьей. Известно, что из каждых 100 костюмов, изготовленных на первой фабрике, высокого качества 60 %, на второй — 70 % и на третьей — 80 %. Определите вероятность того, что взятый наугад с базы костюм не будет высокого качества.

8. В данный район изделия поставляются тремя фирмами в соотношении 5 : 8 : 7. Среди продукции первой фирмы стандартные изделия составляют 90 %, второй — 85 %, третьей — 75 %. Найдите вероятность того, что: а) приобретенное изделие окажется нестандартным; б) приобретенное изделие оказалось стандартным. Какова вероятность того, что оно изготовлено третьей фирмой?

9. В кондитерском цехе выпускают торты и пирожные, причем пирожных в 5 раз больше; 20 % тортов и 40 % пирожных изготовлены с орехами. Наугад выбранное изделие оказалось с орехами. Какова вероятность того, что это: торт? пирожное?

10. Агентство по страхованию автомобилей разделяет водителей по трем классам: класс H_1 (мало рискует), класс H_2 (рискует средне), H_3 (рискует сильно). Агентство предполагает, что из всех водителей, застраховавших автомобили, 30 % принадлежит к классу H_1, 50 % — к классу H_2, 20 % — к классу H_3. Вероятность того, что в течение года водитель класса H_1 попадает хотя бы в одну аварию, равна 0,01; класса H_2 — 0,02; класса H_3 — 0,08. Водитель A страхует свой автомобиль и в течение года попадает в аварию. Какова вероятность того, что он относится к классу H_1?

11. В продукции кондитерской фабрики шоколадные конфеты составляют 40 % ассортимента. В среднем 10 из 1000 шоколадных конфет оказываются с браком, для остальной продукции этот показатель равен 5 из 200. Выбранное наугад изделие оказалось без брака. Какова вероятность того, что это была шоколадная конфета?

12. На химическом заводе установлена система аварийной сигнализации. Когда возникает аварийная ситуация, звуковой сигнал срабатывает с вероятностью 0,95. Звуковой сигнал может сработать случайно и без аварийной ситуации с вероятностью 0,02. Реальная вероятность аварийной ситуации равна 0,004. Предположим, что звуковой сигнал сработал. Чему равна вероятность того, что это была аварийная ситуация?

13. На фабрике работают 3 станка. При этом производительность второго станка вдвое выше производительности первого и в полтора раза выше производительности третьего. На первом станке из каждых 10 изделий 6 изделий высшего сорта, на втором — 8 и на третьем — 7. Найдите вероятность того, что взятое наугад со склада изделие имеет высший сорт.

14. На склад поступают одинаковые электрические утюги. Первый завод поставляет 80 %, второй — 20 % всей продукции.

Известно, что первый завод выпускает 90 % продукции первого сорта, второй — 95 %. Какова вероятность того, что проданный покупателю утюг из наудачу выбранной партии первого сорта?

15. Электрические лампы изготовляются на трех заводах. Первый завод производит 45 % общего количества электроламп, второй — 40 %, третий — 15 %. Продукция первого завода содержит 70 % стандартных ламп, второго — 80 %, третьего — 81 %. В магазины поступает продукция всех трех заводов. Какова вероятность того, что купленная в магазине лампа окажется стандартной?

16. На сборку попадают детали с трех автоматов. Известно, что первый автомат дает 0,3 % брака, второй — 0,2 % и третий — 0,4 %. Найдите вероятность попадания на сборку бракованной детали, если с первого автомата поступило 1000, со второго — 2000 и с третьего — 2500 деталей.

17. Приборы одного наименования изготовляются на трех заводах. Первый завод поставляет 45 % всех изделий, поступивших на производство, второй — 30 % и третий — 25 %. Надежность прибора, изготовленного на первом заводе, равна 0,8, на втором — 0,85 и на третьем — 0,9. Определите полную надежность прибора, поступившего на производство.

18. Два автомата производят детали, которые поступают на общий конвейер. Вероятность получения нестандартной детали на первом автомате равна 0,075, на втором — 0,09. Производительность второго автомата вдвое больше, чем первого. Найдите вероятность того, что наугад взятая с конвейера деталь нестандартная.

19. На заводе, изготовляющем болты, первая машина производит 25 %, вторая — 35 %, третья — 40 % всех изделий. В их продукции брак составляет соответственно 5, 4 и 2 %. Какова вероятность того, что случайно выбранный болт дефектный?

20. Рабочий обслуживает три станка, на которых обрабатываются однотипные детали. Вероятность брака для первого станка равна 0,02, для второго — 0,03, для третьего — 0,04. Обработанные детали складываются в один ящик. Производительность первого станка в три раза больше, чем второго, а третьего — в два раза меньше, чем второго. Определите вероятность того, что взятая наудачу деталь будет бракованной.

21. На трех автоматических станках изготовляются одинаковые детали. Известно, что 30 % продукции производится первым станком, 25 % — вторым и 45 % — третьим. Вероятность изготовления детали, отвечающей стандарту, на первом станке равна 0,99, на втором — 0,988, на третьем — 0,98. Изготовленные в течение дня на трех станках нерассортированные детали находятся на складе. Определите вероятность того, что взятая наугад деталь не соответствует стандарту.

22. Завод выпускает для магнитофонов три типа предохранителей. Доля каждого из них в общем объеме составляет 30, 50, 20 % соответственно. При перегрузке сети предохранитель первого типа срабатывает с вероятностью 0,8, второго — 0,9 и третьего — 0,85. Выбранный наудачу предохранитель не сработал при перегрузке сети. Какова вероятность того, что он принадлежал к первому типу?

23. Турист может пообедать в трех столовых города. Вероятность того, что он отправится в первую столовую — 1/5, во вторую — 3/5 и в третью — 1/5. Вероятности того, что эти столовые закрыты, следующие: первая — 1/6, вторая — 1/5 и третья — 1/8. Турист пришел в одну из столовых и пообедал. Какова вероятность того, что он направился во вторую столовую?

24. На фабрике, изготовляющей некоторую продукцию, первая машина производит 30 %, вторая — 45 %, третья — 25 % всех изделий. Брак их продукции составляет соответственно 2, 5 и 3%. Найдите вероятность того, что случайно выбранное изделие произведено первой машиной, если оно оказалось дефектным.

25. Один из трех стрелков вызывается на линию огня и производит выстрел. Цель поражена. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,3, для второго — 0,5, для третьего — 0,8. Найдите вероятность того, что выстрел произведен вторым стрелком.

26. В часовую мастерскую поступают в среднем 40 % часов с дефектом A, 25 % — с дефектом B и 35 % — с дефектом C. Вероятность ремонта часов с дефектом A равна 0,6, с дефектом B — 0,7, с дефектом C — 0,8. Часы, поступившие в ремонт, отремонтированы. Найдите вероятность того, что у часов был дефект A.

27. На склад поступает продукция трех фабрик, причем продукция первой фабрики составляет 20 %, второй — 46 %, третьей — 34 %. Известно, что средний процент нестандартных изделий для первой фабрики равен 3 %, для второй — 2 %, для третьей — 1 %. Найдите вероятность того, что наудачу взятое изделие произведено на первой фабрике, если оно оказалось нестандартным.

28. В специализированную больницу привозят в среднем 50 % больных с заболеванием K, 30 % — с заболеванием H, 20 % — с заболеванием M. Вероятность полного излечения от болезни K

равна 0,7, для болезней H и M эта вероятность соответственно равна 0,8 и 0,9. Больной, поступивший в больницу, был выписан здоровым. Найдите вероятность того, что этот больной страдал заболеванием K.

29. Путешественник может купить билет в одной из трех касс железнодорожного вокзала. Вероятность того, что он направится к первой кассе, — 1/2, ко второй — 1/3, к третьей — 1/6. Вероятности того, что билетов уже нет в кассах, таковы: в первой кассе — 1/5, во второй — 1/6, в третьей — 1/8. Путешественник обратился в одну из касс и получил билет. Определите вероятность того, что он направился к первой кассе.

30. Турист, заблудившись в лесу, вышел на поляну, от которой в разные стороны идут пять дорог. Если турист пойдет по первой дороге, то вероятность выхода туриста из леса в течение часа составляет 0,6; по второй — 0,3; по третьей — 0,2; по четвертой — 0,1; по пятой — 0,1. Какова вероятность того, что турист пошел по первой дороге, если он через час вышел из леса?

7.5. ПОВТОРНЫЕ НЕЗАВИСИМЫЕ ИСПЫТАНИЯ

7.5.1. Повторные независимые испытания. Формула Бернулли

Пусть производится серия одинаковых независимых испытаний, в результате каждого из которых некоторое интересующее нас событие A может появиться с определенной вероятностью (одной и той же во всех испытаниях).

Поставим ***задачу***. Определить вероятность того, что в результате проведения n одинаковых независимых испытаний некоторое событие A наступит ровно m раз, если в каждом из этих испытаний данное событие наступает с постоянной вероятностью $P(A) = p$. Искомую вероятность будем обозначать $P_n(m)$. Ответ дается ***формулой Бернулли***:

$$\boxed{P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m},}$$

где $q = 1 - p$ — вероятность ненаступления данного события A в каждом испытании (она также постоянна). Рассмотрим примеры.

Примеры. 1. Игральный кубик бросается три раза. Найти вероятность того, что шестерка выпадет: а) 2 раза; б) ни разу; в) 3 раза; г) менее двух раз; д) не более двух раз; е) хотя бы один раз.

Решение. В нашем случае $n = 3$; $p = \frac{1}{6}$ (вероятность появления шестерки при каждом подбрасывании); $q = 1 - p = \frac{5}{6}$.

а) $P_3(2) = C_3^2 p^2 q^1 = 3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{72}$;

б) $P_3(0) = C_3^0 p^0 q^3 = 1 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$;

в) $P_3(3) = C_3^3 p^3 q^0 = 1 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^0 = \frac{1}{216}$;

г) шестерка выпадет менее двух раз, если она *либо* не появится ни разу, *либо* появится один раз. Эти события независимые, следовательно,

$$P_3(<2) = P_3(0) + P_3(1) = C_3^0 p^0 q^3 + C_3^1 p^1 q^2 = 1 \cdot 1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 + 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 =$$

$$= \frac{125}{216} + \frac{75}{216} = \frac{200}{216} = \frac{25}{27};$$

д) шестерка выпадет не более двух раз, если она *либо* не появится ни разу, *либо* появится один раз, *либо* появится два раза. Эти события независимы, следовательно,

$$P_3(\le 2) = P_3(0) + P_3(1) + P_3(2) =$$

$$= C_3^0 p^0 q^3 + C_3^1 p^1 q^2 + C_3^2 p^2 q^1 = 1 \cdot 1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 + 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 +$$

$$+ 3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{5}{6} = \frac{125}{216} + \frac{75}{216} + \frac{15}{216} = \frac{215}{216};$$

е) рассмотрим два события: A — шестерка появятся хотя бы один раз; $\bar{A}$ — шестерка не появится ни разу. Эти события противоположны, следовательно,

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P_3(0) = 1 - C_3^0 p^0 q^3 =$$

$$= 1 - 1 \cdot 1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}.$$

2. Случайно встреченное лицо с вероятностью $p_1 = 0{,}2$ может оказаться брюнетом, с вероятностью $p_2 = 0{,}3$ — блондином, с вероятностью $p_3 = 0{,}4$ — шатеном и с вероятностью $p_4 = 0{,}1$ — рыжим. Какова вероятность того, что среди трех случайно встреченных прохожих окажется: а) не менее двух брюнетов; б) один блондин и два шатена; в) хотя бы один рыжий.

Решение. 1) Не менее двух брюнетов среди трех случайно встреченных прохожих окажется в том случае, если их будет либо два из трех, либо три из трех. Эти события несовместны, следовательно,

$$P_3(\geq 2) = P_3(2) + P_3(3) = C_3^2 p_1^2 q_1^1 + C_3^3 p_1^3 q_1^0 =$$

$$= 3 \cdot (0{,}2)^2 \cdot (0{,}8) + 1 \cdot (0{,}2)^3 \cdot 1 = 0{,}096 + 0{,}008 = 0{,}104.$$

2) Ответом на вопрос будет *произведение* двух событий: один блондин из трех и два шатена из трех:

$$P(A) = P_3(1) P_3(2) = C_3^1\, p_2^1\, q_2^2\, C_3^2\, p_3^2\, q_3^1 =$$

$$= 3 \cdot (0{,}3)^1 \cdot (0{,}7)^2 \cdot 3 \cdot (0{,}4)^2 \cdot (0{,}6)^1 = 3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}49 \cdot 3 \cdot 0{,}16 \cdot 0{,}6 = 0{,}127008.$$

3) Рассмотрим два события: A — хотя бы один рыжий из трех; $\bar{A}$ — ни одного рыжего из трех. Эти события противоположны, следовательно,

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P_3(0) = 1 - C_3^0\, p_4^0\, q_4^3 = 1 - 1 \cdot 1 \cdot (0{,}9)^3 = 1 - 0{,}729 = 0{,}271.$$

7.5.2. Многоугольник распределения вероятностей. Наивероятнейшее число наступлений события

[О] ***Наивероятнейшим числом*** m_0 появления события A в n независимых испытаниях называется число, для которого вероятность $P_n(m_0)$ превышает или, по крайней мере, не меньше вероятности каждого из остальных возможных исходов испытания. Это число определяется из неравенства: $np - q \leq m_0 \leq np + p$. Если числа $np - q$ и $np + p$ — дробные, то число m_0 — единственное. Если же числа $np - q$ и $np + p$ — целые, то будет два значения наивероятнейшего числа m_0.

Примеры. 1. Три раза подбросили монету. Найти наивероятнейшее число появлений «герба» и построить многоугольник распределения вероятностей появления «герба».

Решение. $p = \frac{1}{2}; q = \frac{1}{2}; n = 3;$ $np - q = 3 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 1; np + q = 3 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2.$

Откуда $1 \leq m_0 \leq 2$. Следовательно, вероятнее всего, «герб» появится либо один раз, либо два раза. Построим многоугольник распределения вероятностей. Для этого найдем вероятности следующих событий:

а) «герб» не появится ни разу при трех бросаниях: $P_3(0) = C_3^0 p^0 q^3 =$

$$= 1 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8};$$

б) «герб» появится один раз: $P_3(1) = C_3^1 p^1 q^2 = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8};$

в) «герб» появится два раза: $P_3(2) = C_3^2 p^2 q^1 = 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8};$

г) «герб» появится три раза: $P_3(3) = C_3^3 p^3 q^0 = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot 1 = \frac{1}{8}.$

Многоугольник распределения вероятностей появления «герба» при трех бросаниях m_i изображен на рис. 7.3.

2. Игральный кубик бросается три раза. Найти наивероятнейшее число появлений «шестерки» и построить многоугольник распределения вероятностей появлений «шестерки».

Решение. $p = \frac{1}{6}; q = \frac{5}{6}; n = 3;$ $np - q = 3 \cdot \frac{1}{6} - \frac{5}{6} = -\frac{2}{6};$ $np + p = 3 \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6},$ откуда $-\frac{1}{3} \le m_0 \le \frac{2}{3}.$ Следовательно, вероятнее всего, шестерка не появляется ни разу. Построим многоугольник распределения вероятностей. Для этого найдем вероятности следующих событий:

1) «шестерка» не появится ни разу при трех бросаниях:

$$P_3(0) = C_3^0 p^0 q^3 = 1 \cdot 1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216};$$

2) «шестерка» появится один раз: $P_3(1) = C_3^1 p^1 q^2 = 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{75}{216};$

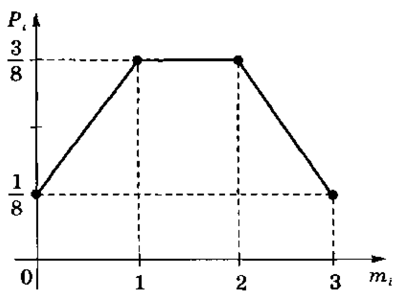


Рис. 7.3

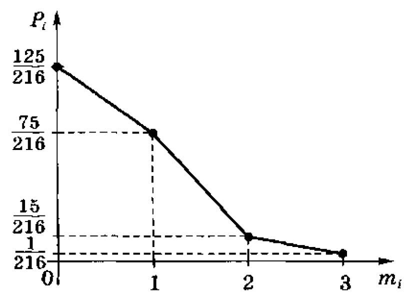


Рис. 7.4

3) «шестерка» появится два раза: $P_3(2)=C_3^2p^2q^1=3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\frac{5}{6}=\frac{15}{216}$;

4) «шестерка» появится три раза: $P_3(3)=C_3^3p^3q^0=1\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot 1=\frac{1}{216}$.

Многоугольник распределения вероятностей появления «шестерки» при трех бросаниях m_i игрального кубика изображен на рис. 7.4.

Задачи для самостоятельного решения

1. В среднем пятая часть поступающих в продажу автомобилей некомплектны. Найдите вероятность того, что среди десяти автомобилей имеют некомплектность: а) три автомобиля; б) менее трех автомобилей.

2. Отдел технического контроля проверяет изделие на соответствие стандарту. Вероятность того, что изделие стандартно, равна 0,8. Найдите вероятность того, что из двух проверенных изделий только одно стандартно.

3. В квартире имеется четыре электрические лампочки. Для каждой лампочки вероятность не перегореть в течение года равна $^5/_6$. Какова вероятность того, что в течение года придется заменить не менее трех лампочек?

4. На автобазе имеется 12 автомобилей. Вероятность выхода на линию каждого из них равна 0,8. Найдите вероятность нормальной работы автобазы, если для этого необходимо иметь на линии не менее восьми автомобилей.

5. Вероятность того, что телевизор потребует ремонта во время гарантийного срока, равна 0,2. Найдите вероятность, что из 6 телевизоров: а) не более одного потребуют ремонта; б) хотя бы один потребует ремонта.

6. Вероятность того, что балка выдержит критическую нагрузку, равна 0,8. Испытывают 5 балок. Найдите вероятность того, что: а) все выдержат нагрузку; б) три выдержат нагрузку; в) не менее двух выдержат нагрузку.

7. Вероятность прибытия поезда без опоздания равна 0,9. Считая опоздания поездов независимыми событиями, найдите вероятность того, что из пяти поездов опоздает не более одного.

8. База заказала на некоторый день четыре автомобиля, имея шесть потребителей, каждый из которых делает по одному заказу в день, независимо друг от друга, с вероятностью 0,4. Определите вероятность того, что автомобилей не хватит для удовлетворения всех заказов.

9. Певец получит главный приз, если он победит по крайней мере в трех конкурсах. Найдите вероятность получения им приза, если было проведено пять конкурсов и вероятность победы певца в каждом конкурсе равна 0,7.

10. В компьютерном отделе имеется пять компьютеров. Вероятность того, что каждый из них в течение года потребует проведения ремонта, равна 0,2. Найдите вероятность того, что в течение года не придется ремонтировать хотя бы два компьютера.

11. Вероятность получения удачного результата при химическом опыте равна $^2/_3$. Найдите наивероятнейшее число удачных опытов, если их общее число равно 7.

12. В цехе работают четыре станка, причем вероятность остановки в течение часа для каждого из них одна и та же и равна 0,8. Какова вероятность того, что в течение часа остановится не менее трех станков?

13. В магазин вошли пять покупателей. Найдите вероятность того, что не менее трех из них совершат покупки, если вероятность совершить покупку для каждого вошедшего одна и та же и равна 0,3.

14. В мастерской работают шесть двигателей, для каждого из которых вероятность перегрева к обеденному перерыву равна 0,8. Найдите вероятность того, что к обеденному перерыву перегреются четыре двигателя.

15. Рабочий обслуживает пять одинаковых станков. Вероятность того, что в течение часа станок потребует регулировки, равна $^1/_3$. Какова вероятность того, что в течение часа придется регулировать четыре станка?

16. В семье пятеро детей. Найдите вероятность того, что среди детей: 1) два мальчика; 2) не более двух мальчиков; 3) более двух мальчиков; 4) не менее двух и не более трех мальчиков. Вероятность рождения мальчика принимается равной 0,5.

17. Всхожесть семян данного сорта растений оценивается с вероятностью, равной 0,8. Какова вероятность того, что из пяти посеянных семян взойдут не менее трех?

18. Вероятность того, что покупателю потребуется обувь 41-го размера, равна 0,2. Найдите вероятность того, что из пяти первых покупателей обувь этого размера понадобится по крайней мере одному.

19. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,8. Сколько нужно произвести выстрелов, чтобы наивероятнейшее число попаданий было равно 20?

7.6. ПРОСТЕЙШИЙ ПОТОК СЛУЧАЙНЫХ СОБЫТИЙ И РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПУАССОНА

7.6.1. Поток событий

$\boxed{\text{О}}$ ***Потоком событий*** называют последовательность событий, происходящих в случайные моменты времени.

Примерами могут служить поступление вызовов на телефонную станцию, приход в магазин покупателя, ошибки на странице текста, брак изделия в партии и т. д. Простейшим (пуассоновским) называется поток событий, удовлетворяющий следующим трем условиям:

а) вероятность появления k событий за любой промежуток времени зависит только от числа k и от длительности промежутка времени t и не зависит от начала отсчета времени (свойство стационарности);

б) появление более чем одного события за малый промежуток времени есть событие практически невозможное (свойство ординарности);

в) вероятность появления данного числа событий на фиксированном промежутке времени не зависит от числа событий, появляющихся в другие промежутки времени (свойство отсутствия последействия).

$\boxed{\text{О}}$ ***Интенсивностью потока*** λ называют среднее число событий, появляющихся в единицу времени. При заданной интенсивности λ вероятность появления k событий простейшего потока за время t определяется формулой Пуассона:

$$\boxed{P_t(k) = \frac{(\lambda t)^k\,\mathrm{e}^{-\lambda t}}{k!}.}$$

Пример. Среднее число заказов «такси» в одну минуту равно трем. Найти вероятность того, что за две минуты поступит: 1) четыре заказа; 2) менее четырех заказов; 3) не менее четырех заказов.

Решение. По условию, $\lambda = 3; t = 2; k = 4$; 1) вероятность того, что за две минуты поступит четыре заказа, равна:

$$P_2(4) = \frac{6^4 \cdot \mathrm{e}^{-6}}{4!} = \frac{1296 \cdot 0{,}0025}{24} = 0{,}135;$$

2) событие «поступило менее четырех заказов» означает, что могло поступить три, два, один или ни одного заказа. Эти события несовмест-

ны и поэтому можно применить теорему сложения вероятностей несовместных событий:

$$P_2(k<4)=P_2(3)+P_2(2)+P_2(1)+P_2(0)=$$

$$=\frac{6^3\cdot e^{-6}}{3!}+\frac{6^2\cdot e^{-6}}{2!}+\frac{6\cdot e^{-6}}{1!}+e^{-6}=e^{-6}(36+18+6+1)=0{,}0025\cdot 61=0{,}1525;$$

3) события «поступило менее четырех заказов» и «поступило не менее четырех заказов» противоположны, поэтому

$$P_2(k\ge 4)=1-P_2(k<4)=1-0{,}1525=0{,}8475.$$

7.6.2. Асимптотическая формула Пуассона

В ряде задач вероятность наступления события в отдельном испытании мала. Если при этом число испытаний n велико, то формула Бернулли превращается в ***асимптотическую формулу Пуассона***:

$$\boxed{P_n(k)\approx\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ \text{где}\ \lambda=np.}$$

Строго говоря, предпосылка о постоянстве λ, лежащая в основе вывода закона Пуассона (откуда следует переменная вероятность $p=\dfrac{\lambda}{n}$), противоречит исходным условиям формулы Бернулли ($p=\text{const}$). Однако асимптотическая формула Пуассона дает достаточно точные результаты при непостоянном λ, т.е. постоянном p. Важно лишь сохранить условие малости p и достаточно большого n так, чтобы произведение np было невелико ($np<10$). Далее, после рассмотрения локальной и интегральной теорем Лапласа, дадим некоторые рекомендации по применению приближенных формул.

Примеры. 1. Завод отправил потребителю 500 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0,002. Найти вероятность того, что в пути будет повреждено: 1) три изделия; 2) менее трех изделий; 3) более трех изделий; 4) хотя бы одно изделие.

Решение. Число $n=500$ велико, вероятность $p=0{,}002$ мала, а произведение $\lambda=np=1$. Следовательно, применима формула Пуассона:

1) найдем вероятность повреждения ровно трех изделий:

$$P_{500}(3)=\frac{e^{-1}}{3!}=\frac{0{,}36788}{6}=0{,}0613;$$

2) найдем вероятность повреждения менее трех изделий, $k < 3$ означает, что может быть повреждено либо 0 изделий, либо 1 изделие, либо 2 изделия. Тогда

$$P_{500}(k<3)=P_{500}(0)+P_{500}(1)+P_{500}(2)=\mathrm{e}^{-1}+\mathrm{e}^{-1}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}=$$

$$=\mathrm{e}^{-1}\left(1+1+\frac{1}{2}\right)=2{,}5\cdot 0{,}36788=0{,}9197;$$

3) для нахождения вероятности повреждения более трех изделий рассмотрим два события: «повреждено не более трех изделий» и «повреждено более трех изделий». Легко заметить, что эти события противоположные. Тогда

$$P_{500}(k>3)=1-P_{500}(k\le 3)=1-[P_{500}(0)+P_{500}(1)+P_{500}(2)+P_{500}(3)]=$$

$$=1-[0{,}9197+0{,}0613]\approx 0{,}019;$$

4) событие «повреждено хотя бы одно изделие» (его вероятность обозначим Q) и «не повреждено ни одного из изделий» – противоположные. Тогда

$$Q=1-P_{500}(0)=1-\mathrm{e}^{-1}=1-0{,}36788=0{,}632.$$

2. Завод отправил на базу 10 000 стандартных изделий. Среднее число изделий, повреждаемых при транспортировке, составляет 0,02 %. Найти вероятность того, что из 10 000 изделий: 1) будет повреждено: а) 3; б) по крайней мере 3; 2) не будет повреждено: а) 9997; б) хотя бы 997.

Решение. 1. а) Вероятность того, что изделие будет повреждено при транспортировке, равна $p = 0{,}0002$. Так как p — мала, $n = 10\,000$ — велико и $\lambda = np = 10\,000 \cdot 0{,}0002 = 2 \le 10$, следует применить формулу Пуассона: $P_{10\,000}(3)=\dfrac{2^3\mathrm{e}^{-2}}{3!}=0{,}1804$; б) вероятность $P_{10\,000}(m \ge 3)$ может быть вычислена как сумма большого количества слагаемых:

$$P_{10\,000}(m\ge 3)=P_{10\,000}(3)+P_{10\,000}(4)+P_{10\,000}(5)+\ldots.$$

Но, разумеется, проще ее найти, перейдя к противоположному событию:

$$P_{10\,000}(m\ge 3)=1-P_{10\,000}(m<3)=1-(P_{10\,000}(0)+P_{10\,000}(1)+P_{10\,000}(2))=$$

$$=1-(0{,}1353+0{,}2707+0{,}2707)=0{,}3233.$$

Следует отметить, что для вычисления вероятности $P_{10\,000}(m\ge 3)=$ $=P_{10\,000}(3\le m\le 10\,000)$ нельзя применить интегральную теорему Лапласа (см. подразд. 7.8), так как не выполнено условие ее применимости, ибо $np \approx 2 < 20$.

2. а) В данном случае $p = 1 - 0{,}0002 = 0{,}9998$ и надо найти $P_{10\,000}(9\,997)$, для непосредственного вычисления которой нельзя применить ни формулу Пуассона (p велика), ни локальную теорему Лапласа ($np \approx \approx 2 < 20$). Однако событие «не будет повреждено 3 из 10 000» противоположно событию «будет повреждено 3 из 10 000», вероятность которого, равная 0,1804, получена в п.1а;

б) событие «не будет повреждено хотя бы 9 997 из 10 000» равносильно событию «будет повреждено 3 из 10 000», для которого $p = 0{,}0002$ и

$$P_{10\,000}(m \geq 3) = P_{10\,000}(0) + P_{10\,000}(1) + P_{10\,000}(2) + P_{10\,000}(3) =$$

$$= 0{,}1353 + 0{,}2707 + 0{,}2707 + 0{,}1805 = 0{,}8572.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Среднее число вызовов, поступающих на АТС в минуту, равно четырем. Найдите вероятность того, что за 2 минуты поступит: а) 6 вызовов; б) менее 6 вызовов; в) не менее 6 вызовов.

2. В магазин в среднем заходят два человека в минуту. Найдите вероятность того, что за 1,5 минуты в магазин войдут: а) не менее двух покупателей; б) ровно 4; в) не более одного.

3. В течение одной минуты кассой в магазине пользуются в среднем два человека. Найдите вероятность того, что за две минуты кассой воспользуются: а) 4 человека; б) не менее двух человек; в) не более трех человек.

4. Магазин получил 2 000 бутылок минеральной воды. Предусмотренный процент боя при перевозке составляет 0,003. Найдите вероятность того, что магазин получит: а) ровно 3 разбитых бутылки; б) более трех разбитых бутылок; в) хотя бы одну разбитую бутылку.

5. Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету равна 0,001. Сколько надо купить билетов, чтобы выиграть хотя бы по одному, с вероятностью, не меньшей чем 0,99?

6. Среди тысячи человек приблизительно восемь левшей. Какова вероятность того, что среди сотни наугад выбранных человек не окажется ни одного левши.

7. Среднее число самолетов, прибывших в аэропорт за 1 минуту, равно трем. Найдите вероятность того, что за 2 минуты прибудут: а) не менее трех самолетов; б) не более двух; в) 4 самолета.

8. Вероятность выпуска бракованной детали равна 0,008. Найдите вероятность того, что среди 1000 деталей будет: а) 8 бракованных; б) не более двух бракованных.

9. На стоянку «такси» в течение 15 минут подъезжает 2 машины. Найдите вероятность того, что за 30 минут на стоянку подъедет: а) 3 машины; б) не более трех; в) ни одной машины.

10. На 1000 семян приходится в среднем 4 зараженных. Найдите вероятность того, что из 5000 семян заражено не более 6.

11. Вероятность поражения быстродвижущейся цели при каждом выстреле равна 0,001. Найдите вероятность попадания в цель двух и более раз при 5000 выстрелах.

12. Среднее число кораблей, заходящих в порт за 1 час, равно трем. Найдите вероятность того, что за 4 часа в порт зайдут: а) 6 кораблей; б) менее 6 кораблей; в) не менее 6 кораблей.

13. Среднее число заявок, поступающих в ателье за 1 час, равно четырем. Найдите вероятность того, что за три часа поступит: а) 6 заявок; б) менее трех заявок; в) не менее четырех заявок.

14. Продавец за две минуты обслуживает в среднем трех покупателей. Найдите вероятность того, что за 6 минут он обслужит: а) 5 покупателей; б) не менее 6 покупателей; в) по крайней мере одного.

15. При работе ЭВМ возникают сбои (нарушения в работе). Среднее число сбоев в сутки равно двум. Найдите вероятность того, что: а) за двое суток не произойдет сбоя; б) в течение суток произойдет хотя бы один сбой; в) за трое суток произойдет не менее трех сбоев.

7.7. ЛОКАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ЛАПЛАСА

Нетрудно заметить, что использование формулы Бернулли при достаточно большом количестве повторных испытаний приводит к необходимости оперировать очень большими числами. Так, например, при попытке использовать формулу Бернулли для решения следующей задачи: определить вероятность того, что при проверке 400 изделий из партии, содержащей 20 % бракованных изделий, 80 изделий окажутся бракованными, нам пришлось бы провести вычисления: $P_{400}(80) = C_{400}^{80} \cdot (0{,}2)^{80} \cdot (0{,}8)^{320}$. Подобных сложностей можно избежать, используя локальную теорему Лапласа.

Т *Пусть в каждом из n одинаковых независимых испытаний вероятность появления некоторого события A равна p* ($p \neq 0$, $p \neq 1$), *тогда вероятность того, что событие A наступит ровно k раз в n испытаниях* ($P_n(k)$), *может быть приближенно* (*тем точнее, чем больше* n) *вычислена по формуле* $P_n(k)=\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)$, *где функция* $\varphi(x)$ *имеет вид*

$$\boxed{\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\ x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}.}$$

Значения функции $\varphi(x)$ не вычисляются непосредственно по формуле, а определяются по соответствующей таблице (см. прил. 1). При этом следует помнить свойства функции $\varphi(x)$. Эта функция четна, т.е. $\varphi(-x)=\varphi(x)$, и значения функции для $x\geq 4$ столь малы, что их принято считать равными нулю. Покажем, как работает локальная теорема Лапласа при решении предыдущей задачи: $n=400$; $p=0{,}2$; $q=0{,}8$; $k=80$; $npq=64$; $x=$ $=\frac{80-400\cdot 0{,}2}{\sqrt{400\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}}=\frac{0}{8}=0$. По таблице находим: $\varphi(0)=0{,}3989$. Искомая вероятность равна: $P_{400}(80)=\frac{1}{\sqrt{64}}\cdot 0{,}3989=\frac{1}{8}\cdot 0{,}3989=$ $=\frac{1}{8}\cdot 0{,}3989=0{,}04986$.

Пример. Найти вероятность того, что в результате 405 бросаний игральной кости ровно 30 раз выпадет 6 очков.

Решение. Вероятность выпадения 6 очков в одном бросании кости $p=\frac{1}{6}$, вероятность невыпадения 6 очков $q=\frac{5}{6}$; $\sqrt{npq}=\sqrt{405\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}=\frac{45}{6}$,

$x=\frac{30-405\cdot 1/6}{45/6}=-5$. Согласно свойствам функции $\varphi(x)$, $\varphi(-5)=\varphi(5)$ и поскольку значение аргумента $x=5>4$, то можно считать, $\varphi(5)=0$, а следовательно, искомая вероятность равна: $P_{405}(30)=\frac{1}{45/6}\cdot 0=0$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Предположим, что вероятность выздоровления больного в результате применения нового метода лечения равна 0,8. Сколько вылечившихся из 100 больных можно ожидать с вероятностью 0,0075?

2. Вероятность появления стандартной продукции в каждой из независимых выборок, проводимых товароведом, равна 0,8. Найдите вероятность того, что стандартная продукция появится 120 раз в 144 выборках.

3. Вероятность выхода из строя за сутки одного конденсатора равна 0,2. Найдите вероятность того, что за сутки из 100 независимо работающих конденсаторов выйдут из строя 20?

4. Вероятность того, что покупателю требуется костюм 50-го размера, равна 0,2. Найдите вероятность того, что среди ста покупателей костюм 50-го размера потребуют 25 человек.

5. Автоматическая штамповка клемм для предохранителей дает 10 % отклонений от принятого стандарта. Сколько стандартных клемм следует ожидать с вероятностью 0,0587 среди 400 клемм?

6. Сто станков работают независимо друг от друга, причем вероятность бесперебойной работы каждого из них в течение смены равна 0,8. Найдите вероятность того, что в течение смены бесперебойно работают 85 станков.

7. Всхожесть семян оценивается вероятностью 0,9. Найдите вероятность того, что из 400 посеянных семян взойдет 350.

8. Вероятность рождения мальчика примем равной 0,5. Найдите вероятность того, что среди 400 новорожденных будет 200 мальчиков.

9. Вероятность встретить на улице знакомого равна 0,2. Сколько среди первых 100 случайных прохожих можно надеяться встретить знакомых с вероятностью 0,005?

10. Игральную кость бросают 720 раз. Какова вероятность того, что при этом три очка выпало 120 раз?

7.8. ИНТЕГРАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ЛАПЛАСА И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ

7.8.1. Интегральная теорема Лапласа

Гораздо чаще на практике возникает необходимость в условии ранее сформулированного эксперимента из n независимых одинаковых испытаний определить вероятность того, что интересующее нас событие появится не менее k_1 и не более k_2 раз (такая вероятность обычно обозначается $P_n(k_1; k_2)$). Ответ на этот вопрос позволяет получить интегральная теорема Лапласа.

Т *Пусть проводится n независимых одинаковых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события равна p ($p \neq 0$ и $p \neq 1$). Тогда вероятность $P_n(k_1; k_2)$ того, что событие A появится в n испытаниях не менее k_1 и не более k_2 раз, приближенно равна*

$$P_n(k_1;k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \text{ где } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

— функция Лапласа, значения которой табулированы и занесены в таблицу.

Чтобы пользоваться таблицей, необходимо знать некоторые свойства функции $\Phi(x)$. Эта функция нечетна, т. е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, и для значений $x > 5$ можно приближенно считать, что $\Phi(x > 5) = 0{,}5$. Значения x_1 и x_2 в формуле определяются отношениями: $x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$; $x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Примеры. 1. Партия изделий содержит 20 % бракованных. Требуется найти вероятность того, что среди 400 проверенных изделий попадется не менее 50 и не более 90 бракованных.

Решение. Используя интегральную теорему Лапласа для $n = 400$; $p = 0{,}2$; $q = 0{,}8$; $k_1 = 50$; $k_2 = 90$, получим: $\sqrt{npq} = \sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8} = 8$; $x_1 = \frac{50 - 400 \cdot 0{,}2}{8} = -3{,}75$; $x_2 = \frac{900 - 400 \cdot 0{,}2}{8} = 1{,}25$. По таблице $\Phi(x_1) = \Phi(-3{,}75) = -\Phi(3{,}75) = -0{,}4970$; $\Phi(x_2) = \Phi(1{,}25) = 0{,}3944$. Искомая вероятность равна: $P_{400}(50;90) \approx 0{,}3944 + 0{,}4970 = 0{,}8924$.

2. Найти вероятность того, что на 405 бросаний игральной кости «шестерка» выпадет хотя бы 100 раз.

Решение. Используя интегральную теорему Лапласа для $n = 405$; $p = \frac{1}{6}$; $q = \frac{5}{6}$; $k_1 = 100$; $k_2 = 405$, получим: $\sqrt{npq} = \sqrt{405 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} = 7{,}5$; $x_1 = \frac{100 - 405 \cdot \frac{1}{6}}{7{,}5} = 4{,}33$; $x_2 = \frac{405 - 405 \cdot \frac{1}{6}}{7{,}5} = 45$. По таблице имеем: $\Phi(x_1) = \Phi(4{,}33) = 0{,}4995$; $\Phi(x_2) = \Phi(45) = 0{,}5$. Искомая вероятность равна: $P_{405}(100;405) \approx 0{,}5 - 0{,}4995 = 0{,}0005$.

3. По результатам проверок налоговыми инспекциями установлено, что в среднем каждое второе малое предприятие региона имеет нарушения финансовой дисциплины. Найти вероятность того, что из 1000

зарегистрированных в регионе предприятий имеют нарушения финансовой дисциплины: а) 480 предприятий; б) наивероятнейшее число предприятий; в) не менее 480; г) от 480 до 520.

Решение. а) По условию, $p = 0,5$. Так как $n = 1000$ достаточно велико (условие $npq = 10\,000 \cdot 0,5(1-0,5) = 250 \ge 20$ выполнено), применяем локальную теорему Лапласа.

Вначале определим

$$x = \frac{480 - 1000 \cdot 0,5}{\sqrt{1000 \cdot 0,5 \cdot 0,5}} = -1,265,$$

затем

$$P_{1000} \approx \frac{\varphi(-1,265)}{\sqrt{1000 \cdot 0,5 \cdot 0,5}} = \frac{\varphi(1265)}{\sqrt{250}} = \frac{0,1792}{\sqrt{250}} = 0,0113;$$

б) наивероятнейшее число: $np - q \le m_0 \le np + p$; $1000 \cdot 0,5 - 0,5 \le m_0 \le$ $\le 1000 \cdot 0,5 + 0,5$, т.е. $499,5 \le m_0 \le 500,5$ или $m_0 = 500$. Теперь

$$x = \frac{500 - 1000 \cdot 0,5}{\sqrt{1000 \cdot 0,5 \cdot 0,5}} = 0 \quad \text{и} \quad P_{1000}(500) \approx \frac{\varphi(0)}{\sqrt{250}} = \frac{0,3989}{\sqrt{250}} = 0,0252;$$

в) необходимо найти $P_{1000}(m \ge 480) = P_{1000}(480 \le m \le 1000)$. Применяем интегральную теорему Лапласа, предварительно найдя

$$x_1 = \frac{480 - 1000 \cdot 0,5}{\sqrt{1000 \cdot 0,5 \cdot 0,5}} = -1,265 \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{1000 - 1000 \cdot 0,5}{\sqrt{1000 \cdot 0,5 \cdot 0,5}} = 31,6.$$

После этого

$$P_{1000}(480 \le m \le 1000) \approx [\Phi(31,6) - \Phi(-1,265)] =$$
$$= [\Phi(31,6) + \Phi(1,265)] = 0,5 + 0,3971 = 0,8971;$$

г) вероятность $P_{1000}(480 \le m \le 520)$ можно найти по той же интегральной теореме Лапласа. Но проще это сделать, заметив, что границы интервала 480 и 520 симметричны относительно значения $np = 1000 \cdot 0,5 = 500$. Тогда

$$P_{1000}(480 \le m \le 520) = P_{1000}(|m - 500| \le 20) \approx 2\Phi\left(\frac{20}{\sqrt{250}}\right) = 2\Phi(1,265) = 0,7942.$$

7.8.2. Применение приближенных формул Пуассона и Лапласа

- Если число испытаний $n = 10 \dots 20$, то приближенные формулы используются для грубых прикидочных расчетов. При этом формула Пуассона применяется в том случае, когда $\lambda = np$

изменяется в пределах от 0 ... 2 (при $n = 10$) до 0 ... 3 (при $n = 20$); в противном случае необходимо пользоваться формулами Лапласа.

- Если $n = 20 \dots 100$, то приближенные формулы уже можно использовать для прикладных расчетов. Формулу Пуассона рекомендуется применять, когда параметр λ заключен в пределах от $0 \dots 3$ ($n = 20$) до $0 \dots 5$ ($n = 100$).
- Если $n = 100 \dots 1000$, то практически при любых прикладных расчетах можно обойтись приближенными формулами. Формула Пуассона применяется, когда λ изменяется в пределах от $0 \dots 5$ ($n = 100$) до $0 \dots 10$ ($n = 1000$).
- При $n > 1000$ даже специальные таблицы рассчитываются с помощью приближенных формул. В этом случае для применения формулы Пуассона необходимо, чтобы параметр λ лежал в пределах $0 \dots 10$ и более.

Задачи для самостоятельного решения

1. Аудиторную работу по теории вероятностей с первого раза успешно выполняют 50 % студентов. Найдите вероятность того, что из 400 студентов работу успешно выполняют: а) 180 студентов; б) не менее 180 студентов.

2. При данном технологическом процессе 85 % всей произведенной продукции высшего сорта. Найдите наивероятнейшее число изделий высшего сорта в партии из 150 изделий.

3. При данном технологическом процессе 80 % всей произведенной продукции высшего сорта. Найдите наивероятнейшее число изделий высшего сорта в партии из 225 изделий и вероятность этого события.

4. Вероятность того, что саженец елки прижился, равна 0,8. Посажено 400 елочных саженца. Какова вероятность того, что вырастет не менее 250 деревьев?

5. Всхожесть семян данного растения равна 0,9. Найдите вероятность того, что из 900 посаженных семян число проросших будет заключаться между 790 и 830.

6. Выход цыплят в инкубаторе составляет в среднем 75 %. Оцените вероятность того, что из 8 000 заложенных в инкубатор яиц вылупится от 5 950 до 6 050 (включительно) цыплят.

7. Вероятность того, что взятая наугад лампочка, изготовленная на данном заводе, прослужит в течение гарантийного срока, равна 0,9. Какова вероятность того, что среди 100 лампочек, изготовленных на этом заводе, окажется не менее 80 и не более 100 таких, которые обеспечат нормальную работу в течение гарантийного срока службы?

8. Вероятность изготовления пальто высшего качества на швейной фабрике равна 0,6. Изготовлено 600 пальто. Чему равно наивероятнейшее число изделий высшего качества и вероятность этого события?

9. Из 100 % яблок, поступающих в магазин, 10 % — нестандартные. Найдите вероятность того, что в партии из 10 000 яблок будет менее 200 нестандартных.

10. В партии товаров имеется 400 изделий. Вероятность того, что изделие будет высшего сорта, равна 0,8. Какова вероятность того, что количество изделий высшего сорта будет равно от 310 до 330?

11. Пусть вероятность того, что покупатель овощного магазина не приобретет картофель, равна 0,2. Найдите вероятность того, что из 625 покупателей более 120 приобретут картофель в этом магазине.

12. В деревне проживает 100 человек. Вероятность того, что любой из них в течение дня зайдет в магазин, равна 0,3. Найдите вероятность того, что в течение дня в магазин зайдут не менее 10 человек.

13. В результате проверки качества приготовленного для посева зерна установлено, что 90 % зерен всхожи. Найдите вероятность того, что среди отобранных и высаженных 900 зерен прорастет от 600 до 640 штук.

14. Телефонная станция обслуживает 400 абонентов. Для каждого абонента вероятность того, что в течение дня он позвонит на телефонную станцию, равна 0,1. Найдите вероятность того, что в течение дня не менее трех абонентов позвонят на телефонную станцию.

15. С вероятностью 0,8 орудие при выстреле поражает цель. Произведено 1 600 выстрелов. Какова вероятность того, что при этом произошло не менее 1 200 попаданий?

16. В среднем левши составляют 1 % от общей численности студентов. Какова вероятность того, что среди 1 100 студентов не менее 20 левшей?

17. В парке было посажено 400 деревьев. Найдите вероятность того, что количество прижившихся деревьев больше 250, если вероятность того, что отдельное дерево приживется, равна 0,8.

7.9. ДИСКРЕТНАЯ И НЕПРЕРЫВНАЯ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ. СПОСОБ ЗАДАНИЯ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

7.9.1. Понятие дискретной и непрерывной случайных величин

Представим, что производится испытание, в результате которого происходит одно из несовместных случайных событий A_i. Пусть каждому исходу A_i испытания поставлено в соответствие некоторое действительное число x_i. В этом случае говорят, что задана случайная величина $X(X = x_i)$.

Примеры. 1. Бросается игральная кость. Случайная величина X — выпавшее число очков, X: 1; 2; 3; 4; 5; 6.

2. Покупается n лотерейных билетов. Случайная величина — число выигрышей, X: 0; 1; 2; ...; n.

3. Патроны выдаются стрелку до тех пор, пока он не промахнется. Случайная величина X — число выданных стрелку патронов, X: 1; 2; 3; ...; n; ....

4. Электрическая лампочка испытывается на длительность горения. Случайная величина X — полное время горения электролампочки — может принимать любое действительное неотрицательное значение.

Случайная величина является своего рода абстрактным выражением случайного события. С каждым событием A можно связать некоторое значение случайной величины. Оперирование с понятием случайной величины в ряде случаев бывает более удобным, чем оперирование со случайными событиями. Среди случайных величин, с которыми приходится встречаться на практике, можно выделить два основных типа: дискретные и непрерывные величины.

$\boxed{\text{О}}$ ***Дискретной случайной величиной*** называется такая величина, число возможных значений которой либо конечное, либо бесконечное счетное множество, т. е. множество, элементы которого могут быть пронумерованы.

Дискретные случайные величины приведены в примерах 1, 2, 3.

7.9.2. Закон распределения дискретной случайной величины

Рассмотрим дискретную случайную величину X, все возможные значения которой x_1, x_2, ..., x_n известны. Знание одних только возможных значений случайной величины еще не позволяет полностью ее описать, так как нельзя сказать, как часто следует ожидать появления тех или иных возможных значений случайной величины. Для этого необходимо знать закон распределения вероятностей случайной величины. (Кроме того разные случайные величины могут иметь одни и те же числовые значения.) Обозначим вероятности событий, соответствующих значениям случайной величины, через p_i, т. е. $p_1 = p(X = x_1)$; $p_2 = p(X = x_2)$; ... Так как все эти события являются несовместными и образуют полную группу, то сумма вероятностей всех возможных значений случайной величины X равна единице, т. е. $\sum\limits_i P(X = x_i) = \sum\limits_i p_i = 1$. Дискретная случайная величина будет полностью описана с вероятностной точки зрения, если будет указано, какую вероятность имеет каждое из событий, соответствующих значениям случайной величины. Этим мы установим закон распределения случайной величины.

$\boxed{\text{О}}$ ***Законом распределения случайной величины*** называется всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями.

Заметим, что способы или формы представления закона распределения случайной величины могут быть различными. Простейшей формой задания закона распределения дискретной случайной величины X является таблица, в которой перечислены возможные значения случайной величины и соответствующие им вероятности:

X	x_1	x_2	...	x_n	...	
P	p_1	p_2	...	p_n	...	$\sum\limits_i p_i = 1$

Такая таблица носит название ***ряда распределения случайной величины***. Для наглядности ряд распределения представляют графически в виде многоугольника распределения (рис. 7.5).

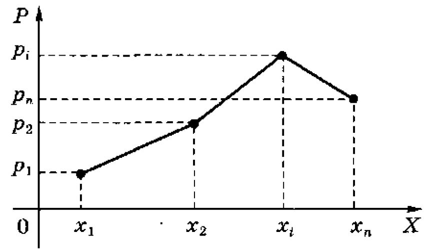


Рис. 7.5

Примеры. **1.** Монету бросают 5 раз. Случайная величина X — число выпадений «герба». Составить ее закон распределения.

Решение. 1) При пятикратном бросании монеты «герб» может не появиться ни разу, либо один раз, либо два раза, либо три раза, либо четыре раза, либо пять раз. Следовательно, случайная величина X принимает значения: 0, 1, 2, 3, 4, 5; 2) Найдем вероятности каждого из этих значений. Вероятность того, что «герб» не появится ни разу при пятикратном бросании монеты, вычисляется по формуле Бернулли:

$$P_5(0) = C_5^0 p^0 q^5 = 1 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}.$$

Аналогично:

$$P_5(1) = C_5^1 p^1 q^4 = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{32};\ \ P_5(2) = \frac{10}{32};\ \ P_5(3) = \frac{10}{32};$$

$$P_5(4) = \frac{5}{32};\ \ P_5(5) = \frac{1}{32}.$$

3) Закон распределения имеет вид:

X	0	1	2	3	4	5	
P	1/32	5/32	10/32	10/32	5/32	1/32	$\sum_i p_i = 1$

2. Дважды бросается игральная кость. Случайная величина X — сумма очков при обоих бросаниях. Составить ее закон распределения.

Решение. 1) При двукратном бросании игральной кости в сумме может появиться либо 2 очка, либо 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 очков. Следовательно, случайная величина X принимает значения: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.

2) Найдем вероятности каждого из этих значений. Вероятность того, что при двукратном бросании игральной кости в сумме появится два очка, равна произведению вероятностей двух событий: A_1 — на первой кости появится одно очко $\left(P(A_1) = \frac{1}{6}\right)$ и A_2 — на второй кости появит-

ся одно очко $\left(P(A_2)=\dfrac{1}{6}\right)$; $P_1=P(A_1)P(A_2)=\dfrac{1}{36}$. Вероятность того, что при двукратном бросании игральной кости в сумме появится три очка, равна сумме вероятностей двух событий: B_1 — на первой кости появится одно очко и на второй кости два очка $\left(P(B_1)=\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{36}\right)$, либо B_2 — на первой кости появится два очка и на второй кости одно очко $\left(P(B_2)=\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{36}\right)$; $P_2=P(B_1)+P(B_2)=\dfrac{1}{36}+\dfrac{1}{36}=\dfrac{2}{36}$. Из аналогичных соображений $P_3=\dfrac{3}{36}$; $P_4=\dfrac{4}{36}$; $P_5=\dfrac{5}{36}$; $P_6=\dfrac{6}{36}$; $P_7=\dfrac{5}{36}$; $P_8=\dfrac{4}{36}$; $P_9=\dfrac{3}{36}$; $P_{10}=\dfrac{2}{36}$; $P_{11}=\dfrac{1}{36}$.

3) Закон распределения имеет вид:

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

3. В лотерее разыгрывается: мотоцикл стоимостью 5000 долл., 4 телевизора стоимостью 250 долл. каждый, 5 видеомагнитофонов стоимостью 200 долл. каждый. Всего продается 1000 билетов по 7 долл. Составить закон распределения чистого выигрыша, полученного участником лотереи, купившим один билет.

Решение. Возможные значения случайной величины X — чистого выигрыша на один билет — равны $0-7$ долл. (если билет не выиграл), $200-7=193$, $250-7=243$, $5000-7=4993$ долл. (если на билет выпал выигрыш соответственно видеомагнитофона, телевизора или мотоцикла). Учитывая, что из 1000 билетов число невыигравших составляет 990, указанных выигрышей соответственно 5, 4 и 1, и используя классическое определение вероятности, получим:

$$P(X=-7)=990/1000=0{,}990;\ P(X=193)=5/1000=0{,}005;$$

$$P(X=243)=4/1000=0{,}004;\ P(X=4993)=1/1000=0{,}001,$$

т.е. ряд распределения X:

x_i	−7	193	243	4 993
p_i	0,990	0,005	0,004	0,001

Задачи для самостоятельного решения

1. Пусть X — выручка фирмы в долларах. Найдите распределение выручки в рублях $Z = XY$ в пересчете по курсу доллара Y, если выручка X не зависит от курса Y, а распределения X и Y имеют вид:

X

x_i	1000	2000
p_i	0,7	0,3

Y

y_j	25	27
p_i	0,4	0,6

2. Имеются пять ключей, из которых только один подходит. Найдите закон распределения случайной величины X, равной числу проб при открывании замка, если испробованный ключ в последующих попытках не участвует.

3. На пути движения автомобиля шесть светофоров, каждый из которых разрешает или запрещает дальнейшее движение с вероятностью 0,5. Найдите закон распределения случайной величины X, равной числу светофоров, пройденных автомобилем до первой остановки.

4. В партии из десяти деталей имеется восемь стандартных. Из этой партии наудачу взято две детали. Найдите закон распределения случайной величины X — числа стандартных деталей в выборке.

5. Напишите закон распределения дискретной случайной величины X — числа появлений «герба» при трех бросаниях монеты.

6. Дискретная случайная величина X — число мальчиков в семьях с пятью детьми. Предполагая равновероятными рождения мальчика и девочки: а) найдите закон распределения случайной величины X; б) постройте многоугольник распределения X; в) найдите вероятности событий A (в семье не менее двух, но не более трех мальчиков), B (в семье не более трех мальчиков) и C (в семье не более одного мальчика).

7. В партии 10 % нестандартных деталей. Наудачу отобраны четыре детали. Составьте закон распределения дискретной случайной величины X — числа нестандартных деталей среди четырех отобранных и постройте многоугольник полученного распределения.

8. Рабочий обслуживает четыре независимо работающих станка. Вероятность того, что в течение часа станок не потребует внимишия рабочего, равна: для первого станка 0,7; для второго — 0,75; для третьего — 0,8; для четвертого — 0,9. Найдите закон распределения случайной величины X — числа станков, которые не потребуют внимания рабочего.

9. Устройство состоит из трех элементов, работающих независимо друг от друга. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0,1. Составьте закон распределения числа отказавших элементов в одном опыте.

10. Вероятность того, что стрелок попадает в мишень при одном выстреле, равна 0,8. Стрелку последовательно выдаются патроны до тех пор, пока он не промахнется, но не более четырех. Требуется: а) составить закон распределения дискретной случайной величины X — числа патронов, выданных стрелку; б) построить многоугольник полученного распределения.

11. В партии из шести деталей имеются четыре стандартные. Наудачу отобраны три детали. Составьте закон распределения дискретной случайной величины X — числа стандартных деталей среди отобранных.

12. С вероятностью попадания при одном выстреле 0,7 охотник стреляет по дичи до первого попадания, но успевает сделать не более четырех выстрелов. Дискретная случайная величина X — число промахов. Требуется: а) найти закон распределения X; б) построить многоугольник распределения; в) найти вероятности $P(X < 2)$, $P(X > 3)$, $P(1 < X < 3)$.

13. Две игральные кости одновременно бросают два раза. Напишите закон распределения дискретной случайной величины X — числа выпадений четного числа очков на двух игральных костях.

7.10. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Закон распределения полностью характеризует случайную величину с вероятностной точки зрения. Зная закон распределения случайной величины, можно указать, где располагаются возможные значения случайной величины и какова вероятность ее появления в том или ином интервале. Однако при решении многих практических задач нет необходимости характеризовать случайную величину полностью, а достаточно иметь о случайной величине только некоторое общее представление. Зачастую достаточно бывает указать не весь закон распределения (в некоторых задачах этого просто нельзя сделать), а только некоторые характерные черты закона распределения. В теории вероятностей для общей характеристики случайной величины используются показатели, которые носят название числовых характеристик случайной величины. Основное их назначение — в сжатой форме выразить наиболее существенные особенности того или иного распределения. *О каждой случайной величине необходимо прежде всего знать ее среднее значение $M(x)$, около которого группируются возможные значения случайной величины, а также число $D(X)$, характеризующее степень разбросанности этих значений относительно среднего.*

Кроме указанных числовых характеристик, для более полного описания случайной величины используют ряд других числовых характеристик (мода, медиана, асимметрия, эксцесс и т. д.). Все они помогают в той или иной мере уяснить характерные черты распределения случайной величины.

7.10.1. Математическое ожидание

Пусть X — дискретная случайная величина. Будем считать, что она связана с некоторым опытом. Предположим, что опыт осуществлен N раз и при этом величина X N_1 раз принимает значение x_1; N_2 раз — значение x_2; ...; N_n раз — значение x_n, где $N_1+N_2+...+N_n=N$. Найдем среднее арифметическое всех значений, принятых величиной X в данной серии опытов:

$$\overline{X}=\frac{N_1x_1+N_2x_2+...+N_nx_n}{N}=\frac{N_1}{N}x_1+\frac{N_2}{N}x_2+...+\frac{N_n}{N}x_n.$$

Дробь $\frac{N_1}{N}$ есть частота, с которой появлялось значение x_1, дробь $\frac{N_2}{N}$ — частота, с которой появлялось значение x_2, и т. д. С увеличением числа опытов N каждая из этих дробей будет приближаться к $p_i=p(X=x_i)$. В итоге получаем, что с увеличением числа N среднее арифметическое будет приближаться к числу $p_1x_1+ p_2x_2+...+p_nx_n$.

$\boxed{\text{О}}$ ***Математическим ожиданием*** дискретной случайной величины X с законом распределения:

X	x_1	x_2	...	x_n	
P	p_1	p_2	...	p_n	$\sum_i p_i = 1$

называется число

$$\boxed{M(x) = p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n.}$$

Смысл $M(x)$ в том, что около него колеблется среднее арифметическое значений, принимаемых случайной величиной X, в большой серии опытов. Если же производится несколько серий опытов, то $M(X)$ есть такое постоянное число, около которого будут колебаться средние арифметические значения случайной величины, вычисленные для каждой серии опытов. Математическое ожидание $M(X)$ называют также ***средним значением*** случайной величины X, подчеркивая тем самым статистический смысл этого понятия (статистическим аналогом математического ожидания служит среднее арифметическое из эмпирических значений случайной величины). Математическое ожидание $M(X)$ называют еще и ***центром распределения случайной величины*** X. Это название вводят по аналогии с понятием центра тяжести для системы материальных точек, расположенных на одной прямой; если на оси Ox в n точках с координатами x_1, x_2, ..., x_n сосредоточены массы p_1, p_2, ..., p_n, то координата X_c центра тяжести системы находится по формуле: $X_c = \dfrac{p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n}{p_1 + p_2 + ... + p_n}$. Но для распределения вероятностей должно выполняться равенство $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$ и написанное соотношение для X_c сводится к формуле:

$$X_c = p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n.$$

Пример. Найти математическое ожидание случайной величины X — числа угаданных номеров в «Спортлото» 6 из 49.

Решение. 1) Составим вначале закон распределения случайной величины X. Поскольку при игре в «Спортлото» можно не угадать ни одного номера, либо угадать один, два, три, четыре, пять, шесть номеров, то случайная величина X может принимать значения X: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6. Найдем вероятности каждого из этих значений:

$$p_0 = \frac{C_6^0C_{43}^6}{C_{49}^6} \approx 0{,}4360; \quad p_1 = \frac{C_6^1C_{43}^5}{C_{49}^6} \approx 0{,}4130; \quad p_2 = \frac{C_6^2C_{43}^4}{C_{49}^6} \approx 0{,}1324;$$

$$p_3=\frac{C_6^3C_{43}^3}{C_{49}^6}\approx 0{,}018;\quad p_4=\frac{C_6^4C_{43}^2}{C_{49}^6}\approx 0{,}0097;\quad p_5=\frac{C_6^5C_{43}^1}{C_{49}^6}\approx 0{,}000018;$$

$$p_6=\frac{C_6^6C_{43}^0}{C_{49}^6}\approx 7\cdot 10^{-8}.$$

Окончательно закон распределения имеет вид:

X	0	1	2	3	4	5	6
P	0,4360	0,4130	0,1324	0,018	0,0097	0,000018	$7\cdot 10^{-8}$

2) В соответствии с законом распределения:

$$M(x)=0\cdot p_0+1\cdot p_1+2\cdot p_2+3\cdot p_3+4\cdot p_4+5\cdot p_5+6\cdot p_6\approx 0\cdot 0{,}4360+1\cdot 0{,}4130+$$
$$+2\cdot 0{,}1324+3\cdot 0{,}018+4\cdot 0{,}0097+5\cdot 0{,}000018+6\cdot 7\cdot 10^{-8}\approx 0{,}735.$$

Таким образом, среднее число угаданных номеров равно 0,735.

7.10.2. Свойства математического ожидания

Свойство 1. Математическое ожидание постоянной случайной величины равно самой постоянной, т. е. $\boxed{M(C)=C.}$

$\boxed{\text{С}}$ $\boxed{M(X\pm C)=M(X)\pm C.}$

Свойство 2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания, т. е. $\boxed{M(aX)=aM(X).}$

$\boxed{\text{С}}$ $\boxed{M(aX\pm C)=aM(X)\pm C.}$

Свойство 3. Математическое ожидание алгебраической суммы двух (или нескольких) случайных величин равно алгебраической сумме их математических ожиданий, т. е. $\boxed{M(aX\pm bY)=aM(X)\pm bM(Y).}$

Свойство 4. Для независимых случайных величин X и Y: $\boxed{M(XY)=M(X)M(Y).}$

Пример. Пусть X и Y — две независимые случайные величины, причем $M(X)=2$ и $M(Y)=3$. Найти математическое ожидание случайной величины $Z=3X-2Y$.

Решение.

$$M(Z)=M(3X-2Y)=M(3X)-M(2Y)=3M(X)-2M(Y)=3\cdot 2-2\cdot 3=0.$$

7.10.3. Дисперсия и среднее квадратическое отклонение случайной величины

Пусть даны две случайные величины X и Y со своими законами распределения:

X	-1	1
p	$1/2$	$1/2$

Y	-100	100
p	$1/2$	$1/2$

Ясно, что $M(X)=M(Y)=0$. Из примера следует, что разным случайным величинам соответствует одно и то же математическое ожидание, поэтому знание лишь одного его недостаточно для описания случайной величины. Введем еще одну числовую характеристику, показывающую степень рассеяния значений случайной величины относительно центра (т.е. математического ожидания). Назовем ее *дисперсией случайной величины* X:

$$\boxed{D(X)=M\left[(X-M(X))^2\right]=p_1(x_1-M(X))^2+p_2(x_2-M(X))^2+\ldots+p_n(x_n-M(X))^2.}$$

Следует отметить, что $M[X-M(X)]=0$.

О ***Дисперсией*** случайной величины называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания.

В нашем последнем примере:

$$D(X)=\frac{1}{2}(-1-0)^2+\frac{1}{2}(1-0)^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1;$$

$$D(Y)=\frac{1}{2}(-100-0)^2+\frac{1}{2}(100-0)^2=5\,000+5\,000=10\,000.$$

На первый взгляд более естественно было бы считать величину среднего отклонения $M(X)=p_1|x_1-M(X)|+p_2|x_2-M(X)|+ \ldots +p_n|x_n-M(X)|$, но это очень неудобно практически, так как вычисления и оценки с абсолютными значениями часто бывают сложны, а иногда и совсем недоступны. Дисперсия дает ориентировочное представление о том, чему примерно равен квадрат отклонения $X-M(X)$, поэтому, извлекая корень квадратный, получим величину

$$\boxed{\sigma(X)=\sqrt{D(X)},}$$

способную ориентировочно охарактеризовать примерный размер самого отклонения. Величина $\sigma(X)$ называется ***средним квадратическим отклонением*** случайной величины. Разумеется эта новая мера величины отклонения носит характер несколько более искусственный, чем среднее отклонение, введенное ранее: здесь мы идем обходным путем, находя вначале ориентировочное значение для квадрата отклонения, и лишь потом с помощью извлечения квадратного корня, возвращаясь к самому отклонению. Но выражение $\sigma(X)$ не содержит абсолютных значений, и поэтому производить с ним вычисления гораздо проще, чем со средним отклонением. Именно это и заставляет статистиков на практике преимущественно пользоваться средними квадратическими отклонениями. Впрочем, в большинстве практических задач $M(X)$ и $\sigma(X)$ оказываются обычно близкими друг к другу; все же они между собой не совпадают и $\sigma(X) \geq M(X)$.

7.10.4. Свойства дисперсии

Свойство 1. Дисперсия постоянной случайной величины равна нулю, т.е. $\boxed{D(C) = 0.}$

$\boxed{\text{C}}$ $\boxed{D(X \pm C) = D(X).}$

Свойство 2. Постоянный множитель выносится из-под дисперсии в квадрате, т.е. $\boxed{D(CX) = C^2 D(X).}$

$\boxed{\text{C}}$ $\boxed{D(aX \pm b) = a^2 D(X).}$

Свойство 3. Для независимых случайных величин X и Y дисперсия их алгебраической суммы равна сумме дисперсий, т.е.

$$\boxed{D(aX \pm bY) = a^2 D(X) + b^2 D(Y).}$$

Свойство 4. Из определения дисперсии можно получить «рабочую» (более удобную) формулу для вычисления дисперсии:

$$\boxed{D(X) = M(X^2) - \left[M(X)\right]^2,} \text{ где } M(X^2) = p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + \ldots + p_n x_n^2.$$

Примеры. **1.** Пусть известны законы распределения двух взаимно независимых случайных величин X и Y:

X	10	20
p	0,3	0,7

Y	30	40	60
p	0,5	0,2	0,3

1) Найти числовые характеристики величины X: $M(X), D(X), \sigma(X)$.

2) Найти числовые характеристики величины Y: $M(Y), D(Y), \sigma(Y)$.

3) Найти $M(2X+Y)$, $D(2X+Y)$, $D(X-Y)$ по свойствам математического ожидания и дисперсии.

4) Найти $M(2X+Y)$, составив закон распределения случайной величины $Z=2X+Y$.

Решение. 1) $M(X)=p_1x_1+p_2x_2=0{,}3\cdot 10+0{,}7\cdot 20=17$;

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2=p_1x_1^2+p_2x_2^2-(17)^2=0{,}3\cdot 100+0{,}7\cdot 400-289=21;$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{21}\approx 4{,}5.$$

2) $M(Y)=p_1y_1+p_2y_2+p_3y_3=0{,}5\cdot 30+0{,}2\cdot 40+0{,}3\cdot 60=41$;

$$D(Y)=M(Y^2)-[M(Y)]^2=p_1y_1^2+p_2y_2^2+p_3y_3^2-(41)^2=0{,}5\cdot 900+$$

$$+0{,}2\cdot 1600+0{,}3\cdot 3600-1681=169;\ \sigma(Y)=\sqrt{D(Y)}=\sqrt{169}=13.$$

3) По свойствам математического ожидания и дисперсии:

$$M(2X+Y)=2M(X)+M(Y)=2\cdot 17+41=75;$$

$$D(2X+Y)=4D(X)+D(Y)=4\cdot 21+169=253;$$

$$D(X-Y)=D(X)+D(Y)=21+169=190.$$

4) Составим закон распределения случайной величины $2X+Y$:

$2X+Y$	$2\cdot 10+30$	$2\cdot 10+40$	$2\cdot 10+60$	$2\cdot 20+30$	$2\cdot 20+40$	$2\cdot 20+60$
p	$0{,}3\cdot 0{,}5$	$0{,}3\cdot 0{,}2$	$0{,}3\cdot 0{,}3$	$0{,}7\cdot 0{,}5$	$0{,}7\cdot 0{,}2$	$0{,}7\cdot 0{,}3$

или

$2X+Y$	50	60	80	70	80	100
p	0,15	0,06	0,09	0,35	0,14	0,21

после приведения подобных членов и записи в порядке возрастания значений X окончательно получим:

$2X+Y$	50	60	70	80	100
p	0,15	0,06	0,35	0,23	0,21

Контроль: 0,15 + 0,06 + 0,35 + 0,23 + 0,21 = 1.

$M(2X+Y)=0{,}15\cdot 50+0{,}06\cdot 60+0{,}35\cdot 70+0{,}23\cdot 80+0{,}21\cdot 100=75$, что совпадает с результатом ранее вычисленного в п. 3 по свойствам $M(2X+Y)$.

2. По многим статистическим данным известно, что вероятность рождения мальчика равна 0,515. Составить закон распределения случайной величины X — числа мальчиков в семье, имеющей четверых детей. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

Решение. Число мальчиков в семье из $n=4$ представляет случайную величину X с множеством значений 0, 1, 2, 3, 4, вероятности которых определяются по формуле Бернулли:

$$P(X=m)=C_n^m p^m q^{n-m}, \text{ где } q=1-p.$$

В нашем случае $n=4$, $p=0{,}515$, $q=1-p=0{,}485$.

Вычислим

$$P(X=0)=C_4^0(0{,}515)^0\cdot(0{,}485)^4=0{,}055,$$

$$P(X=1)=C_4^1(0{,}515)^1\cdot(0{,}485)^3=0{,}235,$$

$$P(X=2)=C_4^2(0{,}515)^2\cdot(0{,}485)^2=0{,}375,$$

$$P(X=3)=C_4^3(0{,}515)^3\cdot(0{,}485)^1=0{,}265,$$

$$P(X=4)=C_4^4(0{,}515)^4\cdot(0{,}485)^0=0{,}070$$

(здесь учтено, что $C_4^0=1, C_4^1=4,\ C_4^2=\dfrac{4\cdot 3}{1\cdot 2}=6,\ C_4^3=C_4^1=4, C_4^4=1$).

Закон распределения имеет вид:

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,055	0,235	0,375	0,265	0,070

Убеждаемся, что $\sum_{i=1}^{5} p_i=0{,}055+0{,}235+\ldots+0{,}070=1$.

Математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$ можно найти, как обычно, по формулам. Но в данном случае, учитывая, что закон распределения случайной величины X ***биномиальный*** (ее вероятности вычисляются по формуле Бернулли), можно воспользоваться формулами биномиального распределения:

$$M(X)=np=4\cdot 0{,}515=2{,}06;\ D(X)=npq=4\cdot 0{,}515\cdot 0{,}485=0{,}9991.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. В рекламных целях торговая фирма вкладывает в каждую десятую единицу товара купюру номиналом 1 тыс. руб. Составьте закон распределения случайной величины — размера выигрыша

при пяти сделанных покупках. Найдите математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

2. Клиенты банка, не связанные друг с другом, не возвращают кредиты в срок с вероятностью 0,1. Составьте закон распределения числа возвращенных в срок кредитов из пяти выданных. Найдите математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение этой случайной величины.

3. Найдите закон распределения числа пакетов трех акций, по которым владельцем будет получен доход, если вероятность получения дохода по каждому из них равна соответственно 0,5; 0,6; 0,7. Найдите математическое ожидание и дисперсию данной случайной величины.

4. Торговый агент имеет пять телефонных номеров потенциальных покупателей и звонит им до тех пор, пока не получит заказ на покупку товара. Вероятность того, что потенциальный покупатель сделает заказ, равна 0,4. Составьте закон распределения числа телефонных разговоров, которые предстоит провести агенту. Найдите математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

5. Сделано два высокорисковых вклада: 10 тыс. руб. в компанию A и 15 тыс. руб. в компанию B. Компания A обещает 50 % годовых, но может разориться с вероятностью 0,2. Компания B обещает 40 % годовых, но может разориться с вероятностью 0,15. Составьте закон распределения случайной величины — общей суммы прибыли (убытка), полученной от двух компаний через год, найдите ее математическое ожидание.

6. Даны законы распределения двух независимых случайных величин:

X_1	2	4	6	8
p	0,4	0,2	0,1	0,3

X_2	0	1	2
p	0,5	0,25	0,25

Составьте закон распределения их разности и проверьте выполнение формул $M(X_1 - X_2) = M(X_1) - M(X_2)$ и $D(X_1 - X_2) = D(X_1) + D(X_2)$.

7—9. Задан закон распределения дискретной случайной величины X (в первой строке указаны возможные значения x_i, во второй — вероятности возможных значений p_i). Найдите: 1) математическое ожидание $M(X)$; 2) дисперсию $D(X)$; 3) среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$; 4) Составьте закон распределения величины $Y = 100 - 2X$; 5) Вычислите математическое ожидание и дисперсию составленной случайной величины Y двумя способами: пользуясь свойствами математического ожидания и дисперсии, непосредственно по закону распределения случайной величины $Y = 100 - 2X$:

Задача 7	X_i	10	20	30	40	50
	P_i	0,1	0,2	0,1	0,2	0,4
Задача 8	X_i	20	30	40	50	60
	P_i	0,1	0,2	0,1	0,2	0,4
Задача 9	X_i	30	40	50	60	70
	P_i	0,1	0,2	0,1	0,2	0,4

7.11. НЕПРЕРЫВНАЯ СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА

7.11.1. Интегральная функция распределения

В теории вероятностей и ее приложениях часто приходится иметь дело с такими случайными величинами, возможные значения которых сплошь заполняют некоторый конечный или бесконечный интервал (α, β).

Примеры. 1. Электрическая лампочка испытывается на длительность горения. Случайная величина X — полное время горения лампочки.

2. Человек приходит на платформу станции метро, чтобы сесть в поезд. Случайная величина X — время ожидания ближайшего поезда.

В первом примере случайная величина X может принимать любое неотрицательное значение. Во втором примере множество значений случайной величины X есть отрезок $[0; t]$ числовой оси (поезда метрополитена следуют с интервалом t минут). Составить таблицу (по типу дискретной случайной величины), в которой были бы перечислены все возможные значения таких случайных величин и указаны их вероятности, невозможно. Эти примеры указывают на целесообразность дать общий способ задания любых типов случайных величин. С этой целью вводят так называемую ***функцию распределения***: $F(x) = P(X < x)$. Она еще называется ***интегральной функцией распределения*** $F(x)$. При любом $x = x_0$ значение $F(x_0)$ задается равенством $F(x_0) = P(X < x_0)$.

Пример. $F(-1) = P(X < -1); F(3) = P(X < 3)$, т.е. для количественной характеристики распределения вероятностей удобно пользоваться не вероятностью того, что случайная величина X примет некоторое данное значение x_0, а вероятностью того, что случайная величина примет значение, меньшее x_0, т.е. $P(X < x_0)$.

7.11.2. Свойства интегральной функции распределения $F(x)$

Свойство 1. $0 \le F(x) \le 1$ (по определению функция распределения является вероятностью).

Свойство 2. Если $x_1 < x_2$, то $F(x_1) \le F(x_2)$ (событие $\{X < x_2\}$ включает событие $\{X < x_1\}$).

Свойство 3. $F(-\infty) = 0; F(+\infty) = 1$ (событие $\{X < -\infty\}$ является невозможным и $P(X < -\infty) = 0$, а событие $\{X < +\infty\}$ является достоверным и $P(X < +\infty) = 1$).

Свойство 4. $P(x_1 \le X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$ (событие $\{X < x_2\}$ представляет собой объединение двух непересекающихся событий: $\{X < x_2\} = \{X < x_1\} + \{x_1 \le X < x_2\}$. Применяя к последнему соотношению «правило сложения вероятностей», получим: $P(X<x_2) = P(X<x_1) + P(x_1 \le X < x_2) \Rightarrow P(x_1 \le X < x_2) = P(X < x_2) - P(X < x_1)$ или $P(x_1 \le X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$.

Таким образом, зная для некоторой случайной величины X ее интегральную функцию $F(x)$, можно найти вероятность попадания случайной величины в любой интересующий нас интервал, т.е. вероятность любого события вида $x_1 \le X < x_2$.

Для дискретной случайной величины X, которая может принимать значения $x_1, x_2, ..., x_n$, интегральная функция распределения будет иметь вид: $F(x) = \sum\limits_{x_i < x} P(X = x_i)$.

Пример. На экзамене студент получил $n = 4$ задачи. Вероятность решить правильно каждую задачу $p = 0{,}8$. Составить закон распределения и построить интегральную функцию распределения случайной величины X — числа правильно решенных задач.

Решение. В данном случае имеем дело с биноминальным распределением $(n = 4;\ p = 0{,}8;\ q = 0{,}2)$. Выпишем вначале значения, которые может принимать случайная величина X: 0; 1; 2; 3; 4 (т. е. студент может не решить ни одной задачи, либо одну, две, три, четыре задачи). Вероятности каждого из этих значений вычисляются по формуле Бернулли. Так, например, $P(0) = P_4(0) = C_4^0 p^0 q^4 = 1 \cdot 1 \cdot (0{,}2)^4 = 0{,}0016$. Аналогично $P(1) = 0{,}0256$; $P(2) = 0{,}1536$; $P(3) = 0{,}4096$; $P(4) = 0{,}4096$. Окончательно закон распределения имеет вид:

X	0	1	2	3	4
P	0,0016	0,0256	0,1536	0,4096	0,4096

Найдем теперь интегральную функцию распределения $F(x)$ и начертим ее график:

1) если $x < 0$, то $F(x) = 0$.

Действительно, $F(x) = \sum\limits_{x_i < 0} P(X = x_i) = 0$, так как значений, меньших числа 0, величина X не принимает;

2) если $0 \le x < 1$, то $F(x) = 0{,}0016$.

Действительно, $F(x) = \sum\limits_{x_i < 1} P(X = x_i) = 0{,}0016$, так как из значений, меньших числа 1, случайная величина X принимает только одно значение — 0 с вероятностью 0,0016;

3) если $1 \le x < 2$, то $F(x) = 0{,}0272$.

Действительно, $F(x) = \sum\limits_{x_i < 2} P(X = x_i) = 0{,}0272$, так как значений случайной величины X, меньших числа 2 два, — 0 и 1 с вероятностями 0,0016 и 0,0256. Следовательно, одно из этих значений, безразлично какое, случайная величина X может принять (по теореме сложения вероятностей несовместных событий) с вероятностью $0{,}0016 + 0{,}0256 = 0{,}0272$;

4) если $2 \le x < 3$, то $F(x) = 0{,}1808$;

5) если $3 \le x < 4$, то $F(x) = 0{,}5904$;

6) если $x \ge 4$, то $F(x) = 1$.

Итак, функция распределения имеет вид (рис. 7.6):

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 0{,}0016, & 0 \le x < 1; \\ 0{,}0272, & 1 \le x < 2; \\ 0{,}1808, & 2 \le x < 3; \\ 0{,}5904, & 3 \le x < 4; \\ 1, & x \ge 4. \end{cases}$$

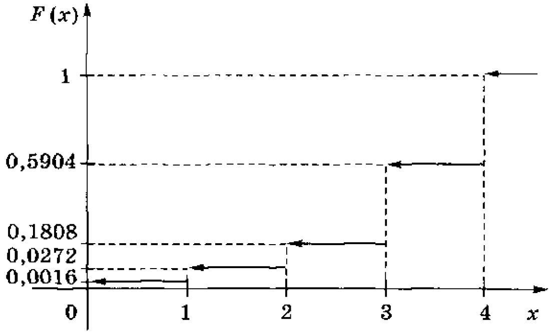


Рис. 7.6

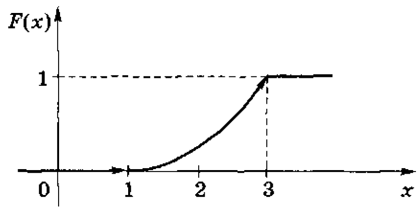


Рис. 7.7

Интегральная функция распределения дискретной случайной величины разрывна и возрастает скачками. В дальнейшем будем называть непрерывными только те случайные величины, интегральные функции распределения которых везде непрерывны.

Пример. Интегральная функция распределения непрерывной случайной величины X задана выражением:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1; \\ a(x-1)^2, & 1 \le x < 3; \\ 1, & x \ge 3. \end{cases}$$

Найти: 1) коэффициент a; 2) $P(2 < x < 4)$; 3) построить график $F(x)$.

Решение. 1) Из свойства непрерывности функции $F(x)$ получим, что при $x = 3$ функция $F(x) = 1$, следовательно, $a(3-1)^2 = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$.

2) $P(2 < x < 4) = F(4) - F(2) = 1 - \frac{1}{4}(2-1)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

3) График функции $F(x)$ представлен на рис. 7.7.

7.11.3. Плотность распределения вероятностей

Пусть имеется непрерывная случайная величина X с интегральной функцией распределения $F(x)$. Вычислим вероятность попадания этой случайной величины на элементарный участок $(x; x+\Delta x)$: $P(x < X < x+\Delta x) = F(x+\Delta x) - F(x)$. Составим отношение этой вероятности к длине участка Δx:

$$\frac{P(x < X < x+\Delta x)}{\Delta x} = \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}.$$

Полученное отношение называется средней вероятностью, которая приходится на единицу длины этого участка. Считая функцию распределения $F(x)$ дифференцируемой, перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{P(x<X<x+\Delta x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = F'(x) =$ $= f(x)$ — ***плотность распределения вероятности, или дифференциальная функция распределения***. Итак, $f(x) = F'(x)$ или $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx$. Смысл плотности распределения вероятности состоит в том, что она указывает на то, как часто появляется случайная величина X в некоторой окрестности точки x при повторении опытов.

7.11.4. Свойства функции $f(x)$. Вычисление вероятности попадания случайной величины в заданный интервал

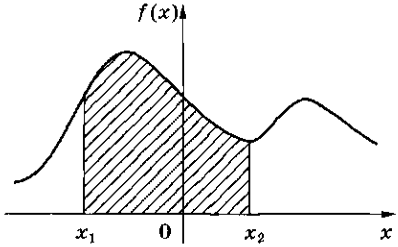
Свойство 1. $f(x) \geq 0$, так как плотность распределения является производной от интегральной функции распределения, а функция распределения — неубывающая функция.

Свойство 2. $P(x_1 \leq X < x_2) = \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx$, так как $P(x_1 \leq X < x_2) = F(x_2) -$ $= F(x_2) - F(x_1) = \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx$.

Таким образом, вероятность попадания случайной величины на полуинтервал $[x_1; x_2)$ численно равна площади заштрихованной криволинейной трапеции (рис. 7.8).

Свойство 3. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$, так как если подставить «$+\infty$» вместо «x» в формулу $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx$ и воспользоваться свойством $F(+\infty) = 1$, то получится исходное выражение.

Рис. 7.8



Пример. Случайная величина X подчинена закону распределения с плотностью вероятности $f(x)$, причем

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ a(3x-x^2), & 0\le x<3; \\ 0, & x\ge 3. \end{cases}$$

Требуется найти: 1) коэффициент a; 2) $P(1<x<4)$; 3) интегральную функцию распределения $F(x)$; 4) построить графики $f(x)$ и $F(x)$.

Решение. 1) По свойству дифференциальной функции $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$. В нашем случае в каждом из трех интервалов числовой оси $((-\infty;0)$; $[0,3)$; $[3;+\infty))$ плотность вероятности задается разными формулами, следовательно, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{0} f(x)dx+\int\limits_{0}^{3} f(x)dx+\int\limits_{3}^{+\infty} f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{0} 0\cdot dx+\int\limits_{0}^{3} a(3x-x^2)dx+$
$+\int\limits_{3}^{+\infty} 0\cdot dx=a\left(\frac{3}{2}x^2\Big|_0^3-\frac{1}{3}x^3\Big|_0^3\right)=a\left(\frac{3}{2}\cdot 9-\frac{1}{3}\cdot 27\right)=\frac{9}{2}a.$

Будем иметь: $\frac{9}{2}a=1 \Rightarrow a=\frac{2}{9}$.

2) Из аналогичных соображений

$$P(1<X<4)=\int\limits_{1}^{4} f(x)dx=\int\limits_{1}^{3}\frac{2}{9}(3x-x^2)dx+\int\limits_{3}^{4} 0\cdot dx=\frac{2}{9}\left(\frac{3}{2}x^2\Big|_1^3-\frac{1}{3}x^3\Big|_1^3\right)+0=$$

$$=\frac{2}{9}\left[\frac{3}{2}(9-1)-\frac{1}{3}(27-1)\right]=\frac{20}{27}.$$

3) Из определения интегральной функции

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx=\begin{cases} 0, & x<0, \\ \int\limits_{0}^{x}\frac{2}{9}(3x-x^2)dx, & 0\le x<3, \\ 1, & x\ge 3, \end{cases} =$$

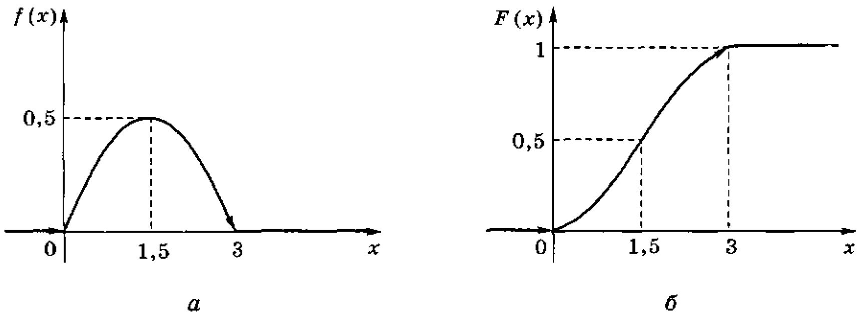


Рис. 7.9

$$= \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \dfrac{2}{9}\left(\dfrac{3}{2}x^2 - \dfrac{1}{3}x^3\right), & 0 \le x < 3, \\ 1, & x \ge 3, \end{cases} = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \dfrac{1}{3}x^2\left(1 - \dfrac{2}{9}x\right), & 0 \le x < 3, \\ 1, & x \ge 3. \end{cases}$$

4) Графики функций $f(x)$ и $F(x)$ приведены на рис. 7.9, *а*, *б*.

7.11.5. Числовые характеристики непрерывной случайной величины

O **_Математическим ожиданием_** (средним значением, центром распределения) $M(x)$ непрерывной случайной величины X называется интеграл от произведения ее значений x на плотность распределения вероятностей $f(x): M(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx.$

Несобственный интеграл предполагается абсолютно сходящимся (в противном случае говорят, что математического ожидания случайной величины не существует). Полезно обратить внимание на то, что структура формулы $M(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ такая же, как и структура формулы $M(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n$ (для дискретных случайных величин). Роль вероятностей p_i играют элементы вероятностей $f(x)dx$. Если математическое ожидание $M(X)$ непрерывной случайной величины X существует и если ее плотность вероятностей $f(x)$ есть четная функция, то $M(X) = 0$. Вообще, если математическое ожидание $M(X)$ случайной величины X существует и если ее плотность $f(x)$ симметрична относительно некоторой точки $x = a$, то $M(X) = a$. Подчеркнем, что математическое ожидание случайной величины всегда имеет ту же размерность, что и значения случайной величины, так как вероятности суть величины безразмерные.

$\boxed{\text{О}}$ ***Дисперсией непрерывной случайной величины*** X называется интеграл от произведения квадрата разности между ее значениями и математическим ожиданием на плотность распределения вероятностей $f(X): D(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}[x - M(X)]^2 f(x) fx$.

Для вычислений удобно пользоваться формулой $D(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - [M(X)]^2$. Нетрудно видеть, что дисперсия $D(X)$ имеет размерность квадрата размерности случайной величины X. Для практических же целей удобно иметь меру разброса, размерность которой совпадает с размерностью X. В качестве такой меры естественно использовать $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$ — среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

Пример. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения вероятностей $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 2x, 0 \le x < 1, \\ 0, & x \ge 1. \end{cases}$ Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

Решение. 1) $M(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} x \cdot 0dx + \int\limits_{0}^{1} x \cdot 2xdx + \int\limits_{1}^{+\infty} x \cdot 0dx =$

$= 0 + 2\int\limits_{0}^{1} x^2dx + 0 = \frac{2}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{2}{3}(1 - 0) = \frac{2}{3}$;

2) $D(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - [M(X)]^2 =$

$= \int\limits_{-\infty}^{0} x^2 \cdot 0dx + \int\limits_{0}^{1} x^2 \cdot 2xdx + \int\limits_{1}^{+\infty} x^2 \cdot 0dx - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 2\int\limits_{0}^{1} x^3dx - \frac{4}{9} = \frac{1}{2}x^4\Big|_0^1 - \frac{4}{9} =$

$= \frac{1}{2}(1 - 0) - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}$; 3) $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{1}{18}} = \frac{\sqrt{2}}{6}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. В лотерее на 100 билетов разыгрываются две вещи, стоимость которых составляет 210 и 60 у.е. Составьте ряд распределения суммы выигрыша для лица, имеющего: а) один билет; б) два билета. Стоимость билета — 3 у.е. Найдите числовые характеристики этих распределений. Запишите в общем виде функции распределений вероятностей и постройте их графики.

2. Под руководством бригадира производственного участка работают трое мужчин и четыре женщины. Бригадиру необходимо выбрать двух рабочих для специальной работы. Не желая оказать кому-либо предпочтения, он решил выбрать двух рабочих случайно. Составьте закон распределения дискретной случайной величины числа женщин в выборке. Найдите числовые характеристики этого распределения. Запишите в общем виде функцию распределения вероятностей и постройте ее график. Какова вероятность того, что будет выбрано не более одной женщины?

3, 4. Найдите: а) математическое ожидание $M(X)$; б) дисперсию $D(X)$ — двумя способами; в) среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$ дискретной случайной величины X по данному закону ее распределения (в первой строке указаны возможные значения x_i, во второй — вероятности возможных значений p_i); г) составьте функцию распределения величины X и постройте ее график; д) вычислите вероятность попадания величины X в интервал $(X_2 < X < X_4)$, пользуясь составленной вами функцией $F(X)$.

К задаче 3

x_i	4	6	8	10	12
p_i	0,2	0,3	0,1	0,2	0,2

К задаче 4

x_i	10	20	30	40	50
p_i	0,1	0,2	0,2	0,2	0,3

5—7. Случайная величина X задана интегральной функцией (функцией распределения) $F(x)$. Требуется: а) убедиться, что заданная функция $F(x)$ является функцией распределения некоторой случайной величины, проверив свойства $F(x)$. В случае положительного ответа найти: б) дифференциальную функцию (плотность распределения) $f(x)$; в) математическое ожидание случайной величины X; г) дисперсию случайной величины X; д) среднее квадратическое отклонение; е) построить графики интегральной и дифференциальной функций ($F(x)$ и $f(x)$ соответственно); ж) определить вероятность попадания величины X в интервал (α, β)

двумя способами (используя интегральную и дифференциальную функции), а затем проиллюстрировать этот результат на графиках $F(x)$ и $f(x)$.

Задача	$F(x)$	α	β
5	$F(x)=\begin{cases} 0, \text{ если } x\le -1, \\ 0{,}5(x+1), \text{ если } -1<x\le 1, \\ 1, \text{ если } x>1 \end{cases}$	–3	0
6	$F(x)=\begin{cases} 0, \text{ если } x\le 1, \\ 0{,}5(x^2-x), \text{ если } 1<x\le 2, \\ 1, \text{ если } x>2 \end{cases}$	0	1,5
7	$F(x)=\begin{cases} 0, \text{ если } x\le 0, \\ \sin 2x, \text{ если } 0<x\le \pi/4, \\ 1, \text{ если } x>\pi/4 \end{cases}$	0	$\pi/6$

7.12. РАВНОМЕРНОЕ, ПОКАЗАТЕЛЬНОЕ И НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

7.12.1. Равномерное распределение

О Непрерывная случайная величина X имеет ***равномерное распределение*** на отрезке $[a, b]$, если на этом отрезке плотность распределения вероятности случайной величины постоянна, а вне его равна нулю (рис. 7.10), т.е. $f(x)=\begin{cases} 0, & x<a, \\ \dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b, \\ 0, & x>b. \end{cases}$

Из определения плотности вероятности равномерного распределения нетрудно найти интегральную функцию распределения $F(X)$ на интервале $[a; b]$:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int_{a}^{x}\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\cdot x\Big|_{a}^{x}=\frac{x-a}{b-a}.$$

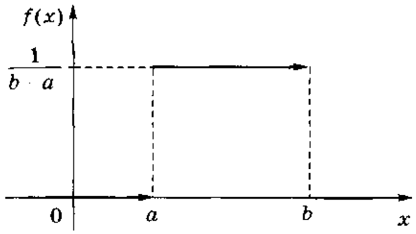


Рис. 7.10

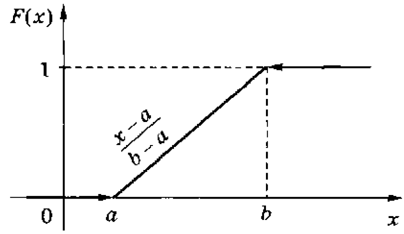


Рис. 7.11

Таким образом (рис. 7.11) $F(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b, \\ 1, & x > b. \end{cases}$

Найдем вероятность попадания равномерно распределенной случайной величины X в интервал $(x_1;\ x_2)$, расположенный внутри отрезка $[a;\ b]$:

$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}x\Big|_{x_1}^{x_2} = \frac{x_2 - x_1}{b-a}.$$

Математическое ожидание

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{a} x \cdot 0dx + \int_{a}^{b} x \cdot \frac{1}{b-a}dx + \int_{b}^{+\infty} x \cdot 0dx =$$

$$= \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} x\,dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{2}x^2\Big|_{b}^{a} = \frac{a+b}{2}.$$

Дисперсия

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - [M(X)]^2 =$$

$$= \int_{a}^{b} x^2 \frac{1}{b-a}dx - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{3}x^3\Big|_{a}^{b} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Среднее квадратическое отклонение $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \dfrac{b-a}{2\sqrt{3}}$. Со случайной величиной, имеющей равномерное распределение, мы часто встречаемся в измерительной практике. Например, при взвешивании ошибка округления до ближайшего целого деления является случайной величиной X, которая может принимать с постоянной плотностью вероятности любое значение между двумя соседними целыми делениями.

Пример. Автобус некоторого маршрута движется равномерно с интервалом 5 мин. Найти вероятность того, что равномерно распределенная случайная величина X — время ожидания автобуса составит менее 3 мин.

Решение. Случайная величина X равномерно распределена на интервале [0; 5], поэтому плотность вероятности на этом интервале имеет вид $f(x)=\dfrac{1}{5-0}=\dfrac{1}{5}$. Для того чтобы время ожидания не превысило трех минут, пассажир должен появиться на остановке в интервале от двух до пяти минут после ухода предыдущего автобуса, т. е. случайная величина X должна попасть в интервал (2; 5). Поэтому искомая вероятность $P(2<X<5)= =\int\limits_2^5\frac{1}{5}dx=\frac{1}{5}x\Big|_2^5=\frac{1}{5}\cdot(5-2)=\frac{3}{5}$.

7.12.2. Показательное (экспоненциальное) распределение

О Непрерывная случайная величина X распределена по ***показательному закону***, если ее плотность вероятности имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x<0;\\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{если } x\geq 0,\end{cases}$$

где $\lambda>0$ — параметр показательного распределения (рис. 7.12).

Найдем интегральную функцию распределения $F(x)$.

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}f(x)dx=\int\limits_0^x\lambda\cdot e^{-\lambda x}dx=-e^{-\lambda x}\Big|_0^x=1-e^{-\lambda x}.$$

Таким образом (рис. 7.13),

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & \text{при } x\geq 0;\\ 0, & \text{при } x<0.\end{cases}$$

Найдем числовые характеристики $M(X), D(X), \sigma(X)$ случайной величины X, распределенной по показательному закону:

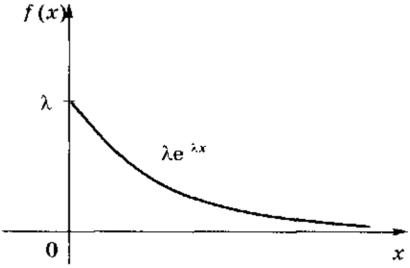


Рис. 7.12

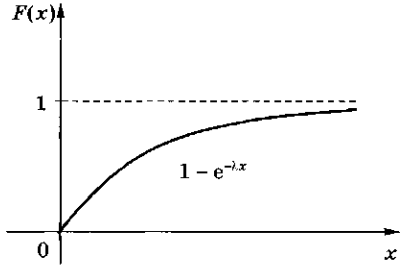


Рис. 7.13

$$M(X)=\int\limits_{-\infty}^{-\infty} xf(x)dx=\int\limits_{0}^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx=\left\{\begin{matrix} u=x & du=dx \\ & \Rightarrow \\ dv=\lambda e^{-\lambda x} & v=\lambda\int e^{-\lambda x}dx=-e^{-\lambda x}\end{matrix}\right\}=$$

$$=-xe^{-\lambda x}\Big|_{0}^{+\infty}+\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\lambda x}dx=\left(-xe^{-\lambda x}-\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\right)\Bigg|_{0}^{+\infty}=-\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^{\lambda x}}+\frac{1}{\lambda e^{\lambda x}}\right)+$$

$$+\frac{0}{e^{0}}\cdot+\frac{1}{\lambda e^{0}}=\frac{1}{\lambda}.$$

Аналогично, дважды интегрируя по частям, можно найти $D(X)$: $D(X)=\frac{1}{\lambda^2}$. Откуда $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\frac{1}{\lambda^2}}=\frac{1}{\lambda}$. Найдем вероятность попадания показательно распределенной случайной величины в интервал $(x_1;\ x_2)$, расположенный внутри полуинтервала $[0;+\infty)$:

$$P(x_1<X<x_2)=\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx=\int\limits_{x_1}^{x_2} \lambda e^{-\lambda x}dx=-e^{-\lambda x}\Big|_{x_1}^{x_2}=e^{-\lambda x_1}-e^{-\lambda x_2}.$$

Случайные величины, имеющие показательное распределение, часто встречаются в практических приложениях теории вероятностей, особенно в теории массового обслуживания. Так, к показательному закону приводит задача о распределении промежутка времени между двумя последовательными событиями в простейшем потоке с интенсивностью λ. Показательный закон используется для описания распределения времени безотказной работы прибора или системы, если интенсивность отказов можно считать постоянной, длительности ремонта или другого вида обслуживания и т. д. Наконец, для практического применения показательного распределения важна предельная теорема. Согласно этой теореме, при объединении достаточно большого числа потоков с любыми законами распределения промежутков времени между появлениями событий, промежуток времени между событиями в объединенном потоке будет в пределе при неограниченном увеличении числа составляющих потоков и равномерной их малости подчиняться показательному закону распределения с параметром $\lambda = \frac{n}{\tau}$, где τ — общее время наблюдения за всеми потоками; n — общее число появлений событий за время τ.

Показательное распределение широко используется в теории надежности, изучающей условия безотказной работы некоторой системы, если отказы в ее работе образуют простейший поток.

Пример. Случайная величина X — время работы электролампочки имеет показательное распределение. Определить вероятность того, что время работы лампочки будет не меньше 600 ч, если среднее время работы 400 часов.

Решение. По условию задачи математическое ожидание случайной величины X равно 400 ч, следовательно, $\lambda = \frac{1}{400}$ (так как $M(X) = \frac{1}{\lambda}$).

Искомая вероятность $P(X \geq 600) = 1 - P(X < 600) = 1 - F(600)$, где $F(x) =$

$$= \begin{cases} 0, \text{ при } x < 0, \\ 1 - e^{-\frac{1}{400}x}, \text{ при } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad F(600) = 1 - e^{-\frac{1}{400} \cdot 600} = 1 - e^{-1,5}.$$

Окончательно, $P(X \geq 600) = 1 - (1 - e^{-1,5}) = e^{-1,5} \approx 0,2231$.

7.12.3. Нормальное распределение

Среди всех непрерывных законов распределения вероятностей особую роль играет нормальное распределение. Теоретическим основанием к его применению служит центральная предельная теорема Ляпунова. Согласно этой теореме, распределение суммы n попарно независимых и произвольно распределенных случайных величин при некоторых дополнительных условиях и неограниченном возрастании n стремится к нормальному закону распределения.

$\boxed{\text{О}}$ ***Нормальное распределение*** (распределение Гаусса) — это распределение непрерывной случайной величины X, характери-

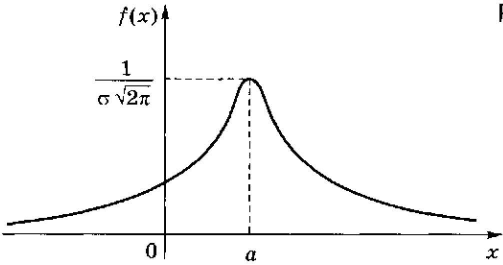


Рис. 7.14

зуемое плотностью вероятности $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, где $a=M(X)$ — математическое ожидание; σ — среднее квадратическое отклонение случайной величины X. *График плотности вероятности* имеет вид, представленный на рис. 7.14.

Прежде всего выделим стандартное нормальное распределение с параметрами $a=0$, $\sigma=1$, т. е. с плотностью вероятности $\varphi(x)=$ $=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x_2}{2}}$. Данная функция, а также функция $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ и их свойства нам уже встречались при рассмотрении локальной и интегральной теорем Лапласа. График $\varphi(x)$ имеет вид, представленный на рис. 7.15.

Отметим, что $\varphi_{\max}=\varphi(0)\approx 0{,}3989$.

Влияние параметров a и σ на вид кривой плотности вероятности приведено на рис. 7.16.

Как видно из графика, параметр a определяет положение центра нормальной плотности, σ — разброс относительно центра (при уменьшении σ растет $f_{\max}$, а площадь должна оставаться равной 1, т.е. кривая будет стягиваться к своей оси симметрии $x=a$, что соответствует смыслу σ как меры рассеяния).

Определим вероятность попадания нормально распределенной случайной величины X в интервал $(\alpha;\beta)$: $P(\alpha<X<\beta)=$

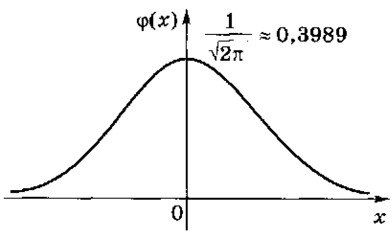


Рис. 7.15

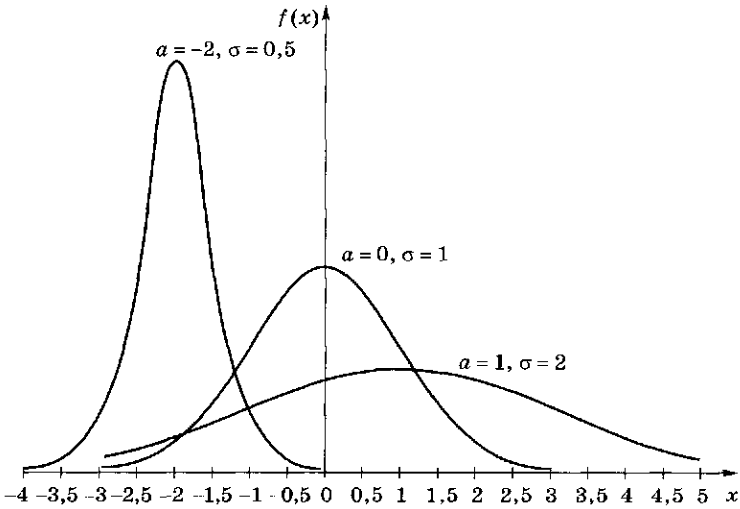


Рис. 7.16

$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx$ и, используя замену $\dfrac{x-a}{\sigma} = t$, можно привести последний интеграл к виду $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x)$, где $\Phi(x)$ уже известная нам функция Лапласа. Окончательно: $P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\dfrac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\dfrac{\alpha - a}{\sigma}\right)$.

7.12.4. Правило трех сигм

Отметим важный случай последней формулы предыдущего подраздела, позволяющий оценить вероятность того, что случайная величина X, распределенная по нормальному закону, отклонится от своего математического ожидания на величину, меньшую заданного положительного числа δ, т. е. попадет в симметричный относительно математического ожидания интервал $(a - \delta; a + \delta)$:

$$P(|X - a| < \delta) = P(-\delta < X - a < \delta) = P(a - \delta < X < a + \delta) =$$

$$= \Phi\left(\frac{a + \delta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \delta - a}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\delta}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right);$$

$$P(|X-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Используя данную формулу, можно получить известное правило трех сигм, которое утверждает, что нормально распределенная случайная величина практически не принимает значений вне интервала $(a-3\sigma; a+3\sigma)$.

Правило трех сигм. *Если случайная величина распределена нормально, то абсолютное значение ее отклонения от математического ожидания не превосходит утроенного среднего квадратического отклонения.*

Действительно,

$$P(|X-a|<3\sigma)=2\Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right)=2\Phi(3)\approx 0{,}9972.$$

В частности:

$$P(|X-a|<\sigma)=2\Phi\left(\frac{\sigma}{\sigma}\right)=2\Phi(1)\approx 0{,}6826,$$

$$P(|X-a|<2\sigma)=2\Phi\left(\frac{2\sigma}{\sigma}\right)=2\Phi(2)\approx 0{,}9544.$$

Примеры. 1. Случайная величина X распределена нормально: $M(X)=6, \sigma(X)=2$. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значения из интервала (4; 8).

Решение.

$$P(4<X<8)=\Phi\left(\frac{8-6}{2}\right)-\Phi\left(\frac{4-6}{2}\right)=\Phi(1)-\Phi(-1)=$$

$$=\Phi(1)+\Phi(1)=2\Phi(1)=0{,}6826.$$

2. Случайная величина X распределена нормально. Среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)=0{,}4$. Найти вероятность того, что отклонение случайной величины от ее математического ожидания по абсолютному значению будет меньше 0,3.

Решение. $P(|X-a|<0{,}3)=2\Phi\left(\frac{0{,}3}{0{,}4}\right)=2\Phi(0{,}75)\approx 0{,}5468.$

Задачи для самостоятельного решения

1—3. Задано математическое ожидание a и среднее квадратическое отклонение σ нормально распределенной случайной величины X. Требуется: а) найти вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (α, β); б) найти вероятность того, что абсолютное значение отклонения $X - a$ окажется меньше δ; в) найти симметричный относительно a интервал, в который попадет величина X с вероятностью p; г) дать графические пояснения ответов на кривой нормального распределения; д) найти интервалы, в которых практически окажутся все значения величины X (правило трех сигм).

Задача	a	σ	α	β	δ	p
1	7	3	6	10	1	0,5223
2	12	4	12	16	2	0,5821
3	9	3	9	18	6	0,8904

7.13. МОМЕНТЫ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ. ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ И ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ. НЕРАВЕНСТВО ЧЕБЫШЕВА

7.13.1. Моменты случайной величины

Обобщением основных числовых характеристик случайных величин является понятие *моментов случайной величины* (понятие «момент» заимствовано из механики, где оно применяется для описания распределения масс). В теории вероятностей различают моменты двух видов: *начальные* и *центральные*.

О **Начальным моментом** k-го порядка случайной величины X называют математическое ожидание k-й степени случайной величины X^k, т.е. $\alpha_k = M(X^k)$. Для дискретной случайной величины начальный момент выражается суммой $\alpha_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i$, а для непрерывной — интегралом $\alpha_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx$. Из начальных моментов случайной величины особое значение имеет момент первого порядка. Это уже рассматривавшееся математическое ожидание $M(X)$. Начальные моменты высших порядков используются главным образом для вычисления центральных моментов.

$\boxed{\text{О}}$ ***Центральным моментом*** k-го порядка случайной величины X называют математическое ожидание k-й степени отклонения $(X - M(X))^k$, т.е. $\mu_k = M[(X - M(X))^k]$.

Для дискретной случайной величины центральный момент выражается суммой $\mu_k = \sum_{i=1}^{n}(x_i - M(X))^k p_i$, а для непрерывной — интегралом $\mu_k = \int_{-\infty}^{+\infty}(x - M(X))^k f(x)dx$.

Среди центральных моментов случайной величины особое значение имеет центральный момент второго порядка, который является не чем иным, как дисперсией $D(X)$. Кроме него в теории вероятностей часто используются центральные моменты третьего и четвертого порядков.

Третий центральный момент служит характеристикой асимметрии («скошенности») распределения. При этом обычно рассматривают отношение μ_3 к среднему квадратическому отклонению в третьей степени, которое называют ***коэффициентом асимметрии*** распределения случайной величины X: $a_x = \frac{\mu_3}{\sigma_x^3}$. Кривые распределения, имеющие различную асимметрию, показаны на рис. 7.17.

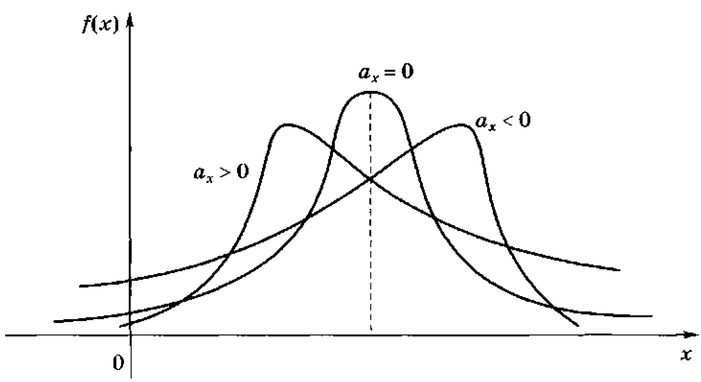
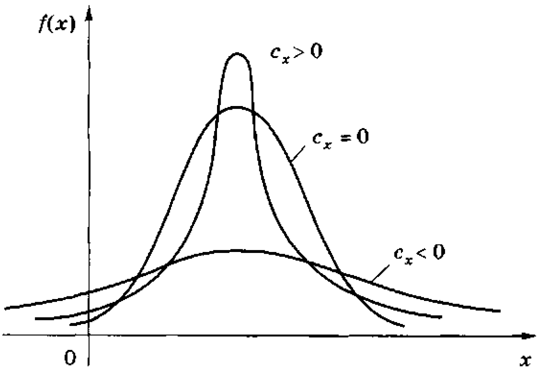


Рис. 7.17

Рис. 7.18



Четвертый центральный момент μ_4 служит для характеристик островершинности или плосковершинности распределения. Эти свойства распределения случайной величины X описываются с помощью ***эксцесса*** — величины, определяемой формулой $c_x = \frac{\mu_4}{\sigma_x^4} - 3$. Кривая нормального распределения, для которой $c_x = 0$, т.е. $\frac{\mu_4}{\sigma_x^4} = 3$, принимается за эталон. Кривые более островершинные — имеют положительный эксцесс, более плосковершинные — отрицательный (рис. 7.18).

Иногда на практике применяются так называемые абсолютные моменты.

Абсолютный начальный момент определяется формулой $\beta_k = M[|X^k|]$, а ***абсолютный центральный момент*** — формулой $\nu_k = M\left[|X - M(X)|^k\right]$.

7.13.2. Закон больших чисел и предельные теоремы

Теория вероятностей изучает закономерности, свойственные массовым случайным явлениям. Если явление носит единичный характер, теория вероятностей способна обычно предсказать лишь результаты в очень широких пределах. Закономерности проявляются именно при большом числе случайных явлений, происходящих в однородных условиях. При этом характеристики случайных событий и случайных величин, наблюдаемых при испытании, становятся устойчивыми. Например, устойчива частота появления события при большом числе испытаний, то же относится и к средним значениям случайных величин.

О Группа теорем, устанавливающих соответствие между теоретическими и экспериментальными характеристиками случайных величин и случайных событий при большом числе испытаний над ними, носит название ***предельных теорем*** теории вероятностей. К ним относятся ***закон больших чисел*** (группа теорем, включающая, в частности, неравенство и теорему Чебышева, теорему Бернулли) и ***центральная предельная теорема Ляпунова.***

Неравенство Чебышева. Пусть случайная величина X имеет математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$. ***Неравенство Чебышева*** утверждает: *вероятность того, что отклонение случайной величины от ее математического ожидания будет по абсолютному значению не меньше любого положительного числа* ε, *ограничена сверху величиной* $\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$, т.е.

$$\boxed{P(|X - M(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.}$$

Геометрический смысл этого события заключается в том, что значение случайной величины X попадает в область, заштрихованную на рис. 7.19.

Следует помнить, что неравенство Чебышева справедливо как для дискретных, так и для непрерывных случайных величин, и полезно на практике лишь тогда, когда $\varepsilon > \sigma$; в противном случае оно дает тривиальную оценку. Так, например, если выбрать $\varepsilon = \frac{1}{2}\sigma(X)$, то $P\left(|X - M(X)| \geq \frac{1}{2}\sigma(X)\right) \leq \frac{D(X)}{\frac{1}{4}D(X)} = 4$, но и без того очевидно, что вероятность не может быть больше четырех; если же выбрать $\varepsilon = 10\sigma(X)$, то $P(|X - M(X)| \geq 10\sigma(X)) \leq \frac{D(X)}{100D(X)} = 0{,}01$, а это уже достаточно хорошая оценка вероятности.

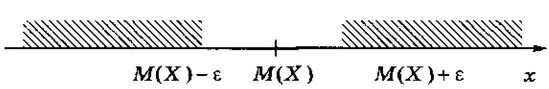


Рис. 7.19

Неравенство Чебышева можно представить и в другом виде: $P(|X-M(X)|<\varepsilon)\geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$.

Неравенство Маркова. *Для положительных случайных величин, имеющих математическое ожидание, справедливо неравенство Маркова* $(\varepsilon>0)$:

$$\boxed{P(X\geq\varepsilon)\leq\frac{M(X)}{\varepsilon}.}$$

Неравенство Маркова в первоначальной форме или в форме $P(X<\varepsilon)\geq 1-\frac{M(X)}{\varepsilon}$ применяют для оценки вероятности положительных случайных величин с неизвестным законом распределения.

$\boxed{\text{Т}}$ **Теорема Чебышева.** *Пусть имеется бесконечная последовательность X_1, X_2, ..., X_n, ... случайных величин с одним и тем же математическим ожиданием a ($M(X_1)=M(X_2)=...=M(X_n)=...=a$) и дисперсиями, ограниченными одной и той же постоянной C ($D(X_1)<C$, $D(X_2)<C$, ..., $D(X_n)<C$...). Тогда каково бы ни было положительное число ε, вероятность события $\left|\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n}-a\right|<\varepsilon$ стремится к единице при $n\to+\infty$,* т.е.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n}-a\right|<\varepsilon\right)=1.}$$

$\boxed{\text{Т}}$ **Теорема Бернулли.** *Пусть производится n независимых опытов, в каждом из которых с вероятностью p может наступить некоторое событие A. Рассмотрим случайную величину Y_n — число наступлений события A в n опытах. Тогда каково бы ни было положительное число ε, вероятность события $\left|\frac{Y_n}{n}-p\right|<\varepsilon$ стремится к единице при $n\to+\infty$, т.е.*

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{Y_n}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=1,}$$

где $\frac{Y_n}{n}$ — частота наступления интересующего нас события.

Центральная предельная теорема Ляпунова показывает, что при достаточно большом числе n независимых случайных величин X_1, X_2, ... X_n, подчиненных каким угодно законам распределения (при соблюдении некоторых ограничений), их сумма будет иметь закон распределения, как угодно близкий к нормальному закону. Сформулируем простейшую форму центральной предельной теоремы Ляпунова, когда случайные величины X_1, X_2, ... X_n взаимно независимы и одинаково распределены.

$\boxed{\text{Т}}$ *Если случайные величины X_1, X_2, ..., X_n взаимно независимы и имеют один и тот же закон распределения с математическим ожиданием a и дисперсией σ^2, причем существует третий абсолютный центральный момент ν_3, то при неограниченном увеличении n закон распределения суммы этих случайных величин $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ неограниченно приближается к нормальному.*

В практических задачах часто применяют центральную предельную теорему для определения вероятности того, что сумма нескольких случайных величин окажется в заданных пределах.

Пример. Складываются 24 независимые случайные величины, распределенные по равномерному закону на интервале (0; 1). Написать приближенное выражение для плотности суммы этих случайных величин. Найти вероятность того, что эта сумма будет заключена в пределах от 6 до 8.

Решение. Пусть $Y = \sum_{i=1}^{24} X_i$, где X_i — случайные величины, равномерно распределенные на интервале (0; 1). Условия теоремы Ляпунова соблюдены, поэтому случайная величина Y имеет приближенно плотность нормального распределения $f(y) \approx \dfrac{1}{\sigma_Y\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-M(Y))^2}{2\sigma_Y^2}}$.

Поскольку все X_i распределены равномерно на интервале (0; 1), их математические ожидания и дисперсии равны между собой:

$$M(X_i) = \frac{a+b}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}, \quad D(X_i) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(1-0)^2}{12} = \frac{1}{12}.$$

Следовательно, по свойствам математического ожидания и дисперсии суммы случайных величин:

$$M(Y) = M\left(\sum_{i=1}^{24} X_i\right) = \sum_{i=1}^{24} M(X_i) = \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2}}_{24\ \text{раза}} = 12,$$

$$\sigma_Y^2 = D(Y) = D\left(\sum_{i=1}^{24} X_i\right) = \sum_{i=1}^{24} D(X_i) = \underbrace{\frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \ldots + \frac{1}{12}}_{24\ \text{раза}} = 2.$$

Подставляя найденные значения $M(Y)$ и $D(Y)=\sigma_Y^2$ в формулу для плотности нормального распределения случайной величины Y, получим $f(y)\approx\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{(y-12)^2}{4}}$. Тогда вероятность того, что случайная величина $Y=\sum_{i=1}^{24}X_i$ будет заключена в пределах от 6 до 8, определяется по формуле для вычисления вероятности попадания нормально распределенной случайной величины в заданный интервал $(\alpha;\beta)=(6;8)$:

$$P(\alpha<Y<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-M(Y)}{\sigma_Y}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-M(Y)}{\sigma_Y}\right),$$

где $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ — функция Лапласа.

Подставляя числовые данные, получим

$$P(6<Y<8)=\Phi\left(\frac{8-12}{\sqrt{2}}\right)-\Phi\left(\frac{6-12}{\sqrt{2}}\right)\approx\Phi(-2{,}83)-\Phi(-4{,}24)=-\Phi(2{,}83)+\Phi(4{,}24)=$$

$$=-0{,}4977+0{,}4999=0{,}0022.$$

7.14. ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ. ГЕНЕРАЛЬНАЯ И ВЫБОРОЧНАЯ СТАТИСТИЧЕСКИЕ СОВОКУПНОСТИ

В математической статистике рассматриваются две основные задачи.

Первая задача состоит в том, чтобы указать способы сбора и группировки статистических сведений, полученных в результате наблюдений или в результате поставленных экспериментов.

Вторая задача заключается в разработке методов анализа статистических данных в зависимости от целей исследования. К ним относятся:

1) оценка неизвестной вероятности события; оценка параметров распределения, вид которого не известен; оценка зависимости случайной величины от одной или нескольких случайных величин;

2) проверка статистических гипотез о виде неизвестного распределения или о величине параметров распределения, вид которого не известен.

Решению этих задач посвящены подразделы 7.14 — 7.17.

Современная математическая статистика разрабатывает способы определения числа необходимых испытаний до начала исследования (планирование эксперимента) и решает многие другие задачи. Современную математическую статистику определяют как науку о принятии решений в условиях неопределенности.

Итак, основная задача математической статистики состоит в создании методов сбора и обработки статистических данных для получения научных и практических выводов.

В основе задач, решаемых методами математической статистики, лежит необходимость изучения совокупности однородных объектов, относительно некоторого качественного или количественного признака.

Например, при изучении партии однородных товаров, хранящихся на складе, качественным признаком могут служить сортовые, а количественным — массовые характеристики, изменяющиеся в процессе хранения.

7.14.1. Генеральная и выборочная статистические совокупности

$\boxed{\text{О}}$ Совокупность всех объектов, подчиненных данному признаку, называется ***генеральной совокупностью***. Число таких объектов называется ***объемом генеральной совокупности***.

На практике, как правило, обследование всех объектов генеральной совокупности не производится в силу излишней трудоемкости такого процесса. Обычно из всей совокупности отбирают ограниченное число объектов, которые и изучают. Такую случайно отобранную совокупность называют ***выборочной совокупностью***, или ***выборкой***. Для того чтобы по данным выборки достаточно уверенно характеризовать всю генеральную совокупность, необходимо, чтобы отобранные элементы правильно ее представляли.

$\boxed{\text{О}}$ Выборка, достаточно хорошо описывающая всю генеральную совокупность, называется ***репрезентативной*** (***представительной***).

Для получения репрезентативной выборки необходимо, чтобы все отобранные элементы имели одинаковую вероятность попасть в выборку. В случае большого объема N генеральной совокупности хорошие результаты в этом смысле дает использование таблицы «случайных чисел».

Для того чтобы отобрать, например, 20 объектов из пронумерованной генеральной совокупности, можно открыть любую страницу таблицы «случайных чисел» и выписать подряд 20 случайных чисел. В выборку включают те объекты, номера которых совпали с выписанными случайными числами (случайные числа, превышающие N, при выписывании пропускаются).

$\boxed{\text{О}}$ Элементы $x_1, x_2, \ldots, x_n$, попавшие в выборку, называются ***вариантами***, а их количество n — ***объемом выборки***. Отобранные элементы располагают обычно в порядке их возрастания: $x^{(1)} \le x^{(2)} \le \ldots \le x^{(n)}$. Такая последовательность вариант называется ***вариационным рядом***. Разность между максимальным и минимальным элементами выборки $z = x^{(n)} - x^{(1)}$ называется ***размахом выборки***.

Среди n элементов выборки могут встречаться повторяющиеся. Если, например, элемент x_1 встречается n_1 раз, x_2 — n_2 раз, ..., x_k — n_k раз, то числа $n_1, n_2, \ldots, n_k$ называются частотами вариант $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Очевидно, что сумма всех частот равна объему выборки, т.е. $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$ или $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$.

$\boxed{\text{О}}$ Расположенная в порядке возрастания вариант последовательность пар чисел, составленная из вариант и их частот $(x_1,n_1), (x_2,n_2), \ldots,(x_k,n_k)$, называется ***статистическим рядом***, или ***статистическим распределением***. При этом пользуются табличной записью:

x_i	x_1	x_2	...	x_k
n_i	n_1	n_2	...	n_k

Иногда вместо частоты варианты n_i требуется использование относительных частот $\omega_i = \frac{n_i}{n}$. Очевидно, что сумма частот всех элементов выборки равна единице: $\sum_{i=1}^{k} \omega_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{n} = \frac{n_1}{n} + \frac{n_2}{n} + \ldots +$ $+ \ldots + \frac{n_k}{n} = \frac{n_1 + n_2 + \ldots + n_k}{n} = 1$.

Примеры. 1. Записать вариационный ряд и статистическое распределение элементов выборки 5, 0, 3, 7, 0, 10, 5, 0, 5, 2, 10, 2, 0, 7, 2, 0, 4, 7, 7, 4 — из числа рабочих дней в году, пропущенных по болезни работниками магазина. Определить размах выборки.

Решение. Объем выборки $n = 20$. Упорядочив элементы выборки по величине, получим вариационный ряд 0, 0, 0, 0, 0, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 7, 7, 7, 7, 10, 10. Размах выборки $z = 10 - 0 = 10$.

	0	2	3	4	5	7	10
n_i	5	3	1	2	3	4	2

При большом объеме выборки для упрощения вычислений ее элементы объединяют в группы (разряды), представляя выборку в виде ***группированного статистического ряда*** (распределения). Для этого интервал, содержащий все элементы, разбивают на k непересекающихся интервалов. Вычисления значительно упрощаются, если эти интервалы имеют одинаковую длину $h = \frac{z}{k}$. После того как интервалы выбраны, определяются частоты — количество элементов n_i^* выборки, попавших в i-й интервал, а сами элементы, попавшие в этот интервал, считаются равными его середине x_i^* (элемент, совпадающий с верхней границей интервала, относится к последующему интервалу).

Число интервалов k группировки берется в зависимости от объема выборки. При этом следует помнить, что группировка выборки вносит погрешности в дальнейшие вычисления. Эти погрешности растут с уменьшением числа интервалов. В процессе составления группированного статистического распределения подсчитываются также ***накопленные частоты*** $\tilde{n}_i^*$ (накопленная частота i-го интервала равна сумме частот самого i-го и всех предыдущих интервалов, т. е., например, $\tilde{n}_3^* = n_1^* + n_2^* + n_3^*$), относительные частоты $\frac{n_i^*}{n}$ и накопленные относительные частоты $\frac{\tilde{n}_i^*}{n} = \sum_{j=1}^{i} \frac{n_j^*}{n}$.

2. Дано время недельной загрузки электрических духовых шкафов 50 обследованных предприятий общественного питания в часах:

38 60 41 51 33 42 45 21 53 60

60 52 47 46 49 49 14 57 54 59

77 47 23 48 58 32 42 58 61 30

61 35 47 72 41 45 44 56 30 40

67 65 39 48 43 60 54 42 59 50

Найти размах выборки, число и длину интервалов, а также составить таблицу частот (записать группированное статистическое распределение). Первый интервал 14 — 23.

Решение. Будем проводить группировку по интервалам равной длины $h = 23 - 14 = 9$. Размах выборки $z = 77 - 14 = 63$. Тогда необходимое число интервалов $k = \frac{63}{9} = 7$. Результаты группировки сведены в таблицу:

Номер интервала i	Границы интервала	Середина интервала x_i^*	Частота n_i^*	Относительная частота n_i^*/n	Накопленная относительная частота $\tilde{n}_i^*/n$
1	14—23	18,5	2	0,04	0,04
2	23—32	27,5	3	0,06	0,10
3	32—41	36,5	6	0,12	0,22
4	41—50	45,5	17	0,34	0,56
5	50—59	54,5	10	0,20	0,76
6	59—68	63,5	10	0,20	0,96
7	68—77	72,5	2	0,04	1,00

7.14.2. Графическое представление статистической совокупности. Полигон и гистограмма частот

В целях наглядности строят различные графики статистического распределения. Они позволяют лучше представить характер распределения элементов выборки, а иногда и сделать предположения о законе распределения генеральной совокупности. Такими графиками являются полигон частот и гистограммы.

$\boxed{\text{О}}$ ***Полигоном частот*** называется ломаная линия, вершинами которой являются точки (x_1, n_1), (x_2, n_2), ..., (x_k, n_k), определяемые элементами статистического ряда. Для его построения по оси абсцисс откладываются варианты x_i, а по оси ординат — соответствующие им частоты n_i. Построенные точки $(x_i;\ n_i)$ соединяются отрезками прямых, и получается полигон частот (для группированной выборки полигон частот строится по точкам $(x_i^*; n_i^*)$).

Для группированной выборки обычно строится гистограмма частот.

О ***Гистограммой частот*** называется ступенчатая фигура, составленная из прямоугольников, построенных на интервалах так, что площадь каждого прямоугольника численно равна частоте n_i^* варианты x_i^*, расположенной в середине i-го интервала. Отсюда следует, что площадь гистограммы частот равна объему выборки n. При равных длинах интервалов разбиения h высоты прямоугольников равны $H_i = \dfrac{n_i^*}{h}$.

Иногда вместо полигона и гистограммы частот строятся ***полигон*** и ***гистограмма относительных частот***. Здесь по оси ординат откладывается не частота n_i^*, а относительная частота

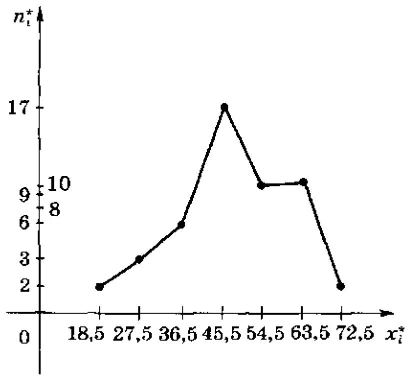


Рис. 7.20

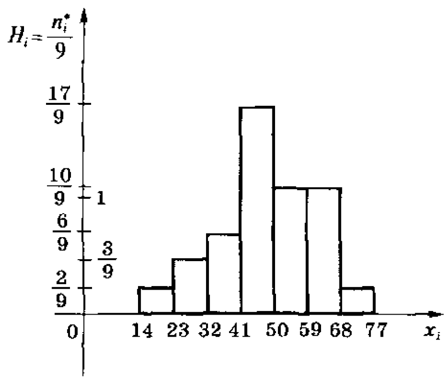


Рис. 7.21

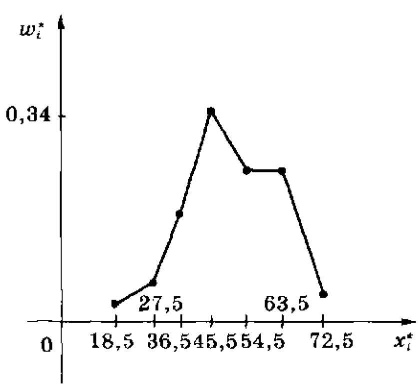


Рис. 7.22

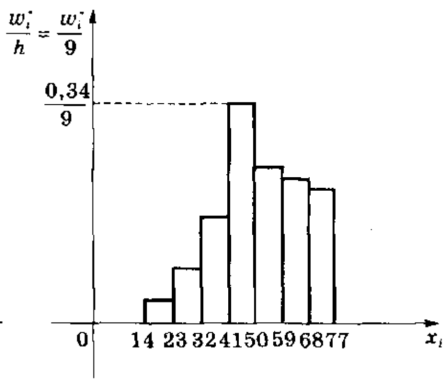


Рис. 7.23

$w_i = \dfrac{n_i^*}{n}$ (высота прямоугольников гистограммы относительных частот будет равна соответственно $\dfrac{w_i^*}{h}$, а площадь всей гистограммы относительных частот равна единице).

Пример. Построить полигон и гистограмму частот и относительных частот по группированной выборке примера 2 (см. подразд. 7.14.1).

Решение. По результатам группировки (см. таблицу из примера 2) строим полигон частот (рис. 7.20), гистограмму частот (рис. 7.21), полигон относительных частот (рис. 7.22) и гистограмму относительных частот (рис. 7.23).

7.14.3. Эмпирическая функция распределения

Если известно распределение частот какого-нибудь количественного признака X, нетрудно заметить, что и частота n_i и относительная частота $w_i = \dfrac{n_i}{n}$ зависят от x_i. Из этих соображений вводится так называемая ***эмпирическая функция распределения*** $F^*(x)$, которая каждому значению $x \in X$ ставит в соответствие сумму относительных частот вариант выборки, меньших x:

$F^*(x) = \sum\limits_{x_i<x} \dfrac{n_i}{n}$ (иногда эта функция записывается как $F^*(x) = \dfrac{n_x}{n}$, где под n_x понимается суммарная частота всех вариант выборки, меньших x, т.е. если, например, $x > x_3$, то $n_x = n_1 + n_2 + n_3$). Эмпирическая функция распределения (функция распределения выборки) $F^*(x)$ позволяет составить представление об интегральной функции распределения $F(x)$ всей генеральной совокупности признака X ($F(x)$ в этом случае называется обычно теоретической функцией распределения).

Эмпирическая функция распределения $F^*(x)$ обладает всеми свойствами интегральной функции распределения:

1) значения эмпирической функции распределения принадлежат отрезку $[0;1]$, т.е. для любого $x \in X, 0 \le F^*(x) \le 1$;

2) $F^*(x)$ — неубывающая функция;

3) если x_1 — наименьшая варианта, то для $x \le x_1, F^*(x) = 0$, а если x_k — наибольшая варианта, то для $x > x_k$, $F^*(x) = 1$.

Пример. Построить графики эмпирических функций распределения по исходной и группированной выборке примера 2 (см. п. 7.14.1).

Решение. Запишем исходные данные в виде статистического распределения:

x_i	14	21	23	30	32	33	35	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47
n_i	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	2	3	1	1	2	1	3

x_i	48	49	50	51	52	53	54	56	57	58	59	60	61	65	68	72	77
n_i	2	2	1	1	1	1	2	1	1	2	2	3	2	1	1	1	1

Так как $x_1 = 14$, а $x_{50} = 77$, то $F^*(x) = 0$ при $x \le 14$ и $F^*(x) = 1$ при $x > 77$. На полуинтервале (14;77] эмпирическую функцию распределения строим с использованием статистического распределения (рис. 7.24): при $14 < x \le 21$ $F^*(x) = \frac{1}{50} = 0{,}02$; при $21 < x \le 28$ $F^*(x) = \frac{1+1}{50} = 0{,}04$; ...; при $72 < x \le 77$, $F^*(x) = \frac{49}{50} = 0{,}98$.

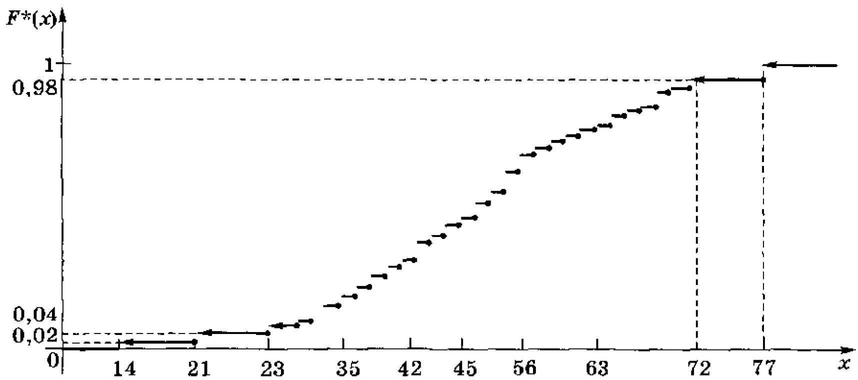


Рис. 7.24

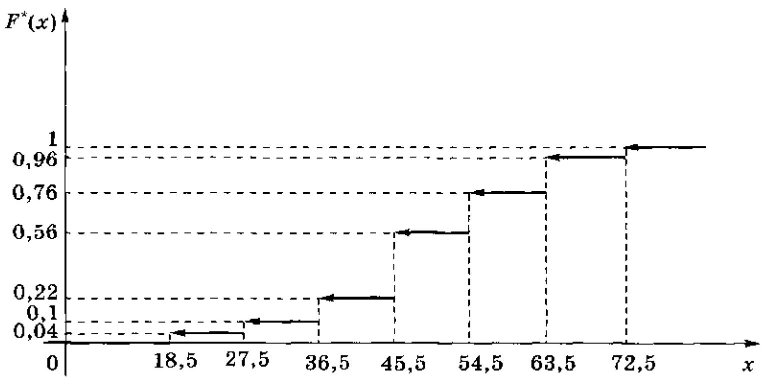


Рис. 7.25

Аналогично строится график $F^*(x)$ (рис. 7.25) по группированным данным (см. табл. примера 2, п. 7.14.1). В этом случае $F^*(x)$ имеет скачки в серединах интервалов, а их величина определяется значениями накопленных относительных частот из последней графы таблицы.

7.15. ВЫБОРОЧНЫЙ МЕТОД. ВЫЧИСЛЕНИЕ ЧИСЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

7.15.1. Основная задача выборочного метода

Выборочный метод состоит в определении сводных характеристик (показателей) какой-либо статистической совокупности путем обследования не всех, а лишь части ее членов, взятых на выборку. Например, для определения среднего срока службы большой партии электрических лампочек отбирается сравнительно небольшая их часть и испытывается. Тогда средний срок службы испытанных лампочек принимается за приближенное значение среднего срока службы лампочек во всей партии. Выборочный метод широко применяется при определении урожайности, качества продукции, регистрации цен на рынках, при переписи населения. К выборочному методу обращаются в тех случаях, когда сплошное обследование нельзя осуществить, например, из-за того, что генеральная совокупность имеет бесконечное число членов (объектов).

7.15.2. Вычисление числовых характеристик ($\overline{X}_B$, D_B, σ_B, M_1^*, M_2^*, M_3^*, M_4^*, V, a_s, ε_s)

Для вычисления сводных характеристик выборки применяется метод произведений, который дает удобный способ вычисления условных моментов различных порядков вариационного ряда с равноотстоящими вариантами. Зная условные моменты, нетрудно найти интересующие нас начальные и центральные эмпирические моменты. В частности, методом произведений удобно вычислять выборочную среднюю $\overline{X}_В$, выборочную дисперсию $D_В$ и выборочное среднее квадратическое отклонение $\sigma_В$. Целесообразно пользоваться расчетной таблицей, в столбцы которой заносят следующие данные:

- в первый — выборочные (первоначальные) варианты X_i, располагая их в возрастающем порядке;

• во второй — частоты вариант n_i; все частоты складываются и их сумму (объем выборки n) помещают в нижнюю клетку столбца;

• в третий — условные варианты $\alpha_i = \frac{x_i - C}{h}$, где C — ложный нуль (новое начало отсчета); за C принимается варианта, которой соответствует максимальная частота; h — шаг варьирования (разность между двумя соседними вариантами в вариационном ряду), т.е. $h = x_i - x_{i-1}$. Практически третий столбец заполняется так: в клетке строки, содержащей выбранный ложный нуль, пишут 0; в клетках над нулем пишется последовательно -1, -2, -3, ... , а под нулем — 1 , 2 , 3, ... ;

• в четвертый — произведения частот на условные варианты $n_i\alpha_i$. Сложив все полученные произведения, их сумму $\sum n_i\alpha_i$ помещают в нижнюю клетку столбца;

• в пятый — произведения частот на квадраты условных вариант $n_i\alpha_i^2$ и сумма этих произведений $\sum n_i\alpha_i^2$ помещается в нижнюю клетку столбца;

• в шестой — произведения $n_i(\alpha_i + 1)^2$ и их сумма $\sum n_i(\alpha_i + 1)^2$ помещается в нижнюю клетку столбца.

Замечание. Шестой столбец служит для контроля вычислений, т.е. если сумма $\sum n_i(\alpha_i + 1)^2$ окажется равной сумме $\sum n_i\alpha_i^2 + 2\sum n_i\alpha_i + n$, то вычисления произведены правильно.

После заполнения расчетной таблицы и проверки правильности вычислений определяются условные моменты M_1^* и M_2^* по формулам: $M_1^* = \frac{\sum n_i\alpha_i}{n}, M_2^* = \frac{\sum n_i\alpha_i^2}{n}$. Выборочная средняя $\bar{X}_В$, выборочная дисперсия $D_В$ и выборочное среднее квадратическое отклонение $\sigma_В$ определяются по формулам: $\bar{X}_В = M_1^*h + {}$ $+C, D_В = [M_2^* - (M_1^*)^2]h^2$, $\sigma_В = \sqrt{D_В}$. Изложенная методика расчета выборочных характеристик относится к случаю равноотстоящих вариант.

На практике, как правило, данные наблюдений не являются равноотстоящими числами. В этом случае с помощью соответствующей обработки наблюдаемых значений признака можно свести вычисления к случаю равноотстоящих вариант. Для этого интервал, в котором заключены все наблюдаемые значения признака (первоначальные варианты), разделяют на несколько равных частичных интервалов (практически в каждый частичный интервал должно попасть не менее 8 — 10 первоначальных вариант). Затем находят середины частичных интервалов, которые и образуют последовательность равноотстоящих вариант. В качестве частоты каждой «новой» варианты (середины частичного интервала) принимают общее число первоначальных вариант, попавших в соответствующий частичный интервал. Замена первоначальных вариант серединами частичных интервалов сопровождается ошибками (первоначальные варианты левой половины частичного интервала будут увеличены, а варианты правой половины уменьшены), однако эти ошибки будут в основном погашаться, поскольку они имеют разные знаки.

Пример. Варианты выборочной совокупности расположены в возрастающем порядке, т.е. в виде вариационного ряда:

x_i	90	94	98	102	106	110	114	118
n_i	10	12	19	27	17	7	5	3

Вычислить: 1) выборочную среднюю X_B; 2) выборочную дисперсию D_B; 3) выборочное среднее квадратическое отклонение σ_B; 4) коэффициент вариации V; 5) асимметрию a_s; 6) эксцесс ε_s.

Решение. Варианты образуют арифметическую прогрессию с разностью $h = 4$ (шаг вариации — разность между двумя соседними вариантами в вариационном ряду), $h = x_i - x_{i-1} = 118 - 114 = 114 - 110 = ... =$ $= 94 - 90 = 4$. Условные варианты $\alpha_i = \dfrac{x_i - C}{h}$, где $C = 102$ (варианта, имеющая максимальную частоту $n_{max} = 27$). Для расчета сводных характеристик выборки составим расчетную таблицу в условных вариантах:

№	x_i	n_i	α_i	$n_i\alpha_i$	$n_i\alpha_i^2$	$n_i(\alpha_i+1)^2$	$n_i\alpha_i^3$	$n_i\alpha_i^4$	$n_i(\alpha_i+1)^4$
1	90	10	–3	–30	90	40	–270	810	160
2	94	12	–2	–24	48	12	–94	192	12
3	98	19	–1	–19	19	0	–19	19	0
4	102	27	0	0	0	27	0	0	27
5	106	17	1	17	17	68	17	17	272
6	110	7	2	14	28	63	56	112	567
7	114	5	3	15	45	80	135	405	1 280
8	118	3	4	12	48	75	192	768	1 875
Σ		100		–15	295	365	15	2 323	4 193

Контроль:

$$\sum n_i(\alpha_i+1)^2=\sum n_i\alpha_i^2+2\sum n_i\alpha_i+\sum n_i;\quad 365=295+2\cdot(-15)+100;$$

$$\sum n_i(\alpha_i+1)^4=\sum n_i\alpha_i^4+4\sum n_i\alpha_i^3+6\sum n_i\alpha_i^2+4\sum n_i\alpha_i+\sum n_i;$$

$$4\,193=2\,323+4\cdot 15+6\cdot 295-60+100.$$

Таким образом, таблица проверена дважды, следовательно, ее результатом можно пользоваться для расчета сводных характеристик выборки. Вычисляем условные эмпирические моменты по формулам:

$$M_1^*=\frac{\sum n_i\alpha_i}{\sum n_i}=\frac{-15}{100}=-0{,}15;\quad M_2^*=\frac{\sum n_i\alpha_i^2}{\sum n_i}=\frac{295}{100}=2{,}95;$$

$$M_3^*=\frac{\sum n_i\alpha_i^3}{\sum n_i}=\frac{15}{100}=0{,}15;\quad M_4^*=\frac{\sum n_i\alpha_i^4}{\sum n_i}=\frac{2\,323}{100}=23{,}23.$$

Вычисляем искомые величины $\bar{X}_В, D_В, \sigma_В, V, a_s, \varepsilon_s$:

$$\bar{X}_В=M_1^*h+C=-0{,}15\cdot 4+102=101{,}4;$$

$$D_B=[M_2^*-(M_1^*)^2]h^2=[2{,}95-(-015)^2]\cdot 16=46{,}84;$$

$$\sigma_В=\sqrt{D_В}=\sqrt{46{,}84}=6{,}843;\quad V=\frac{\sigma_В}{\bar{X}_B}\cdot 100\%=\frac{6{,}843}{101{,}4}\cdot 100\%=6{,}74\%;$$

$$a_s=\frac{[M_3^*-3M_1^*M_2^*+2(M_1^*)^3]h^3}{\sigma_В^3}=$$

$$=\frac{[0{,}15-3\cdot(-0{,}15)\cdot 2{,}95+2\cdot(-0{,}15)^3]\cdot 4^3}{(6{,}483)^3}\approx 0{,}2937;$$

$$\varepsilon_s=\frac{[M_4^*-4M_1^*M_3^*+6M_2^*(M_1^*)^2-3(M_1^*)^4]h^4}{\sigma_B^4}-3=$$

$$=\frac{[23{,}23-4\cdot(-0{,}15)\cdot 0{,}15+6\cdot 2{,}95\cdot(-0{,}15)^2-3\cdot(-0{,}15)^4]\cdot 4^4}{(6{,}483)^4}-3=-0{,}32.$$

7.16. ДОВЕРИТЕЛЬНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ, ДОВЕРИТЕЛЬНЫЕ ИНТЕРВАЛЫ

Средняя выборочная, выборочные дисперсия и среднее квадратическое отклонение являются оценками параметров генеральной совокупности, выражающимися одним числом. Такие оценки называются ***точечными***. Они зависят от объема выборки и могут сильно отличаться от истинной величины оцениваемого параметра, т. е. приводят в некоторых случаях к грубым ошибкам. Это вызывает необходимость оценивать ***точность*** и ***надежность*** полученных по выборке точечных оценок, что производится с помощью ***интервальных оценок***.

Оценкой математического ожидания a (или, что то же самое, генеральной средней $\bar{X}_{\text{г}} = \dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_N}{N}$, где N — объем генеральной совокупности) какого-либо количественного признака X генеральной совокупности служит выборочная средняя $\bar{X}_{\text{в}}$. Очевидно, что $\bar{X}_{\text{в}}$ тем точнее, чем меньше величина отклонения $\left|\bar{X}_{\text{в}} - a\right|$. Иначе говоря, если выбрать положительное число $\delta > 0$ и записать неравенство $\left|\bar{X}_{\text{в}} - a\right| < \delta$, то $\bar{X}_{\text{в}}$ тем точнее будет оценивать a, чем меньше δ. В таком случае число δ можно считать ***точностью оценки***. В силу случайности вариант, попадающих в выборку, говорить о выполнении неравенства $\left|\bar{X}_{\text{в}} - a\right| < \delta$ можно лишь с некоторой вероятностью γ, которая называется ***надежностью***, или ***доверительной вероятностью*** оценки, т. е. $P(|\bar{X}_{\text{в}} - a| < \delta) = \gamma$ или $P(\bar{X}_{\text{в}} - \delta < a < \bar{X}_{\text{в}} + \delta) = \gamma$. Эту запись следует понимать так: вероятность того, что интервал $(\bar{X}_{\text{в}} - \delta; \bar{X}_{\text{в}} + \delta)$ заключает в себе (покрывает) неизвестное математическое ожидание a, равна γ, а сам интервал $(\bar{X}_{\text{в}} - \delta; \bar{X}_{\text{в}} + \delta)$ называется **доверительным интервалом**.

Представляет интерес прежде всего доверительный интервал для оценки математического ожидания количественного признака X генеральной совокупности, распределенного по нормальному закону. При этом важны два случая.

Случай 1. Если заранее известно среднее квадратическое отклонение σ, то границы доверительного интервала для оценки математического ожидания имеют вид: $\left(\bar{X}_{\text{в}} - t\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{X}_{\text{в}} + t\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$, где $\bar{X}_{\text{в}}$ — выборочная средняя; n — объем выборки; σ — известное среднее квадратическое отклонение генеральной совокупности; t — величина, определяемая по таблице для функции Лапласа $\Phi(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^t e^{-\frac{z^2}{2}}dz$ из соотношения $2\Phi(t) = \gamma$ с заранее выбранной доверительной вероятностью (надежностью) γ.

Пример. Выборочное обследование бюджета 36 семей выявило средний доход в месяц на одну семью в 1860 руб. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a — среднемесячного дохода всех 10 тысяч исследуемых семей, если известно, что он распределен по нормальному закону со средним квадратическим отклонением $\sigma = 250$ руб. Доверительную вероятность γ принять равной 0,9.

Решение. Найдем значение аргумента t функции Лапласа из соотношения $2\Phi(t) = 0{,}9 \Rightarrow \Phi(t) = 0{,}45$. По таблице значений функции Лапласа находим t = 1,645. Тогда точность оценки равна $\delta = \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1{,}645 \cdot 250}{\sqrt{36}} = 68{,}5$. Нижняя граница доверительного интервала 1860 – – 68,5 = 1791,5, а его верхняя граница 1860 + 68,5 = 1928,5. Таким образом, значения неизвестного параметра a, согласующиеся с данными выборки, удовлетворяют неравенству $1791{,}5 < a < 1928{,}5$. Следует понимать, что доверительная вероятность связана здесь не с величиной параметра a, а лишь с границами интервала, которые изменяются при изменении выборки. Надежность $\gamma = 0{,}9$ указывает на то, что если произведено достаточно большое число выборок, то 90 % из них определяет такие же интервалы, в которых параметр a действительно заключен, и лишь в 10 % случаев он может выйти за границы доверительного интервала.

Случай 2. Если среднее квадратическое отклонение исследуемого признака заранее неизвестно, то используется его выборочная оценка $\sigma_В$ — эмпирическое (выборочное) среднее квадратическое отклонение, определяемое по данным выборки. В этом случае доверительный интервал для a имеет вид: $\left(\bar{X}_В - t_\gamma \frac{\sigma_В}{\sqrt{n}};\ \bar{X}_В + t_\gamma \frac{\sigma_В}{\sqrt{n}}\right)$, где $\bar{X}_В$ — выборочное среднее; n — объем выборки; $\sigma_В$ — выборочное среднее квадратическое отклонение. Величина t_γ определяется по таблице распределения Стьюдента для заданных объема и доверительной вероятности: $t_\gamma = t(\gamma; n)$.

Пример. По данным выборочного обследования 16 предприятий общественного питания средняя норма выработки на одного работника кухни $\bar{X}_В$ составила 10,6 блюд в час при выработанном среднем квадратическом отклонении $\sigma_В = 1{,}4$ блюд/ч. Найти доверительный интервал для среднечасовой выработки нормально распределенной генеральной совокупности всех работников кухни треста столовых с доверительной вероятностью $\gamma = 0{,}95$.

Решение. Найдем величину $t_В$. По таблице распределения Стьюдента для n = 16 и $\gamma = 0{,}95$ находим границы доверительного интервала:

нижняя граница: $\bar{X}_В - t_\gamma \frac{\sigma_В}{\sqrt{n}} = 10{,}6 - 2{,}12 \cdot \frac{1{,}4}{\sqrt{16}} = 9{,}86;$

верхняя граница: $\bar{X}_В + t_\gamma \frac{\sigma_В}{\sqrt{n}} = 10{,}6 + 2{,}12 \cdot \frac{1{,}4}{\sqrt{16}} = 11{,}34.$

Итак, с надежностью 0,95 неизвестный параметр a среднечасовой выработки заключен в интервале $9{,}86 < a < 11{,}34$.

В некоторых учебниках, наряду с доверительной вероятностью, используется понятие уровня значимости, обозначаемое обычно через α. Связь между этими величинами задается соотношением $\gamma + \alpha = 1$, т.е., например, 5%-му уровню значимости ($\alpha = 0{,}05$) соответствует 95%-я доверительная вероятность ($\gamma = 1 - \alpha = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$).

Помимо перечисленных числовых характеристик выборки в экономической и иной литературе, использующей математическую статистику, часто встречаются и другие характеристики.

$\boxed{\text{О}}$ ***Модой*** (обозначается Мо) называется варианта выборки, имеющая наибольшую частоту.

Пример. По данным статистического распределения выборки найти моду Мо.

x_i	1	3	5	7	9
n_i	1	5	6	5	3

Решение. Поскольку наибольшая частота выборки $n_3 = 6$ принадлежит элементу $x_3 = 5$, то мода равна Мо = 5.

$\boxed{\text{О}}$ ***Медианой*** (обозначается Me) называется варианта выборки, делящая вариационный ряд на две части, равные по числу вариант. При этом если объем выборки — число нечетное, т.е. $n = 2k - 1$, то медианой будет являться средний элемент вариационного ряда $\text{Me} = k + 1$, если же n — четное, т.е. $n = 2k$, то медианой будет являться величина, равная полусумме двух вариант выборки, расположенных в середине вариационного ряда, т.е. $\text{Me} = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$.

Пример. По данным вариационных рядов а), б), в) определить медиану:

а) 2 3 6 7 9; б) 2 3 5 7; в) 2 2 3 5 7 7 8 9 9 11.

Решение.

а) объем выборки $n = 5$ — нечетное число, следовательно, медианой будет средний элемент, т.е. Ме = 6;

б) объем выборки $n = 4$ — четное число, следовательно, медианой будет полусумма двух средних значений: $\text{Me} = \frac{x_2 + x_3}{2} = \frac{3+5}{2} = 4$;

в) аналогично п. б) $\text{Me} = \frac{x_5 + x_6}{2} = \frac{7+7}{2} = 7$.

Наряду со средним квадратическим отклонением в качестве характеристики рассеяния вариант выборки около среднего выборочного иногда используется ***среднее абсолютное отклонение*** $\Delta_\text{В}$, определяемое формулой:

$$\Delta_\text{В} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i \left|x_i - \bar{X}_\text{В}\right| = \frac{1}{n}\left(n_1\left|x_1 - \bar{X}_\text{В}\right| + n_2\left|x_2 - \bar{X}_\text{В}\right| + \ldots + n_k\left|x_k - \bar{X}_\text{В}\right|\right).$$

Пример. По данным статистического распределения выборки найти выборочное среднее квадратическое отклонение $\sigma_\text{В}$ и среднее абсолютное отклонение $\Delta_\text{В}$.

x_i	2	3	5	8
n_i	1	5	3	1

Решение. Объем выборки $n = 10$, выборочная средняя

$$\bar{X}_\text{В} = \frac{\sum x_i n_i}{n} = \frac{1\cdot 2 + 5\cdot 3 + 3\cdot 5 + 1\cdot 8}{10} = 4;$$

$$\sigma^2_\text{В} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \bar{X}_\text{В})^2 =$$

$$= \frac{1\cdot(2-4)^2 + 5\cdot(3-4)^2 + 3\cdot(5-4)^2 + 1\cdot(8-4)^2}{10-1} = \frac{28}{9} \approx 3{,}1;$$

$$\sigma_\text{В} = \sqrt{\sigma^2_\text{В}} = \sqrt{3{,}1} \approx 1{,}76;$$

$$\Delta_\text{В} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i \mid x_i - \bar{X}_\text{В} \mid = \frac{1}{10}(1\cdot\mid 2-4\mid + 5\cdot\mid 3-4\mid +$$

$$+ 3\cdot\left|5-4\right| + 1\cdot\left|8-4\right|\,) = \frac{14}{10} = 1{,}4.$$

Замечание. Полезно помнить, что для любой выборки величины $\sigma_\text{В}$ и $D_\text{В}$ всегда связаны соотношением $\Delta_\text{В} \le \sigma_\text{В}$.

В экономическом анализе важной характеристикой выборки является ***коэффициент вариации*** V, определяемый как выраженное в процентах отношение выборочного среднего квадратического отклонения $\sigma_В$ к выборочной средней $\bar{X}_В : V = \frac{\sigma_В}{\bar{X}_В} \cdot 100\%$. Коэффициент вариации служит для сравнения величин рассеяния двух вариационных рядов: тот из рядов, у которого коэффициент вариации больше, имеет большее рассеяние.

Пример. В 1980 г. средний товарооборот общественного питания на душу населения $\bar{X}_1$ равнялся 93,2 руб. при величине среднего квадратического отклонения $\sigma_1 = 10{,}6$ руб. В 1986 г. показатель $\bar{X}_2$ вырос до 102,1 руб., но и показатель рассеяния σ_2 увеличился до 11,5 руб. Оценить изменение степени обеспеченности населения республик услугами общественного питания.

Решение. Требуемую оценку можно выполнить с помощью коэффициента вариации V. Так, в 1980 г. $V = \frac{10{,}6}{93{,}2} \cdot 100\% = 11{,}37\%$. В 1986 г. $V_2 = \frac{11{,}5}{102{,}1} \cdot 100\% = 11{,}26\%$. Тот факт, что $V_2 < V_1$, можно расценить как свидетельство выравнивания уровня обеспеченности услугами отрасли населения в 1986 г. по сравнению с 1980 г.

7.17. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗ О ВЕРОЯТНОСТЯХ, СРЕДНИХ, ДИСПЕРСИЯХ. КРИТЕРИЙ СОГЛАСИЯ ПИРСОНА

При исследовании какого-либо признака X генеральной совокупности за основу принимается предположение о том, что он распределен по определенному закону. Другими словами, исследователь выдвигает гипотезу о предполагаемом законе распределения, которая, вообще говоря, нуждается в проверке. Такая проверка производится на основе критериев, которые называются критериями согласия.

Рассмотрим критерий, который наиболее часто встречается в практике решения экономических задач средствами математической статистики, — ***критерий согласия Пирсона*** в его применении к проверке гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности.

В основе критерия лежит сравнение эмпирических (полученных опытом, наблюдением) частот n_i и теоретических частот n_i^* (вычисленных в предположении нормального распределения генеральной совокупности). Критерий Пирсона отвечает на вопрос: случайно ли расхождение этих частот (незначимо) или же неслучайно (значимо). При этом следует понимать, что критерий Пирсона не подтверждает однозначно правильность или неправильность гипотезы о нормальном распределении, а только устанавливает ее согласие или несогласие с данными наблюдения при выбранном уровне значимости.

В качестве критерия проверки выбирается случайная величина $\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - n_i^*)^2}{n_i^*}$.

Вычисленное по данным наблюдений с помощью этой формулы значение величины χ^2 (хи–квадрат) обозначают $\chi^2_{\text{набл}}$ (хи–квадрат наблюдаемое), которое сравнивают затем с критическим значением $\chi^2_{\text{кр}}$, определяемым по соответствующей таблице значений. Табличное значение $\chi^2_{\text{кр}}$ определяется по выбранному уровню значимости α и числу степеней свободы k, вычисляемому по формуле $k = s - 1 - r$, где s — число групп (интервалов группировки) выборки; r — число параметров предполагаемого закона распределения, которые сами находятся по данным выборки.

В случае предположения нормального закона распределения $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ такими параметрами являются математическое ожидание a и среднее квадратическое отклонение σ (а вернее — их выборочные оценки). Таким образом, число параметров распределения r в этом случае равно 2 ($r = 2$), а число степеней свободы $k = s - 1 - 2 = s - 3$. Если в результате вычислений выполняется неравенство $\chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{\text{кр}}$, то гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности принимается с вероятностью $\gamma = 1 - \alpha$. Если же $\chi^2_{\text{набл}} > \chi^2_{\text{кр}}$, то гипотезу отвергают с той же вероятностью.

По результатам обработки выборочных данных выдвигается гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности по следующим признакам:

а) по виду гистограммы относительных частот, сравнивая ее с графиком дифференциальной функции (функции плотности вероятности) нормального (теоретического) распределения $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, имеющего вид, представленный на рис. 7.26;

б) по виду графика эмпирической функции, сравнивая ее с графиком интегральной функции (функции распределения) $F(x)$

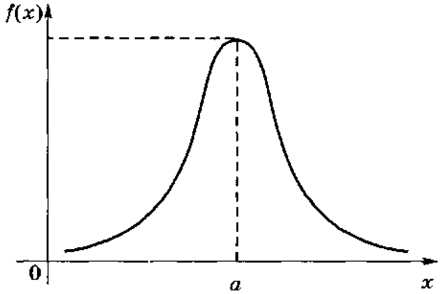


Рис. 7.26

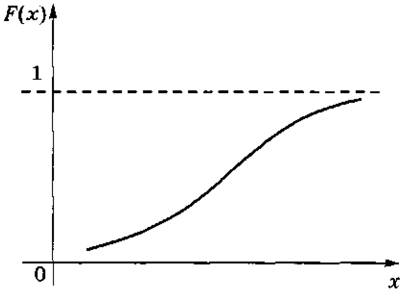


Рис. 7.27

теоретического распределения, который имеет вид, представленный на рис. 7.27;

в) по величине асимметрии a_s и эксцесса ε_s:

- при $a_s = 0, \varepsilon_s = 0$ — идеальное нормальное распределение;
- при $|a_s| < 0{,}1, |\varepsilon_s| < 1$ — нормальное распределение;
- при $|a_s| < 0{,}5, |\varepsilon_s| < 0{,}5$ — распределение, близкое к нормальному;
- при $|a_s| < 1, |\varepsilon_s| < 1$ — распределение нормального типа.

По опытным данным строится кривая нормального распределения. В качестве параметров принимается математическое ожидание $a = \bar{X}_В$ и выборочное среднее квадратическое отклонение $\sigma = \sigma_В$. Опытные данные записывают в виде ***таблицы 1.***

Для построения кривой нормального распределения составляется расчетная ***таблица 2***, в столбцы которой записывают следующие данные:

- в первый — значения x_i признака X;
- во второй — опытные частоты n_i;
- в третий — отклонения значений признака от выборочной средней $x_i - \bar{X}_В$;
- в четвертый — отношения $u_i = \dfrac{x_i - \bar{X}_В}{\sigma_В}$;
- в пятый — найденные по таблице значения функции $\varphi(u_i)$, где $\varphi(u) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}$;
- в шестой — ординаты $y_i = \dfrac{nh}{\sigma_В}\varphi(u_i)$ теоретической кривой, где h — шаг варьирования (расстояние между двумя соседними вариантами);

- в седьмой — теоретические частоты n_i^* появления признака, полученные округлением значения y_i до целого числа.

Строим график функции $n^* = f(x)$, т.е. теоретическую кривую нормального распределения, и сравниваем ее с полигоном частот.

Для того чтобы уверенно считать, что данные наблюдений свидетельствуют о нормальном распределении признака, воспользуемся критерием согласия Пирсона χ^2 с заданным уровнем значимости α. Составим расчетную ***таблицу 3*** для вычисления наблюдаемого значения критерия $\chi^2_{\text{набл}} = \sum \frac{(n_i - n_i^*)^2}{n_i^*}$, в столбцы которой заносим следующие данные:

- в первый — значения признака X_i;
- во второй — опытные частоты n_i появления признака;
- в третий — теоретические частоты n_i^* появления признака;
- в четвертый — разности между теоретическими и опытными частотами $(n_i - n_i^*)$;
- в пятый — квадраты отклонений опытных частот от теоретических $(n_i - n_i^*)^2$;
- в шестой — отношения квадратов отклонений опытных частот от теоретических к теоретическим частотам $\frac{(n_i - n_i^*)^2}{n_i^*}$;
- в седьмой — квадраты опытных частот n_i^2;
- в восьмой - отношение квадратов опытных частот к теоретической частоте $\frac{n_i^2}{n_i^*}$.

По таблице 3 определяют $\chi^2_{\text{набл}} = \sum \frac{(n_i - n_i^*)^2}{n_i^*}$, а контроль вычислений производится по формуле

$$\chi^2_{\text{набл}} = \sum \frac{(n_i - n_i^*)^2}{n_i^*} = \sum \frac{n_i^2}{n_i^*} - n.$$

Если условие $\chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{\text{кр}}$ выполняется, то на основании критерия Пирсона гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности принимается, в противном случае отвергается.

Числовые характеристики генеральной совокупности определяются по уровню надежности $\gamma = 1 - \alpha$, где α — уровень значимости. Такими характеристиками являются доверительные интервалы, покрывающие параметр a (математическое ожидание) с надежностью γ по выборочной средней $\bar{X}_В$:

$$\bar{X}_В - \delta < a < \bar{X}_В + \delta,$$

где $\delta = \frac{t_\gamma \sigma_В}{\sqrt{n}}$ — точность оценки; n — объем выборки; $t_\gamma = t(\gamma, n)$ определяется по таблице значений. Полученные результаты обработки выборочных данных позволяют дать заключение о генеральной совокупности, из которой была извлечена выборка.

Пример. В опыте было получено 100 вариант, составляющих выборочную совокупность, которые приведены в табл. 7.1 (вид табл. 1). Произвести статистическую обработку результатов опыта.

Решение. Произведем математическую обработку результатов опыта.

1) Составим вариационный ряд с равноотстоящими центрами интервалов. Для этого из 100 вариант определим наибольшую $X_{max} = 120$ и наименьшую $X_{min} = 88$. Вычислим размах варьирования данной вариации: $Z = x_{max} - x_{min} = 120 - 88 = 32$. Разобьем вариацию на 8 интервалов с шагом $h = \frac{Z}{8} = \frac{32}{8} = 4$. Находим центр первого интервала по формуле: $x_1 = x_{min} + \frac{h}{2} = 88 + \frac{4}{2} = 90$. Последующие центры x_i интервалов определя-

Таблица 7.1

Значения признака, полученные из опыта									
99	93	104	100	105	100	108	112	89	97
112	102	104	108	105	104	98	116	120	100
112	102	116	108	96	102	100	91	96	92
96	102	100	99	107	97	96	108	107	101
101	116	99	90	104	94	100	107	96	103
92	104	97	98	110	103	110	105	104	113
108	97	104	98	102	106	107	110	101	110
94	105	88	96	97	94	120	119	104	103
104	96	91	103	102	100	106	90	91	95
106	113	95	105	102	102	104	102	89	103

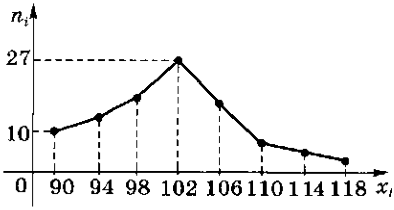


Рис. 7.28

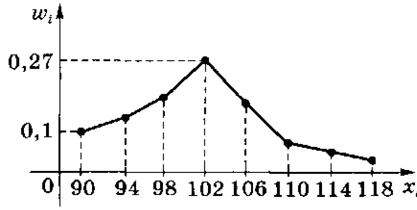


Рис. 7.29

ются как члены арифметической прогрессии с разностью $h = 4$. В результате получим следующий вариационный ряд:

x_i	90	94	98	102	106	110	114	118
n_i	10	13	18	27	17	7	5	3

2) Построим графики выборочной совокупности вариационного ряда: а) полигон частот — ломаная, отрезки которой соединяют точки $(x_i;\ n_i)$ $(i = 1, 2, 3, ..., 8)$. По оси абсцисс откладываются варианты x_i, а по оси ординат — соответствующие им частоты n_i (рис. 7.28).

б) Полигон относительных частот — ломаная, отрезки которой соединяют точки $(x_i;\ w_i)$ $(i = 1, 2, 3, ..., 8)$, где $w_i = \frac{n_i}{\sum n_i} = \frac{n_i}{100}$. По оси абсцисс откладываются варианты X_i, по оси ординат — относительные частоты w_i (рис. 7.29):

x_i	90	94	98	102	106	110	114	118
w_i	0,1	0,13	0,18	0,27	0,17	0,07	0,05	0,03

в) Гистограмма частот представляет собой ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников с основаниями длиной $h = 4$ и высотами $H_i = \frac{n_i}{h} = \frac{n_i}{4}$ (рис. 7.30):

Интервалы $x_i - x_{i-1}$	88—92	92—96	96—100	100—104	104—108	108—112	112—116	116—120
$H_i = \frac{n_i}{h}$	2,5	3,25	4,5	6,75	4,25	1,75	1,25	0,75

г) Гистограмма относительных частот представляет собой ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников с основаниями длиной $h = 4$ и высотами $H_i = \frac{w_i}{h}$ (рис. 7.31):

Интервалы $x_i - x_{i-1}$	88—92	92—96	96—100	100—104	104—108	108—112	112—116	116—120
$H_i = \frac{w_i}{h}$	0,025	0,0325	0,045	0,0675	0,0425	0,0175	0,0125	0,0075

д) Эмпирическая функция распределения $F^*(x) = \sum\limits_{x_i<x} \frac{n_i}{n}$ определяет для каждого значения x относительную частоту события $X < x$. Она принимает значения $0 \le F^*(x) \le 1$, причем $F^*(x) = 0$ при $X \le x_{\min}$ ($x_{\min}$ — наименьшая варианта) и $F^*(x) = 1$ при $X > x_{\max}$ ($x_{\max}$ — наибольшая варианта).

Наименьшая варианта равна $x_1 = 90$, следовательно, $F^*(x) = 0$ при $x \le 90$;

значения $90 < x \le 94$ наблюдались 10 раз, $F^*(x) = \frac{10}{100} = 0{,}10$;

значения $94 < x \le 98$ наблюдались $10 + 13 = 23$ раза, $F^*(x) = \frac{20}{100} = 0{,}23$;

значения $98 < x \le 102$ наблюдались $23 + 18 = 41$ раз, $F^*(x) = \frac{41}{100} = 0{,}41$;

значения $102 < x \le 106$ наблюдались $41 + 27 = 68$ раз, $F^*(x) = \frac{68}{100} = 0{,}68$;

значения $106 < x \le 110$ наблюдались $68 + 17 = 85$ раз, $F^*(x) = \frac{85}{100} = 0{,}85$;

значения $110 < x \le 114$ наблюдались $85 + 2 = 92$ раза, $F^*(x) = \frac{92}{100} = 0{,}92$;

значения $114 < x \le 118$ наблюдались $92 + 5 = 97$ раз, $F^*(x) = \frac{97}{100} = 0{,}97$;

при $x > 118$ $F^*(x) = \frac{97+3}{100} = 1{,}00$.

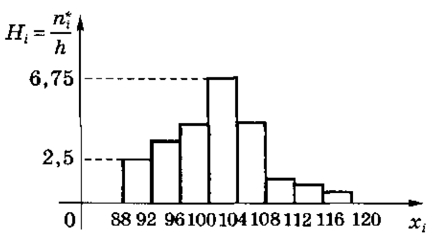


Рис. 7.30

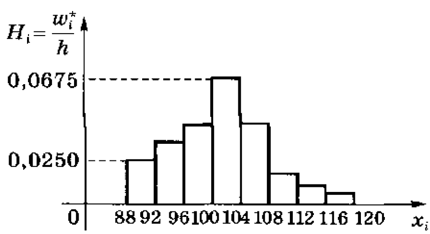


Рис. 7.31

Таким образом имеем: $F^*(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 90,\\ 0{,}10 & \text{при } 90<x\le 94,\\ 0{,}23 & \text{при } 94<x\le 98,\\ 0{,}41 & \text{при } 98<x\le 102,\\ 0{,}68 & \text{при } 102<x\le 106,\\ 0{,}85 & \text{при } 106<x\le 110,\\ 0{,}92 & \text{при } 110<x\le 114,\\ 0{,}97 & \text{при } 114<x\le 118,\\ 1{,}00 & \text{при } x>118.\end{cases}$

Строим график эмпирической функции распределения $F^*(x)$ (рис. 7.32).

3) Найдем числовые характеристики выборочной совокупности $\overline{X}_В, D_В, \sigma_В, a_s, \varepsilon_s, V$ с помощью метода произведений. Варианты x_i и соответствующие им частоты n_i выборочной совокупности расположим в виде вариационного ряда:

x_i	90	94	98	102	106	110	114	118
n_i	10	13	18	27	17	7	5	3

Варианты образуют арифметическую прогрессию с разностью $h = x_i - x_{i-1} = 118 - 114 = ... = 94 - 90 = 4$ (шаг выборки). Условные варианты α_i определяются по формулам

$$\alpha_i = \frac{x_i - C}{h},$$

где C — ложный нуль (новое начало отсчета). За C принимается варианта, которой соответствует наибольшая частота. В этой задаче $n_{max} = 27$.

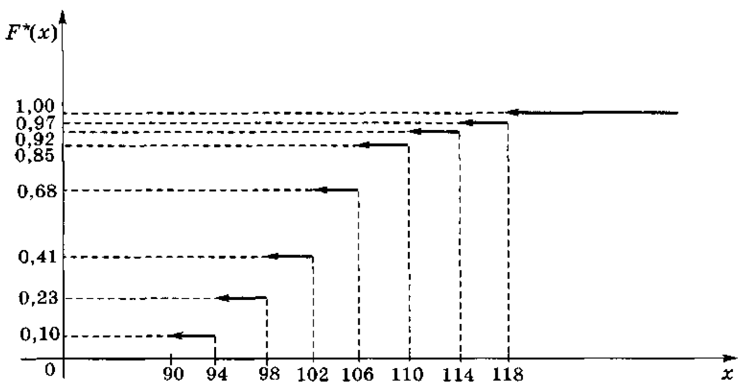


Рис. 7.32

Таблица 7.2									
	x_i	n_i	α_i	$n_i\alpha_i$	$n_i\alpha_i^2$	$n_i(\alpha_i+1)^2$	$n_i\alpha_i^3$	$n_i\alpha_i^4$	$n_i(\alpha_i+1)^4$
1	90	10	−3	−30	90	40	−270	810	160
2	94	13	−2	−26	52	13	−104	208	13
3	98	18	−1	−18	18	0	−18	18	0
4	102	27	0	0	0	27	0	0	27
5	106	17	1	17	17	68	17	17	272
6	110	7	2	14	28	63	56	112	567
7	114	5	3	15	45	80	135	405	1280
8	118	3	4	12	48	75	192	768	1875
$\sum$	—	100	—	−16	298	366	8	2338	4194

Следовательно, $C = 102$. Для расчета сводных характеристик выборки составим расчетную табл. 7.2 (вид табл. 1) в условных вариантах.

Контроль: 1) $\sum n_i(\alpha_i+1)^2 = \sum n_i\alpha_i^2 + 2\sum n_i\alpha_i + \sum n_i$;

$$366 = 298 + 2\cdot(-16) + 100 \text{ — верно.}$$

2) $\sum n_i(\alpha_1+1)^4 = \sum n_i\alpha_i^4 + 4\sum n_i\alpha_i^3 + 6\sum n_i\alpha_i^2 + 4\sum n_i\alpha_i + \sum n_i$;

$$4193 = 2323 + 4\cdot 15 + 6\cdot 295 - 60 + 100 \text{ — верно.}$$

Таким образом, таблица проверена дважды, следовательно, ее результатом можно пользоваться для расчета сводных характеристик выборки. Вычисляем условные эмпирические моменты по формулам:

$$M_1^* = \frac{\sum n_i\alpha_i}{\sum n_i} = \frac{-16}{100} = -0{,}16; \quad M_2^* = \frac{\sum n_i\alpha_i^2}{\sum n_i} = \frac{298}{100} = 2{,}98;$$

$$M_3^* = \frac{\sum n_i\alpha_i^3}{\sum n_i} = \frac{8}{100} = 0{,}08; \quad M_4^* = \frac{\sum n_i\alpha_i^4}{\sum n_i} = \frac{2338}{100} = 23{,}38.$$

Находим выборочную среднюю $\bar{X}_В$, выборочную дисперсию $D_В$, выборочное среднее квадратическое отклонение $\sigma_В$, коэффициент вариации V, асимметрию a_s и эксцесс ε_s по следующим формулам:

$$\bar{X}_В = M_1^*h + C = -0{,}16\cdot 4 + 102 = 101{,}36;$$

$$D_В = [M_2^* - (M_1^*)^2]h^2 = [2{,}98 - (-0{,}16)^2]\cdot 16 \approx 47{,}27;$$

$$\sigma_В = \sqrt{D_В} = \sqrt{47,27} = 6,88;$$

$$V = \frac{\sigma_В}{\bar{X}_В}100\% = \frac{6,88}{101,36}\cdot 100\% \approx 6,79\%;$$

$$a_s = \frac{[M_3^* - 3M_1^*M_2^* + 2(M_1^*)^3]h^3}{\sigma_В^3} =$$

$$= \frac{[0,08 - 3\cdot(-0,16)\cdot 2,98 + 2\cdot(-0,16)^3]\cdot 4^3}{(6,88)^3} \approx 0,299;$$

$$\varepsilon_s = \frac{[M_4^* - 4M_1^*M_3^* + 6M_2^*(M_1^*)^2 - 3(M_1^*)^4]h^4}{\sigma_В^4} - 3 =$$

$$= \frac{[23,38 - 4\cdot(-0,16)\cdot 0,08 + 6\cdot 2,98\cdot(-0,16)^2 - 3\cdot(-0,16)^4]\cdot 4^4}{(6,88)^4} - 3 = -0,27.$$

4) Выдвинем гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности по результатам обработки выборочных данных:

а) по виду гистограммы относительных частот (см. рис. 7.31), сравнивая ее с дифференциальной функцией теоретического распределения $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, график которой имеет вид (см. рис. 7.26), делаем вывод о ее сходстве с графиком функции $f(x)$ (нормального распределения);

б) такой же вывод делаем по виду графика эмпирической функции $F^*(x)$ (см. рис. 7.32), сравнивая ее с графиком интегральной функции $F(x)$ теоретического (нормального) распределения (см. рис. 7.27);

в) по величине асимметрии $a_s = 0,299$ и эксцесса $\varepsilon_s = -0,27$. Так как $|a_s| = 0,229 < 0,5$; $|\varepsilon_s| = 0,27 < 0,5$, распределение генеральной совокупности является близким к нормальному.

5) Построим кривую нормального распределения по опытным данным, приняв в качестве параметров математическое ожидание $a = \bar{X}_В = 101,36$ и выборочное среднее квадратическое отклонение $\sigma_В = 6,88$. Для построения кривой нормального распределения составим табл. 7.3 (по виду расчетной табл. 2).

По специальной таблице (см. прил. 2) находим значения функции $\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}$ и заполняем пятый столбец. Ординаты y_i теоретической кривой (выравнивающие частоты) находим по формуле $y_i = \frac{nh}{\sigma_{\%}}\varphi(u_i) = \frac{100\cdot 4}{6,88}\varphi(u_i)$ и заносим их в шестой столбец. Округляя значения y_i, получим теоретические частоты n_i^* и заносим их в седьмой

Таблица 7.3

Варианта x_i	Опытные частоты n_i	$x_i - \bar{X}_B$	$u_i = \frac{x_i - \bar{X}_B}{\sigma_B}$	$\varphi(u_i)$	Выравнивающие частоты $y_i = \frac{nh}{\sigma_B}\varphi(u_i)$	Теоретические частоты n_i^*
90	10	−11,36	−1,65	0,1023	5,95	6
94	13	−7,36	−1,07	0,2251	13,09	13
98	18	−3,36	−0,49	0,3538	20,57	21
102	27	0,64	0,09	0,3973	23,50	24
106	17	4,64	0,67	0,3187	18,53	19
110	7	8,64	1,26	0,1804	10,49	11
114	5	12,64	1,84	0,0734	4,27	5
118	3	16,64	2,42	0,0213	1,24	1

столбец. Построим кривую нормального распределения по выравнивающим частотам (по оси абсцисс откладываются опытные варианты x_i, по оси ординат — теоретические частоты n_i^*), рис. 7.33.

Сравнение графика кривой нормального распределения по опытным данным (см. рис. 7.33) с полигоном частот (см. рис.7.28) наглядно показывает, что построенная теоретическая кривая удовлетворительно отражает данные опыта.

6) Для того чтобы уверенно считать, что данные опыта свидетельствуют о нормальном распределении признака, ***применим критерий согласия Пирсона*** с заданным уровнем значимости $\alpha = 0{,}05$. Для этого составим табл. 7.4 (по виду расчетной табл. 3).

Из табл. 7.4 находим наблюдаемое значение критерия:

$$\chi^2_{\text{набл}} = \sum\frac{(n_i - n_i^*)^2}{n_i^*} = 2{,}667 + 0{,}429 + 0{,}375 + 0{,}211 + 1{,}455 + 4{,}0 = 9{,}137.$$

Контроль: $\chi^2_{\text{набл}} = \sum\frac{(n_i - n_i^*)^2}{n_i^*} = \sum\frac{n_i^2}{n_i^*} - \sum n_i = 109{,}137 - 100 = 9{,}137.$

Полученные данные совпадают, следовательно, вычисления произведены правильно.

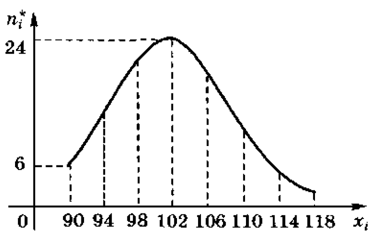


Рис. 7.33

Таблица 7.4

x_i	n_i	n_i^*	$n_i - n_i^*$	$(n_i - n_i^*)^2$	$\frac{(n_i - n_i^*)^2}{n_i^2}$	n_i^2	$\frac{n_i^2}{n_i^*}$
90	10	6	4	16	2,667	100	16,667
94	13	13	0	0	0	169	13,0
98	18	21	-3	9	0,429	324	15,429
102	27	24	3	9	0,375	729	30,375
106	17	19	−2	4	0,211	289	15,211
110	7	11	-4	16	1,455	49	4,455
114	5	5	0	0	0	25	5,0
118	3	1	2	4	4,0	9	9,0
Σ	100	100	—	—	$\chi_{\text{набл}} = 9,137$	—	109,137

Теперь найдем $\chi^2_{\text{кр}}$ по числу степеней свободы $k = s - 3$ ($s = 8$ — число интервалов) и уровню значимости $\alpha = 0,05$. По таблице критических точек распределения χ^2 для $k = 5$ и $\alpha = 0,05$ находим: $\chi^2_{\text{набл}} = \chi^2(5;0,05) = 11,1$.

7) Так как $\chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{\text{кр}}$, на основании критерия Пирсона гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности принимается. Найдем числовые характеристики доверительного интервала генеральной совокупности по трем уровням надежности: $\gamma_1 = 0,95$; $\gamma_2 = 0,99$; $\gamma_3 = 0,999$. Оценим математическое ожидание a по выборочной средней $\bar{X}_{\text{В}} = 101,36$ с помощью доверительного интервала, покрывающего параметр a с надежностью γ: $\bar{X}_{\text{В}} - \delta < a < \bar{X}_{\text{В}} + \delta$, где

$\delta = \frac{t_\gamma \sigma_{\text{В}}}{\sqrt{n}}$ — точность оценки, $n = \sum n_i = 100$ — объем выборки; $\sigma_{\text{В}} = 6,88$ — выборочное среднее квадратическое отклонение; $t_\gamma = t(\gamma;\, n)$ определяется по специальным таблицам: $t_{\gamma_1} = t(0,95;\ 100) = 1,984$, $t_{\gamma_2} = t(0,99;\ 100) = 2,627$, $t_{\gamma_3} = t(0,999;\ 100) = 3,392$.

Вычисляем точности оценок : $\delta_1 = \frac{1,984 \cdot 6,88}{\sqrt{100}} \approx 1,36$ при $\gamma_1 = 0,95$,

$\delta_2 = \frac{2,627 \cdot 6,88}{\sqrt{100}} \approx 1,81$ при $\gamma_2 = 0,99$, $\delta_3 = \frac{3,392 \cdot 6,88}{\sqrt{100}} \approx 2,33$ при $\gamma_3 = 0,999$.

Таким образом, математическое ожидание a генеральной совокупности находится в пределах:

- при $\gamma=\gamma_1=0{,}95$: $101{,}36-1{,}36<a<101{,}36+1{,}36$, т.е. $100<a<102{,}72$;
- при $\gamma=\gamma_2=0{,}99$: $101{,}36-1{,}81<a<101{,}36+1{,}81$, т.е. $99{,}55<a<103{,}17$;
- при $\gamma=\gamma_3=0{,}999$: $101{,}36-2{,}33<a<101{,}36+2{,}33$, т.е. $99{,}03<a<103{,}69$.

Обработав выборочную совокупность, приходим к следующему выводу о генеральной совокупности, из которой извлечена выборка:

- размах вариации $x_{\min}=88$; $x_{\max}=120$; $\sigma_В=6{,}88$; $a_s=0{,}299$; $\varepsilon_s=-0{,}27$; $V=6{,}79\ \%$;
- генеральная совокупность распределена по нормальному закону;
- значение неизвестного математического ожидания генеральной совокупности удовлетворяет неравенству $100<a<102{,}72$ с доверительной вероятностью (надежностью) $\gamma=0{,}95=1-\alpha$.

Надежность $\gamma=0{,}95$ указывает, что если произведено достаточно большое число выборок, то 95 % из них определяет такие доверительные интервалы, в которых параметр a действительно заключен; лишь в 5 % случаев он может выйти за границы доверительного интервала.

Задачи для самостоятельного решения

1—3. В опыте было получено 150 вариант, составляющих выборочную совокупность. Проведите статистическую обработку результатов опыта.

А. Составьте вариационный ряд с равноотстоящими центрами интервалов, разбив всю вариацию на 7—9 интервалов, выбрав 100 значений признака, соответствующих вашей задаче.

Б. Постройте следующие графики выборочной совокупности (составленного вами вариационного ряда): а) полигон частот; б) полигон частостей; в) гистограмму частот; г) гистограмму относительных частот; д) эмпирическую функцию распределения.

В. Методом произведений найдите числовые характеристики выборочной совокупности, заполнив предварительно таблицу (по виду расчетной табл. 1) и проверив ее дважды ($\bar{X}_В, D_В, \sigma_В, a_s, \varepsilon_s, V$, где $\bar{X}_В$ — выборочная средняя; $D_В$ — выборочная дисперсия; $\sigma_В$ — выборочное среднее квадратическое отклонение; a_s — асимметрия; ε_s — эксцесс; V — коэффициент вариации).

Г. По результатам обработки выборочных данных выдвиньте гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности по следующим признакам: а) по виду гистограммы относительных частот, сравнивая ее с дифференциальной функцией теоретического распределения; б) по виду графика эмпирической функции, сравнив его с графиком интегральной функции теоретического распределения; в) по величине асимметрии и эксцесса.

Д. Постройте кривую нормального распределения по опытным данным, приняв в качестве параметров математическое ожида-

Задача	Номера значений признака
1	с 1 по 100
2	с 5 по 105
3	с 10 по 110

ние $a = \tilde{X}_В$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma = \sigma_В$. Заполните таблицу (по виду расчетной табл. 2).

Е. Применив критерий согласия Пирсона с заданным уровнем значимости $\alpha = 0{,}05$, окончательно примите или отвергните выдвинутую гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности. Заполните таблицы (по виду расчетных табл. 2 и 3).

Ж. Сделайте заключение о генеральной совокупности по результатам обработки выборочных данных. Найдите числовые характеристики генеральной совокупности по следующим уровням надежности: 1) $\gamma = 0{,}95$; 2) $\gamma = 0{,}99$; 3) $\gamma = 0{,}999$.

Номера значений признака	Значения признака, полученные из опыта									
1—10	88	104	91	98	77	88	86	79	86	72
11—20	82	68	71	87	89	89	81	81	70	79
21—30	84	91	87	83	90	69	100	96	79	94
31—40	93	86	81	83	84	92	93	85	84	88
41—50	63	87	87	81	95	90	69	95	96	84
51—60	82	79	88	83	90	92	80	81	85	81
61—70	84	96	86	94	85	92	79	75	94	66
71—80	88	79	89	75	92	79	78	95	84	91
81—90	91	74	73	73	85	85	76	83	76	86
91—100	71	85	92	84	90	82	90	73	89	87
101—110	72	96	86	95	91	76	94	95	84	96

7.18. ЗАДАЧИ ТЕОРИИ КОРРЕЛЯЦИИ

7.18.1. Общие положения

О ***Функциональной зависимостью*** называется такая связь между переменными величинами, при которой зависимая величина — функция — полностью определяется значениями влияющих независимых величин — аргументов.

Вид зависимости между аргументами и функцией обычно задается в виде формулы, которая позволяет однозначно вычислить значение функции при подстановке аргумента в формулу.

Наиболее часто в экономике используются функции: линейная $y = a + bx$, гиперболическая $y = a + \frac{b}{x}$, показательная $y = ab^x$, степенная (обычно парабола) $y = a + bx + cx^2$ и некоторые другие.

Однако при исследовании экономических явлений, как правило, значения влияющих количественных показателей не определяют полностью значения результативного показателя. Для таких сложных случаев нефункциональной связи показателей в математике существуют методы получения более сложных зависимостей — корреляционных, для которых функциональная зависимость является только предельным случаем.

О ***Корреляционная зависимость*** — это такая связь между величинами, когда определенным значениям влияющих величин — факторов — соответствует множество значений зависимой величины, распределенных по известному закону распределения.

Например, чем больше товарооборот x потребительского общества, тем больше должна быть сумма издержек обращения $y(x)$, однако, если фактические данные о товарообороте и издержках, полученные от разных потребительских обществ, нанести в виде точек на координатную плоскость xOy, то они могут иметь вид прямолинейно вытянутого облака, или, как говорят, корреляционного поля данных (рис. 7.34).

Рост товарооборота не влечет за собой строго определенного и однозначного изменения издержек, а выявляет лишь общую тенденцию их изменения. Вместе с тем линия средних значений издержек $\bar{y}(x)$ как функциональная зависимость приближенно (в среднем) описывает корреляционную связь. Таким образом, под *корреляционной зависимостью* y от x понимается зависимость условной средней $\bar{y}(x)$ от x, т.е. $\bar{y}_x = f(x)$. Это равенство называется уравнением регрессии y на x, функция $f(x)$ —

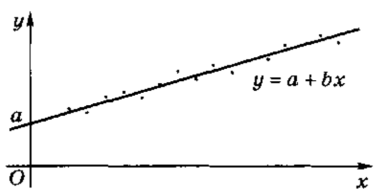


Рис. 7.34

регрессией y на x, а ее график — линией регрессии y на x. (В нашем примере зависимость $f(x)$ имеет вид линейной функции $y = a + bx$. В этом случае регрессия называется линейной, а ее график — прямой регрессией.)

Замечание. Вместе с регрессией y на x всегда может быть построена и регрессия x на y с уравнением $\overline{x} = \varphi(y)$ и графиком, отличающимся от графика $y = f(x)$.

При определении корреляционной зависимости решаются две основные задачи.

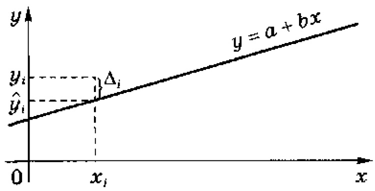
Первая задача теории корреляции — установить форму корреляционной зависимости, т. е. вид функции регрессии: ***линейная*** или ***нелинейная*** (квадратичная, показательная и т. д.).

Вторая задача теории корреляции — оценить тесноту (силу) корреляционной связи по величине рассеяния значений y вокруг условного среднего $\overline{y}_x$ (чем меньше рассеяние, тем сильнее корреляционная зависимость).

7.18.2. Отыскание параметров выборочного уравнения прямой линии регрессии методом наименьших квадратов. Нелинейная корреляционная зависимость

При решении экономических задач встречаются линейные корреляционные зависимости. В этом случае функция регрессии имеет вид линейной функции $\overline{y}_x = a + bx$, а ее графиком является прямая линия (прямая регрессии). Рассмотрим простейший случай, когда различные значения фактора X и соответствующие им значения Y наблюдаются по одному разу. В этом случае отпадает необходимость использования условной средней $\overline{y}_x$ и уравнение можно записать в виде $y = a + bx$. Коэффициенты a и b называют ***параметрами прямой регрессии***. После того как вид зависимости определен (у нас она линейная), возникает вопрос о выборе наилучших параметров уравнения, т.е. таких значений a и b, при которых выбранный вид зависимости возможно точнее описывал бы истинную зависимость y от x. Чаще всего для определения a и b используют метод наименьших квадратов отклонений. При этом методе a и b вычисляются таким способом, чтобы сумма квадратов отклонений эмпирических значений y_i от соответствующих теоретических значений $\hat{y}_i$ ($\hat{y}_i = a + bx_i$) рассчитанных по выбранной функции регрессии (рис. 7.35), была бы наименьшей.

Рис. 7.35



Определение параметров a и b в этом случае сводится к решению хорошо известной задачи нахождения минимума функции двух переменных.

При большом числе наблюдений одно и то же значение x может встретиться n_x раз, одно и то же значение y — n_y раз, одна и та же пара чисел (x, y) — n_{xy} раз. Поэтому данные наблюдений группируют, т. е. подсчитывают частоты n_x, n_y, n_{xy}, и записывают в виде таблицы, которая называется ***корреляционной таблицей***.

Поясним устройство корреляционной таблицы на примере (табл. 7.5).

В заголовке табл. 7.5 указаны наблюдаемые значения (1; 2; 3; 4,5) признака X, в боковике — наблюдаемые значения (28; 38; 48; 58) признака Y. На пересечении строк и столбцов находятся частоты n_{xy} наблюдаемых пар значений признаков. Например, частота 37 указывает, что пара чисел (4; 28) наблюдалась 37 раз. Прочерк в клетке означает, что соответственная пара чисел, например (1; 28), не наблюдалась. В последнем столбце записаны суммы частот строк. Например, сумма частот первой строки равна $n_y = 37 + 3 = 40$. Это число указывает на то, что значение признака Y, равное 28 (в сочетании с различными значениями признака X), наблюдалось 40 раз. В последней строке записаны суммы частот столбцов. Например, число 14 показывает, что значе-

Таблица 7.5

Y	X					
	1	2	3	4	5	n_y
28	—	—	—	37	3	40
38	—	—	13	6	—	19
48	—	13	10	—	—	23
58	17	1	—	—	—	18
n_x	17	14	23	43	3	100

ние признака X, равное 2 (в сочетании с различными значениями признака Y), наблюдалось 14 раз. В клетке, расположенной в нижнем правом углу таблицы, помещена сумма всех частот (общее число всех наблюдений n). Очевидно, что $\sum n_x = \sum n_y = n = 100$, так как $\sum n_x = 17+14+23+43+3 = 100$, $\sum n_y = 40+19+23+18 = 100$.

Оценка силы линейной корреляционной зависимости может быть произведена с помощью ***коэффициента линейной корреляции***, определяемого по формуле: $r_{y/x} = \dfrac{\overline{xy} - \bar{x}\,\bar{y}}{\sigma_x \sigma_y}$, где

$$\bar{x} = \frac{\sum(xn_x)}{n},\quad \bar{y} = \frac{\sum(yn_y)}{n},\quad \overline{xy} = \frac{\sum(xyn_{xy})}{n},\quad D(x) = \overline{x^2} - (\bar{x})^2,$$

$$D(y) = \overline{y^2} - (\bar{y})^2,\quad \sigma_x = \sqrt{D(x)},\ \sigma_y = \sqrt{D(y)},\ \text{где}\ \overline{x^2} = \frac{\sum x^2 n_x}{n},$$

$$\overline{y^2} = \frac{\sum y^2 n_y}{n}.$$

Коэффициент корреляции обладает следующими свойствами:

1) абсолютное значение коэффициента корреляции не превосходит единицы, т. е. $|r_{y/x}| \le 1$, или $-1 \le r_{y/x} \le 1$;

2) если коэффициент корреляции равен нулю, а линии регрессии прямые, то x и y не связаны между собой линейной корреляционной зависимостью;

3) если $|r_{y/x}| = 1$, то наблюдаемые значения x и y связаны линейной функциональной зависимостью.

Примеры. 1. Вычислить коэффициент корреляции по данным, приведенным в корреляционной табл. 7.5.

Решение. Вычислим величины $\bar{x}, \bar{y}, \overline{xy}$, а также σ_x, σ_y по вышеприведенным формулам:

а) $\bar{x} = \dfrac{1\cdot 17 + 2\cdot 14 + 3\cdot 23 + 4\cdot 43 + 5\cdot 3}{100} = 3{,}01;\ (\bar{x})^2 = (3{,}01)^2 = 9{,}06;$

$$\overline{x^2} = \frac{1^2\cdot 17 + 2^2\cdot 14 + 3^2\cdot 23 + 4^2\cdot 43 + 5^2\cdot 3}{100} = 10{,}43;$$

$$D(x) = \overline{x^2} - (\bar{x})^2 = 10{,}43 - 9{,}06 = 1{,}37;\quad \sigma_x = \sqrt{D(x)} = \sqrt{1{,}37} = 1{,}17;$$

б) $\bar{y} = \dfrac{28\cdot 40 + 38\cdot 19 + 48\cdot 23 + 58\cdot 18}{100} = 39{,}90;\ (\bar{y})^2 = (39{,}9)^2 = 1\,592{,}01;$

$$\overline{y^2} = \frac{28^2 \cdot 40 + 38^2 \cdot 19 + 48^2 \cdot 23 + 58^2 \cdot 18}{100} = 1723{,}4;$$

$D(y) = \overline{y^2} - (\overline{y})^2 = 1723{,}4 - 1592{,}01 = 131{,}39;$ $\sigma_y = \sqrt{D(y)} = \sqrt{131{,}39} = 11{,}46;$

в) $\overline{xy} =$

$$= \frac{17 \cdot 1 \cdot 58 + 13 \cdot 2 \cdot 48 + 1 \cdot 2 \cdot 58 + 13 \cdot 3 \cdot 38 + 10 \cdot 3 \cdot 48 + 37 \cdot 4 \cdot 28 + 6 \cdot 4 \cdot 38 + 3 \cdot 5 \cdot 28}{100} =$$

$= 107{,}48.$

Искомый коэффициент корреляции равен:

$$r = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{107{,}48 - 3{,}01 \cdot 39{,}9}{1{,}17 \cdot 11{,}46} = -0{,}94.$$

Так как $|r| = 0{,}94 \approx 1$, то между величинами X и Y имеется тесная линейная корреляционная связь. Уравнение прямой линии регрессии Y на X имеет вид:

$$y - \overline{y} = \rho(x - \overline{x}),$$

где $\overline{x}$, $\overline{y}$ — средние значения соответственно признаков X и Y; ρ — коэффициент регрессии, который определяется по формуле

$$\rho = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}.$$

Первая задача теории корреляции устанавливает форму корреляционной связи, т. е. вид функции регрессии (линейная, квадратичная).

Вторая задача оценивает тесноту корреляционной связи (силу корреляции), для чего служит корреляционное отношение η, которое определяется по формуле:

$$\eta = \frac{\sigma_{\text{межгр}}}{\sigma_{\text{общ}}},$$

где $\sigma_{\text{межгр}}$ — межгрупповое среднее квадратическое отклонение; $\sigma_{\text{общ}}$ — общее среднее квадратическое отклонение. Величины $\sigma_{\text{межгр}}$ и $\sigma_{\text{общ}}$ определяются по формулам:

$$\sigma^2_{\text{межгр}} = \frac{\sum n_x(\overline{y}_x - \overline{y})^2}{n}, \quad \sigma^2_{\text{общ}} = \frac{\sum n_y(y - \overline{y})^2}{n},$$

где $\overline{y} = \dfrac{\sum n_y y}{n}$ — общая средняя; $\overline{y}_x = \dfrac{\sum n_{xy} y}{n_x}$ — групповая средняя признака Y при фиксированном значении x.

Корреляционное отношение η обладает следующими свойствами:

1) η удовлетворяет двойному неравенству $0 \le \eta \le 1$;

2) если $\eta = 0$, то признак Y с признаком X корреляционной зависимостью не связан;

3) если $\eta = 1$, то признак Y связан с признаком X функциональной зависимостью;

4) η не меньше абсолютного значения коэффициента корреляции r, т. е. $\eta \ge |r|$;

5) если $\eta = |r|$, то точки $(x_1;\ y_1)$, $(x_2;\ y_2)$, ..., $(x_n;\ y_n)$ лежат на прямой линии регрессии, т. е. имеет место точная линейная корреляционная зависимость.

2. По данным, приведенным в корреляционной табл. 7.5:

1) найти уравнение регрессии $y - \bar{y} = \rho(x - \bar{x})$;

2) вычислить групповые средние $\bar{y}_x$, для контроля вычислить значение $\hat{y}$ (по уравнению регрессии в тех же точках);

3) вычислить корреляционное отношение η, результаты записать в виде таблицы:

x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
y_x	$\bar{y}_{x_1}$	$\bar{y}_{x_2}$	$\bar{y}_{x_3}$	$\bar{y}_{x_4}$	$\bar{y}_{x_5}$
$\hat{y}_x$	$\hat{y}_1$	$\hat{y}_2$	$\hat{y}_3$	$\hat{y}_4$	$\hat{y}_5$

4) построить график линейной регрессии и нанести на график экспериментальные точки $(x_1;y_1),(x_2;y_2),\ (x_3;y_3),(x_4;y_4),(x_5;y_5)$, обозначая их «звездочками».

Решение. 1) Вычисляем коэффициент регрессии ρ по формуле: $\rho = \dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}$, где величины σ_x, σ_y, $\bar{x}, \bar{y}$, коэффициент корреляции r найдены в примере 1: $\sigma_x = 1{,}17; \sigma_y = 11{,}46;\ r = -0{,}94; \bar{x} = 3{,}01; \bar{y} = 39{,}9$. Тогда получим: $\rho = \dfrac{11{,}46}{1{,}17} \cdot (-0{,}94) = -9{,}2$. Искомое уравнение регрессии имеет вид: $y - 39{,}9 = -9{,}2(x - 3{,}01)$. Откуда $y = -9{,}2x + 67{,}59$.

2) Вычисляем групповые средние $\bar{y}_x$ признака Y при фиксированном x по формулам $\bar{y}_x = \dfrac{\sum n_{xy} y}{n_x}$: $\bar{y}_{x_1} = \dfrac{17 \cdot 58}{17} = 58$; $\bar{y}_{x_2} = \dfrac{13 \cdot 48 + 1 \cdot 58}{14} = 48{,}7$;

$\bar{y}_{x_3} = \dfrac{13 \cdot 38 + 10 \cdot 48}{23} = 42{,}3$; $\bar{y}_{x_4} = \dfrac{37 \cdot 28 + 6 \cdot 38}{43} = 29{,}4$; $\bar{y}_{x_5} = \dfrac{3 \cdot 28}{3} = 28$.

Для контроля находим значения $\hat{y}$ по уравнению регрессии в тех же точках: $x_1 = 1$: $\hat{y}_1 = -9{,}2 \cdot 1 + 67{,}59 = 58{,}39$; $x_2 = 2$: $\hat{y}_2 = -9{,}2 \cdot 2 + 67{,}59 = 49{,}19$; $x_3 = 3$: $\hat{y}_3 = -9{,}2 \cdot 3 + 67{,}59 = 39{,}99$; $x_4 = 4$: $\hat{y}_4 = -9{,}2 \cdot 4 + 67{,}59 = 30{,}79$; $x_5 = 5$: $\hat{y}_5 = -9{,}2 \cdot 5 + 67{,}59 = 21{,}59$.

Результаты записываем в виде таблицы:

x	1	2	3	4	5
$\bar{y}_x$	58	48,7	42,35	29,4	28
$\hat{y}_x$	58,39	49,19	39,99	30,79	21,59

3) Вычисляем корреляционное отношение η по формуле $\eta = \dfrac{\sigma_{\text{межгр}}}{\sigma_{\text{общ}}}$,

где $\sigma^2_{\text{межгр}} = \dfrac{\sum n_x(\bar{y}_x - y)^2}{n}$, $\sigma^2_{\text{общ}} = \dfrac{\sum n_y(y - \bar{y})^2}{n}$, где $\bar{y} = \dfrac{\sum(n_y y)}{n}$ — общая средняя, определенная ранее: $\bar{y} = 39{,}9$.

$$\sigma^2_{\text{межгр}} = \frac{17(58-39{,}9)^2 + 14(48{,}7-39{,}9)^2 + 23(42{,}35-39{,}9)^2 + 43(29{,}4-39{,}9)^2}{100} +$$

$$+\frac{3(28-39{,}9)^2}{100} = 119{,}56.$$

$$\sigma_{\text{межгр}} = \sqrt{\sigma^2_{\text{межгр}}} = \sqrt{119{,}56} = 10{,}9;$$

$$\sigma^2_{\text{общ}} = \frac{40(28-39{,}9)^2 + 19(38-39{,}9)^2 + 23(48-39{,}9)^2 + 18(58-39{,}9)^2}{100} = 131{,}39.$$

$$\sigma_{\text{общ}} = \sqrt{\sigma^2_{\text{общ}}} = \sqrt{131{,}39} = 11{,}6.$$

Итак, $\eta = \dfrac{10{,}9}{11{,}6} \approx 0{,}95$.

Полученное значение корреляционного отношения $\eta = 0{,}95 \approx 1$ указывает на тесную корреляционную связь между признаками X и Y.

4) Строим график линейной регрессии $y = -9{,}2x + 67{,}59$ и наносим на нем экспериментальные точки (помечены звездочками) (рис. 7.36).

Если график регрессии $y = f(x)$ изображается кривой линией, то корреляцию называют *криволинейной*. Например, функция регрессии Y на X может иметь вид: $y = Ax^2 + Bx + C$ (параболическая корреляция второго порядка). Для определения вида функции регрессии строят точки $(x; \bar{y}_n)$ и по их расположению делают заключение о примерном виде функции регрессии. Теория криволинейной корреляции решает те же задачи, что и теория линейной корреляции (установление формы и тесноты корреляционной связи). Для оценки тесноты корреляции также

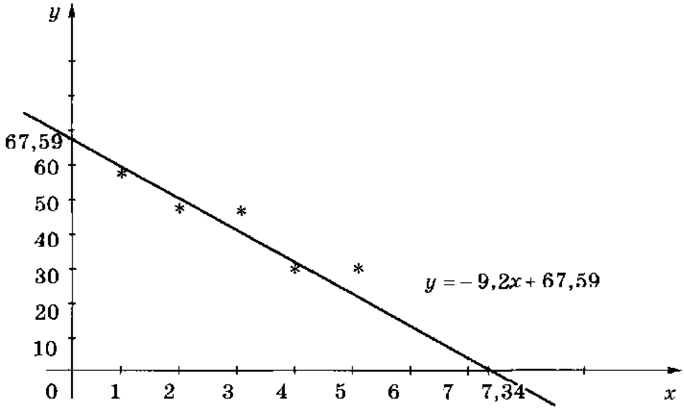


Рис. 7.36

служит корреляционное отношение η — если оно велико ($\eta > 0{,}7$), а коэффициент корреляции r мал ($|r| < 0{,}5$), то функция регрессии является *квадратичной*, т.е. $y = Ax^2 + Bx + C$. Неизвестные параметры A, B, C уравнения квадратичной регрессии определяются по методу наименьших квадратов из системы трех линейных уравнений:

$$\begin{cases} \left(\sum n_x x^4\right)A + \left(\sum n_x x^3\right)B + \left(\sum n_x x^2\right)C = \sum n_x \bar{y}_x x^2; \\ \left(\sum n_x x^3\right)A + \left(\sum n_x x^2\right)B + \left(\sum n_x x\right)C = \sum n_x \bar{y}_x x; \\ \left(\sum n_x x^2\right)A + \left(\sum n_x x\right)B + nC = \sum n_x \bar{y}_x. \end{cases}$$

3. По данным, приведенным в корреляционной таблице (табл. 7.6), вычислить:

1) коэффициент корреляции;
2) групповые средние $\bar{y}_x$;
3) корреляционное отношение;
4) параметры A, B, C квадратичной регрессии $y = Ax^2 + Bx + C$;

Таблица 7.6

Y	X					
	0	1	2	3	4	n_y
28	17	2	—	—	17	36
43	—	13	2	13	—	28
58	—	—	30	6	—	36
n_x	17	15	32	19	17	100

5) значения $\hat{y}$ — для контроля (по уравнению регрессии в тех же точках), а также построить график регрессии $y = Ax^2 + Bx + C$ и нанести на нем экспериментальные точки.

Решение. 1) Вычислим величины $\bar{x}, \overline{x^2}, \sigma_x, \bar{y}, \sigma_y, \overline{xy}$:

$$\bar{x} = \frac{\sum(xn_x)}{n} = \frac{0\cdot 17 + 1\cdot 15 + 2\cdot 32 + 3\cdot 19 + 4\cdot 17}{100} = 2{,}04;$$

$$\overline{x^2} = \frac{\sum(x^2 n_x)}{n} = \frac{0^2\cdot 17 + 1^2\cdot 15 + 2^2\cdot 32 + 3^2\cdot 19 + 4^2\cdot 17}{100} = 5{,}86;$$

$$D(x) = \overline{x^2} - (\bar{x})^2 = 5{,}86 - 2{,}04^2 = 1{,}698, \quad \sigma_x = \sqrt{1{,}698} \approx 1{,}3;$$

$$\bar{y} = \frac{\sum(yn_y)}{n} = \frac{28\cdot 36 + 43\cdot 28 + 58\cdot 36}{100} = 43;$$

$$\overline{y^2} = \frac{\sum y^2 n_y}{n} = \frac{28^2\cdot 36 + 43^2\cdot 28 + 58^2\cdot 36}{100} = 2011;$$

$$D(y) = \overline{y^2} - (\bar{y})^2 = 2\,011 - 43^2 = 162, \quad \sigma_y = \sqrt{162} = 12{,}73;$$

$$\overline{xy} = \frac{\sum(xyn_{xy})}{n} = (0\cdot 28\cdot 17 + 1\cdot 28\cdot 2 + 1\cdot 43\cdot 13 + 2\cdot 43\cdot 2 + 2\cdot 58\cdot 30 +$$

$$+3\cdot 43\cdot 13 + 3\cdot 58\cdot 6 + 4\cdot 28\cdot 17)\frac{1}{100} = 88{,}92.$$

Искомый коэффициент корреляции равен:

$$r = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{88{,}92 - 2{,}04\cdot 43}{1{,}3\cdot 12{,}73} = 0{,}073.$$

2) Определяем групповые средние $\bar{y}_x = \dfrac{\sum n_{xy} y}{n_x}$:

$$\bar{y}_{x_1} = \frac{28\cdot 17}{17} = 28; \quad \bar{y}_{x_2} = \frac{28\cdot 2 + 43\cdot 13}{15} = 41, \quad \bar{y}_{x_3} = \frac{43\cdot 2 + 58\cdot 30}{32} = 57{,}06,$$

$$\bar{y}_{x_4} = \frac{43\cdot 13 + 58\cdot 6}{19} = 47{,}74; \quad \bar{y}_{x_5} = \frac{28\cdot 17}{17} = 28.$$

3) Для вычисления корреляционного отношения η определяем сначала $\sigma_{\text{межгр}}$ и $\sigma_{\text{общ}}$:

$$\sigma^2_{\text{межгр}} = \frac{\sum n_x(\bar{y}_x - y)^2}{n} = (17\cdot(28-43)^2 + 15\cdot(41-43)^2 + 32\cdot(57{,}06 - 43)^2 +$$

$$+19\cdot(47{,}74-43)^2+17\cdot(28-43)^2)\cdot\frac{1}{100}=144{,}63;$$

$$\sigma_{\text{межгр}}=\sqrt{\sigma^2_{\text{межгр}}}=\sqrt{144{,}63}=12{,}03.$$

$$\sigma^2_{\text{общ}}=\frac{\sum n_y(y-\bar{y})^2}{n}=(36\cdot(28-43)^2+28\cdot(43-43)^2+36\cdot(58-43)^2\cdot\frac{1}{100}=162;$$

$$\sigma_{\text{общ}}=\sqrt{\sigma^2_{\text{общ}}}=\sqrt{162}=12{,}73.$$

Искомое корреляционное отношение равно:

$$\eta=\frac{\sigma_{\text{межгр}}}{\sigma_{\text{общ}}}=\frac{12{,}03}{12{,}73}\approx 0{,}945.$$

4) Значение $\eta=0{,}9445>0{,}7$ указывает на тесную корреляционную зависимость, а значение $r=0{,}073<0{,}5$ — на то, что функция регрессии является квадратичной и имеет вид $y=Ax^2+Bx+C$, где A, B, C — неизвестные параметры регрессии, которые определяются из системы уравнений:

$$\begin{cases}\left(\sum n_x x^4\right)A+\left(\sum n_x x^3\right)B+\left(\sum n_x x^2\right)C=\sum n_x\bar{y}_x x^2;\\ \left(\sum n_x x^3\right)A+\left(\sum n_x x^2\right)B+\left(\sum n_x x\right)C=\sum n_x\bar{y}_x x;\\ \left(\sum n_x x^2\right)A+\left(\sum n_x x\right)B+nC=\sum n_x\bar{y}_x.\end{cases}$$

Для вычисления коэффициентов этой системы составим расчетную таблицу (табл. 7.7)

Подставляя числа (суммы) нижней строки в систему уравнений, получим

$$\begin{cases}6418A+1872B+586C=23698{,}22;\\ 1872A+586B+204C=8892{,}02;\\ 586A+204B+100C=4299{,}98.\end{cases}$$

Таблица 7.7

x	n_x	$\bar{y}_x$	$n_x x$	$n_x x^2$	$n_x x^3$	$n_x x^4$	$n_x\bar{y}_x$	$n_x\bar{y}_x x$	$n_x\bar{y}_x x^2$
0	17	28	0	0	0	0	476	0	0
1	15	41	15	15	15	15	615	615	615
2	32	57,06	64	128	256	512	1 825,92	3 651,84	7 303,68
3	19	47,74	57	171	513	1 539	907,06	2 721,18	8 163,54
4	17	28	68	272	1 088	4 352	476	1 904	7 616
Σ	100	—	204	586	1 872	6 418	4 299,98	8 892,02	23 698,22

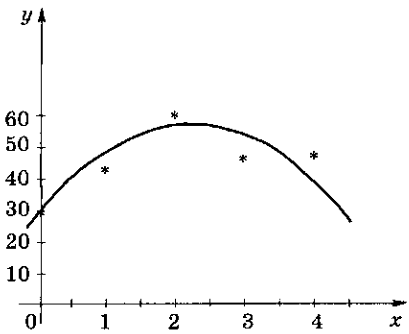


Рис. 7.37

Решая эту систему, находим $A = -6{,}4$; $B = 26{,}21$; $C = 26{,}3$. Искомое уравнение квадратичной регрессии имеет вид:

$$y = -6{,}4x^2 + 26{,}61x + 26{,}3.$$

5) Для контроля вычислим значения $\hat{y}$ по уравнению регрессии в тех же точках:

$$x_1 = 0: \ \hat{y}_{x_1} = 26{,}3;$$

$$x_2 = 1: \ \hat{y}_{x_2} = -6{,}4 \cdot 1^2 + 26{,}61 \cdot 1 + 26{,}3 = 46{,}11;$$

$$x_3 = 2: \ \hat{y}_{x_3} = -6{,}4 \cdot 2^2 + 26{,}61 \cdot 2 + 26{,}3 = 53{,}12;$$

$$x_4 = 3: \ \hat{y}_{x_4} = -6{,}4 \cdot 3^2 + 26{,}61 \cdot 3 + 26{,}3 = 44{,}63;$$

$$x_5 = 4: \ \hat{y}_{x_5} = -6{,}4 \cdot 4^2 + 26{,}61 \cdot 4 + 26{,}3 = 28{,}7.$$

Результаты запишем в виде таблицы:

x_i	0	1	2	3	4
$\overline{y}_x$	28	41	57,06	47,74	28
$\hat{y}_x$	26,3	46,11	53,12	44,63	28,7

6) Построим график регрессии $y = -6{,}4x^2 + 26{,}61x + 26{,}3$ и отметим на нем экспериментальные точки (помечены звездочками) (рис. 7.37).

Задачи для самостоятельного решения

1 — 3. Данные эксперимента представлены в двух корреляционных таблицах (табл. 7.8 и 7.9).

Для каждой таблицы найдите: 1) коэффициент корреляции r; 2) уравнение регрессии $y - \overline{y} = \rho(x - \overline{x})$ при $|r| \approx 1$; 3) корреляци-

Таблица 7.8

Y	X					
	$k-12$	$k-11$	$k-10$	$k-9$	$k-8$	n_y
$k+a$	—	—	—	$50-k$	3	
$k+a+10$	—	—	k	6	—	
$k+a+20$	—	k	10	—	—	
$k+a+30$	$30-k$	1	—	—	—	
n_X						100

Таблица 7.9

Y	X					
	0	1	2	3	4	n_Y
$k+a$	$30-k$	2	—	—	$30-k$	
$k+2a$	—	k	2	k	—	
$k+3a$	—	—	30	6	—	
n_X						100

онное отношение η; 4) $F = Ax^2 + Bx + C$, если корреляционное отношение η велико, а r мало ($|r| < 0{,}5$); 5) групповые средние $\bar{y}_x$; 6) значение $\hat{y}$ — для контроля (по уравнению регрессии в тех же точках). Результаты запишите в виде таблицы:

x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$\bar{y}_x$	$\bar{y}_1$	$\bar{y}_2$	$\bar{y}_3$	$\bar{y}_4$	$\bar{y}_5$
$\hat{y}_x$	$\hat{y}_1$	$\hat{y}_2$	$\hat{y}_3$	$\hat{y}_4$	$\hat{y}_5$

Нанесите на графике экспериментальные точки $(x_1;y_1),(x_2;y_2)$, $(x_3,y_3),(x_4,y_4)$, (x_5,y_5) и кривую регрессии. Значения k и a указаны для каждой задачи следующей таблицей:

Задача	k	a
1	13	13
2	14	14
3	15	15

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какое событие называют достоверным; невозможным; случайным?
2. Какие два события являются совместными, несовместными?
3. Дайте определение и укажите границы применения классической формулы вероятности.
4. Приведите формулы вычисления основных комбинаторных соотношений (размещения, перестановки, сочетания).
5. Дайте определение условной вероятности.
6. Запишите формулу Бейеса и сформулируйте теорему гипотез.
7. При каких условиях возможно применение формулы Бернулли?
8. Какие распределения непрерывной случайной величины вам известны? Кратко охарактеризуйте их.
9. В чем геометрический смысл неравенства Чебышева?
10. Перечислите основные задачи математической статистики.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

Событие, вероятность, выборка, комбинаторика, формула Бейеса, формула Бернулли, поток событий, случайная величина, нормальное распределение, показательное распределение, правило трех сигм, совокупность, статистический ряд.

Ответы

ГЛАВА 1

• **1.1.** 1) $D(f) = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$; 2) $D(f) = (-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$; 3) $D(f) = (-\infty; +\infty)$; 4) $D(f) = (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$; 5) $D(f) = (-\infty; +\infty)$; 6) $D(f) = (-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$; 7) $D(f) = \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$; 8) $D(f) = (-1; 1) \cup (1; +\infty)$; 9) $D(f) = \left(\frac{2}{3}; 2\right]$; 10) $D(f) = [-2; 0) \cup (0; 1)$; 11) $D(f) = [0; 4]$; 12) $D(f) = [-1-\sqrt{2}; -1+\sqrt{2}]$; 13) $D(f) = \left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right]$; 14) $D(f) = (0; 2]$; 15) четная; 16) четная; 17) четная; 18) ни четная, ни нечетная; 19) нечетная; 20) четная; 21) четная; 22) нечетная; 23) нечетная; 24) ни четная, ни нечетная; 25) нечетная; 26) $y = \frac{(x+1)^3}{64}$; 27) $y = \sqrt[3]{1-x^3}$; 28) $y = 2\arcsin x$; 29) $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$; 30) $y = \frac{2x+1}{2-x}$; 31) $y = \frac{5x+3}{2x-5}$.

• **1.2.** 1) а) $p \in [0; 37{,}5]$, $q \in [0; 30]$; б) $q_1 = 6$, $q_2 = 4{,}4$, в) $p = \frac{80}{q+2} - \frac{5}{2}$; г) $p_1 = 2{,}5$, $u_1 = 35$ тыс. руб.; $p_2 = 1{,}5$, $u_2 = 27$ тыс. руб.; 2) а) $p \in [5; \infty)$, $q \in [0; \infty)$; б) $q_1 = 4$, $q_2 = 5$; в) $p = q^2 + 2q + 5$; г) $p_1 = 85$, $u_1 = 680$ тыс. руб.; $p_2 = 148$, $u_2 = 1618$ тыс. руб.; 3) а) $p \in [4; 15]$; б) $p_0 = 6$ руб., $q_0 = 1$ тыс. шт.; в) $u_0 = 6$ тыс. руб.; г) при $p = 9$ излишки товара 2 тыс. шт., при $p = 5$ дефицит товара 0,75 тыс. шт.; д) $q = \frac{1}{2}p - \frac{3}{2}$; $p_0 \approx 5{,}32$ руб.; $q_0 \approx 1{,}16$ тыс.шт.; $u_0 \approx 6{,}17$ тыс. руб.; выручка продавцов при новой цене на 170 руб. больше, чем выручка при первоначальной равновесной цене; ж) государство закупает 0,7 тыс. шт. за 4,9 тыс. руб.

• **1.3.** 4) 0; 5) $+\infty$; 6) $-0{,}5$; 7) $\frac{3}{\sqrt{2}}$; 8) 2; 9) $\sqrt{3}$; 10) -4; 11) 0,5; 12) $-2{,}5$; 13) 0,5; 14) $+\infty$; 15) $\frac{1}{3}$; 16) $-0{,}5$.

• **1.4.** 1) а) $\frac{7}{3}$; б) 4; в) $\frac{3}{2}$; 2) 0; 3) $+\infty$; 4) $\frac{5}{4}$; 5) $-\frac{1}{4}$; 6) 3; 7) -1; 8) $\frac{1}{4}$; 9) $\frac{3}{5}$; 10) $\frac{2}{3}$; 11) $-\frac{1}{2}$; 12) $\frac{1}{3}$; 13) 2; 14) 6; 15) e^{10}; 16) e^{-4}; 17) e^{8}; 18) e^{-6}; 19) $\sqrt{e}$; 20) e^{-2}; 21) $e^{-\frac{2}{9}}$; 22) $e^{-\frac{5}{2}}$; 23) $e^{-\frac{1}{2}}$; 24) $\frac{1}{2}$; 25) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 26) $\sqrt{e}$; 27) $e^{-\frac{2}{3}}$; 28) 0; 29) $\frac{1}{\ln 10^5}$; 30) e; 31) $\frac{8}{3}$; 32) $\frac{27\ln 3}{\pi}$; 33) $e^{\frac{2}{\pi}}$; 34) $\frac{1}{2\ln^2 3}$.

• **1.5.** 6) $x_0 = 3$ — точка разрыва I рода; 7. $x_0 = 0$ — точка разрыва II рода; 8) $x_0 = \frac{3}{2}$ — точка разрыва I рода; 9) $x_1 = -2$ — точка разрыва I рода, $x_2 = 2$ — точка разрыва II рода; 10) $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ — точки разрыва II рода; 11) $x_1 = -5$ — точка разрыва I рода, $x_2 = 0$ — точка разрыва II рода; 12) $x_1 = 0$ — точка разрыва II рода, $x_2 = 1$ — точка разрыва I рода; 13) $x_0 = 0$ — точка разрыва II рода; 14) $x_0 = -1$ — точка разрыва I рода; 15) $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ — точки разрыва I рода; 16) $x_1 = -1$, $x_2 = = 1$ — точки разрыва I рода; 17) $x_1 = -4$ — точка разрыва II рода, $x_2 = 0$ — точка разрыва I рода; 18) $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ — точки разрыва I рода; 19) $x_0 = 0$ — точка разрыва II рода; 20) $x_0 = 0$ — точка разрыва II рода.

• **1.6.** 1) $x(1-3x^4)^{-\frac{3}{2}}$; 2) $\frac{-1}{\sqrt{x-x^2}(1+\sqrt{x})}$; 3) $\frac{1}{15}(x+x^{\frac{4}{3}})^{-\frac{4}{5}}(3+4x^{\frac{1}{3}})$; 4) $\frac{2x\sin\ln(1-x^2)}{1-x^2}$; 5) $\frac{\sin 6x}{\cos^2 6x}$; 6) $\frac{1}{2(1-\cos 8x)}$; 7) $-\frac{15\arcsin^2\sqrt{4-5x}}{2\sqrt{-25x^2+35x-12}}$; 8) $-\frac{2\sqrt{2}(x^2-4)}{x^4+16}$; 9) $\frac{\sqrt{x}(1+3x)}{x(9x^2+1)}$; 10) $-\mathrm{ctg}\frac{2x+4}{x+1}\cdot\frac{-2}{(x+1)^2}$; 11) $\frac{1}{\cos x}$; 12) $\frac{-12\sin 4x\ln^2(1+\cos 4x)}{1+\cos 4x}$; 13) $\frac{x^2}{x^2-2}$; 14) $\frac{-e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}\arcsin\sqrt{1-e^{2x}}}$;

15) $-2e^{-x^2}\cos^2(2x+3)(3\sin(2x+3)+\cos(2x+3))$;

16) $e^{\frac{x}{\sqrt{3}}}\operatorname{arctg}2x\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}2x+\frac{4}{1+4x^2}\right)$; 17) $\frac{\sqrt{4+x^2}(x^2+16)}{6x^6}$;

18) $\frac{e^{\frac{1}{x}}}{2x^2}\left(\sqrt{x^3}\operatorname{ctg}x-2\ln\sin\sqrt{x}\right)\sin\sqrt{x}$; 19) $19^{1+x^{19}}x^{18}(x^{19}\ln 19+1)$;

20) $(\operatorname{ctg}x)^{\ln\operatorname{tg}\frac{x}{4}}\left(\frac{\ln\operatorname{ctg}x}{2\sin\frac{x}{2}}-\frac{2\ln\operatorname{tg}\frac{x}{4}}{\sin 2x}\right)$; 21) $\frac{1}{4}$; 22) $\ln 7$; 23) 12; 24) 1;

25) $\frac{1}{5\ln 10}$.

• **1.7.** 1. $\sqrt{2}\left(1-2x^2\right)^{-\frac{3}{2}}dx$; 3. $\frac{28}{75}$; 4. $\Delta x=1, \Delta y=-2, dy=-4$, $\Delta=2$, $\varepsilon=100\%$; $\Delta x=0{,}5, \Delta y=-4, dy=-2, \Delta=\frac{2}{3}, \varepsilon=50\%$; $\Delta x=0{,}25$, $\Delta y=-0{,}8$, $dy=-1, \Delta=0{,}2$, $\varepsilon=25\%$.

• **1.8.** 1. $\ln 2x\left(\frac{12}{x^3}-\frac{4}{x}\right)-\frac{6}{x^3}(3+x^2)$; 2. $e^{1-2x}(9\cos(2+3x)+$ $+46\sin(2+3x))$; 3) $-864\sin 12x$; 4) $\frac{\sin x}{x^3}(x^2-6)+\frac{3\cos x}{x^4}(x^2-2)$.

• **1.9.** 1. Квадрат со стороной $\frac{l}{4}$; 2. $R=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$, $H=\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$; 3. $H=\frac{l\sqrt{3}}{3}$; 4. $\alpha=2$(рад); 5. $\frac{b}{a}$; 6. а) $y_{\text{наим}}=y(2)=2$, $y_{\text{наиб}}=y(-1)=$ $=y(7)=3$; б) $y_{\text{наим}}=y(2)=-4$, $y_{\text{наиб}}=y(4)=4$.

• **1.11.** 1) а) $E_p(q)=\frac{4p}{4p-100}$; б) при $p_1=10$ $E_p(q)=\frac{2}{3}$; при $p_2=20$ $E_p(q)=-4$; 2) а) $E_p(q)=\frac{6p}{pp-148}$; при $p_1=8$ $E_p(q)=-0{,}48$;

при $p_2=15$ $E_p(q)=-\frac{45}{29}$; 3) $E_p(q)=\frac{306p}{(2p+3)(2p-150)}$; 4) а) $E_p(q)=$ $=\frac{p}{2\sqrt{625+p}(60-\sqrt{625+p})}$; 5) а) $E_p(q)=\frac{p}{p-600}$; 6) а) $E_p(q)=$ $=\frac{p}{2\sqrt{p-15}(-2+\sqrt{p-15})}$; 7) а) $E_p(q)=\frac{6p}{(p+4)(p-2)}$; 8) Выручка возрастает приблизительно на 3 %.

• **1.12.** **1.** $\frac{1}{14}(3-4\cos 3x)^{\frac{7}{6}}+C$; **2.** $\frac{1}{3}e^{\sin 3x}+C$; **3.** $-\frac{15}{32}(3-2x^4)^{\frac{4}{5}}+C$; **4.** $\frac{1}{12}\ln\left|\frac{3+x^2}{3-x^2}\right|+C$; **5.** $\frac{1}{6}\arcsin^3 2x+C$; **6.** $\frac{1}{4}\ln^4 x-\frac{2}{3}\ln^{\frac{3}{2}} x+C$; **7.** $\frac{1}{\sqrt{73}}\ln\left|\frac{4x+5+\sqrt{73}}{-4x-5+\sqrt{73}}\right|+C$; **8.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+\frac{7}{2}}\right|+C$; **9.** $-\frac{1}{4}\ln\left|-2x^2+2x+5\right|+\frac{4}{\sqrt{11}}\ln\left|\frac{2x-1+\sqrt{11}}{2x-1-\sqrt{11}}\right|+C$; **10.** $x\ln(x^2+x)-2x+$ $+\ln|x+1|+C$; **11.** $\frac{x^2}{4}(2\ln^2 x-2\ln x+1)+C$; **12.** $4\sin\frac{x}{4}(2x^2+4x-65)+$ $+64\cos\frac{x}{4}(x+1)+C$; **13.** $e^{-2x}(x^2+x-1)+C$; **14.** $-\sqrt{1-2x}\arccos 2x-$ $-2\sqrt{1+2x}+C$; **15.** $\frac{27}{82}e^{\frac{x}{3}}(\sin 3x+\frac{1}{9}\cos 3x)+C$; **16.** $\frac{1}{8}[(1+4x^2)\mathrm{arctg}\,2x-$ $-2x]+C$; **17.** $\frac{x^2}{2}+x-\ln|x|+2\ln|x-1|+C$; **18.** $3x-\frac{5}{4}\ln|x+2|+$ $+\frac{33}{4}\ln|x-2|-2\ln|x-1|+C$; **19.** $2\ln|x|-\frac{1}{2(x+1)^2}+C$; **20.** $-\frac{2}{(x+2)}+$ $+\ln|x^2+2x+3|+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C$; **21.** $\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln|x^2+x+1|-$ $\frac{1}{6}\ln|x^2+x+1|+\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$; **22.** $-\sqrt{1-2x}-2\sqrt[4]{1-2x}+$

$+2\ln|\sqrt[4]{1-2x}-1|+C$; 23) $-3\sqrt{-x^2+6x-8}+13\arcsin(x-3)+C$; 24) $\ln\left|\dfrac{1-x+\sqrt{x^2-2x+5}}{x}\right|$; 25) $-\dfrac{1}{2}\cos 2x+\dfrac{1}{6}\cos^3 2x+C$; 26) $\dfrac{1}{3}\sin 3x-$ $-\dfrac{2}{9}\sin^3 3x+\dfrac{1}{15}\sin^5 3x+C$; 27) $\dfrac{1}{8}x-\dfrac{1}{96}\sin 12x+C$; 28) $\dfrac{1}{16}x-$ $-\dfrac{1}{64}\sin 4x+\dfrac{1}{48}\sin^3 2x+C$; 29) $\dfrac{3}{8}x+\dfrac{1}{8}\sin 4x+\dfrac{1}{64}\sin 8x+C$; 30) $\dfrac{3}{8}x-$ $-\dfrac{1}{12}\sin 6x+\dfrac{1}{96}\sin 12x+C$.

• **1.13.** 1) $10\dfrac{2}{3}$; 2) $\dfrac{2}{5}$; 3) -2; 4) $2e(e-1)$; 5) 0; 6) $\dfrac{\pi}{192}$; 7) $\ln\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{6\sqrt{3}}$; 8) $\dfrac{2}{3}$.

• **1.14.** 1) $\dfrac{1}{2}$ кв. ед.; 2) $(7{,}5-8\ln 2)$ кв. ед.; 3) $20\dfrac{5}{6}$ кв. ед.; 4) $2\dfrac{2}{3}$ кв. ед.; 5) 2 кв. ед.; 6) $\dfrac{\pi^2}{2}$ куб. ед.; 7) $\dfrac{8\pi}{3}$ куб. ед.; 8) $\dfrac{76\pi}{3}$ куб. ед.; 9) $\dfrac{16\pi}{3}$ куб. ед.; 10) $\approx\dfrac{8}{27}(10\sqrt{10}-1)$ ед.

ГЛАВА 2

• **2.1.** 1) нет; 2) да; 3) да; 4) да; 5) сходится; 6) расходится; 7) расходится; 8) сходится; 9) сходится; 10) сходится; 11) расходится; 12) расходится; 13) сходится; 14) сходится; 15) сходится; 16) сходится; 17) сходится; 18) расходится; 19) расходится.

• **2.2.** 1) сходится условно; 2) сходится абсолютно; 3) сходится условно; 4) сходится абсолют0но; 5) расходится; 6) сходится условно; 7) сходится абсолютно; 8) сходится абсолютно.

• **2.3.** 1) $-5\le x<3$; 2) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\le x\le\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; 3) R = e; 4) $-1\le x<3$; 5) $-3\le x<1$; 6) $-2<x<2$; 7) $-\dfrac{1}{3}\le x<\dfrac{1}{3}$; 8) $-5<x<5$; 9) $-\dfrac{6}{7}\le x<\dfrac{6}{7}$. 10) $-\dfrac{4}{5}\le x<\dfrac{4}{5}$; 11) $-\dfrac{3}{4}\le x<\dfrac{3}{4}$.

• **2.4.** 2. а) 5,2; $|\delta| < \frac{1}{625}$; б) 1,002; $|\delta| < 4\cdot 10^{-4}$; в) 0,125; $|\delta| < \frac{1}{12}$; 3. 0,484; б) 1,799; в) 0,098; г) 0,842; д) 0,250; е) 0,199; ж) 7,620; з) 0,105; и) 1,059; к) 0,516; л) 0,822; м) 0,540.

ГЛАВА 3

• **3.1.** 9. $\overline{\nabla u} = (2x; 4y^3)$; $H(x;y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix}$; $\overline{\nabla u_A} = (0;0)$; $H(A) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\overline{\nabla u_B} = (2;\ 4)$; $H(B) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$.

• **3.2.** 1) В точке $M(0;\ 0)$ — локальный минимум; $f(M) = 0$; 2) в точке $M_1(3;\ 0;\ \lambda_1 = -\frac{3}{2})$ — локальный максимум; $f(M_1) = 9$. В точке $M_2(-1;\ 0;\ \lambda_2 = -\frac{1}{2})$ — локальный минимум; $f(M_2) = 1$; 3) $M_1(1;\ 0;\ \lambda_1 = -1)$ — локальный максимум; $f(M_1) = 1$. $M_2(-1;\ 0;\ \lambda_2 = -1)$ — локальный максимум; $f(M_2) = 1$. $M_3(0;\ 1;\ \lambda_3 = 1)$ — локальный минимум; $f(M_3) = -1$. $M_4(0;\ -1;\ \lambda_4 = 1)$ — локальный минимум; $f(M_4) = -1$; 4) $M_1(1;\ 1;\ 2;\ \lambda = \frac{2}{3}; \mu = -\frac{10}{3})$ — локальный минимум; $f(M_1) = 6$; $M_2(-2;\ -2;\ 8;\ \lambda = -\frac{20}{3}; \mu = -\frac{68}{3})$ — локальный максимум; $f(M_2) = 72$; 5) $M_1(-2;\ -2)$ — локальный минимум; $f(M_1) = -4$; $M_2(2;\ 2)$ — локальный максимум; $f(M_2) = 4$; 6) $M_1(0;\ -2)$ — локальный минимум; $f(M_1) = 4$; $M_2(0;\ 2)$ — локальный минимум; $f(M_2) = 4$; 7) $M(0;\ 0)$ — локальный минимум; $f(M) = 0$; 8) $M\left(-\frac{8}{3}; -\frac{10}{3}; \lambda = \frac{44}{3}\right)$ — локальный минимум; $f(M) = 94\frac{1}{9}$; 9) $M(2{,}25;\ -1{,}5;\ \lambda = 11)$ — локальный максимум; $f(M) = -48{,}5$.

• **4.2.** 1) $y=\ln(e^x+C)$; 2) $y=e^{\frac{x^2}{2}-x+C}$; 3) $\left|y+\sqrt{y^2-\frac{1}{4}}\right|^3=$ $=C(x-1)^2(x+2)^4$; 4) $e^{2y}\left(y+\frac{1}{2}\right)=Ce^{8x}(x-1)^4$ или $2y+\ln\left(y+\frac{1}{2}\right)=$ $=8x+4\ln(x-1)+C$; 5) $y=e^{C\sqrt{x^2-1}}$; 6) $(y-1)e^{\frac{1}{2}(x+y)}=C(x+1)$; 7) $e^{-y}(y+1)=e^{-x}+C$; 8) $(y^2+4)e^{\operatorname{arctg}\frac{y}{2}}=C\operatorname{arctg}^2x$.

• **4.3.** 1) $2x^2+10xy+3y^2=C$; 2) $3xy^2+x^2y-y^3=C$; 3) $x^3=$ $=Cy\sqrt{y^2+x^2}$; 4) $y+\sqrt{x^2+y^2}=Cx^3$.

• **4.4.** 1) $\ln|1+4y|=2x^2+\ln 4$; 2) $y=\frac{1}{2}e^{-\cos x}(5-\cos 2x)$; 3) $y=$ $=e^{-x^2}(x^2+5)$; 4) $y=e^{-x}(\operatorname{arctg}x+2)$; 5) $y=x^3e^x$; 6) $y=\frac{x+6}{x^2}$; 7) $y=\frac{1}{x}\ln\left[\frac{1+x^2}{2}\right]$; 8) $y=\frac{2\sin x+3}{\cos^2 x}$.

• **4.5.** 1) $y=\frac{2(x+1)}{x^2+2x+2}$; 2) $y=\frac{1}{3x^2-2x}$; 3) $y=\frac{x}{1-\sin x}$; 4) $y=\frac{1}{1-\ln x}$; 5) $y=\frac{(e^x+1)^2}{4e^x}$ или $y=\frac{(e^x-3)^2}{4e^x}$; 6) $y=\frac{x-1}{3-x}$.

• **4.6.** 1) $y=e^{3x}(C_1+C_2x)$; 2) $y=C_1e^x+C_2e^{4x}$; 3) $y=C_1+C_2e^{-\frac{x}{2}}$; 4) $y=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)$; 5) $y=C_1\sin 2x+C_2\cos 2x$; 6) $y=C_1e^x+$ $+C_2e^{-3x}-\frac{1}{4}xe^{-3x}$; 7) $y=C_1e^{-x}+C_2e^{6x}-\frac{1}{37}\cos x-\frac{6}{37}\sin x$; 8) $y=$ $=e^{-2x}(C_1+xC_2)+\frac{1}{4}x$; 9) $y=C_1+C_2e^x-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-x$; 10) $y=e^{-2x}\times$ $\times(C_1\cos x+C_2\sin x)+x^2-8x+7$; 11) $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{-3x}-xe^{-2x}$; 12) $y=-\frac{20}{9}e^{-2x}(1+3x)+\frac{2}{9}e^x$; 13) $y=e^x\left(-3\frac{23}{125}\cos 2x-1\frac{103}{250}\sin 2x\right)+$

$+\frac{1}{5}x^2 + \frac{4}{25}x + \frac{23}{125}$; 14) $y = e^{-x}\left(\frac{1}{13}\cos 3x + \frac{55}{156}\sin 3x\right) + \frac{1}{13} \times$
$\times\left(\cos 2x - \frac{3}{2}\sin 2x\right)$.

ГЛАВА 5

• **5.1.** **1.** а) {b, p}; б) $\varnothing$; в) A; г) U; д) $\{a, b, d, f, p, q\}$; е) $\{a, c, d, e, f, p, q\}$; ж) $\{d, f, p\}$; з) $\{b\}$; и) $\{d, f, p\}$; к) $\varnothing$; л) не верно; м) не верно. **2.** а) $A \setminus B$; б) U; в) $A \cap B$; г) $\varnothing$. **3.** Ни одного предмета не изучают 36 студентов. Изучают финансы, но не изучают математику и право — 79 студентов. **4.** Только одну задачу решили 380 студентов. **5.** На кафедре работают 46 преподавателей. Только на одном факультете работают 29 человек.

ГЛАВА 6

• **6.3.** 1. $\delta_x = 0{,}6\ \%$; $\delta_y = 1\ \%$; $\delta_z = 0{,}7\ \%$. **2.** а) $x \approx 6{,}785(\pm 0{,}075)$; б) $x \approx 0{,}246(\pm 0{,}001)$; в) $x \approx 2{,}013(\pm 0{,}009)$; д) $x \approx 0{,}809(\pm 0{,}001)$. **3.** а) 0,59; б) 0,92; в) 1,998; г) 1,21; д) 2,00; е) 0,486; **4.** а) 0,65; б) 1,45; в) 0,445; г) 1,249; д) 1,999; е) 1,86. **5.** а) 0,50; б) 3,63; в) 3,00; г) 0,696; д) 1,17; е) 1,339. **6.** а) 3,107; б) 1,303. **7.** а) 1,117; б) 2,117; в) 0,1659; г) –1,317; д) 1,89.

ГЛАВА 7

• **7.2.** **1.** 0,0029. **2.** 0,1655. **3.** 0,000018. **4.** 0,476. **5.** 0,25. **6.** 0,5142. **7.** 0,3853. **8.** 0,1998.

• **7.3.** **1.** 0,9428. **2.** 0,9855. **3.** 0,0167. **4.** 0,05. **5.** 0,0046. **6.** 0,625. **7.** На Дюпона. **8.** 0,3. **9.** 0,188. **10.** 0,0161. **11.** 0,1667. **12.** 0,9865. **13.** 0,44. **14.** 0,5716. **15.** 0,902. **16.** 0,0455. **17.** 0,954. **18.** 0,000007. **19.** 0,9837. **20.** 0,9985.

• **7.4.** **1.** 0,998. **2.** 0,28. **3.** 0,425. **4.** 0,4146. **5.** 0,952. **6.** 0,86. **7.** 0,31. **8.** а) 0,1725; б) 0,3172. **9.** 0,091; 0,9091. **10.** 0,1034. **11.** 0,4037. **12.** 0,1602. **13.** 0,7231. **14.** 0,91. **15.** 0,7565. **16.** 0,0031. **17.** 0,84. **18.** 0,085. **19.** 0,0345. **20.** 0,0244. **21.** 0,015. **22.** 0,4286. **23.** 0,5842. **24.** 0,1667. **25.** 0,3125. **26.** 0,3453. **27.** 0,3226. **28.** 0,4545. **29.** 0,4857. **30.** 0,4615.

• **7.5.** **1.** а) 0,2013; б) 0,6778. **2.** 0,32. **3.** 0,016. **4.** 0,9274. **5.** а) 0,32768; б) 0,999936. **6.** а) 0,32768; б) 0,2048; в) 0,99328. **8.** 0,041. **9.** 0,837. **10.** 0,88448.

• **7.6.** **1.** а) 0,111; б) 0,191; в) 0,809. **2.** а) 0,577; б) 0,168; в) 0,199. **3.** а) 0,195; б) 0,908; в) 0,433. **4.** а) 0,089; б) 0,062; в) 0,998. **5.** Не менее 4606. **6.** 0,449. **7.** а) 0,938; б) 0,062; в) 0,134. **8.** 0,1396. **9.** а) 0,195; б) 0,433; в) 0,018. **10.** 0,00014. **11.** 0,9596. **12.** а) 0,0122; б) 0,9084; в) 0,336. **13.** а) 0,0255; б) 0,0005; в) 0,998. **14.** а) 0,061; б) 0,8843; в) 0,9999. **15.** а) 0,0183; б) 0,865; в) 0,938.

• **7.7.** **1.** 9. **2.** 0,0504. **3.** 0,0997. **4.** 0,04565. **5.** 43. **6.** 0,04565. **7.** 0,017. **8.** 0,039789. **9.** 30. **10.** 0,35.

• **7.8.** **1.** а) 0,0054; б) 0,0228. **2.** 128. **3.** 180. **4.** 1. **5.** 0,9736. **6.** 0,803. **7.** 0,999. **8.** 0,033. **9.** 1. **10.** 0,7888. **11.** 0,8943. **12.** 0,999. **13.** 1. **14.** 1. **15.** 1. **16.** 0,0032. **17.** 1.

Приложение 1

Функция Лапласа Ф(x)

	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,000000	0,003989	0,007978	0,011967	0,015953	0,019939	0,023922	0,027903	0,031881	0,035856
0,1	0,039828	0,043795	0,047758	0,051717	0,055670	0,059618	0,063559	0,067495	0,071424	0,075345
0,2	0,079260	0,083166	0,087064	0,090954	0,094835	0,098706	0,102568	0,106420	0,110261	0,114092
0,3	0,117911	0,121719	0,125516	0,129300	0,133072	0,136831	0,140576	0,144309	0,148027	0,151732
0,4	0,155422	0,159097	0,162757	0,166402	0,170031	0,173645	0,177242	0,180822	0,184386	0,187933
0,5	0,191462	0,194974	0,198468	0,201944	0,205402	0,208840	0,212260	0,215661	0,219043	0,222405
0,6	0,225747	0,229069	0,232371	0,235653	0,238914	0,242154	0,245373	0,248571	0,251748	0,254903
0,7	0,258036	0,261148	0,264238	0,267305	0,270350	0,273373	0,276373	0,279350	0,282305	0,285236
0,8	0,288145	0,291030	0,293892	0,296731	0,299546	0,302338	0,305106	0,307850	0,310570	0,313267
0,9	0,315940	0,318589	0,321214	0,323814	0,326391	0,328944	0,331472	0,333977	0,336457	0,338913
1,0	0,341345	0,343752	0,346136	0,348495	0,350830	0,353141	0,355428	0,357690	0,359929	0,362143
1,1	0,364334	0,366500	0,368643	0,370762	0,372857	0,374928	0,376976	0,378999	0,381000	0,382977
1,2	0,384930	0,386860	0,388767	0,390651	0,392512	0,394350	0,396165	0,397958	0,399727	0,401475
1,3	0,403199	0,404902	0,406582	0,408241	0,409877	0,411492	0,413085	0,414656	0,416207	0,417736
1,4	0,419243	0,420730	0,422196	0,423641	0,425066	0,426471	0,427855	0,429219	0,430563	0,431888

Окончание прил. 1

	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
1,5	0,433193	0,434478	0,435744	0,436992	0,438220	0,439429	0,440620	0,441792	0,442947	0,444083
1,6	0,445201	0,446301	0,447384	0,448449	0,449497	0,450529	0,451543	0,452540	0,453521	0,454486
1,7	0,455435	0,456367	0,457284	0,458185	0,459071	0,459941	0,460796	0,461636	0,462462	0,463273
1,8	0,464070	0,464852	0,465621	0,466375	0,467116	0,467843	0,468557	0,469258	0,469946	0,470621
1,9	0,471284	0,471933	0,472571	0,473197	0,473810	0,474412	0,475002	0,475581	0,476148	0,476705
2,0	0,477250	0,477784	0,478308	0,478822	0,479325	0,479818	0,480301	0,480774	0,481237	0,481691
2,1	0,482136	0,482571	0,482997	0,483414	0,483823	0,484222	0,484614	0,484997	0,485371	0,485738
2,2	0,486097	0,486447	0,486791	0,487126	0,487455	0,487776	0,488089	0,488396	0,488696	0,488989
2,3	0,489276	0,489556	0,489830	0,490097	0,490358	0,490613	0,490863	0,491106	0,491344	0,491576
2,4	0,491802	0,492024	0,492240	0,492451	0,492656	0,492857	0,493053	0,493244	0,493431	0,493613
2,5	0,493790	0,493963	0,494132	0,494297	0,494457	0,494614	0,494766	0,494915	0,495060	0,495201
2,6	0,495339	0,495473	0,495603	0,495731	0,495855	0,495975	0,496093	0,496207	0,496319	0,496427
2,7	0,496533	0,496636	0,496736	0,496833	0,496928	0,497020	0,497110	0,497197	0,497282	0,497365
2,8	0,497445	0,497523	0,497599	0,497673	0,497744	0,497814	0,497882	0,497948	0,498012	0,498074
2,9	0,498134	0,498193	0,498250	0,498305	0,498359	0,498411	0,498462	0,498511	0,498559	0,498605
3,0	0,498650	0,498694	0,498736	0,498777	0,498817	0,498856	0,498893	0,498930	0,498965	0,498999
3,1	0,499032	0,499064	0,499096	0,499126	0,499155	0,499184	0,499211	0,499238	0,499264	0,499289
3,2	0,499313	0,499336	0,499359	0,499381	0,499402	0,499423	0,499443	0,499462	0,499481	0,499499
3,3	0,499517	0,499533	0,499550	0,499566	0,499581	0,499596	0,499610	0,499624	0,499638	0,499650

3,4	0,499663	0,499675	0,499687	0,499698	0,499709	0,499720	0,499730	0,499740	0,499749	0,499758
3,5	0,499767	0,499776	0,499784	0,499792	0,499800	0,499807	0,499815	0,499821	0,499828	0,499835
3,6	0,499841	0,499847	0,499853	0,499858	0,499864	0,499869	0,499874	0,499879	0,499883	0,499888
3,7	0,499892	0,499896	0,499900	0,499904	0,499908	0,499912	0,499915	0,499918	0,499922	0,499925
3,8	0,499928	0,499930	0,499933	0,499936	0,499938	0,499941	0,499943	0,499946	0,499948	0,499950
3,9	0,499952	0,499954	0,499956	0,499958	0,499959	0,499961	0,499963	0,499964	0,499966	0,499967
4,0	0,499968	0,499970	0,499971	0,499972	0,499973	0,499974	0,499975	0,499976	0,499977	0,499978
4,1	0,499979	0,499980	0,499981	0,499982	0,499983	0,499983	0,499984	0,499985	0,499985	0,499986
4,2	0,499987	0,499987	0,499988	0,499988	0,499989	0,499989	0,499990	0,499990	0,499991	0,499991
4,3	0,499991	0,499992	0,499992	0,499993	0,499993	0,499993	0,499993	0,499994	0,499994	0,499994
4,4	0,499995	0,499995	0,499995	0,499995	0,499995	0,499996	0,499996	0,499996	0,499996	0,499996
4,5	0,499997	0,499997	0,499997	0,499997	0,499997	0,499997	0,499997	0,499998	0,499998	0,499998
4,6	0,499998	0,499998	0,499998	0,499998	0,499998	0,499998	0,499998	0,499998	0,499999	0,499999

Критические точки распределения χ^2 (Пирсона)

	0,001	0,005	0,01	0,025	0,05	0,1	0,2	0,3
1	10,83	7,879	6,635	5,024	3,841	2,706	1,642	1,074
2	13,82	10,60	9,210	7,378	5,991	4,605	3,219	2,408
3	16,27	12,84	11,34	9,348	7,815	6,251	4,642	3,665
4	18,47	14,86	13,28	11,14	9,488	7,779	5,989	4,878
5	20,51	16,75	15,09	12,83	11,07	9,24	7,29	6,06
6	22,46	18,55	16,81	14,45	12,59	10,64	8,56	7,23
7	24,32	20,28	18,48	16,01	14,07	12,02	9,80	8,38
8	26,12	21,95	20,09	17,53	15,51	13,36	11,03	9,52
9	27,88	23,59	21,67	19,02	16,92	14,68	12,24	10,66
10	29,59	25,19	23,21	20,48	18,31	15,99	13,44	11,78
11	31,26	26,76	24,73	21,92	19,68	17,28	14,63	12,90
12	32,91	28,30	26,22	23,34	21,03	18,55	15,81	14,01
13	34,53	29,82	27,69	24,74	22,36	19,81	16,98	15,12
14	36,12	31,32	29,14	26,12	23,68	21,06	18,15	16,22
15	37,70	32,80	30,58	27,49	25,00	22,31	19,31	17,32
16	39,25	34,27	32,00	28,85	26,30	23,54	20,47	18,42
17	40,79	35,72	33,41	30,19	27,59	24,77	21,61	19,51
18	42,31	37,16	34,81	31,53	28,87	25,99	22,76	20,60
19	43,82	38,58	36,19	32,85	30,14	27,20	23,90	21,69
20	45,31	40,00	37,57	34,17	31,41	28,41	25,04	22,77
21	46,80	41,40	38,93	35,48	32,67	29,62	26,17	23,86
22	48,27	42,80	40,29	36,78	33,92	30,81	27,30	24,94
23	49,73	44,18	41,64	38,08	35,17	32,01	28,43	26,02
24	51,18	45,56	42,98	39,36	36,42	33,20	29,55	27,10
25	52,62	46,93	44,31	40,65	37,65	34,38	30,68	28,17
26	54,05	48,29	45,64	41,92	38,89	35,56	31,79	29,25
27	55,48	49,65	46,96	43,19	40,11	36,74	32,91	30,32
28	56,89	50,99	48,28	44,46	41,34	37,92	34,03	31,39
29	58,30	52,34	49,59	45,72	42,56	39,09	35,14	32,46
30	59,70	53,67	50,89	46,98	43,77	40,26	36,25	33,53

0,7	0,8	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995	0,999
0,148	0,064	0,016	0,004	0,001	1,571E-04	3,927E-05	1,570E-06
0,713	0,446	0,211	0,103	0,051	0,020	0,010	0,002
1,424	1,005	0,584	0,352	0,216	0,115	0,072	0,024
2,195	1,649	1,064	0,711	0,484	0,297	0,207	0,091
3,000	2,343	1,610	1,145	0,831	0,554	0,412	0,210
3,828	3,070	2,204	1,635	1,237	0,872	0,676	0,381
4,671	3,822	2,833	2,167	1,690	1,239	0,989	0,599
5,527	4,594	3,490	2,733	2,180	1,647	1,344	0,857
6,393	5,380	4,168	3,325	2,700	2,088	1,735	1,152
7,267	6,179	4,865	3,940	3,247	2,558	2,156	1,479
8,148	6,989	5,578	4,575	3,816	3,053	2,603	1,834
9,034	7,807	6,304	5,226	4,404	3,571	3,074	2,214
9,926	8,634	7,041	5,892	5,009	4,107	3,565	2,617
10,82	9,467	7,790	6,571	5,629	4,660	4,075	3,041
11,72	10,31	8,547	7,261	6,262	5,229	4,601	3,483
12,62	11,15	9,312	7,962	6,908	5,812	5,142	3,942
13,53	12,00	10,09	8,672	7,564	6,408	5,697	4,416
14,44	12,86	10,86	9,390	8,231	7,015	6,265	4,905
15,35	13,72	11,65	10,12	8,907	7,633	6,844	5,407
16,27	14,58	12,44	10,85	9,591	8,260	7,434	5,921
17,18	15,44	13,24	11,59	10,28	8,897	8,034	6,447
18,10	16,31	14,04	12,34	10,98	9,542	8,643	6,983
19,02	17,19	14,85	13,09	11,69	10,20	9,260	7,529
19,94	18,06	15,66	13,85	12,40	10,86	9,886	8,085
20,87	18,94	16,47	14,61	13,12	11,52	10,52	8,649
21,79	19,82	17,29	15,38	13,84	12,20	11,16	9,222
22,72	20,70	18,11	16,15	14,57	12,88	11,81	9,803
23,65	21,59	18,94	16,93	15,31	13,56	12,46	10,39
24,58	22,48	19,77	17,71	16,05	14,26	13,12	10,99
25,51	23,36	20,60	18,49	16,79	14,95	13,79	11,59

	0,001	0,005	0,01	0,025	0,05	0,1	0,2	0,3
35	66,62	60,27	57,34	53,20	49,80	46,06	41,78	38,86
40	73,40	66,77	63,69	59,34	55,76	51,81	47,27	44,16
45	80,08	73,17	69,96	65,41	61,66	57,51	52,73	49,45
50	86,66	79,49	76,15	71,42	67,50	63,17	58,16	54,72
55	93,17	85,75	82,29	77,38	73,31	68,80	63,58	59,98
60	99,61	91,95	88,38	83,30	79,08	74,40	68,97	65,23
65	105,99	98,10	94,42	89,18	84,82	79,97	74,35	70,46
70	112,32	104,21	100,43	95,02	90,53	85,53	79,71	75,69
75	118,60	110,29	106,39	100,84	96,22	91,06	85,07	80,91
80	124,84	116,32	112,33	106,63	101,88	96,58	90,41	86,12
85	131,04	122,32	118,24	112,39	107,52	102,08	95,73	91,32
90	137,21	128,30	124,12	118,14	113,15	107,57	101,05	96,52
95	143,34	134,25	129,97	123,86	118,75	113,04	106,36	101,72
100	149,45	140,17	135,81	129,56	124,34	118,50	111,67	106,91

Условные обозначения

$\subset$ — включение;
$\in$ — принадлежность элемента к множеству;
$\notin$ — непринадлежность элемента к множеству;
$\cup$ — объединение множеств;
$\cap$ — пересечение множеств;
$\sum$ — суммирование;
$\exists$ — квантор существования;
$|a|$ — абсолютное значение (модуль) числа a;
$=$ — равно;
$\approx$ — приближенно равно;
$>$ — больше;
$<$ — меньше;
$\sqrt{\ }$ — корень квадратный;
$\sqrt[n]{\ }$ — корень n-й степени;
$\Rightarrow$ — следовательно;
$\Leftrightarrow$ — равносильно, тогда и только тогда, когда;
$\{a_n\}$ — последовательность;
Δf — приращение функции f;

Окончание прил. 2

0,7	0,8	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995	0,999
30,18	27,84	24,80	22,47	20,57	18,51	17,19	14,69
34,87	32,34	29,05	26,51	24,43	22,16	20,71	17,92
39,58	36,88	33,35	30,61	28,37	25,90	24,31	21,25
44,31	41,45	37,69	34,76	32,36	29,71	27,99	24,67
49,06	46,04	42,06	38,96	36,40	33,57	31,73	28,17
53,81	50,64	46,46	43,19	40,48	37,48	35,53	31,74
58,57	55,26	50,88	47,45	44,60	41,44	39,38	35,36
63,35	59,90	55,33	51,74	48,76	45,44	43,28	39,4
68,13	64,55	59,79	56,05	52,94	49,48	47,21	42,76
72,92	69,21	64,28	60,39	57,15	53,54	51,17	46,52
77,71	73,88	68,78	64,75	61,39	57,63	55,17	50,32
82,51	78,56	73,29	69,13	65,65	61,75	59,20	54,16
87,32	83,25	77,82	73,52	69,92	65,90	63,25	58,02
92,13	87,95	82,36	77,93	74,22	70,06	67,33	61,92

Приложение 3

df — дифференциал функции f;

$f'(x)$ — производная функции f в точке x;

$\int f(x)dx$ — множество первообразных, или неопределенный интеграл функции f;

$\int_a^b f(x)dx$ — определенный интеграл функции f от a до b;

$\bar{a}$ — отрицание a;

$\wedge$ — конъюнкция;

$\vee$ — дизъюнкция;

$\varnothing$ — пустое множество;

A_n^m — число размещений из n по m;

C_n^m — число сочетаний из n по m;

P_n — число перестановок из n элементов;

$\mathbf{N}$ — множество натуральных чисел;

$\mathbf{Z}$ — множество целых чисел;

$\mathbf{Q}$ — множество рациональных чисел;

$\mathbf{R}$ — множество действительных чисел;

$\mathbf{C}$ — множество комплексных чисел.

Оглавление

Учебное издание

Григорьев Сергей Георгиевич,
Иволгина Светлана Витальевна

Математика

Учебник

Изд. № 111106080. Подписано в печать 28.05.2015. Формат 60×90/16.
Бумага офс. № 1. Гарнитура «Школьная». Печать офсетная. Усл. печ. л. 26,0.
Тираж 3000 экз. Заказ № 7915

ООО «Издательский центр «Академия». www.academia-moscow.ru
129085, Москва, пр-т Мира, 101В, стр. 1.
Тел./факс: (495) 648-0507, 616-00-29.
Санитарно-эпидемиологическое заключение № РОСС RU. AE51. H 16679 от 25.05.2015.

Отпечатано с электронных носителей издательства.
ОАО «Тверской полиграфический комбинат», 170024, г. Тверь, пр-т Ленина, 5.
Телефон: (4822) 44-52-03, 44-50-34. Телефон/факс: (4822) 44-42-15.
Home page — www.tverpk.ru Электронная почта (E-mail) — sales@tverpk.ru